

М.Л. ГЕРМАН, канд. физ.-мат. наук, С.В. КОРНЕЕВ,
И.В. ФАЙН, канд. физ.-мат. наук (ИТМО НАН Беларуси)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ НАГРЕВЕ СТАЛЬНЫХ ЗАГОТОВОК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Нагрев стальных заготовок в печах может сопровождаться явлениями, которые неблагоприятно сказываются на качестве готовой продукции. К таким явлениям можно отнести окалинообразование и возникновение температурных напряжений. В результате нагрева стальных заготовок возникают деформации, вызванные эффектом линейного расширения твердых тел. Хотя эти деформации весьма малы (порядка 10^{-5} м на градус нагрева), возникающие при этом напряжения могут оказаться весьма большими, в некоторых случаях превосходящими предел текучести σ_T материала изделия, что может привести к необратимым изменениям его формы и, соответственно, потере качества продукции. При форсированном режиме нагрева температурные перепады по сечению в начале нагрева довольно значительны, напряжения могут превысить предел прочности стали, а следовательно, в заготовке будут возникать трещины. Необходимо отметить, что возникающие при нагреве температурные напряжения будут суммироваться с остаточными напряжениями, возникающими на этапе затвердевания и охлаждения заготовки. На величину температурных напряжений значительное влияние оказывает также неравномерность нагрева. Например, в работах [1, 2] на основании теоретических и экспериментальных исследований показана вероятность нарушения сплошности заготовок при их перемещении в методической печи под воздействием температуры и водоохлаждаемых рейтеров шагающих балок. Кроме того, при несимметричном нагреве возможны недопустимые деформации заготовки, которые отрицательно сказываются на дальнейшей технологии обработки, а следовательно, и на качестве готовой продукции.

Проблема определения термических напряжений при высокотемпературном нагреве не является новой, но до недавнего времени определение напряжений при нагреве имело оценочный характер. Сложность определения напряжений заключается как в несовершенстве методов расчета, так и в малой изученности теплофизических свойств, особенно термомеханических свойств конкретных марок сталей при высоких температурах. При этом в данном случае физическая модель процесса является определяющей в отношении точности получаемого результата, так как часто имеет значительные упрощения. Поэтому кроме наличия, например, та-

ких зависимостей теплофизических характеристик от температуры, как коэффициент теплопроводности и теплоемкость стали, для расчета напряжений необходимо иметь такие термомеханические характеристики в зависимости от температуры, как предел прочности, модуль упругости, коэффициент линейного расширения. Важно также знать термомеханические свойства сталей в областях температур, соответствующих фазовым переходам, при которых изменяется структура стали.

Для определения напряжений в заготовках при их нагреве в печах в настоящее время применяют как аналитические [3], так и численные методы. При этом исследование термонапряженного состояния сводится к предварительному решению задачи теплопроводности, а затем уже определяется напряженное состояние через полученную температурную функцию. Следует отметить, что точные аналитические решения не применяют ввиду сложности и нелинейности физических процессов, так как точные решения задач теплопроводности имеют вид сложных и громоздких выражений, мало пригодных как для анализа, так и для практических расчетов. Кроме того, для задач высокотемпературного нагрева при сложном теплообмене в нагревательных печах еще не получены точные решения. Недостатком существующих приближенных аналитических методов, несмотря на ряд их преимуществ по сравнению с численными методами, является сложность учета различного рода нелинейностей и не всегда приемлемая точность во всем диапазоне температур нагрева.

Тепловую задачу и задачу упругопластичности удобнее решать совместно, поэтому наиболее подходящим методом для расчета температурных напряжений является метод конечных элементов (МКЭ), в котором получаемое температурное поле в заготовке непосредственно используется в качестве исходных данных задачи упругопластичности. Этот подход применен, например, в работах [4 – 6]. Особенности использования МКЭ для решения тепловой задачи указаны в работе [7]. Кроме того, МКЭ может применяться для расчета напряжений заготовок произвольного сечения. В практике исследования напряженного состояния объектов могут применяться и другие численные методы [8], однако МКЭ зарекомендовал себя как очень эффективный метод при использовании его для расчета напряжений в различных машиностроительных конструкциях, а также в расчетах гидрогазодинамики.

