

Разработан алгоритм расчета обжата слитка в роликах тянущей клетки МНЛЗ. Использованы специальное уравнение состояния материала слитка, позволяющее учитывать возможность деформирования материала с изменением объема, вариационный принцип минимума полной мощности диссипации и конечноэлементная аппроксимация поля скоростей перемещений. На основе разработанных программ выбрана оптимальная схема «мягкого обжата» и разработан проект головного образца устройства для редуцирования блюма с не полностью затвердевшей сердцевиной. Применение разработанного устройства позволит значительно улучшить структуру осевой зоны блюма при одновременном увеличении рабочей скорости разливки, а также освоить новые марки сталей, к которым предъявляются повышенные требования (стали для металлокорда повышенных категорий, стали для автомобилестроения, инструментальные стали).

Таким образом, выбранная стратегия поузловой модернизации МНЛЗ-3 БМЗ позволяет при умеренных финансовых затратах постепенно ликвидировать «узкие» места в технологии разливки, не останавливая производство и не снижая производительность.

*УДК 669.18:538.911*

**В.И. ТИМОШПОЛЬСКИЙ**, д-р техн. наук (ИТМО НАН Беларуси),  
**Ю.А. САМОЙЛОВИЧ**, д-р техн. наук (НПП «Платан»,  
г. Екатеринбург, Россия),  
**И.А. ТРУСОВА**, канд. техн. наук,  
**Н.Л. МАНДЕЛЬ**, канд. техн. наук,  
**Д.Н. АНДРИАНОВ**, канд. техн. наук (БНТУ)

## **РАСЧЕТЫ НАГРЕВА И ОХЛАЖДЕНИЯ СТАЛЬНЫХ ИЗДЕЛИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ)**

При решении задач теплопроводности для конкретных прикладных проблем в настоящее время получили развитие два основных направления. В первом из них для описания температурного поля исследуемых объектов используют дифференциальные уравнения в частных производных для некоторой произвольной бесконечно малой области. В последующем уравнения заменяются конечно-разностными соотношениями, для решения которых разработаны весьма эффективные вычислительные методы [1, 2]. Второе направление основано на постулировании вариационного экстремального принципа, справедливого для всей изучаемой области объекта. В данном случае решение минимизирует определенный функционал, представляющий собой интеграл от неизвестных значений температуры на различных участках объекта. При этом изучаемая непрерывная функция заменяется набором дискретных значений, поле которых

строится на множестве кусочно-непрерывных функций, определяемых для некоторых участков объекта (подобластей), называемых конечными элементами. Реализация второго направления базируется на применении математического аппарата теории матриц, обладающего высокой степенью универсальности в отношении решения большинства современных задач математической физики [3, 4].

С математической точки зрения оба указанных подхода эквивалентны, причем от одного подхода можно перейти к другому с помощью стандартных математических преобразований. Исследователь имеет возможность выбора того или другого подхода с учетом специфики решаемой задачи и находящихся в его распоряжении программных средств для компьютерной реализации решения.

При решении задач по нагреву и охлаждению стальных изделий (слитков, заготовок) в ходе их производства на стадиях затвердевания в изложницах либо при непрерывном литье, а также при нагреве в печах перед прокаткой авторы до настоящего времени использовали первый из упомянутых методов, основанный на решении конечно-разностных уравнений [5 – 8]. Вместе с тем усложнение физической постановки решаемых задач теплопроводности, термоупругости и гидродинамики и, главным образом, необходимость расчетного анализа тепловой обработки изделий сложной геометрической формы определили целесообразность использования второго из упомянутых методов решения – метода конечных элементов (МКЭ).

Настоящая статья представляет собой начальную публикацию серии статей, посвященных использованию МКЭ для анализа физических явлений в стальных изделиях при затвердевании, охлаждении и нагреве. Для трех пространственных измерений ( $x, y, z$ ) вариационная постановка задачи осуществляется путем введения интеграла по области (объему):

$$\chi(T) = \int_{(V)} f \left( x, y, z, t, T, \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

который принимает минимальное значение для дифференциального уравнения [3]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial f}{\partial (\partial T / \partial x)} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial f}{\partial (\partial T / \partial y)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial f}{\partial (\partial T / \partial z)} \right] - \frac{\partial f}{\partial T} = 0$$

при условии, что функция  $T(x, y, z, t)$  удовлетворяет граничным условиям задачи.

