

МЕТОДЫ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ ПРОКАТКЕ ПРОФИЛЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Общая тенденция развития методов моделирования процессов обработки металлов давлением (ОМД) заключается в том, что в течение всего периода развития наблюдается постепенное повышение точности моделирования за счет отказа от множества упрощающих допущений, которые во многих случаях понижают точность решения задач.

Так, при моделировании с использованием метода Ритца общепринятым было использование модели жесткопластической несжимаемой среды, гипотезы плоских сечений, а также отсутствие учета изменяющегося температурного поля.

С появлением метода конечных элементов появилась возможность отказаться от использования всех вышеперечисленных упрощающих допущений. Однако специфика этого метода привела к необходимости использования допущения о несжимаемости обрабатываемого материала. Решение данной проблемы возможно разными путями. Два подхода к решению хорошо описаны в работе [1]. Применение этих подходов позволило решить многие задачи из области прессования [2],ковки [3], прокатки простых и некоторых сложных профилей [4, 5].

Вместе с тем вызывает значительный интерес решение данной задачи не приближенными методами, а точным. Выгоды такого подхода очевидны, так как в этом случае практически единственной проблемой при решении задач сложного деформирования останется правильный учет трения на контакте металла с инструментом. В этом случае решение задачи сводится к минимизации обычного функционала Лагранжа, определяющего полную мощность деформирования, с добавлением интегрального слагаемого, гарантирующего выполнение условия непроницаемости:

$$I = \frac{1}{2} \int_V \mu H^2 dV - \int_S \sigma_\tau v_\tau dS + t \int_S (v_n - w_n)^2 dS = 0, \quad (1)$$

где μ — условная вязкость металла; V — объем деформируемого тела; σ_τ , v_τ — полное напряжение трения и скорость скольжения металла по инструменту; t — штрафной коэффициент на невыполнение условия непроницаемости; v_n — проекция скорости течения металла в данной точке контактной поверхности на нормаль к поверхности в этой точке; w_n — проекция скорости движения инструмента на нормаль к поверхности контакта в данной точке.

Для решения задачи необходимо заложить условие несжимаемости в сам конечный элемент. Для простоты и наглядности решения приведем выкладки в глобальной декартовой системе координат x, y, z .

При конечно-элементной интерполяции поля скоростей по элементу выражения для скоростей V и W в направлении осей y и z записываются следующим образом:

$$V_k = N_{i_k} V_{i_k}; \quad W_k = N_{i_k} W_{i_k}, \quad (2)$$

где k – номер элемента; i – номер узла в элементе; N_{i_k} – функция формы конечного элемента в глобальной декартовой системе координат; V_{i_k}, W_{i_k} – искомые узловые скорости.

Условие несжимаемости в аналитическом виде имеет вид

$$\xi_{x_k} + \xi_{y_k} + \xi_{z_k} = 0. \quad (3)$$

Составляющие уравнения (3) определяются дифференцированием выражений (2):

$$\xi_{y_k} = \frac{\partial V_k}{\partial y} = \left(\frac{\partial N_{i_k}}{\partial y} \right) V_{i_k}; \quad \xi_{z_k} = \frac{\partial W_k}{\partial z} = \left(\frac{\partial N_{i_k}}{\partial z} \right) W_{i_k}.$$

Тогда

$$\xi_{x_k} = - \int (\xi_{y_k} + \xi_{z_k}) dx,$$

а

$$U_k = \int \xi_{x_k} dx + C = - \int (\xi_{y_k} + \xi_{z_k}) dx + C,$$

или в развернутом виде

$$U_k = - \int \left[\left(\frac{\partial N_{i_k}}{\partial y} \right) V_{i_k} + \left(\frac{\partial N_{i_k}}{\partial z} \right) W_{i_k} \right] dx + C,$$

где C – постоянная интегрирования, определяемая из граничного условия на торце профиля.

Для того чтобы понять, каким образом определяется постоянная интегрирования C , рассмотрим конечный элемент, приведенный на рис. 1.

На рисунке обозначения $S_{x_{k1}}$ и $S_{x_{k2}}$ соответствуют уравнениям поверхностей элемента k с узлами 1, 4, 8, 5 и 2, 3, 7, 6 соответственно.