Промышленные коммерческие программные комплексы с использованием МКЭ в настоящее время представлены такими пакетами, как ANSYS, NASTRAN, COSMOS, FINEL, MARC, ПИОНЕР, ЛИРА и др. Однако их использование для расчетов помимо высокой стоимости программного продукта имеет не-

достатки – невозможность модификации программной среды, а также усредненность методов, направленную на универсальность пакета. При этом, например, некоторые подходы, вполне приемлемые в области машиностроения, могут оказаться не приемлемыми для расчета нагрева в рабочем пространстве высокотемпературной печи и вычисления термических напряжений. Поэтому для конкретной области применения удобнее иметь собственный специализированный программный продукт. Его можно относительно легко настроить на решение конкретных специфических задач, и процесс модификации программы существенно проще.

Суть МКЭ заключается в том, что непрерывная величина (температура, перемещение, напряжение) аппроксимируется дискретной моделью, построение которой выполняется на множестве кусочно-непрерывных функций, определенных на конечном числе подобластей, которые называют элементами [9, 10].

В настоящее время метод часто используется для получения численных решений задач высокотемпературной передачи теплоты. Наиболее часто МКЭ применяется в стандартной формулировке Галеркина [11, 12].

Как указывалось, задача определения напряжений и деформаций, возникающих при нагреве металлических изделий, вообще говоря, технически довольно трудоемка. В общем трехмерном случае даже для изотропного твердого тела необходимо решить систему из пятнадцати уравнений, три из которых являются уравнениями равновесия, шесть других определяют связь деформаций и напряжений (обобщенный закон Гука) и еще шесть являются условиями совместности, накладываемыми на деформации. В случае нагрева длинных заготовок постоянного сечения появляется возможность использовать принцип Сен-Венана, согласно которому вдали от концевых границ длинномерных тел достаточно исследовать напряжения в плоскости сечения.

В дальнейшем будем рассматривать только двухмерные задачи термоупругости. Простейшей такой задачей является исследование термоупругости в рамках модели плоского деформированного состояния (ПДС). В рамках этой модели задача определения напряжений разбивается на две подзадачи:

1) определение напряжений в сечении σ_{xx} , σ_{xy} и σ_{yy} по уравнениям, которые для двухмерного случая упрощаются к следующему виду:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1-2\nu)} (\delta \varepsilon_{xx} + \gamma \varepsilon_{yy} - \alpha T); \sigma_{yy} = \frac{E}{(1-2\nu)} (\delta \varepsilon_{yy} + \gamma \varepsilon_{xx} - \alpha T); \sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy}; \quad (2)$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3)$$

(здесь $\delta = \frac{1+\nu}{1-\nu}$, $\gamma = \frac{\nu}{1-\nu}$, ε_{xx} , ε_{xy} , ε_{yy} – компоненты тензора деформации; u , v – компоненты вектора перемещения; E , ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона; T – температура; α – коэффициент линейного расширения);

2) вычисление напряжений $\sigma_{zz}(x, y)$ согласно формуле

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - E\alpha T. \quad (4)$$

В практически важном случае свободного объекта силы отсутствуют на всей его поверхности, в том числе и на торцовых концах изделия. При этом условие плоскодеформированного состояния не выполняется, так как для последнего напряжение σ_{zz} не зависит от координаты z и, вообще говоря, не равно нулю.

