

Министерство образования Республики Беларусь  
БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ПОЛИТЕХНИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

---

Кафедра "Сопротивление материалов машиностроительного профиля"

В.И.Новиков

Г.С.Крылов

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебно-методическое пособие  
для студентов-заочников механических  
специальностей технических вузов

М и н с к 1 9 9 4

Новиков В.И., Крылов Г.С. Сопротивление материалов: Учебно-метод. пособие для студ.-заочников механ. спец. техн. вузов. - Мн.: БГУПА, 1994. - 135 с.

Издание предназначено для студентов-заочников механических специальностей технических вузов и ставит целью помочь в самостоятельном освоении теоретических основ курса сопротивления материалов, приобретении навыков решения задач при выполнении контрольных работ.

В пособии дается конспективное изложение курса с детальным, разъяснением отдельных теоретических вопросов, традиционно трудных для восприятия, приведены примеры решения типовых контрольных задач для заочников с необходимыми пояснениями возможных путей решений и их анализом.

Пособие также может быть полезно студентам дневной и вечерней форм обучения.

Рецензент А.Е.Кончиц

## Глава I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИИ

### I.1. Задачи сопротивления материалов

Сопротивление материалов изучает методы инженерного расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций, машин и механизмов.

Расчетом на прочность обеспечивается способность конструкции нести заданную нагрузку не разрушаясь.

Расчетом на жесткость ограничиваются величины смещений и деформаций элементов конструкций.

Расчетом на устойчивость обеспечивается способность конструкции воспринимать заданную нагрузку при сохранении первоначальной формы равновесия её элементов.

Рассчитывая конструкцию, необходимо помнить и о её экономичности, т.е. надо добиваться надлежащей прочности, жесткости и устойчивости при минимальном расходе материалов и средств. Изучаемый курс знакомит с практически приемлемыми методами подобных расчетов, сложившимися в практике на данный момент, и является базовым предметом для специальных курсов того же направления, к которым можно отнести строительную механику сооружений, детали машин, строительную механику самолетов, теорию прочности сварных конструкций и др.

### I.2. Реальный объект и расчетная схема

Универсальность расчетов достигается за счет схематизации реальных объектов и материалов, из которых они изготовлены.

Реальный объект, рассматриваемый без второстепенных, несущественных особенностей, представляет собой расчетную схему.

Схематизация элементов реальных объектов сводит их к брусу, оболочке и массиву (рис. I.1).

Брус — это тело, два измерения которого малы в сравнении с третьим (длиной) (рис. I.1а). Геометрическое место центров тяжести его поперечных сечений называют осью.

Ось бруса может быть прямой, а также плоской или пространственной кривой линии.

Оболочкой называется тело, у которого один размер мал в сравне-

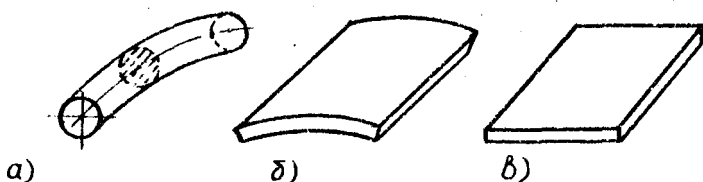


Рис. 1.1

нии с двумя другими (рис. 1.1б). Поверхность, делящая толщину оболочки пополам, называется срединной поверхностью. Если срединная поверхность - плоскость, то оболочку называют пластиной (рис. 1.1в)

Массив - тело, у которого все измерения одного порядка.

При схематизации материала его считают сплошным, однородным, изотропным и, как правило, упругим.

Сплошность требует наличия масс в любой точке тела. В реальных телах масса сосредоточена в атомах, т.е. в узлах кристаллической решетки. Однако при решении инженерных задач считают материал сплошным. Это позволяет применять математический аппарат бесконечно малых величин для анализа состояния материала.

Однородность требует независимости свойств от положения точки в теле. Это означает, что каждому элементарному объему можно приписать физические свойства всего тела. Материал изотропен тогда, когда его физические свойства не зависят от направлений в теле.

В инженерной практике приходится иметь дело с материалами, которые проявляют свойства однородности и изотропности в среднем при рассмотрении достаточно больших объемов материала. Так, если провести испытания бетонных кубиков с размером ребра в 1 см на сжатие, то для всех кубиков получим разные нагрузки разрушения, что свидетельствует о их неоднородности. Однако для кубиков с ребром 30 см разрушающая нагрузка достаточно стабильна, т.е. в этом случае применима гипотеза однородности и для бетона.

Упругость - это способность материала восстанавливать свои первоначальные форму и размеры после удаления нагрузки.

### 1.3. Деформации. Внешние силы

Изменение первоначальных размеров тела под внешней нагрузкой называют деформацией. Деформации, исчезающие после удаления нагрузки, называются упругими. В противном случае деформации называют остаточными, или пластическими. Количественно деформации характеризуются относительной линейной деформацией  $\varepsilon$ , равной отношению абсолютного удлинения  $\Delta l$  к первоначальной длине тела  $l$ , ( $\varepsilon = \Delta l / l$ ) и угловой  $\gamma$ , представляющей собой разность между координатными углами до и после нагружения:  $\gamma_{BAC} = \angle BAC - \angle B_1A_1C_1$  (рис. 1.2).

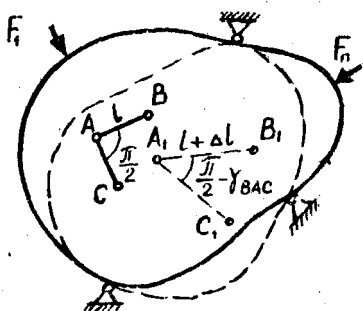


Рис. 1.2

Совокупность линейных и угловых деформаций в точке определяет ее деформированное состояние. Его можно установить, указав, как деформируется система координат, связанная с телом в данной точке, т.е. определив относительные линейные  $\varepsilon$  и угловые  $\gamma$  деформации.

Из определения видно, что линейная относительная деформация представляет собой безразмерную величину. Угловая деформация, представляется в радианном выражении и также является безразмерной характеристикой.

Нагрузки на рассматриваемый объект создаются внешними силами и их парами (моментами). Они могут быть сосредоточенными и распределенными по поверхности.

К внешним силам в сопротивлении материалов относят и реакции опор. По характеру воздействия нагрузки бывают статические и динамические. К статическим относят нагрузки, которые при возрастании от нуля до конечного значения вызывают несущественные ускорения элементов конструкций.

Динамические нагрузки, наоборот, сопровождаются значительными ускорениями элементов и являются более опасными для прочности конструкций.

## 1.4. Напряжения. Закон Гука

Сохранение телами формы и размеров обеспечивается межатомными силами, наличие которых определяет способность тела воспринимать действующие на него внешние силы, сопротивляться разрушению, изменению формы и размеров. Приложение внешних сил к телу вызывает изменение формы и размеров, т.е. сопровождается появлением добавочных сил к силам сцепления. Усредненные характеристики добавочных сил сцепления могут определяться методами механики сплошной среды и называются внутренними силами. Мерой интенсивности внутренних сил, распределенных по рассматриваемым плоскостям внутри тела, выступают напряжения. К понятию напряжений можно подойти, не отступая от модели сплошной среды.

Пусть тело находится в равновесии под действием системы сил (рис. 1.3). Проведем секущую плоскость и рассмотрим отдельно отсеченные части тела. Очевидно, что, отбрасывая одну из частей, мы нарушаем равновесие оставленной части. Для обеспечения равновесия по сечению оставленной части следует приложить распределенную нагрузку, статически эквивалентную отброшенным силам (рис. 1.3б). Если при этом точки сечения оставленной части не деформируются и останутся в плоскости разреза, то приложенные силы эквивалентны действовавшим внутренним силам, т.е. силам, с которыми отброшенная часть действовала на оставленную.

Выделим возле некоторой точки  $K$  площадку  $\Delta A$  (рис. 1.3в) и подсчитаем равнодействующую внутренних сил, приходящихся на данную площадку. Средним напряжением по площадке называется отноше-

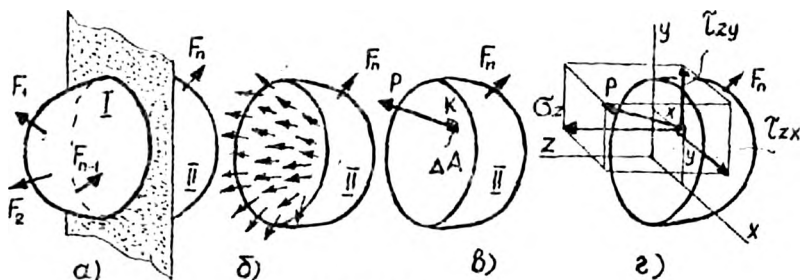


Рис. 1.3

ние равнодействующей к площади площадки, на которой подсчитана равнодействующая:  $\rho_c = \Delta F / \Delta A$ . (1.1)

Истинным напряжением в точке  $K$  по рассматриваемой площадке называется предел отношения равнодействующей к площади, на которой подсчитана равнодействующая, при стягивании площадки в точку:

$$\rho = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}. \quad (1.2)$$

Как интенсивность внутренних сил, распределенных по площади, напряжения имеют размерность  $H/m^2$  и обозначаются Па (Паскаль).

Если через точку  $K$  провести другую секущую и определить напряжения в точке  $K$  этой плоскости, то они в общем случае окажутся отличными от найденных в первой плоскости. Во-первых, изменится статический эквивалент отброшенных сил, если новая секущая разобьет на другие группы систему внешних сил. Во-вторых, изменится площадь сечения, а следовательно, интенсивность окажется иной. В-третьих, изменится закон распределения интенсивности. Все это вместе взятое приводит к изменению напряжений. Поэтому при на-

пряжениях ставят индекс направления нормали к площадке. Так  $\rho_x$  и  $\rho_y$  представляют собой символы полных векторов напряжений, действующих по площадке, перпендикулярной к оси  $X$  и  $Y$  соответственно.

Вектор полного напряжения по координатным осям представляется нормальной и касательными компонентами (рис. 1.3г). Нормальное напряжение обозначается  $\sigma_z$  (сигма) и содержит один индекс нормали к площадке, касательные напряжения обозначаются  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zy}$ . Первый индекс касательных напряжений указывает нормаль к площадке, а второй - направление оси, параллельной направлению касательного напряжения.

Совокупность напряжений для множества площадок, проходящих через точку, представляет напряженное состояние в ней.

Напряженное состояние определяется шестью компонентами и является одним из наиболее важных понятий.

Многочисленные наблюдения за поведением конструкций под нагрузкой показывают, что в большинстве случаев перемещения в определенных пределах пропорциональны действующим силам. Впервые указанная закономерность была отмечена Гуком и носит его имя.

В современной трактовке закон Гука определяет линейную зависи-

мость между компонентами напряжений и деформаций, а не силой и перемещениями, как указывал Гук. Коэффициенты пропорциональности при этом представляют собой физические константы материала. Из закона Гука следует линейная зависимость между силами и перемещениями точек конструкции и обуславливаются ее упругие свойства.

Системы, для которых соблюдаются условия пропорциональности между внешними силами и перемещениями, подчиняются принципу суперпозиции, или принципу независимости действия сил. По этому принципу перемещения и внутренние усилия, возникающие в упругом теле, считаются не зависящими от порядка приложения внешних сил. Так, если к системе приложено несколько сил, то можно определить внутренние усилия, напряжения, перемещения и деформации от каждой силы в отдельности, а затем получить результат их действия как сумму действия каждой силы.

### 1.5. Внутренние силовые факторы.

#### Метод сечений

Напряженное состояние в бруске определяется напряженным состоянием на площадках поперечных сечений бруска, т.е. величинами  $\sigma_z$  и  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zy}$  (рис. 1.3г). Равнодействующие этих напряжений в поперечных сечениях называются внутренними силовыми факторами бруска: продольной, поперечными силами, изгибающими и крутящими моментами.

Элементарная продольная сила равна произведению нормального напряжения на элементарную площадку. Равнодействующая элементарных сил называется продольной силой в сечении

$$N = \int_A \sigma dA. \quad (1.3)$$

Равнодействующая моментов нормальных напряжений называется изгибающим моментом. Элементарный момент относительно осей сечения есть произведение элементарной продольной силы на расстояние от элементарной площадки до оси:

$$dM_x = \sigma_y dA; \quad dM_y = \sigma_x dA. \quad (1.4)$$

И, соответственно, полные изгибающие моменты представляют интегральную сумму элементарных моментов:

$$M_x = \int_A \sigma_y dA; \quad M_y = \int_A \sigma_x dA. \quad (1.5)$$



Равнодействующая касательных напряжений называется поперечной силой и обозначается  $Q$ . Элементарная поперечная сила есть произведение соответствующих касательных напряжений на элементарную площадку:

$$dQ_x = \tau_{zx} dA, \quad dQ_y = \tau_{zy} dA. \quad (1.6)$$

Полную поперечную силу  $Q_x$  и  $Q_y$  получим, взяв интеграл по всей площади от элементарных сил:

$$Q_x = \int_A \tau_{zx} dA, \quad Q_y = \int_A \tau_{zy} dA. \quad (1.7)$$

Равнодействующую моментов касательных сил называют крутящим моментом и обозначают

$$M_z = M_k = \int_A (\tau_{zx} y - \tau_{zy} x) dA. \quad (1.8)$$

Все перечисленные равнодействующие называются внутренними силовыми факторами. Они могут быть определены методом сечений. Суть данного метода состоит в том, что брус мысленно разрезают на две части и отбрасывают одну из них. Действие отброшенной части на оставшуюся выражают через внутренние силовые факторы.

Из условия равновесия оставшейся части находят величины внутренних силовых факторов через внешние нагрузки, на нее действующие.

Из условий же равновесия всего тела следует, что величина внутреннего силового фактора не зависит от того, какая часть бруса рассматривается.

Для наглядного представления характера изменения внутренних усилий вдоль оси бруса строят графики, именуемые эпюрами.

## 1.6. Виды деформаций бруса. Методы расчета на прочность

Внутренние силовые факторы имеют физический смысл и каждому из них соответствует определенный вид деформации (сопротивления) бруса.

Если брус нагружен так, что в поперечных сечениях возникают только продольные усилия  $N$ , то деформацию называют осевым растяжением или сжатием.

Растяжение, сжатие возникает тогда, когда внешние нагрузки в сечении сходятся к равнодействующей, направленной вдоль оси бруса и проходящей через центр тяжести его поперечных сечений.

В том случае, если в поперечных сечениях возникает только изгибающий момент  $M$ , а остальные силовые факторы равны нулю, деформацию называют чистым изгибом. Когда, кроме изгибающего момента  $M$ , отлична от нуля и поперечная сила  $Q$ , деформацию называют плоским поперечным изгибом.

Поперечным силам  $Q_x$ ,  $Q_y$  соответствует сдвиг (срез).

Деформация (сопротивление), при которой в поперечном сечении возникает только крутящий момент, называется кручением.

Перечисленные виды деформаций (сопротивлений) называются простыми. Совместное действие двух и более простых видов сопротивления называется сложным.

Курс сопротивления материалов построен от простого к сложному. Поэтому мы будем последовательно рассматривать простые виды деформаций, научимся определять напряжения, возникающие в поперечных сечениях, деформации элементов, а затем перейдем к изучению сложного сопротивления.

Необходимо иметь в виду, что в результате расчета требуется дать ответ на вопрос, удовлетворяет или нет конструкция тем требованиям надежности, которые к ней предъявляются.

Без этого анализа конкретной ситуации сам по себе расчет не может иметь целевого назначения.

Так, если в реальной конструкции определяются напряжения, надо предварительно знать, что следует делать в дальнейшем с найденными напряжениями. Все эти вопросы находят свое решение в выборе основного метода расчета.

Наиболее распространенным является расчет на прочность по допускаемым напряжениям.

В основу этого расчета положено предположение, что критерием прочности является напряжение в наиболее нагруженной точке материала, ее напряженное состояние.

Эту точку называют опасной. Расчет сводится к определению наиболее нагруженных сечений. Наиболее нагруженное сечение выявляется при построении эпюр внутренних силовых факторов. Затем устанавливается опасная точка в сечении и напряженное состояние в этой точ-

ко. Методами сопротивления материалов записывается условие прочности для данной точки. Этот метод используется для большинства практических задач. Вместе с тем такой подход не является единственно возможным. В ряде случаев к цели быстрее приводят другие методы. Иногда расчет по допускаемым напряжениям неприемлем. Например, при проверке некоторых конструкций, находящихся под действием высоких перепадов температур (оболочка жидкостного ракетного двигателя, лопатки паровых турбин и т.д.).

В ряде случаев основная концепция расчета по допускаемым напряжениям оказывается неприемлемой и более подходящим может оказаться расчет по разрушающим нагрузкам. При этом определяется разрушающая нагрузка и введением коэффициента запаса определяется допускаемая нагрузка на конструкцию.

Очень часто в машиностроении определяющим является расчет на жесткость.

## Глава 2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

### 2.1. Определение продольных сил

Растяжение или сжатие возникает тогда, когда на брус действуют силы, равнодействующая которых в каждом поперечном сечении проходит через центр тяжести сечения и направлена вдоль бруса (рис.2.1).

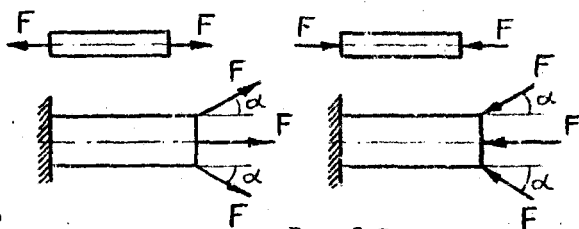


Рис. 2.1

В этом случае все внутренние силовые факторы в поперечных сечениях равны нулю, кроме растягивающей или сжимающей силы. Растягивающие продольные силы принято считать положительными, а сжимающие — отрицательными.

Из метода сечений продольная сила в некотором сечении равна алгебраической сумме проекций на ось стержня всех внешних сил, рас-

положенных по одну сторону от сечения.

Для того, чтобы установить участки бруса, в которых продольная сила имеет наибольшее значение, строят эпюру продольных сил (эпюру  $N$ ), каждая ордината которой равна значению продольной силы в данном сечении. Эпюра строится на базисной линии, проведенной параллельно оси стержня.

Пример 2.1. Построить эпюру продольных сил для бруса, изображенного на рис. 2.2.

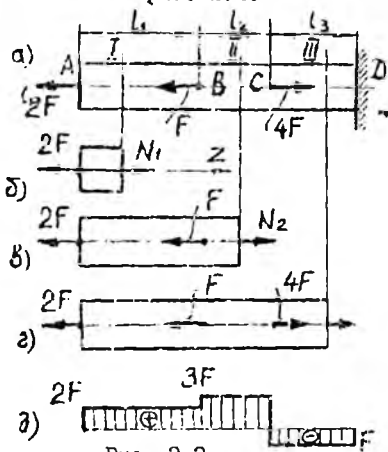


Рис. 2.2

на участке CD  $N_3 = 2F + F - 4F = -F$ .

Знак минус указывает, что действительное направление силы  $N_3$  противоположно показанному на рис. 2.2в. Следовательно, сила  $N_3$  направлена к сечению и участок CD испытывает сжатие.

Эпюра продольных сил показана на рис. 2.2д.

## 2.2. Напряжения и деформации

Продольная сила  $N$  является равнодействующей внутренних сил, действующих на бесконечно малые площадки  $dA$  поперечного сечения стержня (рис. 1.3г):

$$N = \int_A \sigma dA, \quad (2.1)$$

где  $\sigma$  - нормальное напряжение в произвольной точке поперечного

Решение. Разбиваем брус на участки начиная от свободного конца. Границами участков являются сечения, в которых приложены внешние силы. Рассечем брус на участке AB произвольным сечением I-I и рассмотрим равновесие левой части (рис. 2.2б), что позволяет не определять реакцию заделки  $\sum Z = 0$ ;

$$\sum Z = 0; N_1 = 2F.$$

Очевидно, что нормальная сила во всех сечениях по длине участка сдвигается.

На участке BC (рис. 2.2в) продольная сила  $N_2 = 2F + F = 3F$ , а

сечения, принадлежащей элементарной площадке;  $A$  - площадь поперечного сечения бруса.

Для того, чтобы определить нормальные напряжения при известном значении продольной силы, необходимо установить закон их распределения по поперечному сечению бруса.

Экспериментальные исследования показывают, что если нанести на поверхность призматического бруса ряд взаимно перпендикулярных линий, то после приложения внешней нагрузки поперечные линии не искривляются и остаются параллельными друг другу. Это соответствует гипотезе плоских сечений (гипотезе Бернулли). Согласно этой гипотезе, сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации.

Продольные линии в этом случае удлиняются на одну и ту же величину. Так как все продольные элементы деформируются одинаково, то напряжения в поперечных сечениях всех продольных слоев равны между собой, т.е.  $\sigma = \text{const}$ , поэтому из формулы (2.1) получим

$$N = \sigma \int_A dA, \quad \text{откуда} \quad \boxed{\sigma = \frac{N}{A}} \quad (2.2)$$

Таким образом, нормальные напряжения, возникающие в поперечных сечениях растянутого или сжатого бруса, равны отношению продольной силы к площади поперечного сечения.

**Деформации.** Под действием силы  $F$  (рис. 2.2) брус удлиняется на некоторую величину  $\Delta l$ , называемую абсолютной продольной деформацией. Отношение абсолютной продольной деформации к первоначальной длине называется относительной продольной деформацией  $\epsilon = \Delta l / l$ . При растяжении продольная деформация положительная, а при сжатии - отрицательная.

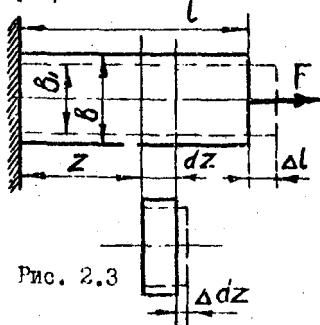


Рис. 2.3

Относительная продольная деформация элемента  $dz$  вдоль оси бруса  $\epsilon = \Delta dz / dz$  связана с напряжением в поперечных сечениях законом Гука

$$\boxed{\sigma = E \epsilon}, \quad (2.3)$$

где  $E$  - модуль продольной упругости, константа, характеризующая свойства материала и имеющая размер-

ность напряжения.

Так как поперечные сечения остаются плоскими, то поступательное перемещение сечения  $Z+dz$  по отношению к сечению  $Z$  будет представлять собой удлинение участка стержня  $dz$ . Его можно установить, определив абсолютное удлинение отрезка стержня:

$$\Delta dz = \varepsilon dz = \frac{\sigma}{E} dz = \frac{N}{EA} dz.$$

Или, интегрируя это выражение в пределах от 0 до  $Z$ , получим величину перемещения сечения  $Z$  под нагрузкой:

$$\Delta Z = \int_0^Z \frac{N dz}{EA}.$$

Если продольная сила и сечение бруса на участке  $l$  постоянны, то деформация будет однородной и, интегрируя, получим

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}, \quad (2.4)$$

Абсолютная поперечная деформация

$$\Delta \delta = \delta_1 - \delta.$$

Соответственно относительная поперечная деформация

$$\varepsilon' = \frac{\Delta \delta}{\delta}. \quad (2.5)$$

При растяжении поперечные размеры бруса уменьшаются и  $\varepsilon'$  — величина отрицательная.

Опыт показывает, что в пределах применимости закона Гука при растяжении или сжатии поперечная деформация  $\varepsilon'$  прямо пропорциональна продольной деформации  $\varepsilon$ , но имеет обратный знак:

$$\text{Отношение} \quad \nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| \quad (2.6)$$

называется коэффициентом поперечной деформации или коэффициентом Пуассона.

Экспериментально установлено, что в упругой стадии работы любого материала значение  $\nu$  постоянно. Для различных материалов значения коэффициента Пуассона находятся в пределах от 0 до 0,5. Например, для пробки  $\nu = 0$ ; для каучука  $\nu = 0,5$ . Для большинства металлов  $\nu = 0,23 \dots 0,35$ .

Приведенных теоретических сведений достаточно для решения задачи № I контрольных заданий для студентов-заочников [I].

Задача № I [I] развивается представлением о характере деформаций бруса под действием распределенных (собственный вес) и сосредото-

ченных сил, выявляет законы взаимодействия элементов бруса. Для сопоставимости величин деформаций от нагрузки и собственного веса отдельных частей бруса величина нагрузки  $F$  в задании взята очень малой, составляющей 0,5...2% от допускаемой нагрузки для бруса. Это приводит к тому, что величина перемещений очень мала, порядка нескольких миллиметров. Задача № 1 является учебной и способствует выработке навыков расчета деформаций элементов с учетом собственного веса или распределенных нагрузок. Следует отметить, что учет собственного веса при растяжении имеет практическое значение при расчетах тросов шахтных подъемников, длина которых составляет сотни или тысячи метров. В этом случае деформации и напряжения могут достигать значительных и даже предельных значений.

**Пример 1.** Стальной стержень ( $E = 2 \cdot 10^5$  МПа) находится под действием продольной силы  $F$  и собственного веса ( $\gamma = 78$  кН/м<sup>3</sup>). Найти перемещение сечения I-I (рис. 2.4).  $A = 15$  см<sup>2</sup>;  $a = 2,2$  м,  $b = 2,2$  м;  $c = 1,2$  м;  $F = 1200$  Н.

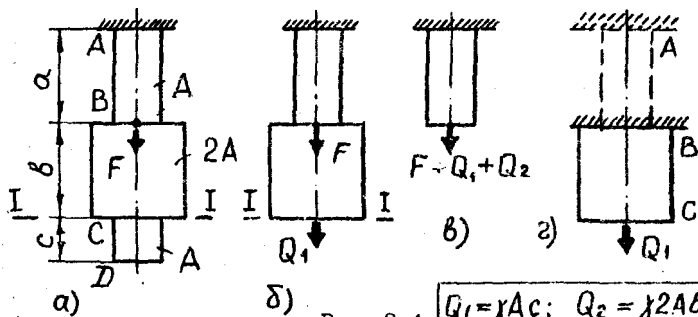


Рис. 2.4

**Решение.** Перемещение сечения I-I определяется удлинением части стержня, расположенной выше сечения I-I под действием собственного веса этой части, внешней силы  $F$  и веса нижней части (сила  $Q_1 = \gamma A c$ ) (рис. 2.4б).

В свою очередь удлинение участка  $AB$  состоит из удлинения его под действием собственного веса и растягивающей силы  $F + Q_1 + Q_2$  (рис. 2.4в), где  $Q_1 = \gamma A c$  - вес участка  $CD$ , а  $Q_2 = \gamma 2A b$  - вес участка  $BC$ .

Удлинение участка  $BC$  определяется удлинением его от собствен-

ного веса и растягивающей силы  $Q_r = \gamma A c$  (рис. 2.4г).

На основании принципа независимости действия сил перемещение сечения I-I будет

$$\begin{aligned} \delta_{I-I} &= \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} = \frac{Fa}{EA} + \frac{(\gamma 2AB)a}{EA} + \frac{(\gamma AC)a}{EA} + \\ &+ \frac{(\gamma Aa)a}{2(EA)} + \frac{(\gamma AC)b}{E2A} + \frac{(\gamma 2AB)b}{2(E2A)} = \\ &= \frac{1200 \cdot 2,2}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 15 \cdot 10^{-4}} + \frac{(78 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 15 \cdot 10^{-4})2,2}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 15 \cdot 10^{-4}} + \frac{(78 \cdot 10^3 \cdot 15 \cdot 10^{-4} \cdot 2)2,2}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 15 \cdot 10^{-4}} + \\ &+ \frac{(78 \cdot 10^3 \cdot 15 \cdot 10^{-4})2,2}{2(2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 15 \cdot 10^{-4})} + \frac{(78 \cdot 10^3 \cdot 15 \cdot 10^{-4} \cdot 2)1,2}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 15} + \frac{(78 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 15 \cdot 10^{-4} \cdot 2)2,2}{2(2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 15 \cdot 10^{-4})} = \\ &= 88 \cdot 10^{-5} + 172 \cdot 10^{-5} + 103 \cdot 10^{-5} + 94 \cdot 10^{-5} + 51 \cdot 10^{-5} + 47 \cdot 10^{-5} = 555 \cdot 10^{-5} \text{ м. } \delta_{I-I} = 5,55 \text{ мм} \end{aligned}$$

**Пример 2.** Требуется определить перемещение сечения I-I (рис. 2.5) под действием сосредоточенной продольной силы и собственного веса стержня.