В постановке задачи принято, что используется сетка конечных элементов, состоящая из прямоугольных призм, которые в направлении оси x (направление прокатки) стыкуются друг с другом плоскостями $S_{x_{k1}}$ и $S_{x_{k2}}$. Тогда граничное условие для элемента запишется так:

$$U_k = U_{k_{1485}} \quad \text{при} \quad x = S_{x_{k1}}.$$

После определения постоянной интегрирования получим выражение для определения U_k :

$$U_k = U_{k_{1485}} + \left[\int (\xi_{y_k} + \xi_{z_k}) dx \right]_{x=S_{x_{k1}}} - \int (\xi_{y_k} + \xi_{z_k}) dx.$$

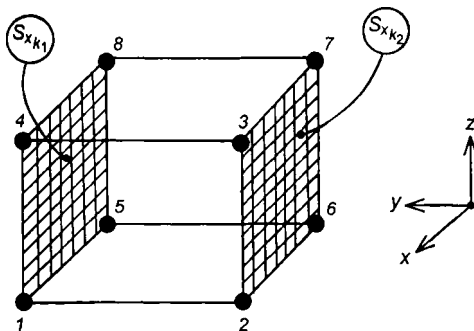


Рис. 1. Схема конечного элемента

Введем обозначение $R_k = \left[\int (\xi_{y_k} + \xi_{z_k}) dx \right]_{x=S_{x_{k1}}} - \int (\xi_{y_k} + \xi_{z_k}) dx$.

Для более глубокого понимания процедуры сшивания элементов по компоненте U рассмотрим пример, в котором проследим эту процедуру на четырех элементах (рис. 2).

В нашем случае скорость

$$U_{k_{1485}} = N_{h_k} \Big|_{x=S_{x_{k1}}} U_{h_k},$$

где $h = 1, 4, 8, 5$. Тогда

$$U_1 = U_{1_{1485}} + R_1; \quad U_2 = U_{2_{1485}} + R_2; \quad U_3 = U_{3_{1485}} + R_3; \quad U_4 = U_{4_{1485}} + R_4.$$

Для второго элемента

$$U_2 = U_{1_{1485}} + R_1 \Big|_{x=S_{x_{12}}} + R_2.$$

Аналогично для третьего элемента

$$U_3 = U_{1_{1485}} + R_1 \Big|_{x=S_{x_{12}}} + R_2 \Big|_{x=S_{x_{22}}} + R_3.$$

Для четвертого элемента

$$U_4 = U_{1_{1485}} + R_1 \Big|_{x=S_{x_{12}}} + R_2 \Big|_{x=S_{x_{22}}} + R_3 \Big|_{x=S_{x_{32}}} + R_4.$$

Обобщенное выражение для скорости U в индексной форме для неограниченного количества элементов запишется так:

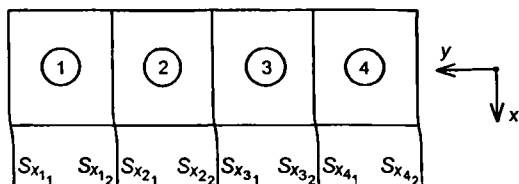


Рис. 2. Расчетная схема

$$U_k = U_{1485} + \sum_{m=1}^{S-1} R_m \Big|_{x=S_{x_{m2}}} + R_k$$

или

$$U_k = N_{h_k} \Big|_{x=S_{x_{k1}}} U_{h_k} + \sum_{m=1}^{S-1} R_m \Big|_{x=S_{x_{m2}}} + R_k, \quad (4)$$

где S — количество элементов в столбце (в нашем примере используется один столбец из четырех элементов, поэтому $S - 1 = 3$), т. е. S — это порядковый номер элемента в столбце.

Необходимо пояснить, что мы понимаем под столбцом элементов. Если представить поперечное сечение заготовки, разбитое на конечные элементы четырехугольной формы, то это сечение будет основанием каждого столбца элементов. Затем, формируя трехмерную сетку конечных элементов наращиванием предыдущего слоя следующим слоем, мы получим тело, состоящее из столбцов элементов, связанных друг с другом в узлах.