Однако имеется очень важный частный случай такой задачи, когда масштаб изделия по оси z значительно превышает масштаб в плоскости (x, y) . В этом случае все напряжения в плоскости оказываются равными напряжениям для плоскодеформированного состояния, т.е. находятся из соотношения (4) с учетом решения задачи (1) – (3), а напряжение σ_{zz} достаточно далеко от торцовых границ оценивается по формуле [9]

$$\sigma_{zz} = \varphi(x, y) - \frac{\int_{\Omega} \varphi ds}{\int_{\Omega} ds} - \frac{\int_{\Omega} x \varphi ds}{\int_{\Omega} x^2 ds} x - \frac{\int_{\Omega} y \varphi ds}{\int_{\Omega} y^2 ds} y,$$

где $\varphi(x, y)$ – решение задачи (1) – (4) для напряжения σ_{zz} при плоскодеформированном состоянии. Интегрирование проводится по сечению Ω , а оси x , y соответствуют главным моментам инерции в плоскости сечения.

Методом наименьших квадратов найдем плоскость, оптимальным образом аппроксимирующую решение $\varphi(x, y)$. Тогда искомое напряжение равно напряжению для плоскодеформированного состояния $\varphi(x, y)$ за вычетом главной линейной части. Смысл этого вычитания становится понятным, если принять во внимание, что в отсутствие внешних сил линейный профиль температур не создает напряжений.

Решение задачи (1) – (3) будем искать с помощью МКЭ, применяя принцип виртуальной работы к уравнениям, выраженным в терминах перемещений [13]. При этом что очень важно, в случае свободных границ не требуется никаких дополнительных граничных условий.

Пусть вся область сечения состоит из треугольных элементов ε . Каждый элемент характеризуется перемещениями трех его вершин i, j, m , т.е. шестью величинами. Перемещения внутри элемента (u, v) являются линейными функциями координат:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = N\{\delta\}^e = \{IN'_i, IN'_j, IN'_m\} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix},$$

где I – единичная матрица размерами 2×2 ; $N(x, y) = a + b x + c y$ – линейные функции формы, а векторы перемещений в узлах имеют

$$\text{вид } \delta_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}.$$

Применяя принцип виртуальной работы, получаем следующую систему уравнений для нахождения n неизвестных векторов –

перемещений в узлах $\delta_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$:

$$K\{\delta\} = B^T D\{\varepsilon_0\}. \quad (5)$$

Здесь вектор начальной деформации $\{\varepsilon_0\} = (1 + \nu) \begin{bmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \end{bmatrix}$, где матрица

жесткости K является суммой матриц жесткости отдельных матриц k^e размерами 6×6 и определяется выражением

$$k^e = B^T D B \Delta, \quad (6)$$

где Δ – площадь треугольника, а квадратная матрица D размерами 3×3 отражает закон Гука и имеет вид

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

а прямоугольная матрица B размерами 6×3 определяется производными функции формы:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_m}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_m}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_m}{\partial y} & \frac{\partial N_m}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Решение системы уравнений (5) с учетом выражений (6) – (8) представляет определенные трудности, возникающие при решении практических проблем: количество элементов, а следовательно, и порядок системы могут быть весьма высокими. Однако положительный характер матрицы жесткости позволяет использовать специальные средства для решения линейных систем, что значительно экономит машинную память и уменьшает время счета. В данной работе для решения системы (5) использовался модифицированный метод Гаусса для полосовых матриц [13].

Для оценки точности представленного метода рассмотрим частный случай симметричного нагрева однородного стержня, аналитическое решение которого известно. Оно явно находится в виде интегралов от текущего распределения температур $T(r)$ [14].

Если нагрев осуществляется сравнительно медленно, так что время нагрева много больше характерного времени распространения теплоты $\left(\tau \gg \tau_0 = \frac{R^2 \rho c}{\lambda} \right)$, то радиальный профиль температуры будет параболическим:

$$T(r) = T_0 + \gamma r^2,$$

где $\gamma = \frac{\Delta T}{R^2} = \frac{1}{2} \frac{\varphi}{\lambda R}$; ΔT – разность температур между поверхностью цилиндра и его центром; φ – поток теплоты на границе, связанный с темпом нагрева цилиндра соотношением $\frac{dT}{dt} = \frac{2\varphi}{\rho c R}$.

Температурные напряжения:

$$\sigma_{rr} = \sigma_0(1 - a^2); \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_0(1 - 3a^2); \quad \sigma_{zz} = \sigma_0(2 - 4a^2), \quad (9)$$

где $\sigma_0 = \frac{1}{4} \frac{E}{1-\nu} \alpha \Delta T$; $a = r/R$.