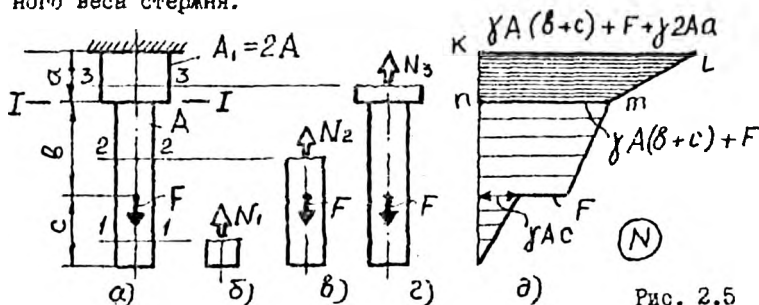


Рис. 2.5

**Решение.** При решении этой задачи обычно пользуются принципом независимости действия сил. Но возможным и более наглядным является следующее решение. Строим эпюру продольных сил (рис. 2.5д) методом сечений:

сечение 1	$N_1 = \gamma A z_1;$	$z_1 = 0;$	$N_1 = 0;$
		$z_1 = c;$	$N_1 = \gamma A c;$
сечение 2	$N_2 = \gamma A z_2;$	$z_2 = c;$	$N_2 = \gamma A c + F;$
		$z_2 = b+c;$	$N_2 = \gamma A(b+c) + F;$
сечение 3	$N_3 = \gamma A(b+c) + F + \gamma 2A(z_3 - (b+c));$		



$$\begin{aligned} z_3 &= \delta + c; & N_3 &= \gamma A (\delta + c) + F; \\ z_2 &= \delta + c + a; & N_2 &= \gamma A (\delta + c) + F + \gamma 2Aa. \end{aligned}$$

Продольная сила в сечении определяется весом нижней части стержня и внешними силами, приложенными ниже рассматриваемого сечения.

Перемещение сечения I-I определяется удлинением части стержня выше сечения.

Удлинение части  $a$  равно

$$\Delta a = \int_0^a \varepsilon(z) dz = \int_0^a \frac{N(z) dz}{EA}$$

Вычисление интеграла сводится к подсчету площади эпюры продольных сил выше сечения I-I:

$$\begin{aligned} \delta_{I-I} &= \int_0^a \frac{N dz}{EA} = \frac{\text{площадь трапеции } klmn \text{ (эпюра „N“) }}{EA} = \\ &= \frac{kl + mn}{2} a \frac{1}{EA} = \frac{\gamma(a + \delta + c)a}{2E} + \frac{Fa}{2EA}. \end{aligned}$$

### 2.3. Механические свойства материалов

При проектировании машин и сооружений выбор конструкционных материалов зависит от механических свойств, определяющих прочность, твердость, пластичность, ударную вязкость.

Основные прочностные и деформационные характеристики материалов определяются экспериментально, путем проведения испытаний на растяжение, сжатие, срез, кручение и изгиб. Наиболее распространенным видом является испытание на растяжение статической нагрузкой, позволяющее определить большинство механических характеристик.

**ДИАГРАММА РАСТЯЖЕНИЯ.** Растяжение образцов из испытуемого материала производится на испытательных машинах, автоматически записывающих диаграмму растяжения  $F = f(\Delta l)$ . Для испытаний используют стандартные по форме и размерам образцы. Типичная диаграмма растяжения образца из малоуглеродистой стали представлена на рис. 2.6а.

Эту диаграмму можно условно разделить на четыре зоны. На начальном участке диаграммы (участок CA) наблюдается линейная зависимость между нагрузкой и удлинением образца (зона упругости). Здесь материал следует закону Гука. На участке АВ удлинение образца растет без заметного увеличения нагрузки (зона текучести), а горизонтальный участок диаграммы растяжения называется площадкой текучести. ВС - зона упрочнения, в которой зависимость между  $F$  и  $\Delta l$

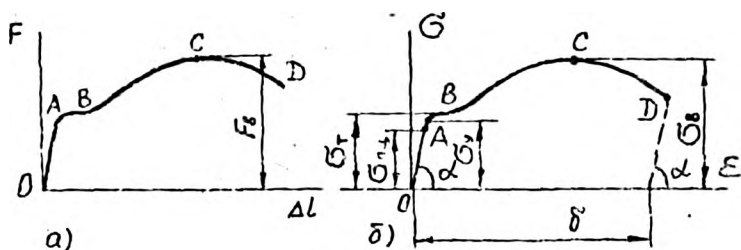


Рис. 2.6

линейна и удлинения растут быстрее нагрузки. СД – зона местной пластической деформации, в которой на образце образуется местное сужение "шейка". Образец в этой зоне удлиняется за счет пластической деформации шейки.

Чтобы исключить влияние размеров образца, диаграмму растяжения перестраивают в осях  $\sigma$ – $\epsilon$ , где  $\sigma$  – условное напряжение  $\sigma = F/A_0$ , а  $\epsilon$  – относительное удлинение;  $\epsilon = \Delta L/L$

Новая диаграмма называется диаграммой условных напряжений при растяжении (рис. 2.6б). Напряжения называются условными, так как сила делится на начальную площадь поперечного сечения, а не на действительную.

Наибольшее напряжение, до которого материал следует закону Гука, называется пределом пропорциональности  $\sigma_{пц}$ .

Наибольшее напряжение, до которого материал не получает заметных остаточных деформаций, называется пределом упругости  $\sigma_u$ .

Напряжение, при котором происходит рост пластических деформаций без заметного увеличения нагрузки, называется пределом текучести  $\sigma_t$ .

Для материалов, не имеющих ярко выраженной площадки текучести, вводится понятие условного предела текучести, под которым имеют в виду напряжение, вызывающее остаточную (пластическую) деформацию, равную 0,2% первоначальной длины образца.

Пределом прочности или временным сопротивлением  $\sigma_B$  называется отношение наибольшей нагрузки  $F_B$  к первоначальной площади поперечного сечения образца.

Пластические свойства материала характеризуют две величины.

Относительное удлинение при разрыве

$$\delta = \frac{L_1 - L_0}{L_0} 100\% ; \quad (2.7)$$

и относительное остаточное сужение при разрыве

$$\psi = \frac{F_1 - F_0}{F_0} 100\% , \quad (2.8)$$

где  $L_1$  - расчетная длина образца после разрыва;  
 $F_1$  - площадь поперечного сечения шейки после разрыва.

Чем больше  $\delta$  и  $\psi$ , тем материал пластичнее.

Рассмотренные выше напряжения  $\sigma_{пч}$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_T$ ,  $\sigma_B$  являются характеристиками прочности материала, а величины  $\delta$  и  $\psi$  - характеристиками пластичности.

ИСПЫТАНИЕ НА СЖАТИЕ. При испытании на сжатие образцы обычно имеют форму кубиков или цилиндров высотой  $h \leq 3d$ . Диаграмма сжатия образца из малоуглеродистой стали в начальной стадии совпадает с диаграммой растяжения (рис. 2.7). После точки С материал

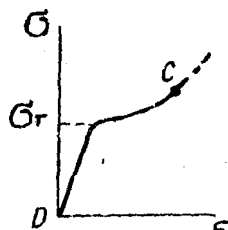


Рис. 2.7

образца расплющивается, но не разрушается, и нагрузка быстро растет. Поэтому для пластичных материалов отсутствует понятие предела прочности при сжатии. Для очень пластичных материалов пределы текучести при растяжении и сжатии равны между собой.

Хрупкие материалы при сжатии разрушаются внезапно, и разрушение происходит по наклонным или продольным плоскостям. Диа-

грамма сжатия хрупких материалов, как правило, не имеет площадки текучести. На диаграмме наблюдается с самого начала криволинейность, и предел упругости близок к пределу прочности.

Диаграмма растяжения хрупких материалов подобна диаграмме сжатия, но сравнение пределов прочности показывает, что хрупкие материалы значительно хуже работают на растяжение.

#### 2.4. Допускаемые напряжения. Условие прочности

Для безопасной работы машин и сооружений необходимо, чтобы максимальные напряжения, возникающие в их деталях, были меньше опасных (предельных) для данного материала.

Для пластичных материалов предельным напряжением будет предел

текуести  $\sigma_{пред} = \sigma_T$ , т.к. в этом случае возникают заметные пластические деформации, что недопустимо для большинства элементов машин и сооружений. Для хрупких же материалов опасным напряжением является предел прочности  $\sigma_{пред} = \sigma_B$ .

Отношение предельного напряжения к расчетному (рабочему) должно быть всегда больше единицы и называется коэффициентом запаса прочности

$$n = \sigma_{пред} / \sigma_{max}.$$

Коэффициент запаса зависит от свойств материала, характера действующих нагрузок, условий эксплуатации детали и т.д. При расчетах деталей машин требуемый коэффициент запаса  $[n]$  устанавливается в соответствии с нормами прочности, применяемыми в различных отраслях машиностроения:  $[n] = 2 \dots 4$  для пластичных материалов,  $[n] = 4 \dots 6$  для хрупких материалов.

В зависимости от коэффициента запаса устанавливается наибольшее напряжение, которое может быть допущено в элементе конструкции для обеспечения его прочности и называется допускаемым напряжением:

$$[\sigma] = \sigma_{пред} / [n]. \quad (2.9)$$

**УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ.** Прочность детали будет обеспечена, если возникающее в ней максимальное напряжение не будет превышать допускаемого напряжения для данного материала.

$$\sigma_{max} \leq [\sigma] \quad - \text{условие прочности} \quad (2.10)$$

Напряжение в сечениях растянутого стержня определяется по формуле (2.2). Тогда условие прочности для растяжения (сжатия) запишется

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]. \quad (2.11)$$

Исходя из формулы (2.11), можно производить расчеты: проверочный, проектный, определение допускаемой нагрузки.

При проверочном расчете определяется наибольшее напряжение и сравнивается с допускаемым.

При проектном расчете определяется площадь поперечного сечения бруса при заданных материале и нагрузке.

В некоторых случаях требуется определить допускаемую нагрузку при известных поперечных размерах и материале.

При расчетах на жесткость работоспособность конструкции опре-

делается величиной предельных перемещений.

## 2.5. Статически неопределимые системы

Брусья и стержневые системы, в которых усилия могут быть определены только из уравнения статики, называют статически определимыми. Если число неизвестных усилий превышает число независимых уравнений статики, то система называется статически неопределимой. Степень статической неопределимости равна числу лишних неизвестных с позиции статики.

На основании закона Гука статически неопределимые системы легко решаются методами сопротивления материалов путем распределения усилий пропорционально деформациям стержней.

Величина деформации стержней устанавливается из условия их совместности составлением уравнений перемещений, кинематически возможных для данной системы. При составлении уравнений совместности деформаций поступают следующим образом: изображают систему в деформированном виде. Находят соотношения между абсолютными удлинениями стержней непосредственно по чертежу. Из найденных соотношений с помощью закона Гука устанавливают зависимость между неизвестными внутренними усилиями. Затем, подставляя данную зависимость в уравнения статики, находят сами неизвестные усилия. На этом раскрытие статической неопределимости стержневой системы заканчивается.

Большинство ошибок встречается при составлении условия совместности деформаций стержневой системы со стержнями, поворачивающимися при деформации.

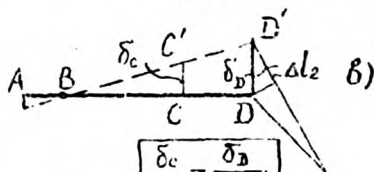
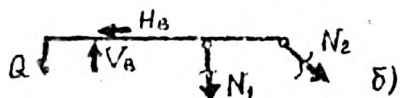
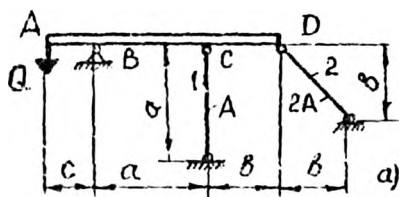
Особенности расчета в данном случае покажем на примере второй задачи.

По условию задачи № 2 [1] (рис. 2.8) необходимо сначала найти усилия в стержнях через нагрузку  $Q$ . Затем выразить напряжения и определить наибольшие из них. Приняв наибольшее напряжение равным допустимому, найдем допустимое значение нагрузки  $Q$ .

Задача нахождения усилий в стержнях через нагрузку статически неопределима. Из уравнения равновесия бруса только сумма моментов относительно опоры В не содержит в выражении реакции опор.

$$\sum M_B = 0; \quad -Qc + N_1 a + N_2 \cos 45^\circ (a + b) = 0. \quad (1)$$

Следовательно, для решения задачи мы имеем одно уравнение статики из трех независимых уравнений для плоской системы.



$$\frac{\delta_C}{a} = \frac{\delta_D}{a+b}$$

Рис. 2.8

Условие совместности деформаций составляется на основании того, что перемещение точек D и C пропорционально их расстояниям от шарнирной опоры (рис. 2.8а).

Наибольшее число ошибок связано с выражением перемещений через удлинения. Здесь полезно помнить, что перемещение поперечного сечения стержня является геометрической суммой перемещения, вызванного поворотом стержня как жесткого тела и удлинением.

Поэтому перемещение пред-

ставляет собой отношение удлинения стержня к косинусу угла между направлением перемещения и стержнем в силу малости перемещений:

$$\delta_C = \Delta l_1; \quad \delta_D = \Delta l_2 / \cos 45^\circ.$$

Из уравнений совместности деформаций устанавливаем на основании закона Гука недостающие зависимости между усилиями

$$\Delta l_1 = N_1 a / EA; \quad \Delta l_2 = N_2 b / EA \cos 45^\circ.$$

Тогда  $\delta l_1 / a = \delta l_2 / (a+b) \cos 45^\circ$ . Подставим в это выражение значения  $\delta l_1$  и  $\delta l_2$ , выраженные через усилия:

$$\frac{N_1 a}{EA} = \frac{N_2 b}{2EA \cos^2 45^\circ (a+b)}; \quad N_1 = \frac{EA N_2 b}{2EA \cos^2 45^\circ (a+b)} = \frac{N_2 b}{a+b} \quad (2)$$

Подставим выражение (2) в (1)

$$-Qc + N_2 \frac{ab}{a+b} + N_2 \cos 45^\circ (a+b) = 0;$$

$$-Qc + N_2 \left( \frac{ab}{a+b} + 0,7(a+b) \right) = 0;$$

$$N_2 = \frac{Qc}{\frac{ab}{a+b} + 0,7(a+b)} = Q \frac{c(a+b)}{ab + 0,7(a+b)^2}; \quad N_1 = \frac{Q \quad cb}{ab + 0,7(a+b)^2}.$$

Соответствующие значения

$$\sigma_{(1)} = \frac{Q}{A} \frac{cb}{ab + 0,7(a+b)^2};$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{Q}{2A} \frac{c(a+b)}{ab + 0,7(a+b)^2} = \frac{Q}{A} \frac{c(a+b)/2}{ab + 0,7(a+b)^2}.$$

Если  $a < b$ , то  $c(a+b)/2 < cb$ , следовательно,  $\sigma_{(1)} > \sigma_{(2)}$ , и условие прочности конструкции будет  $\sigma_{(1)} \leq [\sigma]$ .

Допускаемая нагрузка определяется из условия

$$\frac{Q_{д.п.}}{A} \frac{cb}{ab + 0,7(a+b)^2} \leq [\sigma] \quad Q_{д.п.} = [\sigma] A \frac{ab + 0,7(a+b)^2}{cb}.$$

Для определения предельной грузоподъемности в уравнение равновесия подставляют вместо продольных сил  $N$  их предельные значения, равные произведению площади на предел текучести.

Отношение найденного значения  $Q_{д.п.}^{пред}$  к коэффициенту запаса прочности ( $K = 1,5$ ) даст значение допускаемой нагрузки из расчета по разрушающим нагрузкам.

Расчет по разрушающим нагрузкам при этом же коэффициенте запаса прочности дает большую экономию материала, но не гарантирует от появления в стержневой системе остаточных деформаций.

Пример. Абсолютно жесткий брус (рис. 2.9а) опирается на шарнирно-неподвижную опору и прикреплен к двум стержням при помощи шарниров. Требуется: 1) найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу  $Q$ ; 2) найти допускаемую нагрузку  $Q_{д.п.}$ , приравняв большее из напряжений в двух стержнях допускаемому напряжению  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ; 3) найти предельную грузоподъемность системы  $Q_{д.п.}^K$  и допускаемую нагрузку  $Q_{д.п.}$ , если предел текучести  $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$  и запас прочности  $K = 1,5$ ; 4) сравнить величины, полученные при расчете по допускаемым напряжениям и допускаемым нагрузкам.

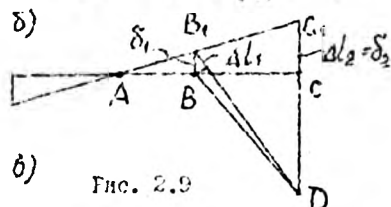
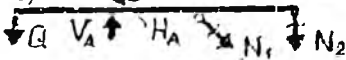
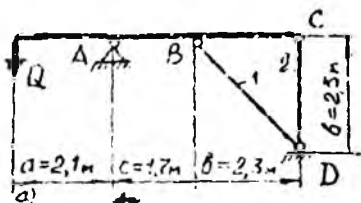


Рис. 2.9

$$\frac{N_1 l_1}{1,7 \cos 45^\circ EA} = \frac{N_2 l_2}{4EA}, \text{ но } l_2 = b; \quad l_1 = \frac{l_2}{\cos 45^\circ} = \frac{b}{\cos 45^\circ}.$$

Следовательно,  $\frac{N_1 b}{1,7 \cos 45^\circ EA} = \frac{N_2 b}{4EA}; \quad N_1 = 0,1062 N_2.$

Подставим значение  $N_1$  в уравнение статики:

$$0,1062 N_2 \cdot 1,7 \cdot 0,7 + N_2 (1,7 + 2,3) = 2,1 Q.$$

$$4,12 N_2 = 2,1 Q; \quad N_2 = 0,509 Q.$$

$$N_1 = 0,1062 N_2 = 0,1062 \cdot 0,509 Q = 0,054 Q.$$

Определим напряжения в стержнях:

$$\sigma^{(1)} = \frac{N_1}{A} = \frac{0,054 Q}{A} = \frac{0,054 Q}{17 \cdot 10^{-4}} = 31,7 Q \text{ (Па)};$$

$$\sigma^{(2)} = \frac{N_2}{2A} = \frac{0,509 Q}{2A} = \frac{0,509 Q}{2 \cdot 17 \cdot 10^{-4}} = 146,7 Q \text{ (Па)}.$$

Приравнявая большее из напряжений допусжаемому, находим  $Q_{\text{доп}}$ :

$$146,7 Q = [\sigma] = 160 \cdot 10^6.$$

Откуда

$$Q_{\text{доп}} = \frac{160 \cdot 10^6}{146,7} = 1,090 \cdot 10^6 \text{ Н} = 1090 \text{ кН}.$$

Решение. Запишем уравнение равновесия бруса (рис. 2.9б)

$$\sum M_A = 0;$$

$$Qa - N_1 c \sin 45^\circ - N_2 (c+b) = 0.$$

Запишем условие совместности деформации из рассмотрения рис. 2.9в:

$$\frac{\delta_1}{c} = \frac{\delta_2}{c+b};$$

$$\frac{\Delta l_1}{\cos 45^\circ \cdot 1,7} = \frac{\Delta l_2}{4}.$$

Из уравнения совместности деформаций установим на основании закона Гука зависимость между усилиями:

$$l_2 = b; \quad l_1 = \frac{l_2}{\cos 45^\circ} = \frac{b}{\cos 45^\circ}.$$



Определим предельную грузоподъемность:

$$N_1 = G_T A = 240 \cdot 10^6 \cdot 1,7 \cdot 10^{-4} = 408 \cdot 10^3 \text{ Н} = 408 \text{ кН};$$

$$N_2 = G_T 2A = 240 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 1,7 \cdot 10^{-4} = 816 \cdot 10^3 \text{ Н} = 816 \text{ кН};$$

$$Q_{21} = 816 \cdot 4 + 408 \cdot 1,7 \cdot 0,7; \quad Q_T^k = 1819 \text{ кН}.$$

$$\text{Определяем } Q_{2n} = \frac{Q_T^k}{k} = \frac{1819}{1,5} = 1212 \text{ кН}.$$

Сравниваем величину  $Q_{2n}$ , полученную из расчета по допускаемым напряжениям и по разрушающим нагрузкам:  $\frac{1212 - 1090}{1090} 100\% = 11\%$ .

Расчет по разрушающим нагрузкам позволяет увеличить нагрузку на 11% по сравнению с расчетом по допускаемым напряжениям.

**Задача № 3 [I].** Жесткий брус (рис. 2.10) прикреплен к двум стальным стержням с площадью поперечного сечения  $A$ , опирающимся на неподвижное основание. К брусу прикреплен средний ступенчатый стальной стержень с зазором  $\Delta$ . Требуется (без учета собственного веса): 1) установить, при какой силе  $H$  зазор закроется; 2) найти реакцию основания в нижнем сечении среднего стержня при заданной силе  $H$  и построить эпюру продольных сил для среднего стержня; 3) найти усилия и напряжения в крайних стержнях при заданной силе  $H$ ; 4) установить, на сколько градусов надо охладить средний стержень, чтобы реакция основания в нижнем сечении среднего стержня при заданной силе  $H$  обратилась в нуль.

**Решение.** Решение задачи определяется условием совместности деформаций, которое состоит в том, что удлинение среднего стержня не превышает суммы среднего удлинения крайних стержней и величины зазора.

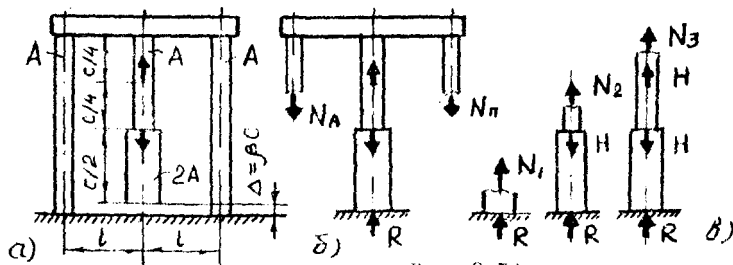


Рис. 2.10

$$\Delta l_c = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_n}{2} + \Delta \quad (1); \quad \Delta l_c = \frac{N_1 c/2}{E_2 A} + \frac{N_2 c/4}{EA} + \frac{N_3 c/4}{EA} + \alpha \Delta t c,$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_n = Nc/EA.$$

Подставив значения  $\Delta l_c$ ,  $\Delta l_1$  в (1), получим уравнение совместности деформаций, выраженное через усилия в стержнях на основании закона Гука:

$$\frac{N_1 c/2}{E_2 A} + \frac{N_2 c/4}{EA} + \frac{N_3 c/4}{EA} + \alpha \Delta t c = \frac{Nc}{EA} + \Delta. \quad (2)$$

Первые три члена левой части уравнения представляют собой удлинение среднего стержня под действием приложенных сил, а четвертый — удлинение, вызванное изменением температуры.

Здесь  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения материала;  $\Delta t$  — изменение температуры.

Правая часть уравнения равна величине зазора плюс удлинение крайнего стержня.

Совместно с выражениями продольных сил

$$\sum Y = 0; \quad N_1 = -R; \quad N_2 = -R + H; \quad N_3 = -R + H - H = -R$$

через реакцию (рис. 2. Юв), возникающую после перекрытия зазора в среднем стержне, получаем замкнутую систему уравнений, позволяющую дать ответы на все вопросы, поставленные в задаче.

1). Зазор закрывается при  $H$ , подсчитанном по уравнению (2) после подстановки в него значений  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  и  $N_1 = N_3 = N$  при  $R=0$  и  $\Delta t=0$ .

2). Реакция основания при заданном значении силы  $H$  находится из уравнения (2) при  $\Delta t=0$ .

3). Усилия в крайних стержнях при заданном значении  $H$  находятся из уравнения  $N_1 = N_3 = R/2$  через найденное значение  $R$ .

4). Исходя из  $R=0$ , по уравнению (2) найдем, на сколько градусов нужно охладить средний стержень.

При решении задачи необходимо обратить внимание на то, что изменение температуры среднего стержня вызывает перераспределение усилий и напряжений в стержнях. Одной из характерных особенностей статически неопределимых систем является то, что при нагреве или охлаждении в них могут возникать усилия и напряжения даже без нагрузки. Такие напряжения называют температурными. Так же без приложения внешней нагрузки могут возникать напряжения в статически неопределимых конструкциях в результате сборки как следствие негоч-

ности изготовления. Такие напряжения называются монтажными.

## Глава 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

### 3.1. Основные понятия

Сопротивление бруса различным видам деформаций зависит не только от площади и формы сечения, но и от ориентации его к направлению нагрузок. Если для исследований осевого растяжения-сжатия достаточно знать площадь сечения, то при исследовании изгиба необходимо знать геометрические характеристики сечения, существенно зависящие от его формы. При одной и той же площади бруска, имеющие различную форму поперечного сечения деформируются при изгибе по-разному. В этом легко убедиться на простом примере. Линейка сопротивляется изгибу по-разному в зависимости от направления осей симметрии, ее поперечного сечения.

Следовательно, в данном случае безразлично, как ориентировано сечение к плоскости действия внешних сил. Это говорит о том, что нужно принимать во внимание другие геометрические характеристики.

Статическим моментом площади сечения относительно оси называют взятую по всей площади сумму произведений элементарных площадок на координату удаления от данной оси (рис. 3.1).

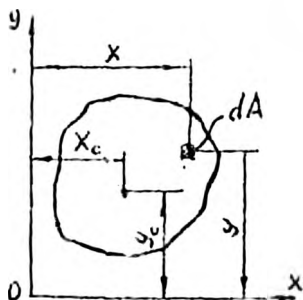


Рис. 3.1

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA.$$

В случае известных координат центра тяжести статический момент равен произведению площади фигуры на координату ее центра тяжести:

$$S_x = y_c A, \quad S_y = x_c A. \quad (3.1)$$

Осевым моментом инерции сечения относительно некоторой оси называется, взятая по всей его площади сумма произведений элементарных площадей на квадраты их расстояний от оси:

$$J_x = \int_A y^2 dA, \quad J_y = \int_A x^2 dA \quad (3.2)$$

Полярный момент инерции сечения относительно некоторой точки (полюса) в плоскости сечения называют, взяв по всей площади сумму произведений элементарных площадок на квадраты их расстояний от этой точки:

$$J_p = \int_A \rho^2 dA. \quad (3.3)$$

Центробежный момент инерции сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей называется, взяв по всей его площади сумму произведений элементарных площадок на произведение их координат:

$$J_{xy} = \int_A xy dA. \quad (3.4)$$

Осьевые и полярный моменты инерции, содержащие под интегралом координаты во второй степени, всегда положительны. Центробежный момент инерции содержит произведение координат в первой степени и, в зависимости от положения осей, может быть меньше нуля, равным нулю и больше нуля.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называют главными осями, что является достаточным признаком главных осей.

Если одна из осей является осью симметрии, то эти оси главные. Это легко доказывается представлением интеграла по всей площади суммой двух интегралов по симметричным частям (рис. 3.2). Каждый из них отличается только знаком координаты, следовательно, их сумма равна нулю.

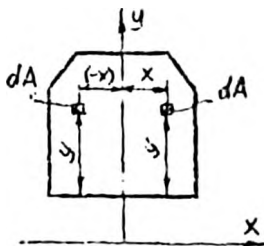


Рис. 3.2

Оси, проходящие через центр тяжести сечения, называют центральными осями. В центральных осях статические моменты инерции равны нулю. Центральные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называют главными центральными осями, а моменты инерции относительно этих осей — главными центральными моментами инерции сечения.

Часто ставится задача определения положений главных центральных осей и главных центральных моментов инерции сложного сечения. Для решения таких задач нужно знать моменты инерции простых сечений.

### 3.2. Моменты инерции простых фигур

Вычисление моментов инерции сечений простой формы интегрированием упрощается специальным выбором элемента площади. Для прямоугольного сечения (рис. 3.3) берется полоска шириной  $\delta$  и высотой  $dy$ . При  $dA = \delta dy$  интегрирование ведется по одной переменной  $y$ :

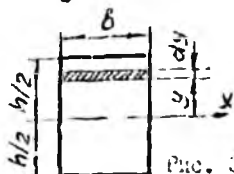


Рис. 3.3

$$J_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta dy y^2 = \frac{\delta h^3}{12}$$

Для круга (рис. 3.4) элемент берется в виде кольцевого сечения шириной  $\delta\rho$  и вычисляется полярный момент инерции. Осьвые находятся из условия равенства их суммы полярному.