Запишем уравнение нестационарной теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

при соблюдении граничных условий на поверхности тела площадью  $S$ :

$$\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} + \alpha(T - T_{cp}) = 0.$$

Нетрудно убедиться в том, что уравнение (1) эквивалентно требованию минимизации интеграла

$$\chi(T) = \int_{(V)} \frac{1}{2} \left[ \lambda_x \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \lambda_y \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \lambda_z \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 + 2\rho C_p T \frac{\partial T}{\partial t} \right] dV + \int_{(S)} \frac{\alpha}{2} (T^2 - 2TT_{cp} + T_{cp}^2) dS \quad (2)$$

по всей области при соблюдении граничных условий задачи.

Далее осуществляется преобразование функционала (2) путем введения двух матриц:

$$\{g\}^T = \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \quad \frac{\partial T}{\partial y} \quad \frac{\partial T}{\partial z} \right]; \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix}.$$

Теперь соотношение (2) может быть записано в виде

$$\chi(T) = \int_{(V)} \frac{1}{2} \{g\}^T [D] \{g\} dV + \int_{(V)} \rho c_p T \frac{\partial T}{\partial t} dV + \int_{(S)} \frac{\alpha}{2} (T^2 - 2TT_{cp} + T_{cp}^2) dS. \quad (3)$$

Искомая непрерывная функция  $T$  заменяется набором функций  $T_i$ , определенных на конечных элементах (подобластях) изучаемого объекта. При этом интегралы в уравнении (3) могут быть разбиты на интегралы по отдельным элементам, что приводит к соотношениям

$$\chi(T) = \sum_{i=1}^M \int_{(V_i)} \frac{1}{2} \{g_i\}^T [D_i] \{g_i\} dV_i + \sum_{i=1}^M \int_{(V_i)} \rho c_p T_i \frac{\partial T_i}{\partial t} dV_i + \sum_{j=1}^M \int_{(S_j)} \frac{\alpha_j}{2} (T_j T_j - 2T_j T_{cp} + T_{cp}^2) dS_j, \quad (4)$$

где  $M$  — общее число конечных элементов системы.

Вводя в рассмотрение определенные «функции формы»  $\Phi_i$ , удается привести систему уравнений (4) к системе дифференциальных матричных уравнений [4, с. 202]:

$$[C] \frac{\partial \{\Phi\}}{\partial t} + [K] \{\Phi\} + \{F\} = 0,$$

где матрицы  $[K]$ ,  $[C]$  и  $\{F\}$  определяются следующим образом\*: так называемая матрица жесткости

$$[K_i] = \int_{(V)} [B]^T [D] [B] dV + \int_{(S)} \alpha [N]^T [N] dS;$$

матрица демпфирования

$$[C_i] = \int_{(V)} \rho C_p [N]^T [N] dV;$$

вектор нагрузки

$$\{F_i\} = - \int_{(S)} \alpha \Phi_{cp} [N]^T dS.$$

Заметим, что «механические» названия матриц прижились в связи с тем, что МКЭ получил широкое применение в строительной механике, а также при решении разнообразных задач механики твердого тела.

Отметим также, что по объему и громоздкости предварительных выкладок МКЭ превосходит соответствующие вспомогательные операции, связанные с обоснованием различных вычислительных схем при использовании конечно-разностной аппроксимации уравнений нестационарной теплопроводности, гидромеханики и теории упругости. Однако преодоление указанных затруднений в предварительной постановке задач компенсируется тем обстоятельством, что практика использования МКЭ привела за последние два-три десятилетия к достаточно апробированному программному обеспечению, которое облегчает применение МКЭ для широкого круга задач математической физики. В частности, в указанных монографиях О.К. Зенкевича и Л.Дж. Сегерлинда [3, 4] приводятся готовые программы, облегчающие процесс разбиения расчетных сечений изучаемого объекта на отдельные элементы и решение комплекса вспомогательных задач, связанных с реализацией МКЭ.

В качестве простейшего примера применения МКЭ для решения задач теории теплопроводности, а также с целью тестирования метода при использовании упомянутых выше готовых программ рассмотрим нагрев стального бруса прямоугольного сечения размерами 0,2x0,4 м при неизменных теплофизических свойствах материала ( $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $c_p$ ) и теплообмене на поверхности бруса по закону конвекции Ньютона (коэффициент теплоотдачи примем равным 872,25 Вт/(м<sup>2</sup>·К)).