Как следует из (9), максимальными являются напряжения сжатия σ_{zz} и $\sigma_{\varphi\varphi}$ на поверхности цилиндра, а также напряжение рас-

тяжения σ_{zz} на оси цилиндра. Все эти три максимальных напряжения по модулю одинаковы и составляют

$$|\sigma_{\max}| = \frac{1}{2} \frac{\alpha E}{1-\nu} \Delta T = 2\sigma_0.$$

Напряжения вдоль радиусов σ_{rr} всегда являются напряжениями растяжения, и они по крайней мере вдвое меньше σ_{\max} .

Для сопоставления численной модели и аналитического решения был проведен ряд числовых расчетов методом конечных элементов при различном количестве разбиений сечения. На рис. 1 показан один из вариантов такого сопоставления при количестве элементов в сечении, равном 634 (число вершин составило 345, средний размер стороны треугольника – около 0,05R).

Видно, что даже при таком, относительно грубом, разбиении МКЭ дает удовлетворительные результаты, пригодные для практического применения.

Чтобы оценить практическую сходимость МКЭ, были рассчитаны ошибки метода, которые определялись как среднеквадратичное отклонение результатов от теоретических значений в процентах от значения σ_0 . В табл. 1 приведены результаты расчетов в зависимости от числа элементов.

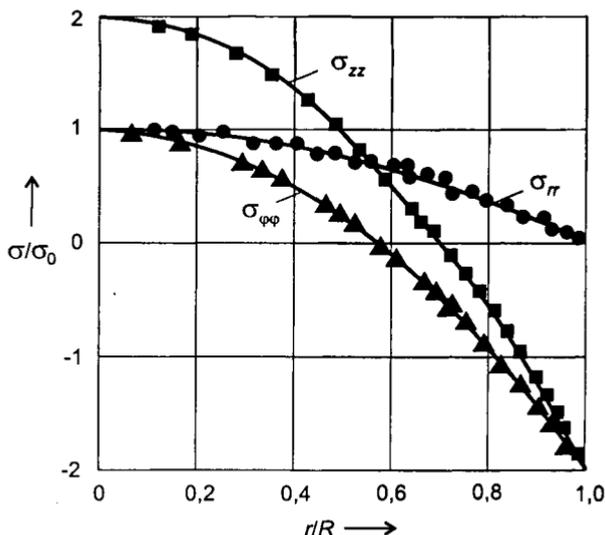


Рис. 1. Сопоставление численного и точного аналитического решений:

• – радиальные напряжения σ_{rr} ; ▲ – тангенциальные напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}$; ■ – осевые напряжения σ_{zz} ; — — аналитическое решение

Зависимость точности расчетов МКЭ от количества узлов

Номер рас- чета	Число узлов	Число эле- ментов	Ошибка σ_{rr} , %	Ошибка $\sigma_{\varphi r}$, %	Ошибка σ_{zz} , %
1	95	160	9,6	7,5	1,2
2	345	634	4,8	3,9	0,5
3	1313	2522	2,3	1,9	0,2