Рис. 3.4

$$J_p = \int_A \rho^2 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi\rho^4}{2} \Big|_0^r = \frac{\pi r^4}{2}$$

$$J_x + J_y = J_p; \quad J_x = J_y = J_p/2 = \frac{\pi r^4}{4}$$

Моменты инерции других простых фигур имеются в справочниках по сопротивлению материалов. Моменты инерции прокатных профилей приводятся в таблицах ГОСТа.

Вычисление моментов инерции сложных фигур начинается с определения положения центра тяжести сечения и вычисления моментов инерции относительно центральных осей.

Затем определяют угол, на который следует повернуть оси, чтобы они стали главными, и определяют главные центральные моменты инерции сечения.

Чтобы решить эту задачу, необходимо знать формулы преобразования моментов инерции при переходе от центральных осей простой фи-

гунг к осям параллельным и формула преобразования моментов инерции при повороте осей.

### 3.3. Преобразование моментов инерции при параллельном переносе осей

Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей определяется преобразованием координат.

Если  $a, b$  — координаты центра новой системы в старой (рис. 3.5), то, выразив новые координаты через старые, представим интегралы для суммы трех интегралов:  $J_x = \int_A (y_i + a)^2 dA = \int_A y_i^2 dA + 2a \int_A y_i dA + a^2 \int_A dA = J_{x_c} + 2a S_A + a^2 A$ .

Первый из них представляет осевой момент инерции в старой системе. Второй — удвоенное произведение статического момента площади в старой системе на координату нового центра. Третьий — произведение квадрата расстояния между осями на площадь сечения.

Из перехода от центральных осей формула упрощается за счет того, что статический момент в старой системе равен нулю — оси центральные для данной фигуры.

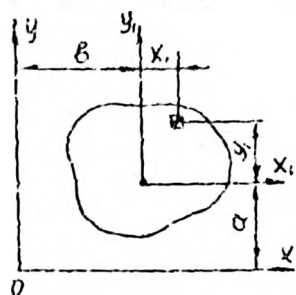


Рис. 3.5

Аналогичные формулы получаются и для центробежного момента инерции. Центробежный момент инерции сечения относительно осей, параллельных центральным, равен центробежному моменту относительно центральных осей плюс произведение координат начала новой системы в старой на площадь фигуры.

Осевой момент инерции в этом случае равен моменту инерции относительно центральной оси плюс произведение площади на квадрат расстояния между осями:

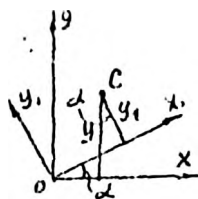
$$J_x = J_{x_c} + a^2 A. \quad (3.5)$$

### 3.4. Преобразование моментов инерции при повороте осей

Преобразование моментов инерции при повороте осей определяется

на основании Эйлеровых формул преобразования координатных осей (рис. 3.6).

Координаты произвольной точки С:



$$y_1 = y \cos \alpha - x \sin \alpha;$$

$$x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha;$$

$$J_{x_1} = \int_A y_1^2 dA; \quad J_{y_1} = \int_A x_1^2 dA; \quad J_{x_1 y_1} = \int_A x_1 y_1 dA.$$

Рис. 3.6

Подставляя в выражении новых моментов инерции выражения координат, получим формулы связи моментов инерции при повороте осей:

$$J_{x_1} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha;$$

$$J_{y_1} = J_y \cos^2 \alpha + J_x \sin^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha; \quad (3.6)$$

$$J_{x_1 y_1} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha.$$

Каждый момент инерции выражается через осевые и центробежный моменты инерции. Поскольку при повороте оси могут совпасть с главными, то, приравняв нулю центробежный момент инерции  $J_{x_1 y_1} = 0$ , определяем угол поворота осей до совпадения их с главными:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}. \quad (3.7)$$

Если найденное значение угла подставить в формулу, то получим главные моменты инерции сечения, однако их чаще находят из других соотношений, оставляя формулы поворота для проверки.

Сумма главных моментов инерции равно сумме осевых:

$$J_x + J_y = J_u + J_v = J_0.$$

Не изменяется при повороте осей еще одно соотношение -

$$J_x J_y - J_{xy}^2 = J_u J_v.$$

На основании теоремы Виета главные моменты инерции являются как корни квадратного уравнения.

$$J_{u,v} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}.$$

Сделав приведение подобных членов под радикалом, получим форму-

лу в обычном виде:

$$J_{uv} = \frac{1}{2}((J_x + J_y) \pm \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}). \quad (3.8)$$

Рассмотрим пример вычисления главных центральных моментов инерции сложных сечений.

**Пример.** Определить главные центральные моменты инерции сечения из двух листов, соединенных как указано на рис. 3.7.

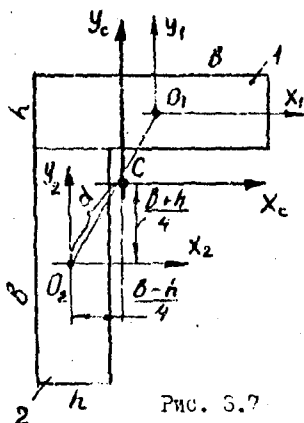


Рис. 3.7

**Решение.** Оси симметрии частей 1, 2,  $x_1 O_1 y_1$  и  $x_2 O_2 y_2$  являются главными центробежными осями для этих элементов (из достаточного признака главных осей).

$J_{x_1 y_1} = 0 = 0$  и  $J_{x_2 y_2} = 0$ , а центры тяжести сечений находятся на осях симметрии.

Для листов прямоугольного сечения

$$J_{x_1} = J_{y_2} = \frac{bh^3}{12} \quad \text{и} \quad J_{y_1} = J_{x_2} = \frac{hb^3}{12}.$$

Для нахождения главных центральных осей и главных центральных моментов инерции следует определить центр тяжести составного сечения и провести

на чертеже центральные оси с последующим вычислением моментов инерции относительно центральных осей составного сечения.

Определение центра тяжести системы предполагает выбор некоторых случайных (вспомогательных) осей, в которых

$$x_c = \frac{\sum S x_i}{\sum S}, \quad y_c = \frac{\sum S y_i}{\sum S}.$$

Естественно, что выбор этих случайных осей может быть в большей или меньшей степени рациональным, однако, на наш взгляд, рекомендации по выбору рациональных осей, приводимые в литературе, не бесспорны.

С нашей точки зрения, рациональными могут считаться только центральные оси составных элементов сечения, так как при определении центра тяжести требуется разделить расстояние между центрами тяжести составных элементов пропорционально площадям сечений этих элементов. Любые другие оси к этим расстояниям вносят поправки: удаление этих осей от центров тяжести, что усложняет расчет и



увеличивает погрешность на эти измерения.

Кроме того, для последующих операций вычисления моментов инерции составного сечения необходимо вычислить поправки на параллельный перенос осей. При определении центра тяжести составного сечения в центральных осях одной фигуры поправки совпадают с координатами. При вычислении в центральных осях второй фигуры вычисляются поправки для данной фигуры и производится проверка правильности предыдущего расчета:

$$y_{xc} = \frac{\sum S y_2}{\sum A} = \frac{0 + A \left( \frac{b}{2} - \frac{h}{2} \right)}{2A} = \frac{b-h}{4};$$

$$y_{yc} = \frac{\sum S x_c}{\sum A} = \frac{0 + A \left( \frac{b}{2} + \frac{h}{2} \right)}{2A} = \frac{b+h}{4}.$$

Очевидно, что при равенстве площадей двух одинаковых составляющих центр тяжести составного сечения находится между центрами (посередине) тяжести составных элементов.

Но и при любом количестве составляющих сложного сечения центр тяжести всей фигуры лежит внутри многоугольника, образованного последовательным соединением центров тяжести его элементов.

Вычислим центр тяжести в координатах  $X, O, Y$ :

$$x_{ic} = \frac{\sum S y_i}{\sum A} = -\frac{b-h}{4}; \quad y_{ic} = \frac{\sum S x_i}{\sum A} = -\frac{b+h}{4}.$$

Определим по формулам параллельного переноса следующие величины:

$$J_{xc} = \frac{bh^3}{12} + bh \left( \frac{b+h}{4} \right)^2 + \frac{hb^3}{12} + bh \left( \frac{b+h}{4} \right)^2;$$

$$J_{yc} = \frac{hb^3}{12} + bh \left( \frac{b-h}{4} \right)^2 + \frac{hb^3}{12} + bh \left( \frac{b-h}{4} \right)^2;$$

$$J_{xyc} = 0 + bh \left( \frac{b-h}{4} \right) \left( \frac{b+h}{4} \right) + 0 + bh \left( \frac{b-h}{4} \right) \left( \frac{b+h}{4} \right).$$

По записанным выражениям  $J_{xc}$ ,  $J_{yc}$ ,  $J_{xyc}$  можно вычислять главные моменты инерции по формуле (3.8), но мы получим общие формулы для моментов инерции фигуры, составленной из двух одинаковых элементов, повернутых на  $90^\circ$  относительно друг друга. В этом случае необходимо учесть, что  $J_x + J_y = J_p$ ;

$$J_{xc} = J_{pI} + 2bh \left( \frac{b+h}{4} \right)^2; \quad J_{yc} = J_{pI} + 2bh \left( \frac{b-h}{4} \right)^2;$$

$$J_{xcyc} = 0 + 2bh \left( \frac{b-h}{4} \right) \left( \frac{b+h}{4} \right);$$

$$J_{u,v} = \frac{1}{2} \left( (J_{xc} + J_{yc}) \pm \sqrt{(J_{xc} - J_{yc})^2 + 4J_{xcyc}^2} \right) =$$

$$= J_{pI} + bh \frac{(b+h)^2}{4} + bh \frac{(b-h)^2}{4} \pm \left( bh \frac{(b+h)^2}{4} + bh \frac{(b-h)^2}{4} \right).$$

Следовательно,  $J_{min} = J_v = J_{pI}$ ,  
 $J_{max} = J_u = J_{pI} + 2A_1 d^2$ , где  $d = \frac{(b+h)^2 + (b-h)^2}{4}$  (рис. 3.7).

Выводки верны для любых двух одинаковых фигур, то есть минимальный момент инерции будет равен полярному одной составляющей, а максимальный отличается от минимального на удвоенное произведение площади одной фигуры на квадрат расстояния между общим центром тяжести и центром тяжести фигуры.

Пример. В задаче № 7 контрольных заданий [1] требуется определить главные центральные моменты инерции сложного сечения, состоящего из двух прокатных профилей. Поставленные в задаче вопросы определяют последовательность расчета. Затруднения могут возникнуть при определении центробежного момента инерции уголка. В сортаменте приведены осевые и главные моменты инерции уголка.

Центробежный момент инерции уголка относительно центральных осей, параллельных полкам, определяется по формуле

$$J_{xy} = \pm \sqrt{(J_x - J_{min})(J_y - J_{min})}.$$

Знак в формуле выбирается в зависимости от положения уголка по отношению к координатным осям (рис. 3.8).

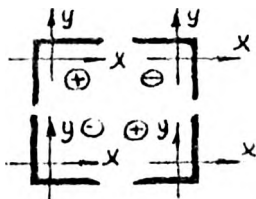
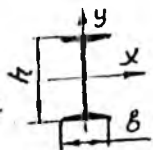


Рис. 3.8

Порядок расчета сечения, состоящего из двутавра № 20а и равнобокого уголка 100х100х12 (рис. 3.9), покажем на примере.

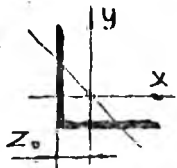
Из таблиц сортамента для двутавра (ГОСТ 8239-72)



$$A = 28,9 \text{ см}^2, \quad J_x = 2040 \text{ см}^4, \\ h = 20 \text{ см}, \quad b = 11 \text{ см};$$

для уголка ГОСТ 8509-72

$$Z_0 = 2,91 \text{ см}$$



$$A = 22,8 \text{ см}^2, \\ J_x = J_y = 209 \text{ см}^4, \\ J_{\text{min}} = 86,9 \text{ см}^4.$$

Центр тяжести всей фигуры удобнее всего определить в центробежных осях одной из составляющих фигур. Выберем вспомогательные оси  $X_1, Y_1$ , совпадающие с главными центральными осями двутавра

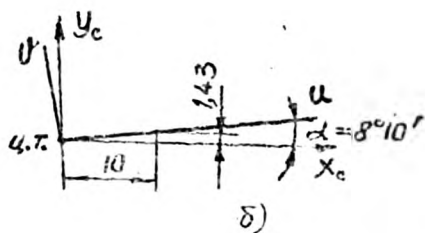
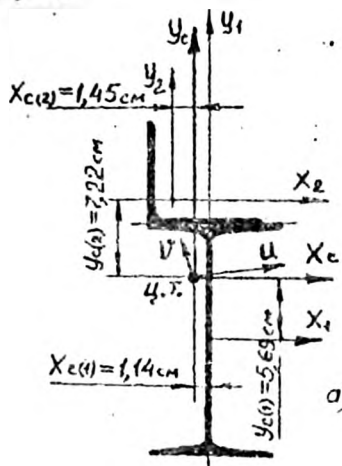


Рис. 3.9

Координаты центра тяжести сечения

$$X_{c(0)} = \frac{\sum S y_1}{\sum A} = \frac{22,8(-2,59) + 0}{22,8 + 28,9} = -1,14 \text{ см};$$

$$Y_{c(0)} = \frac{\sum S x_1}{\sum A} = \frac{22,8 \cdot 12,91 + 0}{22,8 + 28,9} = 5,69 \text{ см}.$$

Ошибка в определении центра тяжести сечения пересчерчивает весь

дальнейший расчет. Поэтому целесообразно вычислить еще раз координаты центра тяжести, взяв в качестве вспомогательных осей центральные оси угловка, параллельные стенкам (оси  $X_2, Y_2$ ):

$$X_{c2} = \frac{\sum S y_2}{\sum A} = \frac{0 + 28,9 \cdot 2,59}{22,8 + 28,9} = 1,45 \text{ см};$$

$$Y_{c2} = \frac{\sum S x_2}{\sum A} = \frac{0 + 28,9(-12,91)}{22,8 + 28,9} = -7,22 \text{ см}.$$

Проводим центральные оси ( $X_c, Y_c$ ) по всей фигуре и вычисляем моменты инерции относительно этих осей:

$$\begin{aligned} J_{X_c} &= J_{X_1} + A_1 \cdot y_{c1}^2 + J_{X_2} + A_2 \cdot y_{c2}^2 = \\ &= 2030 + 28,9 \cdot 5,69^2 + 209 + 22,8 \cdot 7,22^2 = 4360 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{Y_c} &= J_{Y_1} + A_1 \cdot x_{c1}^2 + J_{Y_2} + A_2 \cdot x_{c2}^2 = \\ &= 155 + 28,9 \cdot 1,14^2 + 209 + 22,8 \cdot 1,45^2 = 450 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{X_2 Y_2} &= -\sqrt{(J_x - J_{\min})(J_y - J_{\min})} = -(J_x - J_{\min}) = -(209 - 86,9) = \\ &= -122,1 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{X_c Y_c} &= 0 + A_1 x_{c1} y_{c1} + J_{X_2 Y_2} + A_2 x_{c2} y_{c2} = \\ &= 0 + 28,9(-1,14)5,69 - 122,1 + 22,8 \cdot 1,45(-7,22) = -548 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Находим главные центральные моменты инерции

$$\begin{aligned} J_{U,V} &= \frac{1}{2}((J_{X_c} + J_{Y_c}) \pm \sqrt{(J_{X_c} - J_{Y_c})^2 + 4J_{X_c Y_c}^2}) = \\ &= \frac{1}{2}((4360 + 450) \pm \sqrt{(4360 - 450)^2 + 4(-548)^2}) = \\ &= \frac{1}{2}(4810 \pm 3750); \quad J_U = 4280 \text{ см}^4; \quad J_V = 530 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Определяем положение главных центральных осей инерции сечения:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{J_{X_c Y_c}}{J_{X_c} - J_V} = -\frac{-548}{4360 - 530} = 0,143.$$

Найдем графическим построением тангенс на рис. 3.9 б:

$$\alpha = \arctg 0,143 = 8^\circ 10'.$$

Проводим оси  $u$  и  $v$ .

Следует отметить, что ось  $v$ , относительно которой момент инерции минимален, тяготеет к сечению, т.е. стремится пересечь наибольшую часть площади сечения.

## Глава 4. ОСНОВЫ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЙ В ТОЧКЕ

### 4.1. Элементы теории напряжений

Теория напряжений в механике сплошной среды занимается вычислением составляющих напряжений в точке по различным площадкам через известные компоненты по некоторым из площадок.

В курсе сопротивления материалов, как в прикладной дисциплине излагается упрощенная теория напряженного состояния применительно к вычислениям в брусе и, как следствие, не совсем строгая. И только в учебнике [3] приводится формулировка закона парности касательных напряжений, которая соответствует строгому изложению теории.

На двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательных напряжений, перпендикулярные к общему ребру, равны и направлены обе либо к ребру, либо от ребра (рис. 4.1).

В большинстве учебников указывается, что касательные напряжения на взаимно перпендикулярных площадках равны по величине и противоположны по знаку. В этом случае знак касательных напряжений связывают с нормалью к площадке.

Если касательные напряжения совпадают по направлению с нормалью к площадке, повернутой по часовой стрелке на  $90^\circ$  до совмещения с площадкой, то им приписывается знак плюс (+). Так, на рис. 4.1  $\tau_{xy}$  положительно, а  $\tau_{yx}$  отрицательно согласно

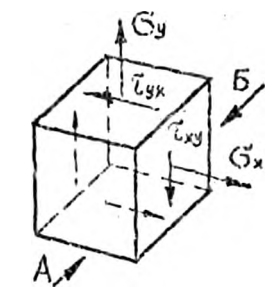


Рис. 4.1

этому правилу знаков, однако, если взглянуть на кубик с тыльной стороны (вид В), то знаки следует поменять на противоположные.

Поэтому ясна и понятна трактовка закона парности касательных напряжений, приведенная в учебнике [3], так как в нем напряжения (физические компоненты) рассматриваются как векторы и характеризуются величиной и направлением.

Направленные от сечения нормальные напряжения - растягивающие, они

положительны, с какой бы стороны мы не заглядывали на элемент. Что касается касательных напряжений, то их знак в упрощенной теории, рассматривающей преобразование компонент безотносительно осей координат, является весьма условным, имеющим значение лишь для данной задачи.

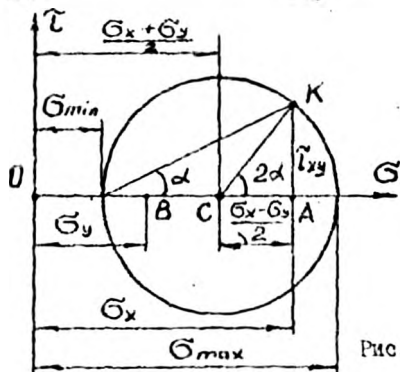
Общая теория относит напряжения к величинам, преобразующимся как произведение координат при повороте осей, подобно тому как преобразовываются моменты инерции при повороте осей (3.6). Если в формулах (3.6) заменить  $J_x$  на  $\sigma_x$ ,  $J_y$  на  $\sigma_y$ ,  $J_{xy}$  на  $\tau_{xy}$ , то для плоских преобразований  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  по площадке под углом  $\alpha$  и  $\alpha + 90^\circ$  напряжения будут

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha = \sigma_{x\alpha}; \\ \sigma_{(\alpha+90^\circ)} &= \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha = \sigma_{y\alpha}; \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha.\end{aligned}\quad (4.1)$$

Для изучения плоских преобразований напряженного состояния очень наглядно представление круговой диаграммы Мора.

На двух взаимно перпендикулярных направлениях (осях) откладывают нормальные и касательные напряжения (рис. 4.2):

$$\sigma_x = OA; \quad \sigma_y = OB; \quad \tau_{xy} = AK.$$



Отрезок АВ делят пополам и радиусом СК проводят окружность. На рис. 4.2

$$OC = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}; \quad CA = CB = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

Из чертежа

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \text{СК};$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \text{СК}, \text{ где}$$

$$\text{СК} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\text{и } \sigma_{\max}^{\min} = \frac{1}{2} \left( (\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right). \quad (4.2)$$

Формулу (4.2) можно получить аналогично формуле (3.8) заменой

$$\sigma_x \Rightarrow \tau_y, \sigma_y \Rightarrow \tau_x, \tilde{\tau}_{xy} \Rightarrow \tau_{xy}.$$

При преобразованиях компонент напряжений остаются неизменными (инвариантами)

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_x + \sigma_{(\alpha+90^\circ)} = \sigma_{\max} + \sigma_{\min}; \quad (4.3)$$

$$\sigma_x \sigma_y - \tilde{\tau}_{xy}^2 = \sigma_x \sigma_{(\alpha+90^\circ)} - \tilde{\tau}_\alpha^2 = \sigma_{\max} \sigma_{\min}. \quad (4.4)$$

Выражения (4.3) и (4.4) называют первым и вторым инвариантами плоского преобразования. Через неизменные сущности (инварианты) изучаются и познаются преобразования, т.е. изменения компонент при переходе к другим площадкам в данной точке тела. Естественно, что формула (4.2) получается как корни квадратного уравнения по теореме Виета (разд. 3.4).

Из круговых диаграмм

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tilde{\tau}_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\tilde{\tau}_{xy}}{\sigma_x - \sigma_{\min}}. \quad (4.5)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\tilde{\tau}_{xy}}{\sigma_x - \sigma_{\min}}. \quad (4.6)$$

Найденное значение угла  $\alpha$  должно быть приведено в соответствие с принятым правилом знаков для касательных напряжений и привязано к направлению оси  $\sigma$  диаграммы с одним из нормальных напряжений элемента. Это и дает те различия в знаках и записях формул (4.5), (4.6), которые встречаются в литературе.

#### 4.2. Понятие о трехосном напряженном состоянии

В предыдущем параграфе были рассмотрены плоские преобразования (плоское напряженное состояние) и найдены главные напряжения, обозначенные  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$ .

Главными напряжениями называют нормальные напряжения по главным площадкам. В свою очередь, главными называются площадки, на которых касательные напряжения равны нулю ( $\tilde{\tau} = 0$ ).

В любой точке тела существует по крайней мере три таких взаимно перпендикулярных площадки, на которых касательные напряжения нулевые. Главные напряжения принято обозначать  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . (4.7)

Напряженное состояние называют плоским, если одно из главных напряжений равно нулю:

$\sigma_3 = 0$  двухосное растяжение;

$\sigma_2 = 0$  смешанное напряженное состояние ;  
 $\sigma_1 = 0$  двухосное сжатие.

Напряженное состояние называют линейным, если два главных напряжения равны нулю.

Напряженное состояние называют объемным (трехосным), если все три главных напряжения отличны от нуля.

Так как плоские преобразования затрагивают только две из трех площадок, а на третьей главной площадке напряжения остаются неизменными, то плоское преобразование отображается одним из трех кругов полной диаграммы Мора (рис. 4.3).

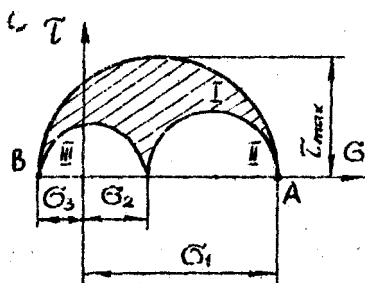


Рис. 4.3

Заштрихованная область представляет напряженное состояние по произвольным площадкам.

Из круговой диаграммы (рис. 4.3)

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (4.8)$$

Согласно принятым обозначениям главных напряжений (4.7)  $\sigma_1$  определяется крайней правой А, а  $\sigma_3$  - край

ней левой В точками круговых диаграмм Мора (рис. 4.3).

Только в частном случае, когда заштрихованная область исчезает полностью, а именно при  $\sigma_1 = \sigma_2$  или  $\sigma_2 = \sigma_3$ , запись максимальных касательных напряжений как полуразности первого и второго, второго и третьего главных напряжений не является ошибочной.

Без круговой диаграммы напряженного состояния трудно представить теорию напряженного состояния и ее следствия. Так, в учебных пособиях по теории пластичности встречается условие текучести материала Треска-Сен-Венана в форме

$$\begin{cases} \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T, \\ \sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_T, \\ \sigma_2 - \sigma_3 = \sigma_T, \end{cases} \quad (4.9)$$

Из теории (4.9) и круговых диаграмм видно, что  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  и круговые диаграммы вырождаются в точку, а  $\sigma_T = 0$ . Разумеется, при таких результатах выражение (4.9) не может быть никаким условием



из-за свертывания области возможных изменений напряженного состояния к чистому растяжению  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 > 0$  или чистому сжатию  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 < 0$ , равенство нулю  $\sigma_T$  свидетельствует о жидком (не твердом) состоянии материала, т.е. не является объектом исследования теории пластичности.

### 4.3. Деформации

Теория преобразования компонент деформированного состояния во многом повторяет теорию напряженного состояния. Так, для любого деформированного состояния имеют место по крайней мере три таких главных направления, по которым происходит только изменение линейных размеров: растяжение, т.е. увеличение размеров, или сжатие - сокращение линейных размеров при сохранении взаимной перпендикулярности этих направлений.

Направления, остающиеся взаимно-перпендикулярными в процессе деформации, называются главными направлениями деформирования, и деформации вдоль этих направлений тоже называются главными и обозначаются

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3. \quad (4.10)$$

Для графического представления законов вычисления деформаций по любым направлениям через известные деформации по трем направлениям можно воспользоваться диаграммой Мора в координатах  $\varepsilon - \gamma/2$  (рис. 4.4).

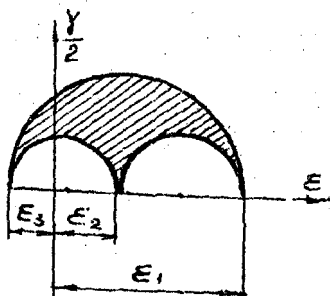


Рис. 4.4

Любые формулы теории деформирования могут быть получены через формулы теории напряженного состояния при замене  $\sigma_x \rightleftharpoons \varepsilon_x$ ,  $\sigma_y \rightleftharpoons \varepsilon_y$ ,  $\sigma_z \rightleftharpoons \varepsilon_z$ ,  $\tau_{xy} \rightleftharpoons 1/2 \gamma_{xy}$ ,  $\tau_{xz} \rightleftharpoons 1/2 \gamma_{xz}$ ,  $\tau_{zy} \rightleftharpoons 1/2 \gamma_{zy}$ .

#### 4.4. Обобщенный закон Гука

Деформации, в отличие от напряжений, — непосредственно измеримые характеристики состояния материала, по которым рассчитываются и напряжения с помощью закона Гука.

Закон Гука представляет собой обобщение на напряжения и деформации линейной зависимости между усилиями и перемещениями большинства элементов инженерных сооружений в стадии упругого деформирования и формулируется следующим образом: между компонентами деформаций и напряжений существует линейная зависимость.

Для угловых деформаций сдвига и касательных напряжений линейная зависимость сводится к прямой пропорциональности:

$$\tau_{xy} = \gamma_{xy} \cdot G, \quad (4.11)$$

где  $G$  — модуль сдвига (модуль упругости второго рода);  
 $\tau_{xy}$  — касательные напряжения по площадке, перпендикулярной к оси  $X$  вдоль оси  $Y$ ;  
 $\gamma_{xy}$  — уменьшение координатного угла взаимно перпендикулярных направлений  $X$  и  $Y$ .

Зависимость между нормальными напряжениями и линейными деформациями несколько сложнее из-за сопровождения поперечным сужением размеров при растяжении вдоль некоторого направления (рис. 4.5).

Можно представить в виде таблицы происходящие изменения напряженно-деформированного состояния.

причина деформации \ деформация	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$
$\epsilon_x$	$\frac{\sigma_x}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_y}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_z}{E}$
$\epsilon_y$	$-\nu \frac{\sigma_x}{E}$	$\frac{\sigma_y}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_z}{E}$
$\epsilon_z$	$-\nu \frac{\sigma_x}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_y}{E}$	$\frac{\sigma_z}{E}$

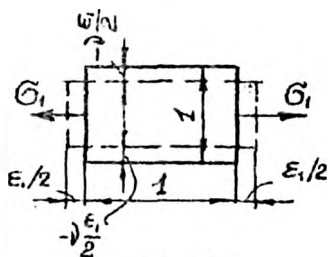


Рис. 4.5

Деформации из таблицы

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z));$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)); \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Выражения (4.11) и (4.12) представляют обобщенный закон Гука. Эти зависимости можно записать и в другом виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x(1+\nu) - \nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y(1+\nu) - \nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)); \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z(1+\nu) - \nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)); \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{E}(\tau_{xy}(1+\nu)); \quad \frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{yz}; \quad \frac{1}{2}\gamma_{xz} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{xz},$$

при этом 
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (4.14)$$

Такая форма записи показывает, что круговая диаграмма Мора для деформаций не только меньше масштабом в  $E/(1+\nu)$  раз, но имеет и смещение по оси  $\sigma(E)$  при  $\nu \neq 0$ .