Для контроля правильности решения используем аналитическое решение задачи, приведенное в классической монографии Г.П. Иванцова [9] и табулированное для тел простой формы (плиты, цилиндра неограниченной протяженности) для набора определенных значений критериев Био и Фурье:

$$Bi = \frac{\alpha l}{\lambda} = 0,2; 0,5; 1,0; 2,0; 3,0; 4,0; 6,0; \dots;$$

\* Определение функций  $\Phi$ ,  $B$ ,  $N$ ,  $F$  см. в книге [4].

$$Fo = \frac{at}{l^2} = 0,02; 0,05; 0,10; 0,50; 1,00; 1,50; 2,00; \dots$$

В соответствии с обоснованным в книге [9] принципом перемножения температурных критериев значение температуры в точке  $(x, y)$  поперечного сечения бруса в момент времени  $t$  определяется соотношением

$$\theta(x, y, t) = \frac{T_{\text{ср}} - T(x, y, t)}{T_{\text{ср}} - T_{\text{нач}}} = \theta^{(1)} \theta^{(2)},$$

где безразмерные температурные комплексы  $\theta^{(1)}\left(\frac{x}{l_1}, \frac{at}{l_1^2}\right)$  и  $\theta^{(2)}\left(\frac{y}{l_2}, \frac{at}{l_2^2}\right)$  определяются формулами:

$$\theta^{(1)} = \frac{T_{\text{ср}} - T^{(1)}(x, t)}{T_{\text{ср}} - T_{\text{нач}}}; \quad \theta^{(2)} = \frac{T_{\text{ср}} - T^{(2)}(y, t)}{T_{\text{ср}} - T_{\text{нач}}}.$$

Для двух плит неограниченной протяженности толщиной  $2l_1 = 0,2$  м и  $2l_2 = 0,4$  м, пересечением которых получено изучаемое в данном примере сечение бруса  $(0,2 \times 0,4$  м), при задании коэффициента теплопроводности стали  $\lambda = 29,075$  Вт/(м·К) и указанном выше значении коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  значения критерия Био равны соответственно:

$$Bi_1 = \frac{\alpha l_1}{\lambda} = 3; \quad Bi_2 = \frac{\alpha l_2}{\lambda} = 6.$$

Заметим, что выражения критерия Фурье для двух плит толщиной  $2l_1$  и  $2l_2$  связаны между собой соотношением

$$Fo^{(2)} = Fo^{(1)} \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2, \quad (5)$$

т. е. в нашем примере имеет место соотношение  $Fo^{(2)} = 0,25Fo^{(1)}$ .

Из прил. IX книги [9] заимствуем значения температурных критериев для средней плоскости  $(x = 0, y = 0)$  и наружной поверхности  $(x = l_1, y = l_2)$  плит для указанных выше значений критериев Био ( $Bi_1 = 3, Bi_2 = 6$ ) при значениях критериев Фурье, подчиняющихся соотношению (5).

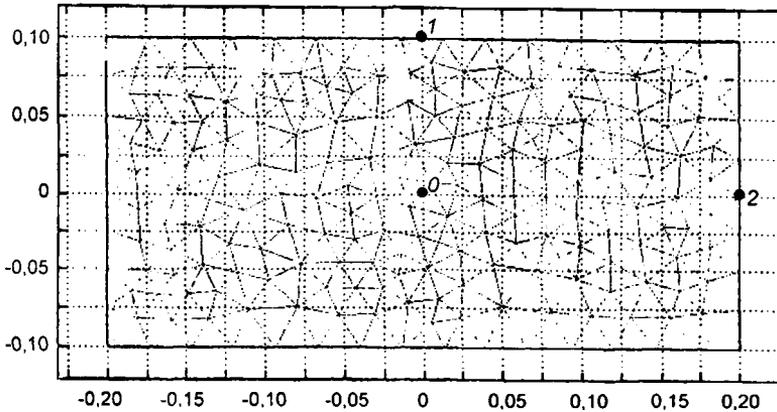
Указанные значения температурных критериев представлены в табл. I (первые шесть столбцов). Последующие три столбца содержат значения произведений температурных критериев для трех точек в поперечном сечении бруса – в его центре (точка «0») и посередине широкой и узкой граней на поверхности бруса, т. е.:

$$\theta_0 = \theta_{\text{ср}}^{(1)} \theta_{\text{ср}}^{(2)}; \quad \theta_1 = \theta_{\text{пов}}^{(1)} \theta_{\text{ср}}^{(2)}; \quad \theta_2 = \theta_{\text{ср}}^{(1)} \theta_{\text{пов}}^{(2)}.$$