Из таблицы видно, что ошибка вычислений меняется примерно обратно пропорционально корню квадратному из числа узлов, т.е. пропорционально среднему размеру элемента. Ошибка в вычислении осевых напряжений значительно ниже, чем для радиальных и тангенциальных напряжений. В целом МКЭ дает существенно лучшие результаты по сравнению с инженерным «методом плоских сечений», который полагает коэффициент Пуассона равным нулю и дает заниженные на значение множителя $1/(1 - \nu)$ результаты, что может составлять несколько десятков процентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Закономерности образования трещин в сортовых заготовках при нагреве в печах с шагающими балками / В.И. Тимошпольский [и др.] // Сталь. 2004. № 7. С. 49 – 52.
2. Расчеты нагрева непрерывнолитых заготовок в печи с шагающими балками с учетом подхолаживания нижней части заготовок / Ю.А. Самойлович [и др.] // Литье и металлургия. 2003. № 3. С. 146 – 150.
3. Температурные напряжения в цилиндрической заготовке при нагреве в кольцевых печах / Ю.С. Постольник [и др.] // Литье и металлургия. 2003. № 4. С. 46 – 49.
4. Дыяк, И.И. Расчет термонапряжений в осесимметричных телах на основе метода конечных элементов / И.И. Дыяк, Я.Г. Савула, Г.А. Шинкаренко // Вісник Львівського національного університету ім. Івана Франка. Сер. механіко-математична. 1982. Вип. 19. С. 48 – 53.
5. Дыяк, И.И. Реализация высокоточных схем метода конечных элементов для задач нестационарной теплопроводности / И.И. Дыяк // Вісник Львівського національного університету ім. Івана Франка. Сер. механіко-математична. 1982. Вип. 19. С. 64 – 67.
6. Выбор рационального режима нагрева непрерывнолитых заготовок в печи с шагающими балками / В.И. Тимошпольский [и др.] // Сталь. 2003. № 11. С. 53 – 57.
7. Расчеты нагрева и охлаждения стальных изделий с использованием метода конечных элементов (теоретические основы) / В.И. Тимошпольский [и др.] // Металлургия. 2003. Вып. 27. С. 16 – 24.
8. Победря, Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности / Б.Е. Победря. М.: изд-во МГУ, 1995. 366 с.
9. Miranda, S. On the consistency of finite element models / S. Miranda, F. Ubertini // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2001. № 190. P. 2411 – 2422.

10. *Cannarozzi, A.* A mixed variational method for linear coupled thermoelastic analysis / A. Cannarozzi, F. Ubertini // International Journal of Solids and Structures. 2001. № 38. P. 717 – 739.

11. *Bathe, K.J.* The inf-sup condition and its evaluation for mixed finite element methods / K.J. Bathe // Computers & Structures. 79. 2001. P. 243 – 252.

12. *Arnold, D.N.* Mixed finite element methods for elliptic problems / D.N. Arnold // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 1990. № 82. P. 281 – 300.

13. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. М.: Мир, 1975. 343 с.

14. *Боли, Б.* Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. М.: Мир, 1964. 520 с.

УДК 621.927/66Т9.2

Е.Б. ЛОЖЕЧНИКОВ, д-р техн. наук, А.К. ГАВРИЛЕНЯ (БНТУ),
С.В. ЛАСАНКИН (ООО «Ордком»)

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ РАЗМОЛА ШЛАКОВ И КОМПАКТИРОВАНИЯ ИЗВЛЕКАЕМЫХ ИЗ НИХ МЕТАЛЛОВ

Металлургическое производство сопровождается образованием большого количества шлаков, лишь частично перерабатываемых (в основном в строительные материалы) с извлечением из них основных и сопутствующих металлов. Значительная часть шлаков складывается в накопительных отвалах. Объем накопленных в странах СНГ шлаков только медеплавильных производств составляет около 12,4 млн т [1, 2]. Шлаки медеплавильного производства представляют собой смесь металлической и неметаллической составляющих. Металлическая составляющая представляет собой «корольки», размеры которых варьируются в диапазоне 0,1...30 мм. Химический состав корольков разнообразен и зависит от технологии выплавки и марки выплавляемого сплава. Неметаллическая составляющая представлена соединениями кремния, алюминия, железа, кальция и др. [1 – 3].

Процентное содержание металлической фракции в металлургических шлаках определяется технологией разлива и составом шлака. Так, при производстве бронзовых сплавов содержание металла в шлаках может достигать 30% в весовом соотношении. Такое содержание сплава в шлаке делает особенно актуальной задачу его извлечения и возвращения в производство.

Объемы образования в Беларуси медьсодержащих шлаков сравнительно небольшие. Однако в условиях постоянного роста цен на цветные металлы задача возвращения в производство металлов из отходов стоит особенно остро. Традиционные технологии извлечения металла из шлаков достаточно трудоемкие. Осо-