Относительная объемная деформация

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (4.15)$$

Сумму трех нормальных напряжений можно представить чистым растяжением-сжатием:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\sigma_0 \quad \text{и} \quad \theta = \frac{3(1-2\nu)}{E}\sigma_0 = \frac{\sigma_0}{K},$$

где  $K$  - модуль объемной упругости (модуль третьего рода), равный

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (4.16)$$

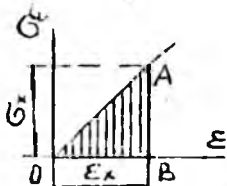
Таким образом, известны:  $E$  - модуль продольной упругости (модуль первого рода),  $G$  - модуль сдвига (модуль упругости второго рода),  $K$  - модуль объемной упругости (модуль третьего рода).

Для материалов, подчиняющихся закону Гука, теория требует определения двух постоянных, например, модуля продольной упругости  $E$  и коэффициента поперечной деформации  $\nu$ . Тогда остальные могут быть вычислены.

#### 4.5. Удельная потенциальная энергия деформации

В общем случае нагружения тела по граням его элемента, например, параллелепипеда с размерами ребер, равными 1, будут действовать как нормальные  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ , так и касательные  $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  напряжения (рис. 4.1). Очевидно, удельная потенциальная энергия, накопленная в единичном объеме, определяется суммой работ сил, распределенных на поверхности этого объема.

Нормальная сила  $\sigma_x$  на перемещении  $\epsilon_x$  совершает работу, равную площади треугольника OAB (рис. 4.6):  $\frac{1}{2}(\sigma_x \epsilon_x)$ , где под  $\epsilon_x$  понимается относительное удлинение вдоль оси X вызванное всеми действующими силами.



Аналогичные выражения работ дают и остальные нормальные составляющие. Касательная сила  $\tau_{yz}$  на перемещении  $\gamma_{yz}$  совершает работу  $\frac{1}{2}(\tau_{yz} \gamma_{yz})$ .

Рис. 4.6. Удельная энергия, накопленная в единице объема элемента, будет

$$u = \frac{\sigma_x \epsilon_x}{2} + \frac{\sigma_y \epsilon_y}{2} + \frac{\sigma_z \epsilon_z}{2} + \frac{\tau_{xy} \gamma_{xy}}{2} + \frac{\tau_{yz} \gamma_{yz}}{2} + \frac{\tau_{zx} \gamma_{zx}}{2}. \quad (4.17)$$

Если выразить компоненты деформаций через компоненты напряжений с помощью соотношений (4.11), (4.12) закона Гука, то выражение (4.17) запишется:

$$u = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2), \quad (4.18)$$

или в главных напряжениях:

$$u = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)). \quad (4.19)$$

Полная удельная потенциальная энергия деформации может быть разложена на удельную энергию, связанную с изменением объема элемента,

$$u_V = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (4.20)$$

и на удельную энергию, связанную с изменением формы элемента,

$$U_{\varphi} = \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1). \quad (4.21)$$

Задача № 4 контрольных заданий [1] решается с помощью формул раздела теории напряженного и деформированного состояния простой подстановкой и, как правило, не вызывает затруднений. Во избежание ошибок при установлении направления наибольшего главного напряжения в элементе следует иметь в виду, что его направления указывают стрелки касательных напряжений (рис. 4.7).

Определяя максимальные касательные напряжения по формуле

$$\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2,$$

очень важно выдержать условие

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  при назначении индексов максимальному и минимальному напряжениям, т.к. при плоском напряженном состоянии одно из главных напряжений равно нулю.

Удельную потенциальную энергию целесообразно подсчитывать по главным напряжениям.

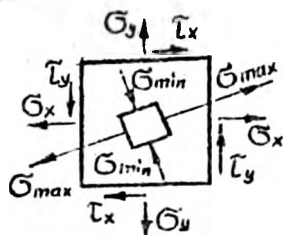


Рис. 4.7

Пример. Стальной кубик (рис. 4.8) находится под действием сил, создающих плоское напряженное состояние. Требуется найти: 1) главные напряжения и направления главных площадок; 2) максимальные касательные напряжения, равные наибольшей полуразности главных напряжений; 3) относительные деформации  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$ ; 4) относительное изменение объема; 5) удельную потенциальную энергию деформации.  $\sigma_x = 10 \text{ МПа}$ ;  $\sigma_y = -20 \text{ МПа}$ ;  $\tau_x = \tau_y = \tau = 10 \text{ МПа}$ .

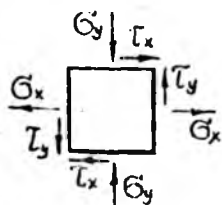


Рис. 4.8

Решение. По правилу знаков для касательных напряжений напряжение  $\tau_y = -10 \text{ МПа}$ , так как касательные напряжения считают положительными, если внешнюю нормаль к площадке, на которой действует это напряжение, надо повернуть на  $90^\circ$  по ходу часовой стрелки для того, чтобы ее направление совпало с направлением  $\tau$ .

Главные напряжения находим по формуле (4.2):

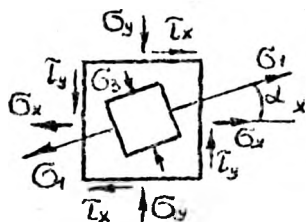
$$\begin{aligned} \sigma_{\max/\min} &= \frac{1}{2} ((\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}) = \\ &= \frac{1}{2} ((10 + (-20)) \pm \sqrt{(10 - (-20))^2 + 4(-10)^2}) = \frac{-10 \pm 36}{2}; \\ \sigma_{\max} &= 13 \text{ МПа}; \quad \sigma_{\min} = -23 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\sigma_1 = 13 \text{ МПа}$ ;  $\sigma_2 = 0$ ;  $\sigma_3 = -23 \text{ МПа}$ .

Направление главных площадок, определяемое углом наклона  $\alpha$  к оси  $X$  нормали главной площадки, находится по формулам, которые должны быть согласованы с правилом знаков для касательных напряжений.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha &= -\frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2(-10)}{10 - (-20)} = 0,666, \quad \text{или} \\ \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{\tau}{\sigma_x - \sigma_{\min}} = -\frac{(-10)}{10 - (-23)} = 0,303; \quad \alpha = 16^\circ 45'. \end{aligned}$$

Положительное значение угла  $\alpha$  откладываем от оси  $X$  против хода часовой стрелки (рис. 4.9).



Максимальные касательные напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{13 - (-23)}{2} = 18 \text{ МПа}.$$

Относительные деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} ((\sigma_x - \nu)(\sigma_z + \sigma_y)) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 10^5} (((10 - 0,3)(0 + (-20))) = 8 \cdot 10^{-5}; \end{aligned}$$

Рис. 4.9

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} ((\sigma_y - \nu)(\sigma_z + \sigma_x)) = \frac{1}{2 \cdot 10^5} (((-20 - 0,3)(0 + 10)) = 11,5 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} ((\sigma_z - \nu)(\sigma_y + \sigma_x)) = \frac{1}{2 \cdot 10^5} (((0 - 0,3)(-20 + 10)) = 1,5 \cdot 10^{-5}.$$

Относительное изменение объема

$$\theta = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1 - 2 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^5} (13 + 0 - 23) = 21 \cdot 10^{-5},$$

$$\text{или } \theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 8 \cdot 10^{-5} + 11,5 \cdot 10^{-5} + 1,5 \cdot 10^{-5} = 21 \cdot 10^{-5}$$

Удельная потенциальная энергии

$$\begin{aligned} U &= (1/2E)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)) = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 10^5} ((13^2 + \\ &+ 0 + (-23)^2 - 2 \cdot 0,3(0 + 0 + 13(-23))) = 2190 \text{ Дж/м}^3. \end{aligned}$$

## 5.1. Построение эпюр крутящих моментов

Кручение представляет простой вид нагружения, при котором в поперечном сечении возникают касательные напряжения, создающие крутящий момент относительно оси бруса (рис. 5.1).

$$M_k = \int_A \tau \rho dA. \quad (5.1)$$

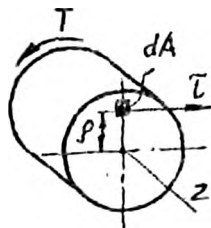


Рис. 5.2

Внешние пары сил, действующие на брус, называют скручивающими моментами ( $T$ ) в отличие от крутящих моментов, действующих в рассматриваемых сечениях.

Крутящий момент в поперечном сечении бруса определяется через внешние (скручивающие) моменты методом сечений.

Крутящий момент в рассматриваемом сечении вала численно равен алгебраической

сумме скручивающих моментов, действующих с одной стороны от рассматриваемого сечения. Обычно крутящий момент считается положительным, если внешний момент направлен по ходу часовой стрелки (если смотреть со стороны сечения к концу бруса). Можно принять и другое правило знаков, но при решении конкретной задачи необходимо давать один и тот же знак внешним моментам одинакового направления. Закон изменения крутящих моментов по длине бруса изображает в виде графика (эпюры) крутящих моментов.

Пример. Построить эпюру крутящих моментов для вала, изображенного на рис. 5.2, если внешние моменты составляют  $T_1 = 50$  Нм,  $T_2 = 300$  Нм,  $T_3 = 150$  Нм,  $T_4 = 100$  Нм.

Проведя сечения I, II, III и рассматривая равновесие оставшейся части, строим эпюру  $M_k$ , (рис. 5.25).

Каждая ордината эпюры в определенном масштабе характеризует величину крутящего момента, возникающего в сечении.

Там, где в сечении приложен момент, на эпюре имеет место скачок, равный величине этого момента. Если оценивается прочность бруса в сечении, где приложен сосредоточенный момент, то в расчет принимается большая по абсолютному значению ордината. Например, для сечения B в расчет примен  $M_k = 250$  Нм.

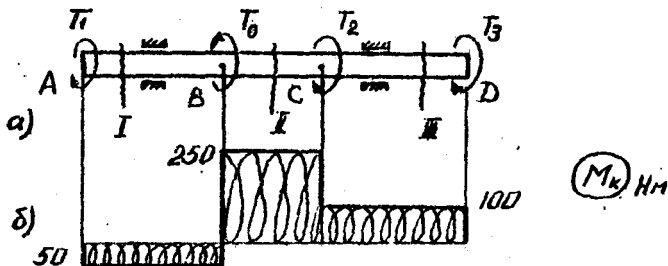


Рис. 5.2

### 5.2. Определение напряжений в брусках круглого поперечного сечения

Задача определения касательных напряжений по крутящему моменту в сечении более сложная, чем задача определения нормальных напряжений в бруске. В ряде случаев она решается только методами теории упругости или при помощи аналогий Прандтля и Надаи.

Для бруска круглого поперечного сечения можно дать решение на основании гипотезы плоских сечений. При этом происходит относительный поворот сечений так, что радиусы остаются прямыми, что подтверждается экспериментально.

Выражение (5.1) можно рассматривать как условие равновесия отсеченной части бруска, если крутящий момент в сечении выразить через внешние нагрузки.

Задача определения касательных напряжений относится к статически неопределимым и, следовательно, требует рассмотрения деформации.

Вырежем цилиндр радиусом  $\rho$ , длиной  $dz$  (рис. 5.3б) и закрепим левое сечение.

При деформации правое сечение поворачивается по отношению к левому на угол  $d\varphi$ . Из чертежа видно, что  $\rho dz = \rho d\varphi$ , откуда

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\gamma}{\rho}. \quad (5.2)$$

Применяя закон Гука при сдвиге получим

$$\boxed{\tau = G\gamma}, \quad (5.3)$$

$$G \frac{d\varphi}{dz} = \frac{\tau}{\rho}. \quad (5.4)$$



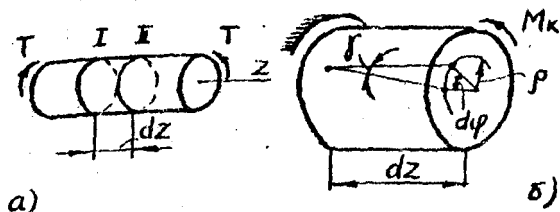


Рис. 5.3

В поперечных сечениях при кручении возникает касательные напряжения, направление которых в каждой точке перпендикулярно радиусу, соединяющему эту точку с центром сечения, а величина прямо пропорциональна расстоянию точки от центра. В центре (при  $\rho = 0$ ) касательные напряжения равны нулю, а в точках, расположенных в непосредственной близости от внешней поверхности бруса (вала), они наибольшие.

Подставляя значение (5.4) в уравнение (5.1) и учитывая, что  $\tilde{\tau}/\rho$  не зависит от координат точки в сечении, т.е.  $\tilde{\tau}/\rho = \text{const}$ , получим

$$M_k = \frac{\tilde{\tau}}{\rho} \int_A \rho^2 dA = \frac{\tilde{\tau}}{\rho} J_p, \quad (5.5)$$

где  $J_p$  - полярный момент инерции сечения относительно оси бруса.

Решая систему из уравнений (5.4) и (5.5) относительно  $\tilde{\tau}$  и  $\varphi$ , получаем

$$\tilde{\tau} = \frac{M_k}{J_p} \rho, \quad (5.6)$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_k}{GJ_p} \quad (5.7)$$

### 5.3. Расчеты на прочность и жесткость при кручении

Максимальные напряжения будут у поверхности вала, т.е. при  $\rho = d/2$ , тогда

$$\tilde{\tau}_{\max} = \frac{M_k}{W_k}, \quad (5.8)$$

где  $W_k$  — геометрическая характеристика, называемая моментом сопротивления кручению с размерностью  $\text{см}^3$ , для круглого сечения  $W_k = J_p / \beta_{\max} = 2J_p / d = \pi d^3 / 16 = 0,2 d^3$

В отличие от формулы (5.6), дающей значения касательных напряжений в любой точке сечения вала, формула (5.8) определяет максимальное значение касательных напряжений.

Для полого круглого сечения с внутренним диаметром  $d$  и наружным  $D$

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4); \quad W_k = W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4), \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{d}{D}.$$

Полученные формулы позволяют оценить прочность стержня при кручении.

Из условия прочности

$$\tau = \frac{M_k}{W_k} \leq [\tau] \quad (5.9)$$

можно установить допустимую нагрузку ( $T$ ) или подобрать площадь сечения ( $A$ ). Напомним, что  $[\tau]$  устанавливаются, как и для сдвига, из теорий прочности.

При оценке работоспособности конструкции по условию жесткости необходимо знать угол, на который поворачивается сечение под внешней нагрузкой. Его можно определить, интегрируя выражение (5.7) от нуля до  $L$ .

$$\varphi = \int_0^L \frac{M_k dz}{G J_p}.$$

Если на участке стержня внешняя нагрузка и жесткость постоянны, то угол закручивания (угловая деформация)

$$\varphi = \frac{M_k L}{G J_p} \quad (5.10)$$

Сопоставляя формулы для определения напряжений и углов закручивания видно, что напряжения определяются внешней нагрузкой и формой ( $W_k$ ) поперечного сечения, а на деформацию, кроме того, влияют свойства материала ( $G$ ) и длина стержня ( $L$ ).

Для ограничения деформаций их сравнивают с допустимыми, которые могут задаваться в абсолютных и относительных величинах, то есть условие жесткости можно записать:

$$\varphi \leq [\varphi] \quad \text{и} \quad \theta = \frac{M_k l}{G J_p} \leq [\theta]. \quad (5.11)$$

Здесь  $M_k$  соответствует участку стержня с максимальным крутящим моментом;  $[\theta]$  – допустимый относительный угол закручивания.

Для оценки прочности и жесткости стержня необходимо установить положение опасного сечения и выявить участки стержня с наибольшим крутящим моментом.

При расчете валов в ряде случаев величины внешних скручивающих моментов определяются по величине передаваемой мощности и скорости вращения вала. Если вал делает  $n$  оборотов в минуту, то угловая скорость  $\omega = \pi n / 30$ .

Мощность как работа в единицу времени

$$W = T\omega, \quad \text{откуда} \quad T = \frac{30W}{\pi n}. \quad (5.12)$$

Если мощность задана в (кВт), то  $M_k$  – в (кНм).

Покажем пример решения задачи № 5 контрольных заданий [I].

**Задача 5.** К стальному валу приложены три известных момента:

$T_1, T_2, T_3$  (рис. 5.4а). Требуется: 1) установить, при каком значении момента  $X$  угол поворота правого концевого сечения вала равен нулю; 2) для найденного значения  $X$  построить эпюру крутящих моментов; 3) при заданном значении  $[T]$  определить диаметр вала из расчета на прочность; 4) построить эпюру углов закручивания; 5) найти наибольший относительный угол закручивания (на I м).

$l_1 = 2\text{ м}; l_2 = 2\text{ м}; l_3 = 1\text{ м}; l_4 = 2\text{ м}; T_1 = T_3 = 2\text{ кНм}; T_2 = 1\text{ кНм}; G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}; [T] = 40 \text{ МПа}$ .

**Решение.** Одним из элементов решения задач, вызывающих затруднения у студентов, является построение эпюр внутренних силовых факторов и перемещений, в то время как по ним выполняется расчет на прочность и жесткость элементов конструкций.

Так, в задаче № 5 (I) для решения проще всего построить эпюру крутящих моментов через неизвестный скручивающий момент  $X$ , рассматривая равновесие правой отсеченной части (рис. 5.4б), так как слева (в заделке) момент неизвестен.

Из условия, что угол поворота правого концевого сечения равен нулю:  $\varphi_p = 0$ ,

$$\varphi_p = \frac{X l_2}{6J_p} + \frac{(T_2 + X) l_1}{6J_p} + \frac{(T_3 + X - T_2) l_3}{6J_p} + \frac{(T_3 + X - T_2 - T_1) l_4}{6J_p} = 0. \quad (1)$$

Найдем  $X$ . Подставив значения скручивающих моментов  $T_1, T_2, T_3$  в уравнение (1) получим  $X = -285 \text{ Н.м}$ .

После определения  $X$  следует уточнить эпюру крутящих моментов (рис. 5.4г).

Уточнение состоит в том, что вместо неизвестного  $X$  подставляется его значение - 285 Н·м.

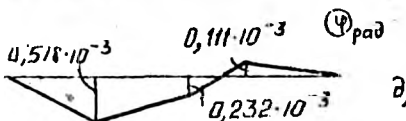
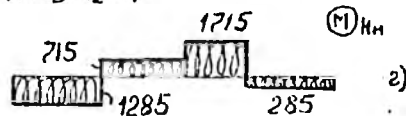
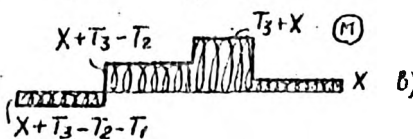
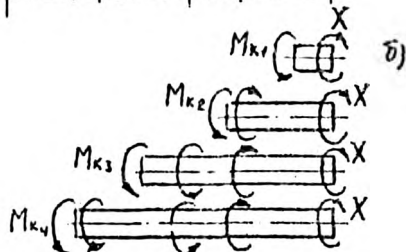
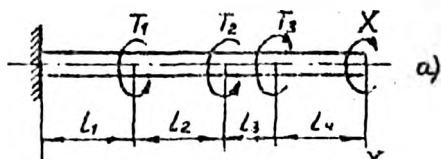
По эпюре крутящих моментов устанавливается максимальная ордината и из условия прочности (5.9)

$$W_k \geq \frac{M_{k \max}}{[\tau]} = \frac{1715}{80 \cdot 10^6} = 21,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3; \quad W_k = 21,4 \text{ см}^3;$$

для круглого сечения  $W_k \approx 0,2d^3$ ; откуда  $d \geq \sqrt[3]{21,4/0,2} = 4,76 \text{ см}$

Принимаем  $d = 50 \text{ мм}$ ;

$$J_p \approx 0,1d^4 = 0,1 \cdot 5^4 = 62,5 \text{ см}^4.$$



При построении эпюры углов закручивания следует иметь в виду, что график углов закручивания начинается с нуля в заделке и представляет собой непрерывную ломаную линию, приходящую в нуль в правом сечении (согласно условию задачи). Для вала постоянного сечения тангенс угла наклона графика пропорционален крутящим моментам (рис. 5.4д).

Угол закручивания в конце участка равен углу закручивания в его начале плюс отношение произведения крутящего момента на участке на его длину к жесткости сечения.

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \frac{M_{ki} l_i}{G J_p}$$

Рис. 5.4

$$\varphi_1 = \frac{M_{K1} l_1}{GJ_p} = \frac{-1285 \cdot 2}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 62,5 \cdot 10^{-8}} = -0,518 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{M_{K2} l_2}{GJ_p} = -0,518 \cdot 10^{-3} + \frac{715 \cdot 2}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 62,5 \cdot 10^{-8}} = -0,232 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 + \frac{M_{K3} l_3}{GJ_p} = -0,232 \cdot 10^{-3} + 0,343 \cdot 10^{-3} = 0,111 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_4 = \varphi_3 + \frac{M_{K4} l_4}{GJ_p} = 0,111 \cdot 10^{-3} - 0,111 \cdot 10^{-3} = 0.$$

Относительный угол закручивания пропорционален крутящему моменту

$$\theta_{\max} = \frac{M_{K\max} \cdot l}{GJ_p} = \frac{1715}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,1(0,05)^4} = 0,343 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м.}$$

Эту задачу можно было решать, используя принцип независимости действия сил. При этом скручивающий момент  $T_1$  скручивает вал на длине  $l_1$ , момент  $T_2$  — на длине  $l_1 + l_2$ , момент  $T_3$  — на длине  $l_1 + l_2 + l_3$  и момент  $X$  скручивает весь вал:  $l_1 + l_2 + l_3 + l_4$ . Так как по условию задачи угол поворота концевого сечения равен 0, то

$$-\frac{T_1 l_1}{GJ_p} - \frac{T_2 (l_1 + l_2)}{GJ_p} + \frac{T_3 (l_1 + l_2 + l_3)}{GJ_p} + \frac{X (l_1 + l_2 + l_3 + l_4)}{GJ_p} = 0.$$

Знаки перед слагаемыми определяются направлением скручивающих моментов. Подставляя числовые значения моментов и длин соответствующих участков в уравнение перемещений, получим

$$-\frac{2 \cdot 10^3 \cdot 2}{GJ_p} - \frac{1 \cdot 10^3 (2+2)}{GJ_p} + \frac{2 \cdot 10^3 (2+2+1)}{GJ_p} + \frac{X (2+2+1+2)}{GJ_p} = 0,$$

откуда  $X = -285 \text{ Н}\cdot\text{м}$ .

## Глава 6. ИЗГИБ

### 6.1. Общие сведения

Изгиб представляет такую деформацию, при которой в поперечных сечениях возникают изгибающий момент и поперечная сила, а все остальные внутренние силовые факторы равны нулю. При изгибе происходит искривление осей прямых или изменение кривизны у кривых

брусев. Брус с прямой осью, работающий на изгиб, называют балкой.

Часть внешних сил, реакции опор, действующих на балку, подлежат определению до расчета на изгиб. Если число неизвестных (реакций) не превышает числа независимых уравнений статики, которые могут быть составлены для обеспечения равновесия балки, то она считается статически определимой и реакции находят методами теоретической механики из уравнений равновесия. Если число неизвестных превышает число независимых уравнений статики, то балка или брус считается статически неопределимым и реакции определяются методами сопротивления материалов.

### 6.2. Типы опор балок

Различают три типа опор плоских систем, имеющих соответственно три, две и одну реакцию, по числу накладываемых связей (рис. 6.1).

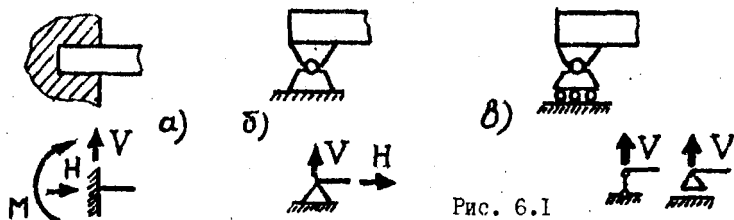


Рис. 6.1

В заделке (заделке) возникают две составляющие реакции и реактивный момент (рис. 6.1а).

Шарнирно-неподвижная опора (рис. 6.1б) имеет две составляющие реакции. Шарнирно-подвижная опора (рис. 6.1в) накладывает одну связь, и возникает соответственно одна составляющая реакция.

Статически определимая балка, состоящая из одного бруса, может быть закреплена либо заделкой одного конца, либо она опирается в двух сечениях на шарнирно-подвижную и шарнирно-неподвижную опоры. В этом случае для определения трех реакций можно составить необходимое число уравнений статики.

### 6.3. Определение внутренних сил

Изгибающий момент  $M$  и поперечную силу  $Q$  находят методом сечений из условия равновесия отсеченной части бруса, находящейся под

действием внешних и внутренних сил (рис. 6.2).

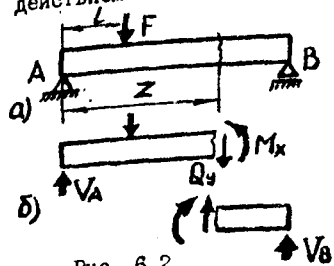


Рис. 6.2

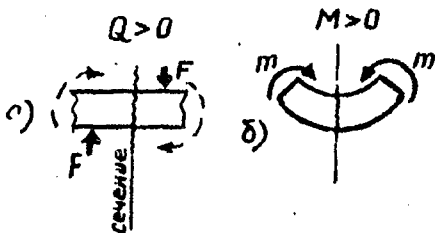


Рис. 6.3

Поперечная сила численно равна алгебраической сумме проекций на ось  $Y$  всех сил, взятых по одну сторону от сечения. В выражение для определения  $Q$  внешние силы, направленные вверх, для левой части балки входят со знаком плюс, для правой - минус. Поперечная сила положительна, если стремится повернуть рассматриваемую часть балки по часовой стрелке (рис. 6.3а). Каждая сила, стремящаяся повернуть часть балки относительно сечения по часовой стрелке, вызывает положительную поперечную силу и в выражение входит со знаком плюс (рис. 6.3а).

Изгибающий момент равен сумме моментов всех сил, взятых по одну сторону от сечения относительно оси в сечении. Изгибающий момент считается положительным, если балка изгибается выпуклостью вниз (верхние волокна сжаты). Внешние силы входят в выражение изгибающего момента со знаком плюс, если часть балки между местом приложения сил и рассматриваемым сечением они изгибают выпуклостью вниз (рис. 6.3б).

#### 6.4. Дифференциальные зависимости при изгибе

Для построения и контроля правильности построения эпюр  $Q$  и  $M$  полезны дифференциальные зависимости при изгибе между интенсивностью распределенной нагрузки  $q$ , поперечной силой и изгибающим моментом.

Вырежем элемент балки (рис. 6.4а,б) двумя сечениями  $Z$  и  $Z+dz$ , полагая, что в сечении  $Z+dz$  внутренние силовые факторы  $Q$  и  $M$  получают приращение  $dQ$  и  $dM$ .

Запишем уравнения равновесия элемента  $dz$ :

$$\sum Y = Q + q dz - (Q + dQ) = 0;$$

$$\sum M_c = M + Q dz + q \frac{dz^2}{2} - (M + dM) = 0.$$

После приведения подобных членов получим

$$q = \frac{dQ}{dz} \quad (6.1)$$

$$Q = \frac{dM}{dz} \quad (6.2)$$

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = \frac{dQ}{dz} = q \quad (6.3)$$

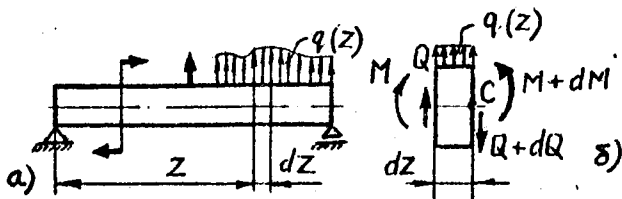


Рис. 6.4

Из дифференциальных зависимостей следует: на участках балки, где нет распределенной нагрузки, эпюра поперечных сил постоянная и изгибающий момент изменяется по линейному закону.