Расположение контрольных точек в поперечном сечении бруса поясняется на рис. 1, где представлено разбиение изучаемой области на конечные элементы, общее число которых равно 382.

Исходные данные к расчету нагрева прямоугольного бруса сечением  $0,2 \times 0,4$  м (тест № 1)

$Bi_1=3$			$Bi_2=6$			$\theta_0$	$\theta_1$	$\theta_2$
$Fo^{(1)}$	$\theta_{cp}^{(1)}$	$\theta_{пов}^{(1)}$	$Fo^{(2)}$	$\theta_{cp}^{(2)}$	$\theta_{пов}^{(2)}$			
0,08	0,99289	0,47287	0,02	0,9989	0,47260	0,99278	0,47281	0,46924
0,20	0,89480	0,34885	0,05	0,99891	0,34946	0,89382	0,34846	0,31270
0,40	0,68153	0,25384	0,10	0,97496	0,26675	0,66446	0,24748	0,18180
0,80	0,38800	0,14331	0,20	0,85467	0,19713	0,33161	0,12248	0,07649
1,20	0,21969	0,08115	0,30	0,72031	0,15981	0,15824	0,05845	0,03511

Рис. 1. Схема разбиения на конечные элементы поперечного сечения стального бруса размерами  $0,2 \times 0,4$  м (к расчету нагрева)

Для выбранных значений коэффициентов тепло- и температуропроводности стали ( $\lambda = 29,075$  Вт/(м·К),  $a = \lambda/(\rho c_p) = 0,025$  м<sup>2</sup>/ч) имеет место соотношение  $Fo^{(1)} = 2,5\tau$  (ч), так что изменение критерия Фурье  $Fo^{(1)}$  в пределах от нуля до 1,20 эквивалентно изменению времени  $\tau$  в пределах от нуля до 0,48 ч. Результаты подсчетов температур в контрольных точках сечения бруса для пяти приведенных в табл. 1 значений критерия  $Fo^{(1)}$  и кривые изменения температур в указанных точках, полученные с использованием МКЭ при отмеченных выше условиях постановки задачи и принятых исходных данных, представлены на рис. 2. Очевидно, что расчетные значения температур в контрольных точках поперечного сечения бруса практически точно совпадают с кривыми изменения температур  $t_0$ ,  $t_1$  и  $t_2$  во времени, полученными с использованием МКЭ при задании  $t_{нач} = 0$ ,  $t_{ср} = 1000$  °С.

В качестве второго примера рассмотрим задачу о температурном поле в непрерывной заготовке прямоугольного поперечного сечения из стали 80К в процессе затвердевания и последующего охлаждения при разливе со скоростью 0,7 м/мин.

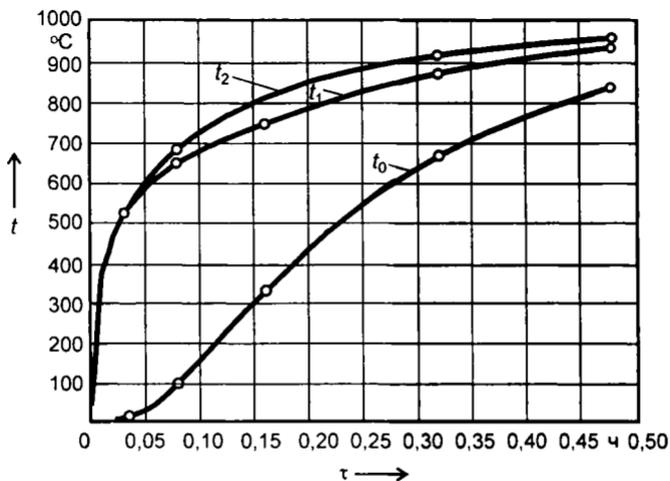


Рис. 2. Сопоставление результатов расчета нагрева стального бруса, выполненного с использованием МКЭ (сплошные линии), с аналитическим решением задачи (кружки) для температур  $t_0$  (центр сечения),  $t_1$  и  $t_2$  (посередине широкой и узкой граней, как показано на рис. 1)