Теперь имеется возможность определения всех оставшихся компонент тензора скоростей деформации:

$$\gamma_{xy_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_k}{\partial y} + \frac{\partial V_k}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial N_{h_k} \Big|_{x=S_{x_{k1}}}}{\partial y} \right) U_{h_k} + \left(\sum_{m=1}^{S-1} \frac{\partial R_m \Big|_{x=S_{x_{m2}}}}{\partial y} \right) + \frac{\partial R_k}{\partial y} + \left(\frac{\partial N_{i_k}}{\partial x} \right) V_{i_k} \right];$$

$$\gamma_{yz_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_k}{\partial z} + \frac{\partial W_k}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial N_{i_k}}{\partial z} \right) V_{i_k} + \left(\frac{\partial N_{i_k}}{\partial y} \right) W_{i_k} \right];$$

$$\gamma_{zx_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_k}{\partial z} + \frac{\partial W_k}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial N_{h_k} \Big|_{x=S_{x_{k1}}}}{\partial z} \right) U_{h_k} + \left(\sum_{m=1}^{S-1} \frac{\partial R_m \Big|_{x=S_{x_{m2}}}}{\partial z} \right) + \frac{\partial R_k}{\partial z} + \left(\frac{\partial N_{i_k}}{\partial x} \right) W_{i_k} \right].$$

Таким образом, определены все составляющие поля скоростей и тензора скоростей деформации, необходимые для решения задачи по определению напряженно-деформированного состояния при прокатке профиля любой сложности. В данном случае получено трехмерное поле скоростей, которое удовлетворяет условию несжимаемости абсолютное точно, так как это условие заложено в конечный элемент строго аналитически. Кроме того, мы практически свели задачу определения трехмерного поля скоростей (определение компонент U_{i_k} , V_{i_k} , W_{i_k}) в каждом элементе к задаче нахождения только компонент V_{i_k} , W_{i_k} для всех конечных элементов и компонент U_{h_k} для элементов, образующих задний торец заготовки. Оставшиеся компоненты U_{i_k} определяются с использованием выражения (4) по известным из решения компонентам V_{i_k} и W_{i_k} .

Недостаток этого подхода заключается в том, что алгоритм формирования глобальной матрицы жесткости значительно усложняется по сравнению с обычным методом конечных элементов. Увеличивается и количество выкладок, связанных с получением функций форм в глобальных де-