Там, где на балке приложена равномерно распределенная нагрузка поперечная сила изменяется по линейному закону, а эпюра изгибающих моментов изменяется по квадратной параболе.

Эпюры, как правило, имеют вид простых геометрических фигур и имеют конечные разрывы (скачки).

На эпюре поперечных сил имеют место скачки (конечные разрывы) в тех сечениях, в которых на брус действуют сосредоточенные силы (в том числе и реакции опор).

На эпюре изгибающих моментов скачок - в том сечении, где приложен сосредоточенный момент, в том числе и реактивный момент в заделке.

Величина скачка, разность значений эпюр при приближении к сечению справа и слева численно равна внешней силе, приложенной в сечении на эпюре \$Q\$, и внешнему моменту на эпюре \$M\$.

**Экстремальные** значения изгибающих моментов наблюдаются в сечениях по длине балки, где эпюры поперечных сил проходят через нуль.



## 6.5. Определение нормальных напряжений.

### Расчет на прочность

Нормальные напряжения при изгибе удовлетворяют следующим условиям:

$$M = \int_A \sigma y dA; \quad (1) \quad \int_A \sigma x dA; \quad (2) \quad \int_A \sigma dA = 0, \quad (3)$$

которые могут рассматриваться как условия равновесия элемента балки (рис. 6.5), испытывающего чистый изгиб (в сечениях возникает только изгибающий момент).

Задача нахождения формулы нормальных напряжений при изгибе неразрешима с помощью одних уравнений статики, т.е. относится к классу статически неопределимых. Для решения таких задач необходимо составить уравнение совместности деформаций. Условие совместности деформаций при выводе формулы нормальных напряжений записывается на основании двух гипотез, называемых гипотезами Бернулли: поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации;

волокна в поперечном направлении друг на друга не надавливают.

Величина относительной деформации из первой гипотезы, как правило, выражается графически. Деформация элемента, ограниченного двумя поперечными сечениями  $Z$  и  $Z + dz$ , характеризуется удлинением волокон, расположенных выше нейтрального слоя, и укорочением волокон, расположенных ниже нейтрального слоя (рис. 6.5б).

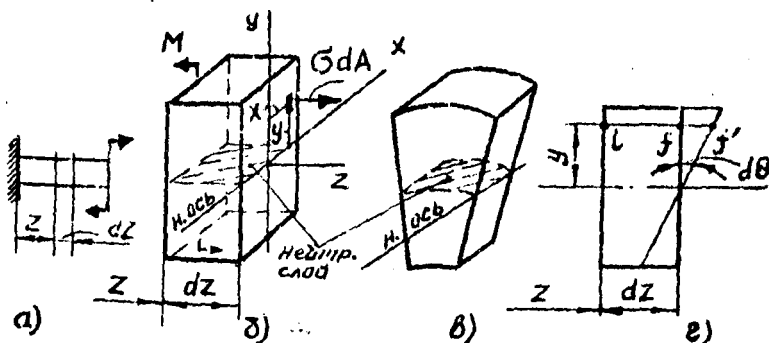


Рис. 6.5

Пересечение нейтрального слоя (слоя, не изменяющего своей длины при деформации) с плоскостью поперечного сечения образует линию, которая называется нейтральной осью (рис. 6.5б, в).

При деформации плоское сечение  $z + dz$  поворачивается по отношению к сечению  $z$ , оставаясь плоским. Из рис. 6.5г видно, что отношение приращения длины полонка  $df$  к удалению его от нейтрального слоя будет  $df/y = \operatorname{tg} d\theta \approx d\theta = \operatorname{const}$ ;

так как  $df' = \Delta dz = \varepsilon dz$ , то  $\frac{\varepsilon dz}{y} = \frac{\sigma}{E} \frac{dz}{y} = d\theta$ ;

$$\text{откуда } \frac{\sigma}{y} = E \frac{d\theta}{dz} = \operatorname{const}. \quad (6.4)$$

Решая выражение (6.4) совместно с условием равновесия (I), приходим

$$M = \int_A \sigma y dA = \frac{\sigma}{y} \int_A y^2 dA = \frac{\sigma}{y} J_x, \quad \text{или} \quad \boxed{\sigma = \frac{M}{J_x} y} \quad (6.5)$$

Следовательно, нормальные напряжения в сечении изменяются по линейному закону и достигают наибольшего значения в наиболее удаленных от нейтральной оси точках поперечного сечения. На нейтральной оси нормальные напряжения равны нулю.

Рассматривая выражение (6.4) с условиями равновесия

$$\int_A \sigma x dA = \frac{\sigma}{y} \int_A xy dA = 0 \quad (\text{т.к. } \frac{\sigma}{y} \neq 0, \text{ то } J_{xy} = 0),$$

$$\int_A \sigma dA = \frac{\sigma}{y} \int_A y dA = 0 \quad (\text{т.к. } \frac{\sigma}{y} \neq 0, \text{ то } S_x = 0),$$

устанавливаем, что нейтральная ось является главной центральной осью сечения.

Для определения наибольших напряжений и расчетов на прочность формулу нормальных напряжений записывают в следующем виде:

$$\sigma_{\max} = M/W_x, \quad (6.6)$$

где  $W_x$  — момент сопротивления сечения изгибу или осевой момент сопротивления. Он равен отношению момента инерции сечения к максимальной ординате:

$$W_x = J_x / y_{\max}. \quad (6.7)$$

Условие прочности ограничивает максимальные напряжения величиной допускаемых:

$$\sigma_{\max} = M/W_x \leq [\sigma]. \quad (6.8)$$

Гипотеза плоских сечений, положенная в основу вывода формулы нормальных напряжений, подтверждается деформацией при чистом изгибе. При поперечном изгибе неизбежна деформация сечений, как следствие неравномерного распределения касательных напряжений по поперечному сечению при изгибе. Однако, если поперечная сила постоянна или изменяется незначительно, то деформация происходит так, что выражение (6.4) остается справедливым и применима формула (6.5).

### 6.6. Касательные напряжения при изгибе

Вывод формулы касательных напряжений при изгибе относится к статически определяемым задачам. Вообще касательные напряжения должны обеспечить равновесие любых произвольных частей бруса. Например, части, вырезанной сечениями  $Z$  и  $Z + dz$  совместно со слоем, удаленным на расстояние  $y$  от нейтрального слоя (рис. 6.6 а, б, в). Напряжения, действующие в сечении  $Z$  и  $Z + dz$ , равны

$$\sigma = \frac{M}{J} y; \quad \sigma + d\sigma = \frac{M + dM}{J} y.$$

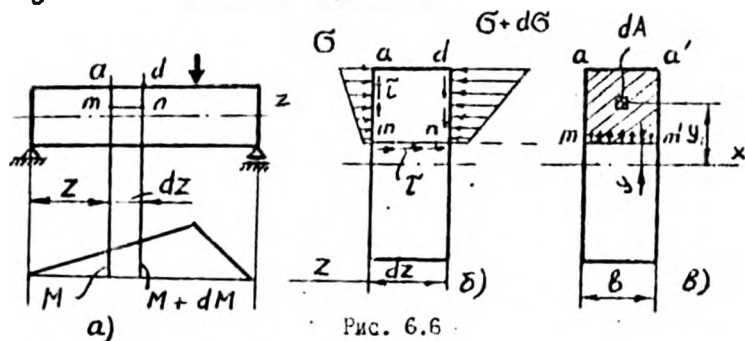


Рис. 6.6

Если площади отсеченных частей поперечных сечений равны, то равновесие под действием нормальных напряжений возможно только в том случае, когда  $d\sigma = 0$  и, следовательно,  $dM/dz = 0$ , т.е. при чистом изгибе.

В противном случае в поперечных сечениях отсеченной части возникает неуравновешенная сила  $dN$ , направленная вдоль оси бруса, которая должна уравновешиваться касательными напряжениями.

$$\tau \delta dz = \int_{F_{отс}} dG dA. \quad (6.9)$$

Данный интеграл берется по отсеченной части сечения.

$F_{отс}$  - отсеченная часть площади.

Подставляя значение  $dN$ , выраженное через момент, и вынося постоянные из-под знака интеграла, получим

$$\tau \delta dz \int_{F_{отс}} \frac{dMy dA}{J} = \frac{dM}{J} \int_{F_{отс}} y dA,$$

или

$$\tau \delta dz = \frac{dM}{J} S_{отс} y_c, \quad S_{отс} y_c = \int y dA.$$

Учитывая, что  $dM/dz = Q$ , окончательное выражение запишем в следующем виде:

$$\tau = \frac{Q S_{отс}}{J \delta} \quad (6.10)$$

Из приведенного выражения видно, что касательные напряжения равны нулю в крайних волокнах, так как для крайних волокон равны нулю статические моменты отсеченных частей относительно нейтрального слоя (нейтральный слой проходит через центр тяжести сечения). Максимальное значение статического момента отсеченной части  $S_{отс}$  имеет в том случае, если секущая совпадает с нейтральной осью. При этом в нейтральном слое возникают максимальные касательные напряжения.

Неравномерность распределения касательных напряжений по сечению бруса сопровождается короблением сечений. Так, прямоугольное сечение, плоское до деформации, под действием поперечной силы деформируется так, что его след описывается уравнением третьей степени. Однако, если поперечная сила постоянная на участке, то деформация сечения не влечет за собой изменений относительных линейных деформаций, поскольку сечения  $Z$  и  $Z + dZ$  деформируются одинаково. Следовательно, формула нормальных напряжений, выведенная нами для чистого изгиба, будет справедлива и для поперечного. Более того, обычно при поперечном изгибе в расчетах на прочность достаточно ограничиться расчетом по нормальным напряжениям (6.8).

Из этого условия подбирают сечения, определяют несущую способность и проверяют на прочность балку по нормальным напряжениям.

Иногда прочность при изгибе бруса проверяют по касательным напряжениям. Балки тонкостенных профилей при проектировании про-

ряют по главным напряжениям в точках, где возникают большие касательные и нормальные напряжения.

### 6.7. Примеры

При решении задачи № 8 [1] большинство ошибок связано с построением эпюр поперечных сил и, особенно, изгибающих моментов. Рассмотрим пример расчета на прочность консольной балки (рис. 6.7).

$$d = ? \quad [\sigma] = 8 \text{ МПа}$$

Сечение I-I

$$0 \leq Z_1 \leq 0,5 \text{ м};$$

$$Q = -F = -20 \text{ кН};$$

$$M = FZ_1; \quad Z_1 = 0 \rightarrow M = 0.$$

$$Z_1 = 0,5 \text{ м} \rightarrow M = 10 \text{ кНм}.$$

Сечение II-II

$$0,5 \leq Z_2 \leq 1,3 \text{ м};$$

$$Q = -F + q(Z_2 - 0,5);$$

$$M = FZ_2 - q \frac{(Z_2 - 0,5)^2}{2};$$

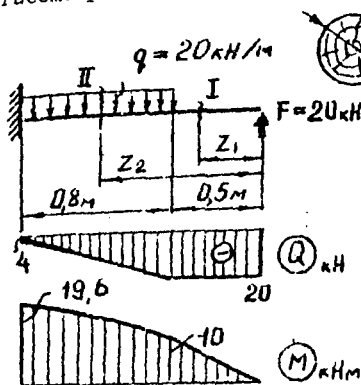


Рис. 6.7

$$M_{\max} = 19,6 \text{ кНм};$$

$$W_x = M_{\max} / [\sigma] = 0,1 d^3; \quad d = 29 \text{ см}.$$

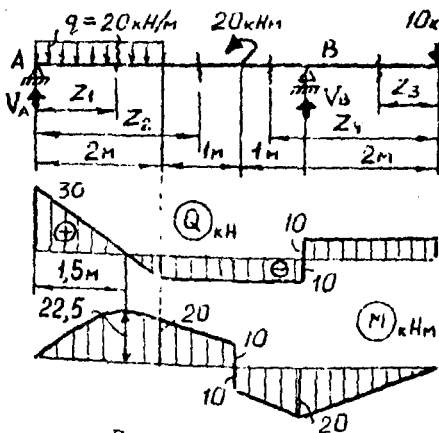


Рис. 6.8

Расчет балок на 2-х и более опорах необходимо начинать с определения опорных реакций. Их значения потребуются для определения значений внутренних силовых факторов в сечениях между опорами.

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0;$$

$$-20 \cdot 2 \cdot 1 + 20 \cdot 10 \cdot 6 + V_B \cdot 4 = 0;$$

$$V_B = 20 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0; \quad -V_A \cdot 4 + 20 \cdot 3 \cdot 2 +$$

$$+ 20 \cdot 10 \cdot 2 = 0; \quad V_A = 30 \text{ кН}.$$

Проверка:  $\sum Y = 0$ ;  $30 + 20 - 20 \cdot 2 - 10 = 0$ .

Строим эпюры, записав выражения  $Q$  и  $M$  на каждом участке, кН.

Участок балки, где  $0 \leq Z_1 \leq 2$  м:

$$Q = V_A - qZ_1; \quad M = V_A Z_1 - q \frac{Z_1^2}{2};$$

$$Z_1 = 0; \quad Q = 30 \text{ кН}; \quad M = 0;$$

$$Z_1 = 2 \text{ м}; \quad Q = -10 \text{ кН}; \quad M = 20 \text{ кНм}$$

$$Z_1 = 1,5 \text{ м}; \quad Q = 0; \quad M = 22,5 \text{ кНм}.$$

Участок балки, где  $2 \leq Z_2 \leq 3$  м:

$$Q = V_A - qZ_2 = 30 - 20 \cdot 2 = -10 \text{ кН};$$

$$M = V_A Z_2 - 20 \cdot 2(Z_2 - 1); \quad Z_2 = 2 \text{ м}; \quad M = 20 \text{ кНм}$$

$$Z_2 = 3 \text{ м}; \quad M = 10 \text{ кНм}.$$

Участок балки, где  $0 \leq Z_3 \leq 2$  м:

$$Q = 10 \text{ кН}; \quad M = -10 Z_3; \quad Z_3 = 0 \rightarrow M = 0; \quad Z_3 = 2 \text{ м} \rightarrow M = -20 \text{ кНм}.$$

Участок балки, где  $2 \leq Z_4 \leq 3$  м:

$$Q = 10 - V_B = -10 \text{ кН}; \quad M = -10 Z_4 + V_B(Z_4 - 2); \quad Z_4 = 2 \text{ м} \rightarrow M = -20 \text{ кНм}$$

$$Z_4 = 3 \text{ м} \rightarrow M = -10 \text{ кНм}$$

По найденным значениям строим эпюры  $Q$  и  $M$ , проверяя построение с помощью дифференциальных зависимостей.

По эпюре  $M$  определяем опасное сечение ( $M_{\max} = 22,5$  кН) и выполняем расчет на прочность:

$$\sigma_{\max} = M_{\max} / W_x \leq [\sigma] \rightarrow W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 140 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$$

По сортаменту принимаем двутавр № 19:  $W_x = 143 \text{ см}^3$ .

Определение внутренних силовых факторов при решении задачи № обычно не вызывает затруднений у студентов вследствие подробного ее объяснения в методических указаниях [1].

Момент инерции составного сечения относительно нейтральной оси (рис. 6.9)

$$J_x = J_x^{(1)} + J_x^{(2)} + J_x^{(3)} = J_x^{sym} + 2 \left( \frac{c\delta^3}{12} + c\delta \left( \frac{h+\delta}{2} \right)^2 \right).$$

Момент сопротивления составного сечения

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{J_x}{h/2 + \delta}.$$

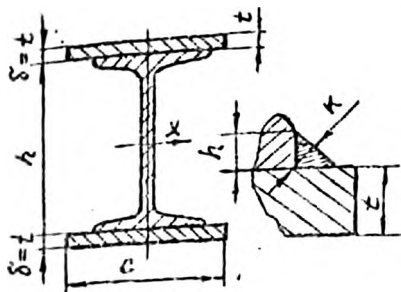


Рис. 6.9

Из условия прочности  
 $M_x/W_x = [\sigma]$   
 находится наибольшая величина  
 силы P. По величине максималь-  
 ной поперечной силы (тележка  
 расположена у одной из опор)  
 выполняются расчет сварных швов,  
 прикрепляющих листы к двутавру.  
 Из формулы Журавского  $\tau = \frac{Q S_{амс}}{J_{x.с}}$   
 получаем сдвигающее усилие на  
 единицу длины для расчета  
 сварного шва

$$T = \tau b = \frac{Q \cdot S_{амс}}{J_{x.с}}$$

где  $S_{амс} = c\delta \left( \frac{h + \delta}{2} \right)$ .

Срезающее напряжение в сварном шве определяется

$$\tau = 1/2 kT \leq [\tau], \quad \text{где } k = 0,7h.$$

Из условия прочности находят необходимую длину сварного шва на  
 каждый погонный метр балки.

## Глава 7. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

### 7.1. Основные понятия

В предыдущих главах рассматривались задачи, в которых брус испыты-  
 вал отдельно растяжение, сжатие, кручение или изгиб. На практи-  
 ке часто встречаются случаи, когда в поперечных сечениях бруса од-  
 новременно появляются несколько компонент внутренних сил и брус на-  
 ходится в условиях сложного сопротивления.

Как правило, сложное сопротивление допускает применение принципа  
 независимости действия сил и его распространение на внутренние сило-  
 вые факторы. Согласно этому принципу, результат совместного дейст-  
 вия равен сумме результатов действий составляющих.

Для нормальных компонент напряжений это сумма модулей (алгебраи-  
 ческая сумма), для перемещений (прогибов) - геометрическая сумма. Це-  
 лый ряд задач сложного сопротивления, когда в опасной точке касатель-

ние напряжения пренебрежимо малы, рассчитываются на прочность по нормальным напряжениям подобно простому изгибу. В других случаях непосредственно или косвенно при расчетах на прочность используются выводы эквивалентных напряжений из теории предельных состояний.

## 7.2. Теории предельных состояний

Целью теорий предельных состояний является определение линейного напряженного состояния, равноопасного (эквивалентного) данному сложному.

Под коэффициентом запаса сложного напряженного состояния понимается величина, показывающая, во сколько раз нужно увеличить компоненты напряженного состояния, чтобы оно стало предельным.

Задача определения линейного эквивалента доведена до логического завершения, однако точное решение остается сложным и на практике прибегают к менее точным, но более простым выражениям.

В настоящее время пять выражений линейного эквивалента относятся к классическим теориям предельных состояний.

Первая теория для неравнопрочных материалов записывается в виде двух неравенств:  $\sigma_{\text{эI}} = \sigma_1 \leq [\sigma]_p$ ;  $\sigma_{\text{эI}} = \sigma_3 \leq [\sigma]_c$ . (7.1)

Ею пользуются при расчетах для очень хрупких материалов.

В теории наибольших относительных деформаций (вторая теория) линейный эквивалент выражается через три главных напряжения и коэффициент Пуассона, однако эта теория в настоящее время практически не применяется.

$$\sigma_{\text{эII}} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (7.2)$$

Третья теория (теория наибольших касательных напряжений) полагает, что предельное (опасное) состояние при сложном напряженном состоянии наступает тогда, когда наибольшее касательное напряжение достигает предельной величины для данного материала:

$$\sigma_{\text{эIII}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (7.3)$$

Четвертая теория (энергетическая) полагает, что два состояния равноопасны, если равны их энергии формоизменения:

$$\sigma_{\text{эIV}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} \leq [\sigma]. \quad (7.4)$$



Штая теория (теория Мора)

$$\sigma_{3v} = \sigma_1 - \nu \sigma_3 \leq [\sigma].$$

(7.5)

я равнопрочных материалов теория Мора переходит в линейный эквивалент по третьей теории при  $\nu = G_{\text{ср}} / G_{\text{с}} = [\sigma]_{\text{р}} / [\sigma]_{\text{с}} = 1$ .

## 7.2. Косой изгиб

Если плоскость действия изгибающего момента в поперечном сечении бруса не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции, имеет место косой изгиб.

В общем случае при косом изгибе в поперечных сечениях бруса возникают четыре внутренних силовых фактора: поперечные силы  $Q_x$  и  $Q_y$ , изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$ . Однако влиянием поперечных сил в расчетах на прочность и жесткость обычно пренебрегают.

Рассмотрим консольную балку прямоугольного сечения, к которой приложена сила  $F$  (рис. 7.1а), расположенная в плоскости торца и наклоненная под углом  $\varphi$  к главной оси инерции  $OY$ . Разложим силу  $F$  на составляющие по осям координат  $F_x = F \sin \varphi$  и  $F_y = F \cos \varphi$ , которые создают в произвольном сечении по длине балки изгибающие моменты  $M_x = F_y z$  и  $M_y = F_x z$ . Индексы  $X$  и  $Y$  при  $M$  обозначают главные оси, относительно которых действуют изгибающие моменты. Таким образом, в каждом сечении балки одновременно действуют два изгибающих момента, которые создают изгиб в двух плоскостях.

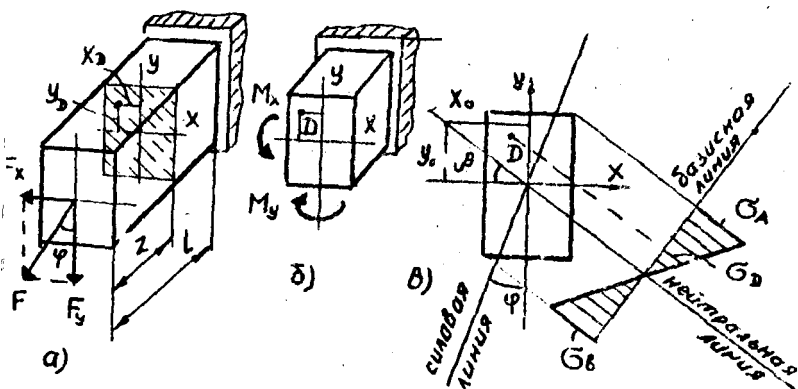


Рис. 7.1

Пользуясь принципом независимости действия сил можно записать формулу для определения нормальных напряжений в любой точке рассматриваемого поперечного сечения. Они определяются как алгебраическая сумма напряжений в этой точке от двух плоских изгибов:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x, \quad (7.6)$$

где  $X$  и  $Y$  - координаты рассматриваемой точки в системе главных центральных осей сечения балки.

Знак перед каждым слагаемым обычно назначают, ориентируясь характер деформации балки. Если изгибающий момент  $M_x$  или  $M_y$  вызывает растяжение в рассматриваемой точке поперечного сечения, перед слагаемым ставится знак плюс, если сжатие - знак минус. Например, для точки  $D$  напряжение от  $M_x$  положительно - напряжение растяжения, т.к. сила  $F_y$  вызывает изгиб бруса выпуклостью вверх, а напряжение от  $M_y$  отрицательно - напряжение сжатия, т.к. сила изгибает брус выпуклостью вправо.

Уравнение нейтральной линии при косом изгибе получим, приравняв нулю выражение (7.6):

$$\frac{M_x}{J_x} y_0 + \frac{M_y}{J_y} x_0 = 0, \quad (7.7)$$

где  $x_0, y_0$  - координаты точек, лежащих на нейтральной линии.

Из уравнения (7.7) следует, что нейтральная линия при косом изгибе проходит через центр тяжести сечения. Из выражения (7.7) в рис. 7.1 видно, что тангенс угла наклона нейтральной линии к оси  $X$  по абсолютной величине будет равен

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{y_0}{x_0} \right| = \frac{M_y}{M_x} \frac{J_x}{J_y} = \frac{F_x z J_x}{F_y z J_y} = \frac{F \sin \varphi z J_x}{F \cos \varphi z J_y} = \operatorname{tg} \varphi \frac{J_x}{J_y}. \quad (7.8)$$

Как видно из уравнения (7.3), нейтральная линия не будет перпендикулярна силовой линии, т.к.  $\varphi \neq \beta$ , а плоскость действия сил совпадает с плоскостью изгиба балки. Только в тех сечениях, у которых  $J_x = J_y$  (круглое сечение, квадрат, любой правильный многоугольник), нейтральная и силовая линии пересекаются под углом  $0^\circ$ , в этом случае изгиб остается простым поперечным.

Зная положение нейтральной линии в сечении балки и проведя перпендикуляры к контуру сечения, параллельные нейтральной линии, можно найти наиболее удаленные точки, где возникнут наибольшие напряжения (точки  $A$  и  $B$ ). Определив координаты этих точек в системе

главных центральных осей сечения, можно найти величины и знак напряжений в них. Отложив их величины на базисной линии, перпендикулярной к нейтральной, получим эпюру нормальных напряжений в сечении (рис. 7.1в).

$$\text{Условие прочности: } \sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} y_{\max} + \frac{M_y}{J_y} x_{\max} \leq [\sigma], \quad (7.9)$$

где  $y_{\max}$ ,  $x_{\max}$  - координаты точки, наиболее удаленной от нейтральной оси.

Для сечений, имеющих две оси симметрии, максимальные напряжения будут в угловых точках и условие прочности примет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma], \quad (7.10)$$

где  $J_x, W_y$  - моменты сопротивления сечения относительно осей X и Y.

Если материал неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то проверка прочности проводится по допускаемым растягивающим и сжимающим напряжениям.

Проверка прочности круглого сечения производится по формуле плоского изгиба по суммарному изгибаемому моменту:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}. \quad (7.11)$$

Прогибы при косом изгибе определяют геометрическим суммированием прогибов, получающихся в направлениях главных осей.

В задаче № 12 [1] деревянная балка (рис. 7.2) прямоугольного поперечного сечения нагружена вертикальной силой  $F$  в точке A и горизонтальной силой  $F$  в точке B (обе точки расположены на оси балки). На опорах балки могут возникнуть как вертикальные реакции, так и горизонтальные реакции, направленные перпендикулярно плоскости чертежа. Требуется:

- 1) построить эпюры  $M_b$  и  $M_r$  и установить положение опасного сечения;
- 2) подобрать размеры поперечного сечения  $h$  и  $b$  при допустимом напряжении  $[\sigma] = 8 \text{ МПа}$ ;
- 3) определить положение нейтральной линии в опасном сечении балки и построить для этого сечения эпюру нормальных напряжений в аксонометрии.

Решение. Определив опорные реакции в вертикальной и горизон-



Анализ напряженного состояния балки и практика показывают, что кругие сечения будут менее опасными.

Подбираем размеры поперечного сечения балки удовлетворяющие условию прочности в обоих сечениях:

$$W_x = \delta h^2 / 6 \quad \text{при } h = 2\delta \quad W_x = \delta(2\delta)^2 / 6 = 2\delta^3 / 3;$$

$$W_y = h\delta^2 / 6 \quad \text{при } h = 2\delta \quad W_y = 2\delta\delta^2 / 6 = \delta^3 / 3.$$

Условие прочности для прямоугольных сечений при пространственном изгибе определяется выражением (7.10).

В сечении С  $M_x = 5 \text{ кНм}; M_y = 0;$

$$5 \cdot 10^3 \cdot 3 / 2\delta^3 \leq [G]; \quad 5 \cdot 10^3 \cdot 3 / 2\delta^3 \leq 8 \cdot 10^6;$$

откуда 
$$\delta \geq \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5 \cdot 10^3}{2 \cdot 8 \cdot 10^6}} = 0,097 \text{ м} = 97 \text{ мм}.$$

В сечении В  $M_x = 1,25 \text{ кНм}; M_y = 3,75 \text{ кНм};$

$$\frac{1,25 \cdot 10^3 \cdot 3}{2\delta^3} + \frac{3,75 \cdot 10^3 \cdot 3}{\delta^3} \leq [G] = 8 \cdot 10^6,$$

откуда 
$$\delta \geq \sqrt[3]{\frac{26 \cdot 250}{2 \cdot 8 \cdot 10^6}} = 0,118 \text{ м} = 118 \text{ мм}.$$

Из двух условий принимаем  $\delta = 118 \text{ мм}; h = 2\delta = 236 \text{ мм}.$

Наиболее опасным сечением является сечение В. Определим положение нейтральной линии по формуле (7.8):

$$\operatorname{tg} \beta = -J_x M_y / J_y M_x,$$

где  $\beta$  - угол наклона нейтральной линии к главной центральной оси (рис. 7.2г).

$$J_x = \frac{\delta h^3}{12} = \frac{0,118 \cdot 0,236^3}{12} = 129,2 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4; \quad M_x = -1,25 \text{ кНм};$$

$$J_y = \frac{h\delta^3}{12} = \frac{0,236 \cdot 0,118^3}{12} = 32,3 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4; \quad M_y = 3,75 \text{ кНм}.$$

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{3,75 \cdot 10^3}{-1,25 \cdot 10^3} \cdot \frac{129,2 \cdot 10^{-6}}{32,3 \cdot 10^{-6}} = 120; \quad \beta = 89^\circ 31'.$$

Положительное значение  $\rho$  откладываем от оси  $X$  против хода часовой стрелки (рис. 7.2г).