Математическая формулировка задачи в квазистационарном приближении включает уравнение теплопроводности для двух пространственных измерений поперечного сечения заготовки ( $x, y$ )

$$\rho c_{\text{эф}}(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (6)$$

где используется задание коэффициента эффективной удельной теплоемкости сплава в виде, позволяющем учесть выделение теплоты агрегатного превращения сплава (при конкретном виде диаграммы состояния сплава и соответствующем задании темпа кристаллизации  $g = -\partial\psi/\partial T$ ):

$$c_{\text{эф}}(T) = \begin{cases} c_0 & \text{при } T < T_{\text{сол}}; \\ c_0 - L \frac{\partial \psi}{\partial T} & \text{при } T_{\text{сол}} \leq T \leq T_{\text{лик}}; \\ c_0 & \text{при } T > T_{\text{лик}} \end{cases}$$

(см. изложение данного способа учета выделения теплоты фазовых переходов в книге [8, с. 196–198]).

Уравнение теплопроводности (6) дополняется заданием граничных условий на охлаждаемой поверхности заготовки:

$$\pm \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha (T_{\text{пов}} - T_{\text{ср}}) \quad \text{при } x = 0; l_1;$$

$$\pm \lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha (T_{\text{пов}} - T_{\text{ср}}) \quad \text{при } y = 0; l_2$$

и начального условия  $T(x, y, 0) = T_{\text{нач}} = \text{const}$  при  $t = 0$ .

Расчеты для заготовки размерами поперечного сечения  $0,25 \times 0,30$  м из стали 80К выполнены при задании следующих исходных параметров: температуры ликвидуса и солидуса стали марки 80К  $T_{лик} = 1723$  К,  $T_{сол} = 1654$  К, удельная теплота кристаллизации  $L = 272,14$  кДж/кг, принятые в расчетах значения массовой плотности и удельной теплоемкости сплава  $\rho = 7500$  кг/м<sup>3</sup> и  $c_0 = 690$  Дж/(кг·К), коэффициент теплоотдачи с внешней поверхности заготовки  $\alpha = 300$  Вт/(м<sup>2</sup>·К), температура охлаждающей среды  $T_{ср} = 300$  К, начальная температура заготовки  $T_{нач} = 1733$  К.

Результаты расчета, выполненного с использованием МКЭ, представлены на рис. 3 и 4. Графики на рис. 3 отражают изменение во времени температур в наиболее характерных точках поперечного сечения заготовки:  $T_1$  – в центре поперечного сечения,  $T_2$  – посередине широкой грани,  $T_3$  – в угловой точке сечения (см. схему в нижней части рис. 3).

Как следует из графика изменения температуры  $T_1$ , процесс «стояния» неизменной температуры в центре сечения заготовки, обусловленный выделением теплоты кристаллизации сплава, продолжается около 1400 с (22,3 мин), что находится в удовлетворительном согласии с данными термометрирования затвердевающей заготовки из стали 80К (экспериментальные графики [8, рис. 4.13]).

Графики на рис. 4 иллюстрируют распределение температуры в поперечном сечении заготовки (при  $x = 0 \dots 0,3$  м;  $y = 0,125$  м) для следующих моментов времени: кривые 1, 2, ..., 11 – для  $\tau = 580$  с (1), 820 (2), 1060 (3), 1180 (4), 1300 (5), 1360 (6), 1420 (7), 1480 (8), 1540 (9), 1600 (10) и 1660 с (11) соответственно. Из рассмотрения этих графиков можно сделать два вывода:

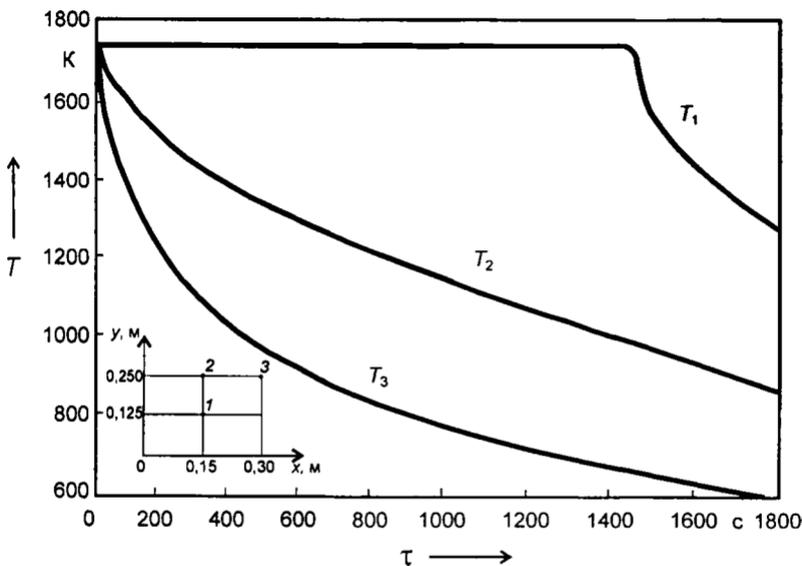


Рис. 3. Расчетные графики изменения температуры в центре поперечного сечения заготовки из стали марки 80К (кривая  $T_1$ ), а также посередине широкой грани (кривая  $T_2$ ) и в угловой точке (кривая  $T_3$ )

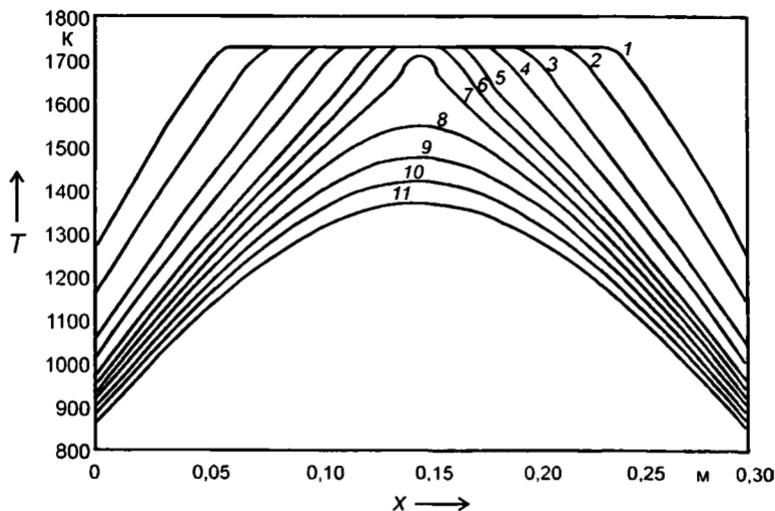


Рис. 4. Распределение температуры по сечению заготовки размерами 0,25×0,30 м для ряда последовательных моментов времени на основании расчета методом конечных элементов (пояснения даны в тексте)

1) по сечению твердой корки в ходе затвердевания (см. кривые 1 – 5) распределение температуры приближается к линейному закону;

2) по окончании процесса затвердевания распределение температуры в контрольном сечении вполне удовлетворительно может быть описано параболой второй степени (см. кривые 9 – 11).

Эти наблюдения могут оказаться полезными при разработке упрощенных (инженерных) способов расчета затвердевания отливок прямоугольного поперечного сечения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Саульев В.К. Интегрирование уравнений параболического типа методом секток. М.: Физматгиз, 1960. 324 с.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 600 с.
3. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 318 с.
4. Сегерлинд Л.Дж. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.
5. Самойлович Ю.А. Микрокомпьютер в решении задач кристаллизации слитка. М.: Металлургия, 1986. 182 с.
6. Самойлович Ю.А., Тимошпольский В.И. Нагрев стали. Мн.: Выш. шк., 1990. 314 с.
7. Тимошпольский В.И., Трусова И.А., Пекарский М.Я. Кольцевые печи: Теория и расчеты. Мн.: Выш. шк., 1993. 248 с.
8. Стальной слиток: В 3 т. Т. 2: Затвердевание и охлаждение / Ю.А. Самойлович, В.И. Тимошпольский, И.А. Трусова, В.В. Филиппов; Под общ. ред. В.И. Тимошпольского, Ю.А. Самойловича. Мн.: Бел. наука. 2000. 636 с.
9. Иванцов Г.П. Нагрев металла. М.: Металлургия. 1948. 191 с.