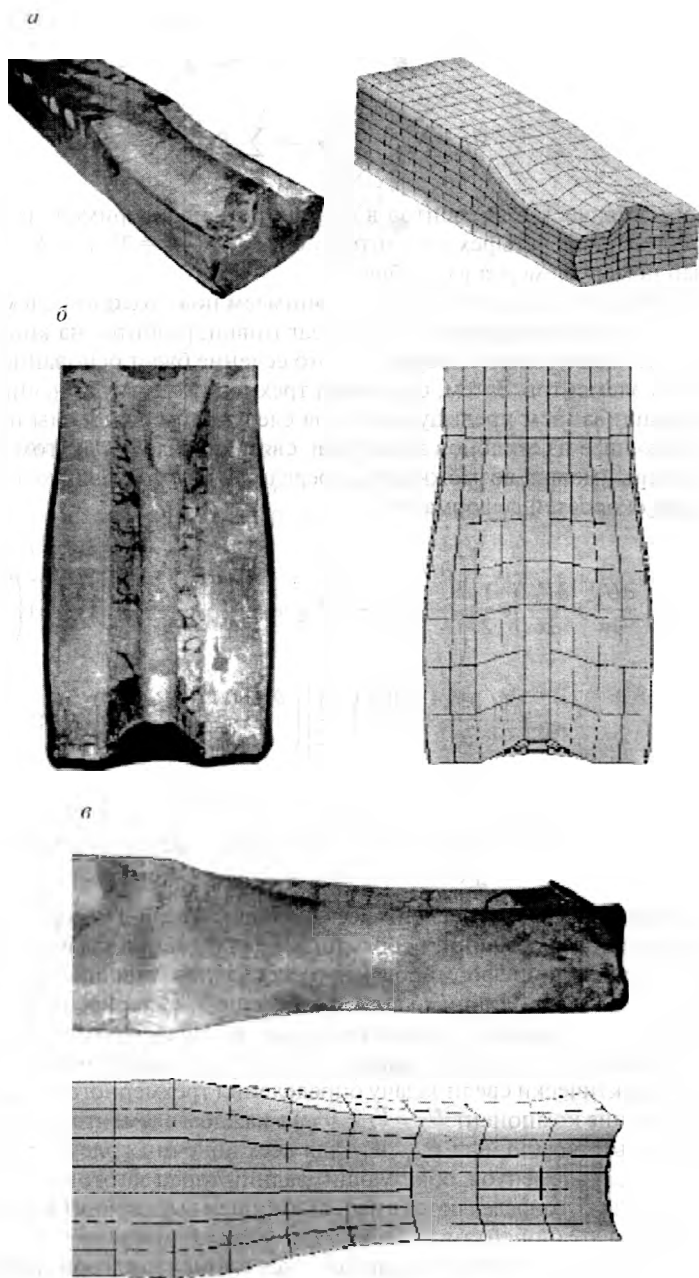


Рис. 3. Прокатка прямоугольной полосы в формирующем угловом калибре:
a – изотермия; *б* – вид сверху; *в* – вид сбоку

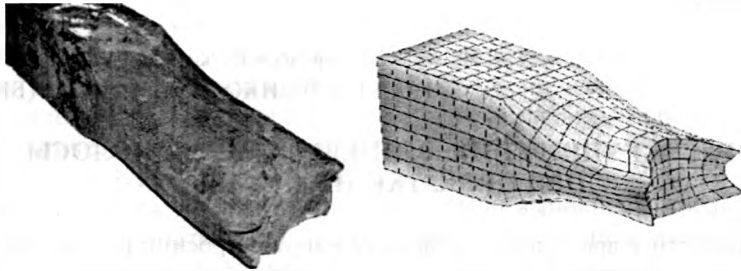


Рис. 4. Прокатка прямоугольной полосы в однорядном овальном калибре

картовых координатах. Сложность возрастает также из-за необходимости дифференцирования и интегрирования функций форм конечных элементов с учетом метода стыковки отдельных элементов, но наличие современного программного обеспечения математического направления, такого как MathCad и Mathematica, значительно облегчает решение этой задачи.

Решение задачи возможно и в локальной системе координат, более привычной для специалистов, использующих метод конечных элементов.

В качестве примера, демонстрирующего работоспособность описанного выше алгоритма, приведем результаты расчета деформированного состояния при прокатке квадратной полосы в овальном калибре с использованием разработанного автором конечно-элементного пакета (рис. 3, 4). Наряду с результатами расчета приведены фотографии образца, прокатанного в ходе проведения экспериментальных исследований в условиях горячей прокатки на стане 300 в лаборатории Днепродзержинского государственного технического университета.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Миленин А.А.* Исследование численных свойств алгоритмов метода конечных элементов применительно к трехмерным задачам обработки металлов давлением // *Металлы*. 1998. № 5. С. 33 – 37.
2. *Миленин А.А.* Анализ напряженно-деформированного состояния при прессовании профилей // *Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций*. Днепропетровск: Навчальна книга, 1998. Т. 3. С. 86 – 93.
3. *Гринкевич В.А., Чухлеб В.Л., Коган М.А.* Исследование формоизменения металла при изготовлении поковок корпуса насоса по разным схемам с использованием компьютерного моделирования // *Удосконалення процесів та обладнання обробки тиском в металургії та машинобудуванні*. Краматорск, 2001. С. 365 – 369.
4. *Миленин А.А., Корсун П.В., Ершов С.В.* Математическое моделирование прокатки в калибрах в условиях трехмерного течения металла // *Металлургическая и горнорудная промышленность*. 2000. № 8 – 9. С. 56 – 58.
5. Исследование и прогнозирование особенностей трехмерного формоизменения металла при прокатке в тавровом калибре / А.А. Миленин, П.В. Корсун, С.В. Ершов, С.А. Лапенко // *Совершенствование процессов и оборудования обработки давлением в машиностроении и металлургии*. Краматорск, 2001. С. 458 – 462.