Нормальные напряжения в произвольной точке сечения находят по формуле (7.6), в которой знаки слагаемых напряжений определяются характером деформации соответствующих волокон. Растяжению присваивается знак плюс, сжатию - минус.

Для заданного сечения при выбранной системе координат (рис. 7.2) в точке  $m$  возникают сжимающие напряжения от положительных значений  $M_x$  и  $M_y$ . Формулу можно записать:  $\sigma = -\frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x$ .

В опасном сечении  $M_x = -1,25$  кНм;  $M_y = 3,75$  кНм;

$$\sigma = -\frac{(-1,25 \cdot 10^3)}{129,2 \cdot 10^{-6}} y - \frac{3,75 \cdot 10^3}{32,3 \cdot 10^{-6}} x.$$

Подставляя значения координат  $x$ ,  $y$  точек  $n$ ,  $m$ ,  $l$ ,  $k$ , получим:

$$\sigma_n = \frac{1,25 \cdot 10^3 (-118 \cdot 10^{-3})}{129,2 \cdot 10^{-6}} - \frac{3,75 \cdot 10^3 \cdot 59 \cdot 10^{-3}}{32,3 \cdot 10^{-6}} = -8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_m = \frac{1,25 \cdot 10^3 \cdot 118 \cdot 10^{-3}}{129,2 \cdot 10^{-6}} - \frac{3,75 \cdot 10^3 \cdot 59 \cdot 10^{-3}}{32,3 \cdot 10^{-6}} = -5,7 \text{ МПа};$$

$$\sigma_l = \frac{1,25 \cdot 10^3 \cdot 118 \cdot 10^{-3}}{129,2 \cdot 10^{-6}} - \frac{3,75 \cdot 10^3 (-59 \cdot 10^{-3})}{32,3 \cdot 10^{-6}} = 8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_k = \frac{1,25 \cdot 10^3 (-118 \cdot 10^{-3})}{129,2 \cdot 10^{-6}} - \frac{3,75 \cdot 10^3 (-59 \cdot 10^{-3})}{32,3 \cdot 10^{-6}} = 5,7 \text{ МПа}.$$

Строим эпюру нормальных напряжений в аксонометрии (рис. 7.2д).

## 7.2. Изгиб с растяжением (сжатием)

При таком виде сложного сопротивления внутренние силы в сечении сведутся только к продольной силе  $N$  и изгибающему моменту  $M$ , вызывающему либо плоский, либо косой изгиб. На рис. 7.3 изображен случай осевого растяжения в сочетании с косым изгибом. На консоль действует сила  $F$ , наклоненная к продольной оси и не лежащая ни в одной из главных плоскостей инерции.

Сила приложена в центре тяжести поперечного сечения. Разложим

силу на составляющие. В данном случае положение опасного сечения ясно без построения эпюр внутренних силовых факторов. Напряжение в произвольной его точке  $B$  с координатами  $X, Y$  (если пренебречь действием поперечных сил) будет

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x. \quad (7.12)$$

Знаки перед слагаемыми в правой части обычно назначают в соответствии с характером деформации.

Если сечение имеет две оси симметрии и выступающие углы (двутавр, прямоугольник), то напряжение в опасной

точке определяется по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}. \quad (7.13)$$

Так как напряженное состояние в опасной точке можно считать линейным, то условие прочности имеет вид  $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ .

### 7.3. Внецентренное растяжение (сжатие)

В некоторых случаях продольная нагрузка бывает приложена не в центре тяжести поперечного сечения бруса (рис. 7.4а). Методом сечений устанавливаем, что в любом поперечном сечении бруса возникают три внутренних силовых фактора (рис. 7.4б):  $N = F$ ;  $M_x = F y_F$ ;  $M_y = F x_F$ , где  $y_F, x_F$  - координаты точки приложения силы.

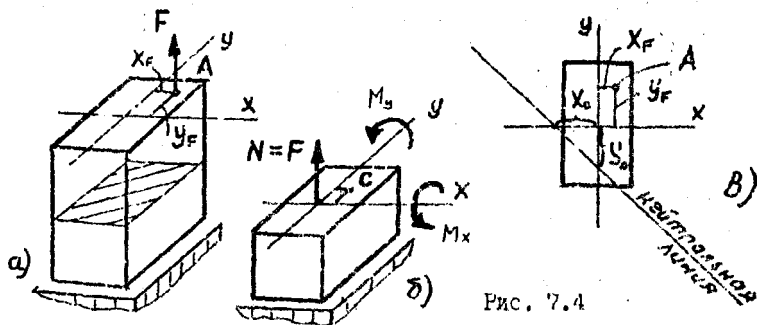


Рис. 7.4

В произвольной точке поперечного сечения нормальное напряжение определяется по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x. \quad (7.14)$$

Для отыскания наиболее нагруженной точки в сечении необходимо найти положение нейтральной линии. Для этого приравняем нулю выражение (7.14):

$$\frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y_0 + \frac{M_y}{J_y} x_0 = 0, \quad (7.15)$$

где  $x_0, y_0$  - координаты точек, лежащих на нейтральной линии.

Из уравнения видно, что эта линия не проходит через центр тяжести сечения. Чтобы найти положение нейтральной линии в сечении надо найти точки на координатных осях, через которые проходит нейтральная линия. При  $y_0 = 0$

$$x_0 = -N J_y / A M_y; \\ \text{при } x_0 = 0 \quad y_0 = -N J_x / A M_x. \quad (7.16)$$

Из выражения (7.16) следует, что нейтральная линия всегда расположена по другую сторону центра тяжести от места приложения равнодействующей (рис. 7.4в).

Учитывая, что  $M_x = F \cdot y_F$ ,  $M_y = F x_F$ , формулу (7.14) можно представить в следующем виде:

$$\sigma = N/A + F y_F y / J_x + F x_F x / J_y, \quad \text{или} \quad (7.17)$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \left( 1 + \frac{y_F y}{i_x^2} + \frac{x_F x}{i_y^2} \right)$$

где  $i_x = \sqrt{J_x/A}$  и  $i_y = \sqrt{J_y/A}$  - радиусы инерции поперечного сечения относительно главных центральных осей инерции  $X$  и  $Y$  соответственно;  $N$  - продольная сила в сечении ( $N = -F$ );  $x_F, y_F$  - координаты точки приложения силы;  $x, y$  - координаты точки, в которой определяется напряжение. Координаты  $x_F, y_F, x, y$  берутся в главных центральных осях сечения.

В задаче № 13 контрольных заданий [I] необходимо правильно определить положение главных центральных осей и вычислить главные центробежные моменты инерции сечения.

Для сечений, имеющих ось симметрии, центр тяжести лежит на этой оси. Наиболее сложной является схема (рис. 7.5), так как нет знания положения центра тяжести полуокруга и моментов инерции



относительно главных центральных осей.

Центр тяжести полукруга и главные центральные моменты инерции определяются по формулам

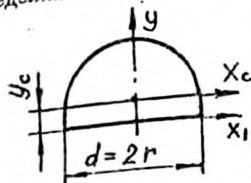


Рис. 7.5

$$A = \pi d^2/8 \approx 0,392 d^2;$$

$$y_c = 4r/3\pi \approx 0,424 r;$$

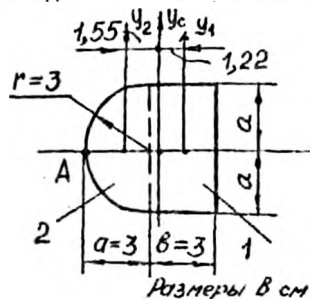
$$J_{X_c} = 0,110 r^4 = 0,00688 d^4;$$

$$J_y = J_{X_c} = \pi d^4/128 \approx 0,025 d^4.$$

**Пример.** Чугунный короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на рис. 7.6, сжимается продольной силой  $F$ , приложенной к точке  $A$ .

**Решение.** Вычислим наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжение в поперечном сечении, выразив величины этих напряжений через  $F$  и размеры сечения,

Одна из главных центральных осей сечения - ось симметрии  $X$ .



Размеры в см

Рис. 7.6

Площадь сечения  $A = A_1 + A_2$ ;

$$A_1 = 2a^2 = 6 \cdot 3 = 18 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = \pi d^2/8 = 14,13 \text{ см}^2; \quad A = 32,1 \text{ см}^2.$$

Центр тяжести в центральных осях первой фигуры ( $Xy_1$ )

$$X_c = \frac{\sum S y_1}{\sum A} = \frac{0 - 14,13(4 \cdot 3/3\pi) + 15}{18 + 14,13} = -1,22 \text{ см.}$$

Центр тяжести в центральных осях второй фигуры ( $Xy_2$ )

$$X_c = \frac{\sum S y_2}{\sum A} = (18(4 \cdot 3/3\pi + 1,5) + 0)/(18 + 14,13) = 1,55 \text{ см.}$$

Проводим через центр тяжести сечения оси  $X_c y_c$  и определяем главные центральные моменты инерции сечения:

$$J_{X_c} = \frac{8(2a)^3}{12} + \frac{\pi(2a)^4}{128} = \frac{3(2 \cdot 3)^3}{12} + \frac{3,14(2 \cdot 3)^4}{128} = 85,8 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_c} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3^3}{12} + 1,22^2 \cdot 18 + 0,110 \cdot 3^4 + 1,55^2 \cdot 14,13 = 83,1 \text{ см}^4.$$

Квадраты радиусов инерции будут

$$i_x^2 = J_x / A = 85,8 / 32,1 = 2,67 \text{ см}^2; \quad i_y^2 = 2,59 \text{ см}^2.$$

Нормальные напряжения в сечении определятся по формуле (7.15):  
 $y_F = 0$ ;  $x_F = -3,28 \text{ см}$ . Для точки А:  $X = -3,28 \text{ см}$ ;  $Y = 0$ .

Нормальное напряжение в точке А будет

$$\sigma_A = -\frac{F}{32,1 \cdot 10^{-4}} \left( 1 + 0 + \frac{(-3,28 \cdot 10^{-2})(-3,28 \cdot 10^{-2})}{2,59 \cdot 10^{-4}} \right) = -0,16 \cdot 10^{-4} F.$$

Для точки В:  $X = 2,72 \text{ см}$ ;  $Y$  - произвольно в пределах сечения.  
 Нормальное напряжение в точке В будет

$$\sigma_B = -\frac{F}{32,1 \cdot 10^{-4}} \left( 1 + 0 + \frac{(-3,28 \cdot 10^{-2})(2,72 \cdot 10^{-2})}{2,59 \cdot 10^{-4}} \right) = 0,076 \cdot 10^{-4} F.$$

Допускаемую нагрузку  $F$  найдем из условий прочности на сжатие и растяжение  $[\sigma]_c = 90 \text{ МПа}$ ;  $[\sigma]_p = 20 \text{ МПа}$ ;  $\sigma_A = 1600 F \leq [\sigma]_c$ :

$$[F] \leq \frac{90 \cdot 10^6}{1600} = 56300 \text{ Н}; \quad \sigma_B = 760 F \leq [\sigma]_p \Rightarrow [F] \leq \frac{20 \cdot 10^6}{760} = 26300 \text{ Н}.$$

Принимаем  $[F] = 26300 \text{ Н}$ .

Рассмотрим пример несимметричного приложения нагрузки (задача № 13 контрольных заданий [1]).

Чугунный короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на рис. 7.7а, сжимается продольной силой  $F$ , приложенной в точке А. Требуется: 1) вычислить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжение в поперечном сечении, выразив эти напряжения через  $F$  и размеры сечения; 2) найти допускаемую нагрузку  $F$  при заданных размерах сечения и допускаемых напряжениях для чугуна на сжатие  $[\sigma]_c = 140 \text{ МПа}$  и на растяжение  $[\sigma]_p = 26 \text{ МПа}$ ,  $a = 2 \text{ см}$ ;  $b = 4 \text{ см}$ .

Решение. Определим положение центра тяжести таврового сечения в центральных осях  $X, Y$  (рис. 7.7б) первой фигуры.

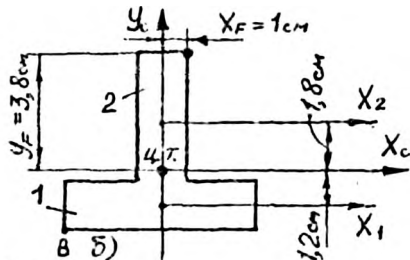
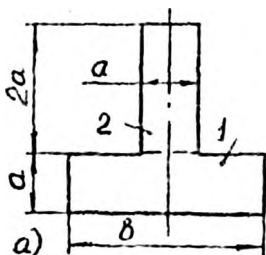


Рис. 7.7

$$y_c = \frac{\sum Sx}{\sum A} = \frac{0 + 2 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 6 + 2 \cdot 4} = 1,2 \text{ см}; \quad x_c = 0.$$

Центр тяжести в центральных осях  $X_2Y$  второй фигуры

$$y_c = \sum Sx / \sum A = (0 + 2 \cdot 6 \cdot (-3)) / 20 = -1,8 \text{ см}.$$

Проводим через центр тяжести сечения оси  $X_cY_c$  (рис. 7.76) и определяем главные центральные моменты инерции сечения:

$$J_{x_c} = \frac{6 \cdot 2^3}{12} + 1,2^2 \cdot 6 \cdot 2 + \frac{2 \cdot 4^3}{12} + 1,8^2 \cdot 2 \cdot 4 = 57,87 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_c} = \frac{2 \cdot 6^3}{12} + \frac{4 \cdot 2^3}{12} = 38,67 \text{ см}^4.$$

Квадраты радиусов инерции

$$i_x^2 = J_{x_c} / A = 57,87 / 20 = 2,89 \text{ см}^2; \quad i_y^2 = J_{y_c} / A = 1,93 \text{ см}^2.$$

Координаты точки приложения силы  $F$  (точка  $A$  на рис. 7.76) в главных центральных осях будут  $X_F = 1 \text{ см}; Y_F = 2 + 1,8 = 3,8 \text{ см}$ , или  $Y_F = 4 - 0,2 = 3,8 \text{ см}$ .

В сечении с выступающими углами опасными будут точки в противоположных углах как наиболее удаленные от нейтральной оси (точки  $A$  и  $B$  на рис. 7.76). В этом легко убедиться, подставив координаты точек в уравнение нейтральной линии.

Нормальное напряжение в точке  $A$  ( $X = 1 \text{ см}; y = 3,8 \text{ см}$ ) определится по формуле

$$\sigma_A = -\frac{F}{20 \cdot 10^2} \left( 1 + \frac{38 \cdot 38}{289} + \frac{10 \cdot 10}{193} \right) = -0,00326 F.$$

Нормальное напряжение в точке  $B$  ( $X = -3 \text{ см}; y = -2,2 \text{ см}$ ) будет

$$\sigma_B = -\frac{F}{20 \cdot 10^2} \left( 1 + \frac{38 \cdot (-22)}{289} + \frac{10 \cdot (-30)}{193} \right) = 0,00172 F.$$

Допускаемую нагрузку найдем из условия прочности на сжатие и растяжение  $[\sigma]_c = 140 \text{ МПа}; [\sigma]_p = 26 \text{ МПа}$ :

$$\sigma_A = 0,00326 F \leq [\sigma]_c; \quad [F] \leq 140 / 0,00326 = 42900 \text{ Н}.$$

$$\sigma_B = 0,00172 F \leq [\sigma]_p; \quad [F] \leq 26 / 0,00172 = 15120 \text{ Н}.$$

Принимаем  $[F] = 15120 \text{ Н}$ .

## 7.4. Кручение с изгибом

Одновременное действие кручения с изгибом чаще всего встречается при работе машин и механизмов. Влиянием поперечных сил обычно пренебрегают из-за незначительности вызываемых ими касательных напряжений по сравнению с напряжениями от изгибающих и крутящего моментов.

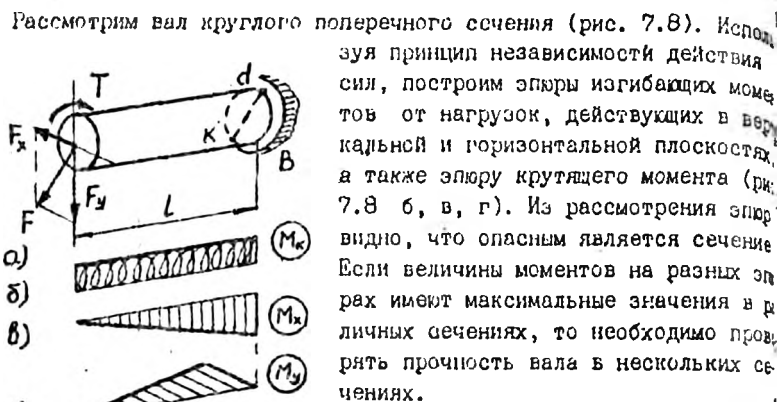


Рис. 7.8

Суммарный изгибающий момент, определяемый по формуле (7.11), вызывает максимальные напряжения в сечении вала, достигающие максимума на поверхности вала:  $\sigma_{\max} = M/W$ . (7.18)

Крутящий момент вызывает касательные напряжения, достигающие максимума в точках контура сечения:  $\tau_{\max} = M_x/W_p = M_x/2W_x$ . (7.19)

Проведя в опасном сечении диаметр  $kd$  в плоскости действия суммарного изгибающего момента, т.е. параллельно  $F$ , получим наиболее опасные точки на концах диаметра. Выделим в точке  $d$  элементарный объем (рис. 7.9).

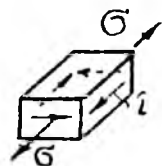


Рис. 7.9

По четырем его граням действуют касательные напряжения  $\tau$  от крутящего момента, а по граням, совпадающим с поперечным сечением, действуют также нормальные напряжения от суммарного изгибающего момента. Следовательно, расчет в этом случае надо вести по эквивалентному напряжению по составу:  $\sigma_y \leq [\sigma]$ .

Подставив значения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , полученные по формуле (4.2), в условия прочности по третьей теории (7.3), получим

$$\sigma_{3\bar{p}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (7.20)$$

читывая выражения (7.18) и (7.19),

$$\sigma_{3\bar{p}} = \frac{\sqrt{M^2 + M_k^2}}{W} \leq [\sigma]. \quad (7.21)$$

входящих по энергетической теории

$$\sigma_{3\bar{p}} = \frac{\sqrt{M^2 + 0,75M_k^2}}{W} \leq [\sigma]. \quad (7.22)$$

Анализируя выражения (7.21), (7.22), можно записать расчетную формулу

$$\sigma_3 = \frac{M_3}{W} \leq [\sigma] \quad (7.23)$$

где  $M_3$  - эквивалентный (приведенный) момент,

$$M_{3\bar{p}} = \sqrt{M^2 + M_k^2} \quad \text{и} \quad M_{3\bar{p}} = \sqrt{M^2 + 0,75M_k^2};$$

$W$  - осевой момент сопротивления (для круга  $W = 0,1d^3$ ).

Задача № 14 контрольных заданий [I] представляет общий случай сложного сопротивления бруса.

Первым этапом при решении задач такого типа является определение внутренних силовых факторов с построением эпюр, как правило, изгибающих и крутящих моментов, а иногда продольных и поперечных сил.

В задаче № 14 изображена в аксонометрии ось ломаного стержня круглого поперечного сечения, расположенная в горизонтальной плоскости и имеющая прямые углы в точках А и В (рис. 7.10а). На стержень действует вертикальная нагрузка. Требуется:

построить отдельно (в аксонометрии) эпюры изгибающих и крутящих моментов;

установить опасное сечение и найти для него расчетный момент по четвертой теории прочности.

При построении эпюр удобно использовать метод перехода от свободных концов стержня к узлу. При вычислении внутренних силовых факторов в характерных точках (на границах участков) для наглядности можно отбрасывать рассмотренные участки, заменяя их действие на рассматриваемый участок силами и парами сил, определяемыми по законам переноса сил в твердом теле (законам теоретической механики).

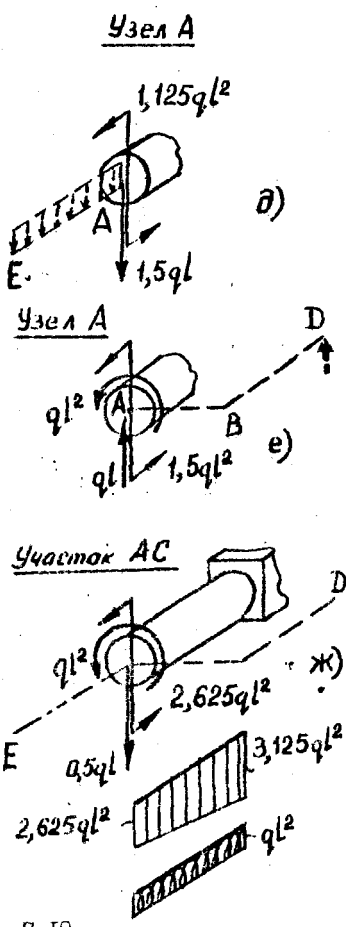
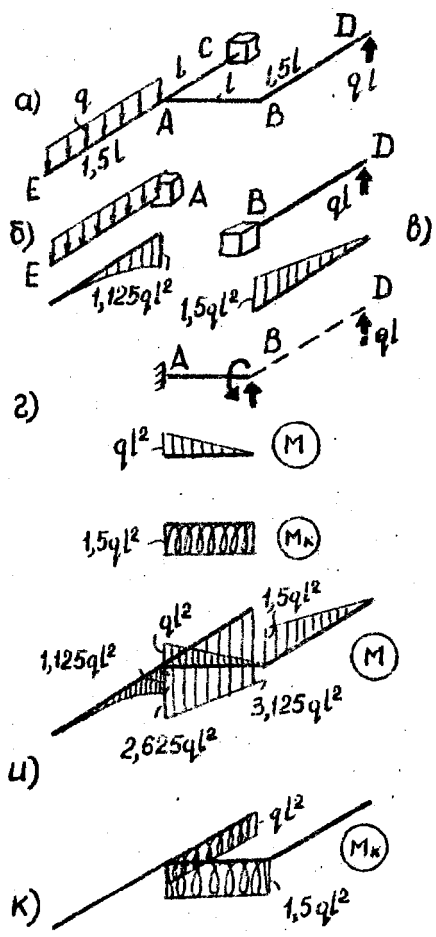


Рис. 7.10

Для схемы, представленной на рис. 7.10а, необходимо построить эпюры на участках  $EA$ ,  $DB$ ,  $BA$ , а затем на участке  $AC$ . При этом можно избежать необходимости определять реакции в защемленном сечении  $C$ . Мысленно закрепляя в точке  $A$  стержень  $EA$ , строим эпюру изгибающих моментов  $M$  от равномерно распределенной нагрузки  $q$  (рис. 7.10б). На участке  $EA$  возникает только поперечный изгиб. Следовательно,  $M_k = 0$ . Затем, закрепляя мысленно стержень в точке  $B$ , строим эпюру  $M$  на участке  $DB$  (рис. 7.10в) от сосредоточенной силы  $qL$ . Переходя к участку  $AB$ , следует обратить внимание, что изгибающий момент в точке  $B$  предыдущего участка скручивает стержень  $AB$  и на всем участке возникает  $M_k = ql \cdot 1,5l$  (рис. 7.10г). Кроме того, участок  $AB$  загружен поперечной сосредоточенной нагрузкой  $qL$ , от которой на участке  $AB$  возникает изгибающий момент (рис. 7.10г)  $M = ql^2$ .

Наиболее сложно представить схему нагружения в точке  $A$  участка  $AC$  (рис. 7.10д, е, ж). На рис. 7.10д показано действие отброшенных участков  $DBA$ . Суммарное действие всех отброшенных участков представлено нагрузкой в сечении  $A$  (узел  $A$ ). Изображая эпюры  $M$  и  $M_k$  отдельных участков на оси рамы, получаем отдельно эпюры изгибающих и крутящих моментов в аксонометрии (рис. 7.10 и, к) для стержня ломаного очертания. Из эпюр видно, что опасным сечением является сечение  $C$ , где действуют изгибающий момент  $M = 3,125ql^2$  и крутящий момент  $M_k = ql^2$ . Расчетный момент, определенный по четвертой теории прочности, будет

$$M_{\text{эб}} = \sqrt{M^2 + 0,75M_k^2} = \sqrt{(3,125ql^2)^2 + 0,75(ql^2)^2} = 3,24ql^2.$$

Пример. Построить эпюры  $M$  и  $M_k$  для схемы, изображенной на рис. 7.11, по характерным точкам

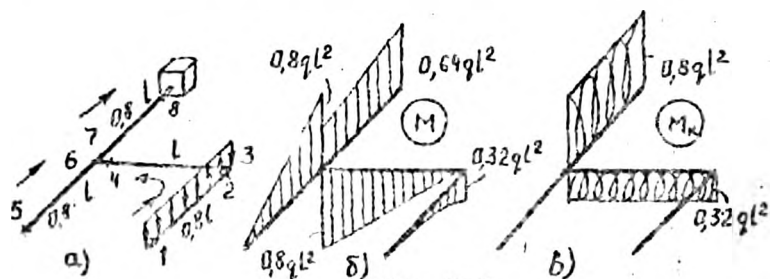


Рис. 7.11

**Решение.** При построении эпюры по характерным точкам отметим "маршрут" в порядке возрастания номеров 1, 2, 3 и т.д. (рис. 7.11а). Запишем значения внутренних силовых факторов в точках (только  $M_K$ ).

Точка 1.  $M = 0$ ;  $M_K = 0$ .

Точка 2.  $M = -q(0,8l)^2/2 = -0,32$ ;  $M_K = 0$ .

Точка 3.  $M = 0$ ;  $M_K = 0,32ql^2$  (в связи с поворотом от бруса на участке 3-4  $M = 0,32$  передается как крутящий про- часовой стрелки).

Точка 4.  $M = -0,8ql^2$ ;  $M_K = 0,32ql^2$ .

Точка 5.  $M = 0$ ;  $M_K = 0$ .

Точка 6.  $M = 0,8ql^2$ ;  $M_K = 0$ .

В точке 7 следует учесть скачок на эпюре изгибающих моментов из-за того, что  $M_K$  на участке 3-4 при переходе к направлению точки 7 и 8 будет изгибать брус, а изгибающий момент в точке 4 дет передаваться на участок 7-8 как скручивающий.

В точке 7.  $M = 0,8ql^2 - 0,32ql^2 = 0,48ql^2$ ;  $M_K = -0,8ql^2$ .

В точке 8.  $M = 1,6ql^2 - 0,8ql \cdot 1,2l = 0,64ql^2$ ;  $M_K = -0,8ql^2$ .

Строим эпюры, откладывая ординаты и соединяя их в соседних точках прямыми линиями. Только на участке с распределенной нагрузкой значения ординат соединим кривой, выпуклостью навстречу стрелки нагрузки (рис. 7.11 б, в).

В задаче № 15 контрольных заданий [1] требуется рассчитать и на совместное действие кручения с изгибом. В учебной литературе имеется большое количество примеров с подробным объяснением.

При решении важно правильно определить направление и величину сил, действующих на вал, и построить эпюры изгибающих моментов в горизонтальной и вертикальной плоскости.

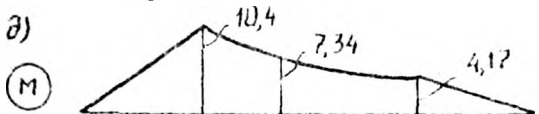
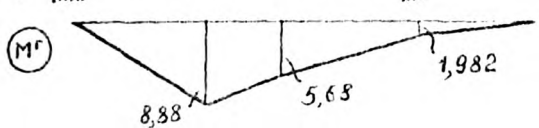
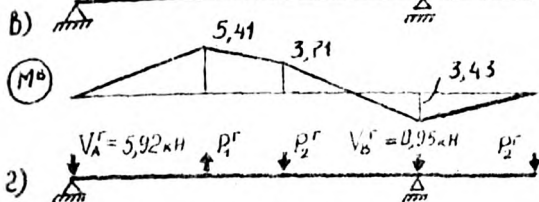
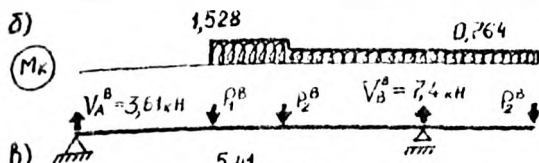
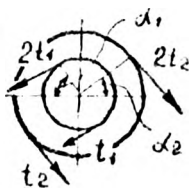
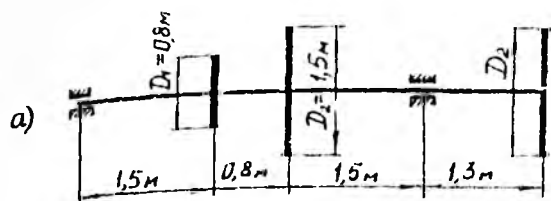
**Пример.** Шкив с диаметром  $D_1 = 0,8$  м (рис. 7.12а) с углом наклона на ветвей ремня  $\alpha_1 = 60^\circ$  делает  $n = 500$  об/мин и передает мощность  $N = 80$  кВт. Два других шкива имеют одинаковый диаметр  $D_2 = 1,5$  м и угол наклона ветвей  $\alpha_2 = 30^\circ$ . Каждый передает мощность  $N/2$ . Необходимо подобрать диаметр вала при  $[\sigma] = 80$  МПа.

**Решение.**  $\varnothing$ . Моменты на шкивах определяются через мощность:

$$M_1 = \frac{N_1 \cdot 60}{\pi n} = \frac{80 \cdot 60}{\pi \cdot 500} = 1,528 \text{ кНм}; M_2 = M_1/2 = 0,764 \text{ кНм},$$

так как  $N_2 = N_1/2$ .





$$P_1^B = R \cos 60^\circ$$

$$P_1^B = 5,73 \text{ кН}$$

$$P_1^r = P_1 \sin 60^\circ$$

$$P_1^r = 9,92 \text{ кН}$$

$$P_2^B = P_2 \cos 30^\circ$$

$$P_2^B = 2,64 \text{ кН}$$

$$P_2^r = P_2 \sin 30^\circ$$

$$P_2^r = 1,525 \text{ кН}$$

Рис. 7.12

2). Окружные усилия будут

$$t_1 = \frac{2M_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 1,528}{0,8} = 3,82 \text{ кН}; \quad t_2 = \frac{2M_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 0,764}{1,5} = 1,018 \text{ кН}$$

3. Давление на вал  $P_1 = 3t_1 = 11,46 \text{ кН}$ ;  $P_2 = 3t_2 = 3,05 \text{ кН}$ .

Разложив силы давления на составляющие (горизонтальную и вертикальную), строим эпюры изгибающих моментов от горизонтальных и вертикальных сил (рис. 7.12в, г). Эпюру суммарных изгибающих моментов (рис. 7.12д) строим, вычисляя ординаты в характерных точках по формуле  $M = \sqrt{M_H^2 + M_V^2}$ .

При установлении опасного сечения определяющим является изгибающий момент из эпюры суммарных моментов.

Расчетный момент по третьей теории прочности будет

$$M_{3\text{т}} = \sqrt{M^2 + M_K^2} = \sqrt{10,4^2 + 1,528^2} = 6,28 \text{ кНм},$$

по четвертой теории прочности -

$$M_{4\text{т}} = \sqrt{M^2 + 0,75M_K^2} = \sqrt{10,4^2 + 0,75 \cdot 1,528^2} = 6,22 \text{ кНм}.$$

Из условия прочности определяем диаметр вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_3}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{6,28 \cdot 10^6}{0,1 \cdot 80}} = 92,2 \text{ мм}, \quad d = 92 \text{ мм}.$$

## Глава 8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИИ

### 8.1. Дифференциальное уравнение изогнутой оси

В предыдущих главах основное внимание уделялось расчетам на прочность. Расчеты на жесткость при растяжении и кручении были ограниченными, вытекающими из закона Гука, для простых видов сопротивлений.

В связи с рассмотрением изгиба и сложных видов сопротивления возникает потребность рассматривать специальные методы определения перемещений. При изгибе балок - это прогибы и углы поворота сечений.

Функция изменения положения центров тяжести поперечных сечений по отношению к недеформированному состоянию как нулевому значению называется уравнением изогнутой оси балки. Значение этой функции в каждой точке вдоль оси балки называется прогибом. На опорах прогибы нулевые, так как податливостью опор мы пренебрегаем в наших расчетах.

Углом поворота сечения в соответствующей точке вдоль оси называется угол между главными центральными осями сечения до и после деформации (рис. 8.1).

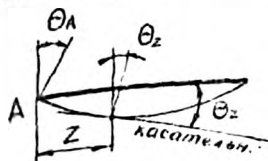


Рис. 8.1

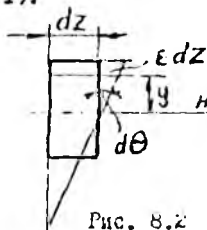


Рис. 8.2

Если  $y = f(z)$ , то  $\operatorname{tg} d\theta = y' = f'(z)$ .

Для малых деформаций в рассматриваемых технических задачах (линейные проблемы механики) производная как тангенс угла наклона касательной к оси равна углу  $\theta$  в радианах. Из рис. 8.2 следует, что

$$d\theta = \frac{\epsilon dz}{y} = \frac{\sigma}{E} \frac{dz}{y} = \frac{M dz}{E J_x}, \quad \text{так как} \quad \sigma = \frac{M y}{J_x},$$

$$\text{или} \quad \frac{d\theta}{dz} = \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M}{E J_x}. \quad (8.1)$$

Уравнение (8.1) называется приближенным дифференциальным уравнением изогнутой оси балки. Вывод его в учебной литературе получают из уравнения кривизны, но приведенный выше вывод нам представляется более простым и наглядным.

## 8.2. Универсальное уравнение изогнутой оси и метод начальных параметров

Изогнутая ось балки, из-за того, что эпюры изгибающих моментов определяются различными уравнениями с конечными разрывами, при двойном интегрировании выравнивается, принимает гладкий характер изменения, но при этом на различных участках математические выражения остаются различными. Говорят, что изогнутая ось описывается кусочно-гладкими функциями или конкретнее — полиномами.

Клебш указал метод, который обеспечивает сопряжения полиномов в выражениях изгибающих моментов на различных участках при интегрировании и позволяет получить универсальное уравнение изогнутой оси. Рекомендации Клебша сводятся к интегрированию без раскрытия скобок, а всем нагрузкам приписывается плечо, в том числе и сосре-

доточенным моментам - плечо в нулевой степени. Все распределенные нагрузки (рис. 8.3) продолжаются до сечения, а исчезновение той или иной распределенной нагрузки компенсируется введением новой, противоположного направления.

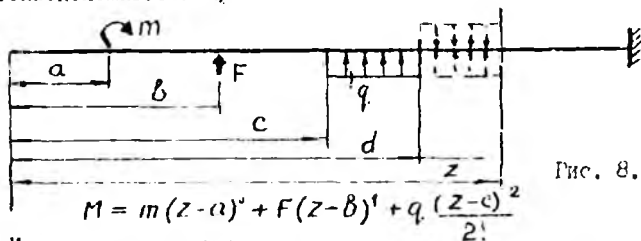


Рис. 8.3

Интегрируя, получим

$$[J]\theta = [J] \frac{dy}{dz} = EJ\theta_0 + m \frac{(z-a)^1}{1!} + F \frac{(z-b)^2}{2!} + q \frac{(z-c)^3}{3!} - q \frac{(z-d)^3}{3!} \quad (8.2)$$

$$[E]y = EJy_0 + EJ\theta_0 z + m \frac{(z-a)^2}{2!} + F \frac{(z-b)^3}{3!} + q \frac{(z-c)^4}{4!} - q \frac{(z-d)^4}{4!} \quad (8.3)$$

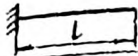
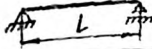
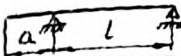
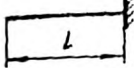
Постоянные интегрирования  $EJ\theta_0$  и  $EJy_0$  называют начальными параметрами. Они представляют собой угол поворота в начале координат и прогиб в начале координат, умноженные на  $[E]$  - жесткость сечения при изгибе. Универсальное уравнение представляет сумму полиномов, каждый из которых есть произведение нагрузки на двучлен в соответствующей степени, состоящий из координаты сечения минус расстояние до начала нагрузки.

Для прогибов моментам соответствует вторая степень, для сосредоточенных сил - третья и для распределенных равномерно нагрузок - четвертая степень. Универсальное уравнение дает только эту информацию.

Следует иметь в виду, что может быть несколько моментов или не быть совсем, также как сосредоточенных и распределенных нагрузок. Поэтому всегда подразумевается суммирование всех выражений от всех нагрузок, но только расположенных слева от сечения. Чтобы подчеркнуть это, в практических расчетах, когда речь идет о конкретной записи, в конце каждого участка ставят вертикальную черту и обозначают участки римскими цифрами.

Определение начальных параметров приводится в табл. 8.1.

Таблица 8.1

Способ закрепления	Начальные параметры	Способ определения
	$EJ\theta_0 = 0$ $EJy_0 = 0$	—
	$EJ\theta_0 \neq 0$ $EJy_0 = 0$	$EJy(a) = 0$
	$EJ\theta_0 \neq 0$ $EJy_0 \neq 0$	$EJy(a) = 0$ $EJy(a+L) = 0$
	$EJ\theta_0 \neq 0$ $EJy_0 \neq 0$	$EJ\theta(y) = 0$ $EJy(L) = 0$

### 8.3. Энергетические методы определения перемещений

Рассмотренный метод определения перемещений (метод начальных параметров) довольно трудоемкий, и вряд ли его следует рекомендовать, когда требуется подсчитать перемещение в некоторых конкретных точках. Кроме того, он не универсален и уже в рамках практически не применим. В балках с переменной жесткостью на разных участках он постоянно усложняется и труден даже для специалистов.

Наиболее пригоден в этом случае энергетический способ — из-за его универсальности и простоты вычислений.

Энергетический способ определения перемещений основан на понятиях виртуальной (возможной) работы, работы на собственных перемещениях, перехода работы внешних сил в энергию упругой деформации.

На линейных перемещениях совершают работу внешние силы, на угловых — внешние моменты. Учитывая, что для абсолютно упругого тела работа внешних сил переходит в энергию деформации и, наоборот, энергия деформации при удалении внешних сил совершает работу, равную работе этих сил, запишем, пренебрегая рассеянием энергии:

$$A = U, \quad (8.4)$$

где  $A$  - работа внешних сил;  $U$  - энергия деформации.

Отметим, что любая сила на своем (ее вызванном) перемещении совершает работу, равную площади треугольника при графическом ее изображении (рис. 8.4а), но если перемещение вызвано другой силой (виртуальное или возможное), то работа первой силы на этом перемещении будет равна площади прямоугольника (рис. 8.4б):

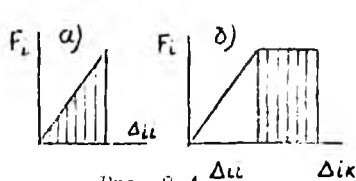


Рис. 8.4

$$\Delta A = F_i \Delta i_k \quad (8.5)$$

Из выражения (8.5) видно, что возможная работа будет численно равна перемещению (прогибу) тогда, когда сила равна единице.

В соответствии с равенством (8.4) внутренние усилия совершают такую же работу, как и внешне. Поэтому для отыскания перемещения достаточно найти возможную работу упругой деформации. С этой целью рассмотрим балку, находящуюся под действием нагрузки  $q$  и единичной силы  $F = 1$  (рис. 8.5).

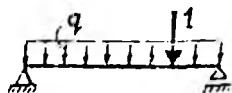


Рис. 8.5

В сечениях балки возникают нормальные напряжения  $\sigma_q$  от нагрузки  $q$  и  $\sigma_1$  - от силы  $F = 1$ .

По принципу независимости действия сил можно записать, что напряжение на элементарной площадке равно

$$\sigma = \sigma_q + \sigma_1, \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{M_q y}{J_x} + \frac{\bar{M}_1 y}{J_x} = \frac{M_q + \bar{M}_1}{J_x} y, \quad (8.6)$$

где  $M_q$  - изгибающий момент от нагрузки;  $\bar{M}_1$  - изгибающий момент от единичной силы.

Пренебрегая энергией деформации, наклепленной за счет касательных напряжений, определим ее при изгибе элементарного объема балки:

$$dU = \frac{1}{2} \sigma \epsilon dV.$$

Интегрируя это выражение по всему объему, получим полную энергию упругой деформации:

$$U = \frac{1}{2E} \int_V \sigma^2 dV.$$

Выразим полную энергию через изгибающие моменты от внешней и

единичной нагрузкой:

$$U = \frac{1}{2E} \int_L dz \int_A \frac{(M_0 + \bar{M}_i)^2}{J_x^2} y^2 dA = \frac{1}{2} \int_L \frac{M_0^2}{EJ_x} dz + \int_L \frac{M_0 \bar{M}_i}{EJ_x} dz + \frac{1}{2} \int_L \frac{\bar{M}_i^2}{EJ_x} dz. \quad (8.7)$$

Из выражений (8.7) видно, что первый интеграл представляет собой потенциальную энергию, накопленную в упругом теле под действием внешней нагрузки, и не зависит от действия единичной силы.

Третий интеграл представляет энергию упругой деформации, накопленную в теле под действием единичной силы, и не зависит от нагрузки  $Q$ . Второй интеграл представляет энергию упругой деформации, соответствующую возможной работе единичной силы на перемещении, вызванном внешней нагрузкой  $q$ . Следовательно, руководствуясь равенством (8.4) и принципом независимости действия сил, можно записать:

$$\int_L \frac{M_0 \bar{M}_i}{EJ_x} dz = \Delta \epsilon = 1 \Delta_i q. \quad (8.8)$$

Таким образом, возможная работа внутренних сил равна возможной работе внешних, на перемещениях, вызванных внешними силами. Последний интеграл (8.8) называется интегралом Мора (интегралом перемещения).

Чтобы найти прогиб (угол поворота) сечения, нужно приложить единичную силу (момент) по направлению искомого перемещения и составить выражения изгибающих моментов от заданной нагрузки и единичных сил. Записав интеграл Мора, вычислить перемещение.

#### 8.4. Правило Верещагина

Верещагин предложил способ вычисления интегралов Мора по эпюрам внутренних силовых факторов (способ перемножения эпюр).

Пусть на некотором участке эпюры  $M_0$  - криволинейная, а  $\bar{M}_i$  - линейная (рис. 8.5) и подчиняется уравнению  $\bar{M}_i = Z \operatorname{tg} \alpha$ .

Выделим элементарную полоску площадью  $d\omega$ . Интеграл Мора запишется:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{EJ_x} \int_L M_0 \bar{M}_i dz = \frac{1}{EJ_x} \int_L M_0 \operatorname{tg} \alpha dz = \frac{1}{EJ_x} \int_L M_0 \operatorname{tg} \alpha \frac{d\omega}{\omega} dz = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{EJ_x} Z_c \omega = \frac{1}{EJ_x} Y_c \omega; \quad \Delta = \frac{Y_c \omega}{EJ_x}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Таким образом, по правилу Верещагина интегрирование заменяется

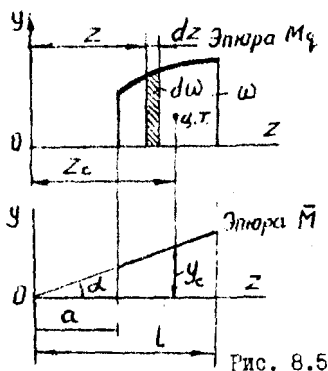


Рис. 8.5

перемножим площади криволинейной эпюры на ординату линейной, взяв под центром тяжести криволинейной. Произведение  $\omega y_c$  будет положительным, когда  $\omega$  и  $y_c$  расположены по одну сторону от базисной линии, и отрицательным – если они находятся по разные стороны от этой линии.

**Пример** Определить вертикальное, горизонтальное и угловое перемещение сечения А ломаного стержня, представленного на рис. 8.6. Жесткость сечения вертикального и

горизонтального участков  $EJ$ .

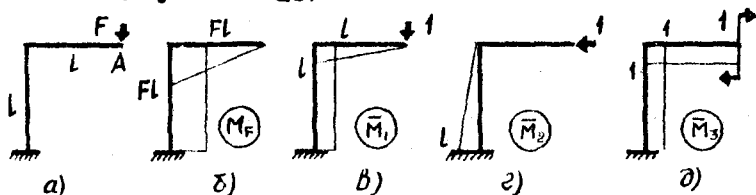


Рис. 8.6

**Решение.** Строим эпюру изгибающих моментов от нагрузки (рис. 8.6б). Для определения вертикального перемещения сечения выбираем вспомогательное состояние системы, представленное на рис. 8.6в.

Определяем вертикальное перемещение по методу Мора, используя правило Верещагина:

$$\Delta_B = \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{2} FL L \frac{2}{3} L + FL L \cdot L \right) = \frac{4 FL^3}{3EJ}$$

Так как обе эпюры расположены снизу, то результат перемножили берем со знаком плюс. Это означает, что точка А перемещается вниз, т.е. так, как направлена единичная вертикальная сила.

Для определения горизонтального перемещения точки А выбираем вспомогательное состояние с горизонтальной единичной силой, направленной влево, и строим эпюру моментов (рис. 8.6г).



Перемножаем эпюры  $M_F$  и  $\bar{M}_2$  и получаем

$$\Delta_T = 1/EJ (FL \cdot L/2) = FL^3/2EJ.$$

Результат перемножения эпюр положителен, так как перемноженные эпюры располагаются на одной и той же стороне от базисной линии (линии стержня).

Для определения углового перемещения выбираем вспомогательное состояние системы и строим эпюру изгибающих моментов (рис. 8, бд). Перемножаем эпюры  $M_F$  и  $\bar{M}_3$ .

$$\Theta_A = 1/EJ (\frac{1}{2} FL \cdot L + FL \cdot L) = 3FL^2/2EJ.$$

Результат перемножения эпюр положителен, так как перемноженные эпюры располагаются с одной стороны от базисной линии. Следовательно, сечение  $A$  поворачивается по часовой стрелке.

Пример. Найти осадку винтовой цилиндрической пружины (рис. 8.7) с количеством витков  $n$  и средним диаметром пружины  $D$  из проволоки диаметром  $d$ . Модуль сдвига  $G$ . Считать пружину с малым шагом, т.е. влиянием изгиба пренебречь, и считать, что осадка обеспечивается скручиванием проволоки.

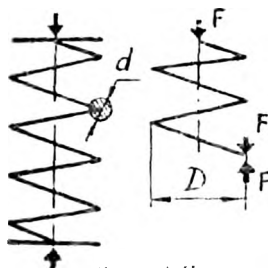


Рис. 8.7

Решение. Под действием силы  $F$  возникает крутящий момент  $M_k = FD/2$ , постоянный по всей длине  $z = Dn$ .

Под действием единичной силы  $F = 1$  возникает постоянный по всей длине крутящий момент, равный  $1 \cdot D/2$ .

Осадка пружины

$$\lambda = \Delta_{if} = \frac{1}{GJ_p} \left( \frac{FD}{2} \cdot n \cdot \frac{D}{2} \right) = \frac{FD^3 n^3 \cdot 32}{64 J_p d^4} = \frac{8FD^3 n^3}{G d^4}.$$

Найденное значение осадки  $\lambda$  позволяет рассмотреть задачу № 6 контрольных заданий [1].

Задача № 6 контрольных заданий [1] решается уравнением равновесия (сумма моментов всех сил относительно неподвижной опоры) совместно с уравнением деформаций (осадки) пружин, составленным из геометрических соображений поворота жесткого элемента конструкции относительно неподвижной опоры (рис. 8.8).

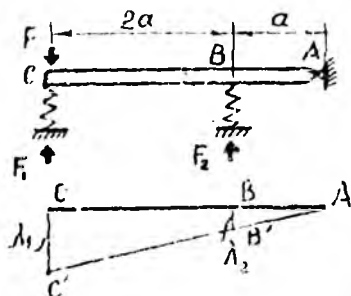


Рис. 8.8

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$\begin{cases} -F \cdot 3a + F_1 \cdot 3a + F_2 \cdot a = 0; \\ \frac{\lambda_1}{3a} = \frac{\lambda_2}{a}; \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \frac{8F_1 D^3 n}{G d^4}; \quad \lambda_2 = \frac{8F_2 D^3 n}{G d^4}.$$

Задача № 11 (I) проще всего решается с использованием интеграла Мора и способа Верещагина (рис. 8.9).  $K=1$ ;  $y_A=?$

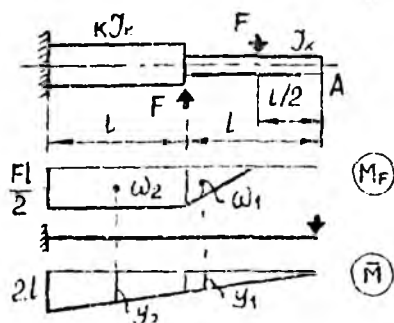


Рис. 8.9

$$y_A = \frac{\omega y_c}{E J_x} = \frac{\omega_1 y_1}{E J_x} + \frac{\omega_2 y_2}{E J_x}$$

$$= \frac{1}{E J_x} \cdot \frac{1}{2} \frac{F l}{2} \cdot \frac{L}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \frac{L}{2} \right) + \frac{1}{E 3 J_x} \frac{F l}{2} \cdot \frac{L}{2} \frac{1+2L}{2} = \frac{17 F l^3}{48 E J_x}$$

## Глава 9. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

### 9.1. Статическая неопределенность

К статически неопределимым стержневым системам относят конструкции, для которых нельзя составить достаточного количества независимых уравнений статики, чтобы определить усилия связей внутренних (обусловленных соединением элементов конструкции) или внешних (обусловленных закреплением конструкции).

Разность между числом неизвестных усилий и числом независимых уравнений статики, которые можно составить при расчете конструк-

ции, определяет степень ее статической неопределенности.

Степень статической неопределенности ( $\Lambda$ ), или требуемое число дополнительных уравнений к уравнениям равновесия, можно получить, вычитая из суммы опорных ( $C_o$ ) и внутренних ( $C_b$ ) связей число независимых уравнений равновесия для одного элемента, умноженных на количество элементов ( $D$ ):

$$\text{для плоской системы} \quad \Lambda = C_o + C_b - 3D; \quad (9.1)$$

$$\text{для пространственной системы} \quad \Lambda = C_o + C_b - 6D. \quad (9.2)$$

В формулы (9.1) и (9.2) следует подставлять значения  $D$  в первую очередь, так как по назначенному числу стержней определяется число внутренних связей для их соединения.

Например, для стержневой системы (рис. 9.1а) в качестве стержней можно принять  $AFB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DF$ ,  $DE$ . Количество штрихов в узлах определяет число внутренних связей. Число опорных связей обозначено цифрами:

$$\Lambda = 6 + 14 - 3 \cdot 5 = 5.$$

Можно принять в качестве стержней  $ABCDE$ ,  $FD$ . Тогда

$$\Lambda = 6 + 5 - 3 \cdot 2 = 5.$$

Следовательно, система пять раз статически неопределима и требуется составить пять дополнительных уравнений к уравнениям равновесия.

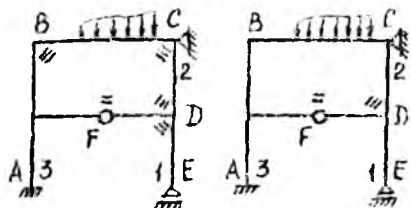


Рис. 9.1

## 9.2. Метод сил

Наиболее распространенным методом раскрытия статической неопределенности является метод сил, в котором за неизвестные принимаются усилия, заменяющие действие отброшенных "лишних" связей.

Условием для определения неизвестных сил  $X_1, X_2, \dots, X_n$  является, как правило, отсутствие перемещений в направлении этих сил. Однако метод позволяет решать задачи и с ограниченными перемещениями наличием зазоров и других устройств, например, осадки опор.

Условие для определения неизвестных усилий запишется:

$$\Delta_1(F, X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = 0;$$

$$\Delta_2(F, X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = 0;$$

$$\begin{aligned}\Delta_3(F, X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) &= 0; \\ \Delta_n(F, X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) &= 0.\end{aligned}\tag{9.3}$$

Чтобы выполнить условие (9.3), достаточно заданную систему заменить эквивалентной введением неизвестных сил по направлению лишних связей  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ . При этом необходимо следить, чтобы основная система (система, получаемая из эквивалентной удалением всех известных и неизвестных нагрузок) была геометрически неизменяемой, т.е. не допускала даже малейших перемещений без деформирования стержней. На рис. 9.2а и рис. 9.2б представлены эквивалентная и основная системы для заданной на рис. 9.1.

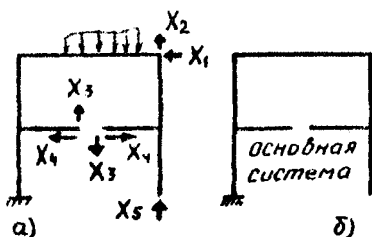


Рис. 9.2

Чтобы решить систему уравнений (9.3), необходимо:

построить эпюры от единичных сил по направлению лишних связей в основной системе;

построить эпюру от нагрузки и неизвестных сил, выражая ординаты эпюр через нагрузку и неизвестные.

Тогда приведенные уравнения получаются при перемножении по Верещагину эпюр от нагрузки на каждую единичную, если результат перемножения приравнять нулю.

Однако построение эпюр от нагрузки и неизвестных сил может быть слишком громоздким, поэтому рекомендуется пользоваться принципом независимости действия сил, т.е. построить эпюры от нагрузки и каждой неизвестной силы отдельно и, перемножая на единичную, сложить результаты. Из условия применимости принципа независимости действия сил следует:

$$\begin{aligned}\Delta_1(X_1) + \Delta_1(X_2) + \Delta_1(X_3) + \dots + \Delta_1(X_n) + \Delta_1F &= 0; \\ \Delta_2(X_1) + \Delta_2(X_2) + \Delta_2(X_3) + \dots + \Delta_2(X_n) + \Delta_2F &= 0; \\ \Delta_3(X_1) + \Delta_3(X_2) + \Delta_3(X_3) + \dots + \Delta_3(X_n) + \Delta_3F &= 0; \\ \Delta_n(X_1) + \Delta_n(X_2) + \Delta_n(X_3) + \dots + \Delta_n(X_n) + \Delta_nF &= 0.\end{aligned}\tag{9.4}$$

Для расшифровки выражений необходимо иметь эпюры от единичных сил, построенные по направлению лишних связей, и эпюры от нагрузки в каждой неизвестной силе, построенные в основной системе. Однако выражение можно преобразовать так, что число необходимых эпор для расшифровки неизвестных сократится. В силу закона Гука для линейно-деформируемых систем перемещение по  $i$ -тому направлению, вызванному неизвестной силой  $X_k$ , равно перемещению по направлению, вызванному  $k$ -той единичной силой, увеличенному в  $X_k$  раз.

$$\Delta_1(x_1) = X_1 \delta_{11}; \quad \Delta_1(x_2) = X_2 \delta_{12}, \quad \text{тогда}$$

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + \dots + X_n \delta_{1n} + \Delta_{1F} &= 0; \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + \dots + X_n \delta_{2n} + \Delta_{2F} &= 0; \\ X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + \dots + X_n \delta_{3n} + \Delta_{3F} &= 0; \\ X_1 \delta_{n1} + X_2 \delta_{n2} + X_3 \delta_{n3} + \dots + X_n \delta_{nn} + \Delta_{nF} &= 0. \end{aligned} \quad (9.5)$$

В этом случае построения эпор от неизвестных сил не требуется. Достаточно иметь эпюры от единичных сил по направлению неизвестных и от нагрузки в основной системе. Приведенная система линейных уравнений называется системой канонических уравнений метода сил. Название "каноническое" говорит о том, что число неизвестных в системе равно числу уравнений системы. Иногда с этим названием связывают единообразие в записи системы уравнений. Уравнения записываются по одному закону (канону).

Физический смысл коэффициентов канонических уравнений метода сил очевиден.

Грузовые коэффициенты представляют перемещения в основной системе под нагрузкой.

Единичные коэффициенты представляют собой податливость системы по направлению первого индекса от сил в направлении второго индекса, или перемещения по направлению первого индекса, вызванному единичной силой второго индекса.

Рассмотрим пример расчета плоской рамы (задача IВa, рис. 9.3).

1). Определяем степень статической неопределимости:

$$A = C_c + C_b - 3D = 5 + 6 - 3 \cdot 5 = 2.$$

2) Выбираем основную систему (рис. 9.3б).

Канонические уравнения метода сил имеют вид:

$$\begin{cases} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \Delta_{1F} = 0; \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \Delta_{2F} = 0. \end{cases} \quad (I)$$

3) Строим эпюры в основной системе (рис. 9.3в, г, д).

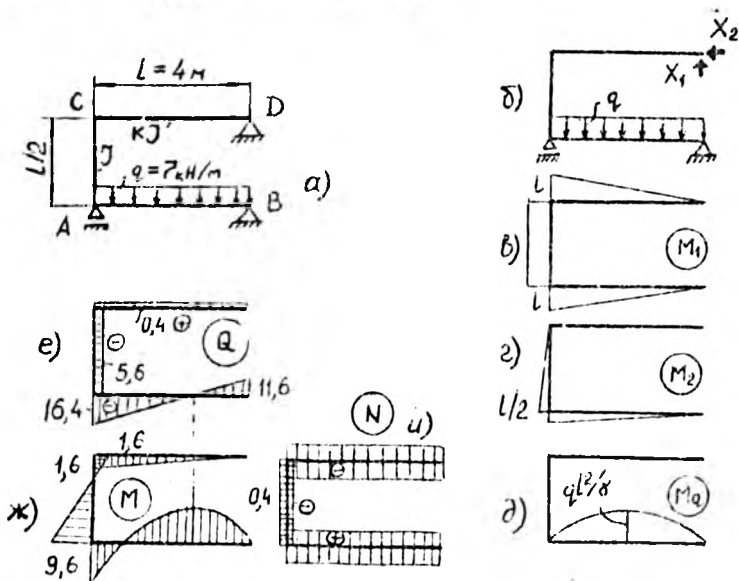
Обычно эпюры в основной системе строят для единичных сил и нагрузки по общим правилам построения эпюр в статически определимых системах (как правило, определяя реакции в системе отдельно от каждого вида нагрузки).

Находим коэффициенты канонических уравнений перемножением эпюр по Верещагину:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{2} l l \frac{2}{3} l + \frac{l \cdot l}{2} l \right) = \frac{7l^3}{6EJ}; \quad \Delta_{1q} = \frac{1}{EJ} \left( -\frac{ql^2}{8} \frac{2}{3} l \frac{l}{2} \right) = -\frac{ql^4}{24EJ};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \frac{l}{2} + \frac{1}{2} l \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \frac{l}{2} \right) = \frac{l^3}{8EJ}; \quad \Delta_{2q} = \frac{1}{EJ} \left( -\frac{ql^2}{8} \frac{2}{3} l \frac{l}{4} \right) = -\frac{ql^4}{48EJ};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{l}{2} \frac{l}{2} \frac{1}{2} l + l l \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \frac{l}{2} \right) = \frac{7l^4}{24EJ}.$$



Подставляя найденные значения коэффициентов в систему (1) получим  $X_1 = -ql/20$ ;  $X_2 = ql/5$ ,

или  $X_1 = -0,4 \text{ кН}$ ;  $X_2 = 5,6 \text{ кН}$ .

Полная эпюра изгибающих моментов может быть построена суммированием ординат грузовой эпюры  $M_q$  и ординат единичных эпюр, умноженных соответственно на величину  $X_1$  и  $X_2$ .

Эпюры внутренних силовых факторов (рис. 9.3 в, ж, и), построенные для эквивалентной системы при найденных значениях  $X_1$  и  $X_2$  (строятся в соответствии с правилами для статически определимых систем), являются искомыми эпюрами для статически неопределимой системы.

Рассмотрим плоскопространственную несимметричную систему, т.е. плоскую раму, нагруженную силами, перпендикулярными к плоскости рамы (рис. 9.4а).  $a = 1,4 \text{ м}$ ;  $b = 0,7 \text{ м}$ ;  $F = 60 \text{ кН}$ ,  $G = 0,4 \text{ Е}$ .

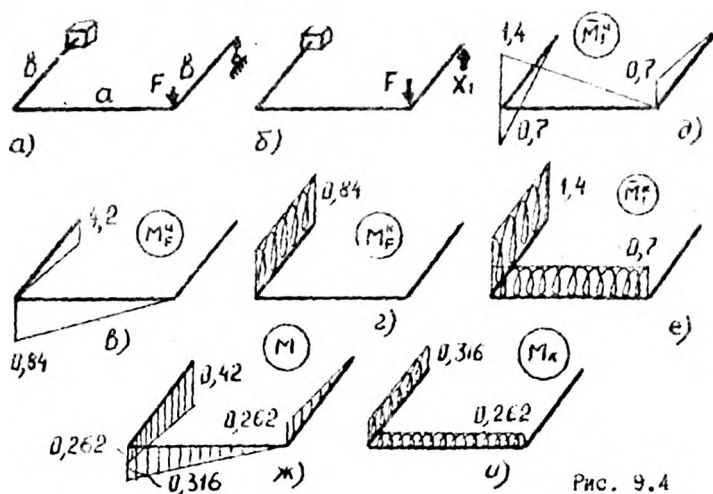


Рис. 9.4

Решение. 1). Степень статической неопределимости

$$A = C_c + C_a - 6D = 7 + 2 \cdot 6 - 6 \cdot 3 = 1.$$

2) Каноническое уравнение запишется

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1F} = 0.$$

3) Выбираем основную систему. Система эквивалентная заданной представлена на рис. 9.4б.

Для определения коэффициентов канонического уравнения строим эпюры от заданной нагрузки (рис. 9.4в, г) и единичной нагрузки (рис. 9.4д, е).

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{2} \cdot 0,7 \cdot 0,7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,72 + \frac{1}{2} \cdot 1,4 \cdot 1,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,4 \right) + \frac{1}{GJ_p} (0,7 \cdot 1,4 \cdot 0,7 + 1,4 \cdot 0,7 \cdot 1,4) = \frac{4,1085}{EJ};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EJ} \left( -0,84 \cdot 1,4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,4 + 0,42 \cdot 0,7 \cdot 1,2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,7 - \frac{1}{GJ_p} (0,84 \cdot 0,7 \cdot 1,4) \right) = -\frac{1,543}{EJ}; \quad \frac{4,1085}{EJ} X_1 - \frac{1,543}{EJ} = 0; \quad X_1 = 0,375 \text{ кН.}$$

Строим окончательные эпюры  $M$  и  $M_k$  (рис. 9.4ж, и).

### 9.3. Использование симметрии и кососимметрии при выборе основной системы

Система называется симметричной, если существует такое сечение, при котором часть системы совпадает с зеркальным отображением второй ее части относительно этого сечения, и кососимметричной, если система обладает центральной симметрией (рис. 9.5).

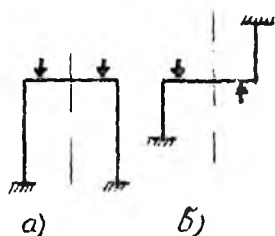


Рис. 9.5

Рекомендации сводятся к тому, чтобы лишние неизвестные принимались внутренние силы в поперечных сечениях, содержащих ось симметрии. Например, в плоскостранственной системе (задача 186 контрольных заданий [1]) использование симметрии приводит к тому, что для раскрытия статической неопределимости приходится решать одно уравнение с одним неизвестным, несмотря на то, что степень статической неопределимости



равна 3 для плоских рам и 6 - для плоскопространственной рамы, предлагаемой в контрольной задаче 18 б (рис. 9.6а).

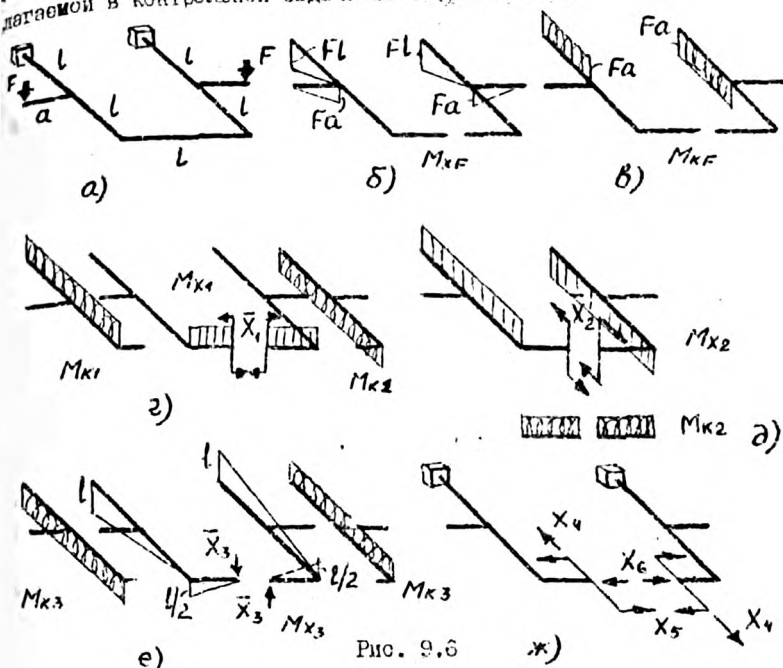


Рис. 9.6

Сделан разрез по оси симметрии, строим грузовые эпюры  $M$  и  $M_k$  (рис. 9.6б, в). Грузовая эпюра изгибающего момента симметрична, а крутящего - косимметрична.

От единичного силового фактора  $X_1 = 1$ ,  $M_k$  - косимметрична (рис. 9.6г) и определяет грузовой коэффициент  $\Delta 1F$ .

Перемножением эпюр по Верещагину находим:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} (1 \cdot 1 \cdot 1) + \frac{1}{GJ_k} (1 \cdot 2L \cdot 1) \cdot 2.$$

Побочные коэффициенты  $\delta_{12}$ ,  $\delta_{13}$  и т.д. равны 0,  $\delta_{12} = 0$ , так как эпюра  $M_{к2}$  - косимметрична (рис. 9.6д), а  $M_{к1}$  - симметрична (рис. 9.6г).

Следовательно, грузовой и побочный коэффициенты  $\Delta 2F$ ,  $\delta_{12}$  равны нулю, поскольку вычисляются как произведение косимметричной

эпюры на симметричную. Кроме того, участки, испытывающие изгиб и кручение от единичных эпюр, не совпадают, т.е. под эпюрами нулевые ординаты. В силу указанных причин равны нулю грузовые коэффициенты  $\Delta_{3F}$  и побочный  $\delta'_{13}$  от поперечной силы  $X_3$  в вертикальной плоскости (рис. 9.6е).

Поперечная сила  $X_4$ , изгибающий момент  $X_5$  и продольная сила  $X_6$  в горизонтальной плоскости (рис. 9.6ж) вызывает появление изгибающих моментов только в горизонтальной плоскости, поэтому под грузовой эпюрой и первой единичной будут нулевые ординаты и  $\delta_{14} = 0$ ;  $\delta_{15} = 0$ ;  $\delta'_{16} = 0$ ;  $\delta_{4F} = 0$ ;  $\delta_{5F} = 0$ ;  $\delta_{6F} = 0$ .

Поэтому  $X_1$  находится из решения уравнения

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1F} = 0.$$

Все остальные неизвестные равны нулю.

В задаче № 18 контрольных заданий [1] требуется раскрыть статическую неопределимость системы и построить эпюры внутренних силовых факторов. Схемы IX и X (рис. 24а [1]) при выборе основной системы позволяют использование симметрии. Легко подсчитать, что степень статической неопределимости равна двум для схемы IX (рис. 9.7а) и трем - для схемы X (рис. 9.8а). При этом речь идет о внутренней статической неопределимости замкнутого контура рам.

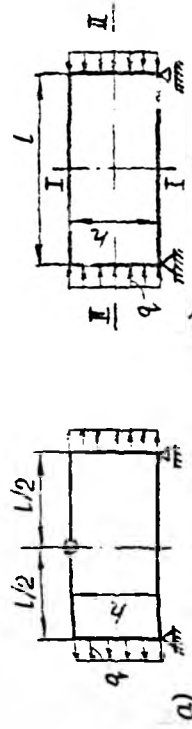
По внешним связям ( $C = 3$ ) обе системы статически определимы. Каждый плоский замкнутый контур трижды статически неопределим, а шарнир снижает степень статической неопределимости на единицу.

В схеме IX за лишние неизвестные следует принять поперечную и продольную силы в шарнире ( $X_1$  и  $X_2$ ), разрезав систему по шарниру (рис. 9.7б). В схеме X за лишние неизвестные принимаются поперечная, продольная силы и момент по оси симметрии  $X_1$ ,  $X_2$ , (рис. 9.8б).

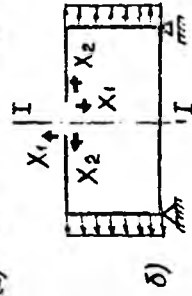
Что же дает использование симметрии? Введенные в сечение силы  $X_2$  и  $X_3$  (рис. 9.7б, 9.8б) также симметричны, так как представляют собой зеркальное отражение относительно оси симметрии.

При зеркальном отображении относительно оси симметрии силовой фактор  $X_1$  отличается направлением и относится к кососимметричным силовым факторам.

Установлено правило, что при симметричной нагрузке в симметричной системе кососимметричный силовой фактор равен нулю. В данном



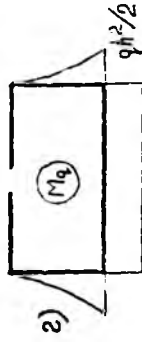
а)



б)



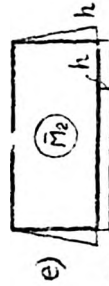
в)



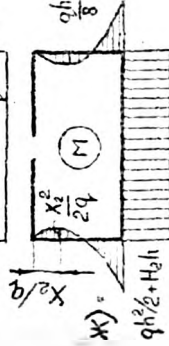
г)



д)

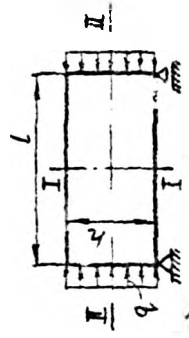


е)

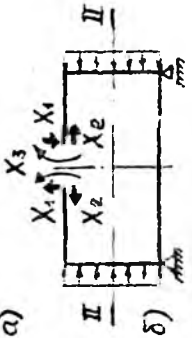


ж)

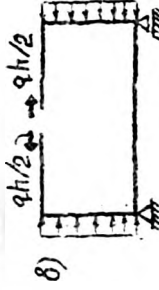
Рис. 9.7



а)



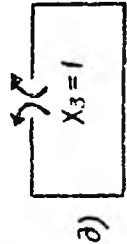
б)



в)



г)



д)



е)

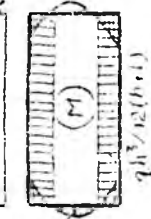


Рис. 9.8

случае (рис. 9.76, 9.86)  $X_1 = 0$ , а при выборе другой основной системы, возможно, придется решать все уравнения и вычислять все коэффициенты.

В схеме X (рис. 9.8а) из соображений симметрии относительно горизонтальной оси П-П можно сразу определить величину  $X_2$  ( $X_2 = qh/2$ ), т.к. продольные силы, возникающие в верхнем и нижнем стержнях, одинаковы и равны  $qh/2$ . Тогда придется решать только одно уравнение с одним неизвестным:

$$X_3 \delta_{33} + \Delta_{3q} = 0. \quad (1)$$

Для определения коэффициентов канонического уравнения (1) требуется построить две эпюры:

от заданной внешней нагрузки - грузовую эпюру (рис. 9.8г);

от единичной силы  $F = 1$  - единичную эпюру (рис. 9.8е).

Коэффициенты уравнения (1) будут

$$\delta_{33} = \frac{1}{EJ} \omega y_c = \frac{1}{EJ} (L \cdot 1 + h \cdot 1) \cdot 2 = \frac{2(h+L)}{EJ};$$

$$\Delta_{3q} = -\frac{1}{EJ} \left( q \frac{h^2}{3} \cdot \frac{2}{3} h \cdot 1 \right) \cdot 2 = -\frac{4h^3}{6EJ}; \quad X_3 = -\frac{\Delta_{3q}}{\delta_{33}} = -\frac{qh^3}{12(h+L)}.$$

После определения  $X_3$  строится суммарная эпюра  $M$  (рис. 9.8ж). Схема X (рис. 9.8а) имеет две оси симметрии (I, П). Внешние (опорные) связи здесь чисто формальны и во внимание могут не приниматься. Возникающие в них реакции имеют нулевые значения. Схема IX (рис. 9.7а) имеет только одну ось симметрии I-I, т.к. при проведении второй (горизонтальной) оси обнаруживается нарушение симметрии из-за наличия шарнира в верхнем стержне прямоугольного контура.

Для схемы IX  $X_1 = 0$  (т.к. это кососимметричный силовой фактор). Каноническое уравнение запишется:

$$X_2 \delta_{22} + \Delta_{2q} = 0.$$

Для определения коэффициентов  $\delta_{22}$  и  $\Delta_{2q}$  требуется построить две эпюры:

от заданной внешней нагрузки - грузовую эпюру (рис. 9.7г);

от единичной силы  $X_2 = 1$  - единичную эпюру (рис. 9.7е).

Вычисляем коэффициенты:

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{h \cdot h}{2} \cdot \frac{2}{3} h \cdot 2 + h \cdot L \cdot h \right) = \frac{1}{EJ} \left( \frac{2}{3} h^3 + h^2 L \right);$$

$$\Delta_{2q} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{qh^2}{2} \frac{1}{3} h \frac{3}{4} h^2 + \frac{qh^2}{2} l h \right) = \frac{1}{EJ} \left( \frac{qh^4}{4} + \frac{qh^3 l}{2} \right);$$

$$X_2 = - \left( \frac{qh^4}{4} + \frac{qh^3 l}{2} \right) / \left( \frac{2}{3} h^3 + h^2 l \right).$$

После определения  $X_2$  строится суммарная эпюра (рис. 9.7 ж).

Для определения максимальной ординаты эпюры  $M$  необходимо построить эпюру поперечных сил  $Q$ .

Положение максимума на эпюре  $M$  и величина момента должны оказаться равными значениям, приведенным на рис. 9.7 ж.

Основную систему для схемы IX можно также выбрать, врезав в нижний стержень шарнир (рис. 9.9.) За неизвестные в этом случае

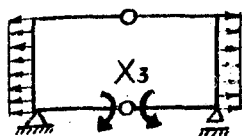


Рис. 9.9

принимается момент  $X_3$ . Единичная эпюра будет похожа на эпюру  $\bar{M}_2$  (рис. 9.7е), только отмеченные ординаты будут равны 1. А грузовая эпюра будет симметричной по отношению к вертикальной и горизонтальной осям и будет отличаться от эпюры  $M_q$  (рис. 9.8е) только знаком.

#### 9.4. Неразрезные балки

Неразрезными называются многопролетные балки, без промежуточных шарниров (рис. 9.10а).

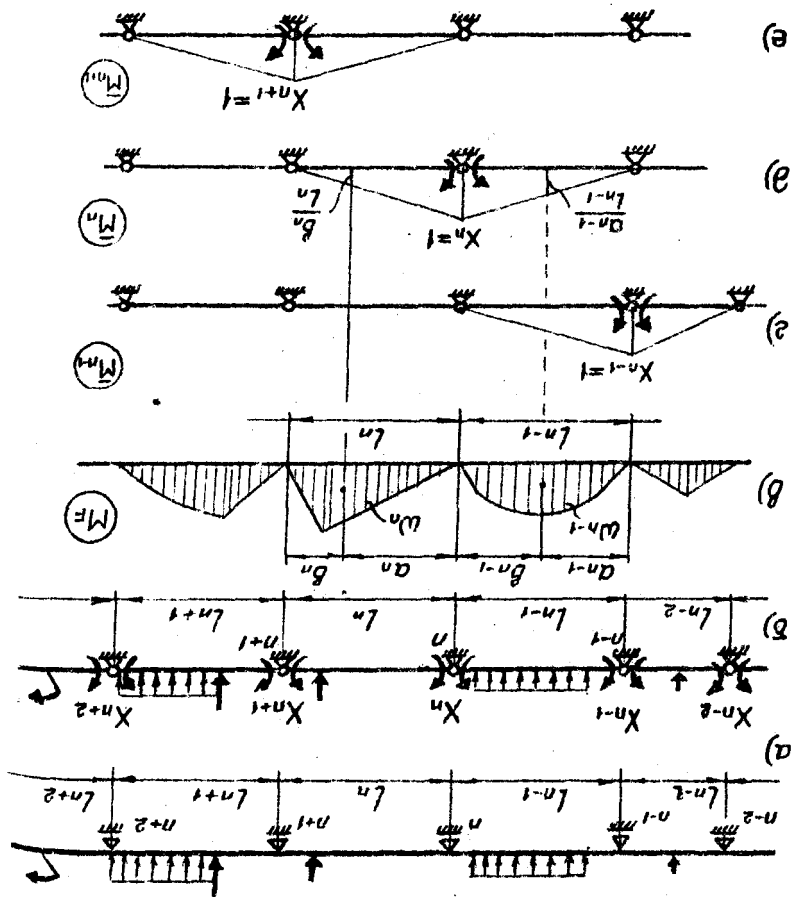
Если статически неопределимая система представлена многопролетной неразрезной балкой, то выбор в качестве основной системы балки с шарнирами, врезанными на промежуточных опорах (рис. 9.10б), позволяет не только упростить вычисления за счет обращения в нуль целого ряда побочных коэффициентов, но и обойтись без построения эпюр от единичных сил.

На рис. 9.10в, г, д, е представлены эпюры, определяющие коэффициенты  $\Pi$ -го уравнения метода сил (9.5):

$$X_1 \delta_{n1} + X_2 \delta_{n2} + \dots + X_n \delta_{n,n-1} + X_n \delta_{nn} + X_{n+1} \delta_{n,n+1} + \dots + \Delta_{nF} = 0 \quad (9.6)$$

Из эпюр видно, что в каждой строке имеется не более двух побочных коэффициентов, отличных от нуля, и, вместе с главными и грузовыми, не более четырех — определяющих уравнение системы.

FIG. 9.10



Вычислив коэффициенты по методу сил

$$\delta_{nn} = \frac{L_{n-1} + L_n}{3EJ}; \quad \delta_{n,n-1} = \frac{L_{n-1}}{6EJ}; \quad \delta_{n,n+1} = \frac{L_n}{6EJ};$$

$$\Delta_{nF} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{\omega_{n-1} a_{n-1}}{L_{n-1}} + \frac{\omega_n b_n}{L_n} \right)$$

и подставив в уравнение (9.6), получим уравнение, которое называют уравнением трех моментов:

$$M_{n-1}L_{n-1} + 2M_n(L_{n-1} + L_n) + M_{n+1}L_n = -6 \left( \omega_{n-1} \frac{a_{n-1}}{L_{n-1}} + \omega_n \frac{b_n}{L_n} \right), \quad (9.7)$$

где  $X_{n-1} = M_{n-1}$ ,  $X_n = M_n$ ,  $X_{n+1} = M_{n+1}$ , с формальной заменой обозначений переменных.

Уравнение трех моментов устанавливает связь между тремя последовательными опорными моментами в двух смежных пролетах неразрезной балки.

Уравнение (9.7) можно также записать в следующем виде:

$$M_L L_L + 2M_{cp}(L_L + L_n) + M_n L_n = -6 \left( \frac{S_L}{L_L} + \frac{S_n}{L_n} \right), \quad (9.8)$$

где  $M_L$ ,  $M_{cp}$ ,  $M_n$  - изгибающие моменты на левой, средней и правой опорах;  $L_L$ ,  $L_n$  - левый и правый пролеты;  $S_L$ ,  $S_n$  - статические моменты площади эпюры изгибающих моментов, построенных от нагрузки в пролетах балки с врезанными шарнирами на опорах, относительно крайних опор пролетов (левой и правой).

В задаче 10 контрольных зданий [1] для балки, изображенной на рис. 9.11, требуется:

найти изгибающий момент на левой опоре (в долях  $qL^2$ );

построить эпюры  $Q$  и  $M$ ;

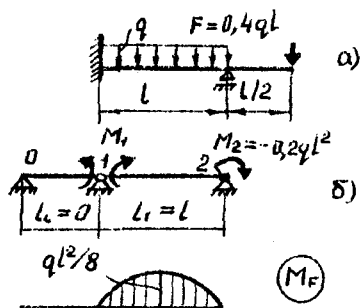
построить эпюру прогибов, вычислив три ординаты в пролете и две - на консоли.

**Решение.** При решении задачи довольно часто выбирают нерациональный метод раскрытия статической неопределенности.

Задача проще всего решается с использованием уравнения трех моментов.

Применительно к балкам с заделкой уравнение 3-х моментов записывается с введением нулевого пролета ( $L_0 = 0$ ) вместо заделки (рис. 9.11б).

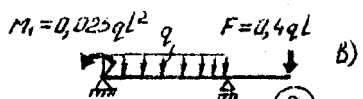
После определения опорного момента  $M_1$  вместо заделки достаточно изобразить шарнирно-неподвижную опору с приложенным опорным мо-



а) Уравнение 3-х моментов

$$M_0 L_0 + 2M_1(L_0 + L_1) + M_2 L_1 = -6 \left( \frac{S_0}{L_0} + \frac{S_1}{L_1} \right)$$

$$2M_1 L_1 - 0,2ql^2 L = -6 \frac{(ql^2/8) \frac{2}{3} L \cdot \frac{1}{2}}{L}$$



в)  $M_1 = -0,025ql^2$

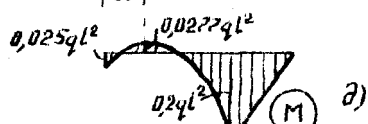
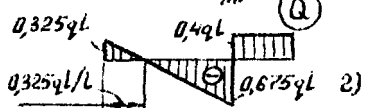


Рис. 9.11

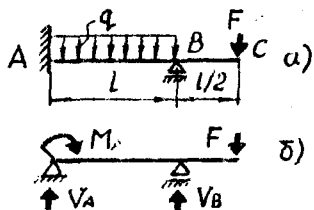


Рис. 9.13

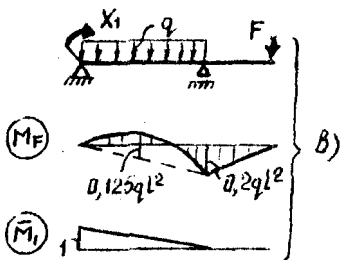
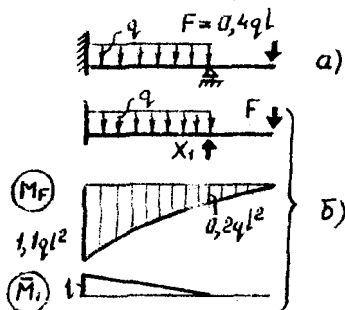


Рис. 9.12



ментом  $M_1$ . Такая статически неопределимая система (рис. 9.11в) будет эквивалентна заданной схеме.

Определяя реакции опор обычным способом и построив эпюры  $Q$  и  $M$  для эквивалентной системы, получаем соответствующие эпюры для заданной статически неопределимой системы (рис. 9.11г, д).

Раскрытие статической неопределимости по методу сил можно выполнить, приняв за "лишнюю" неизвестную  $X_1$  реакцию подвижной опоры (рис. 9.12б) или реактивный момент в заделке (рис. 9.12в). В этом случае каноническое уравнение метода сил

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1F} = 0,$$

коэффициенты которого определяются перемножением эпюр по Верещагину.

Раскрытие статической неопределимости возможно также совместным решением уравнения статики с уравнением, выражающим ограничение перемещения обусловленного дополнительной связью.

Для вычисления перемещений воспользуемся уравнением метода начальных параметров, которое для данной балки запишется в следующем виде:

$$EJy = EJy_0 + EJ\theta_0 z + \frac{M_A z^2}{2} + \frac{V_A z^3}{6} - \frac{q z^4}{24} \Big|_I + \frac{V_B (z-l)^3}{6} + \frac{q(z-l)^4}{24} \Big|_II. \quad (1)$$

Если выбрать основную систему в виде сво одно лежащей на двух опорах балки (рис. 9.13б), то в условии (1)  $EJy_0 = 0$ , а  $EJ\theta_0 \neq 0$  и находится из условия равенства нулю прогиба на опоре В ( $z = l$ ).

$$EJy_B = 0 = EJ\theta_0 l + M_A l^2/2 + V_A l^3/6 - ql^4/24. \quad (2)$$

Полагая, что  $\theta_0 = 0$  (как суммарный угол поворота на левой опоре от заданной нагрузки и от опорного момента). Получаем уравнение для определения неизвестных реакций  $V_A$  и  $M_A$  (рис. 9.13б):

$$0 = M_A l^2/2 + V_A l^3/6 - ql^4/24. \quad (3)$$

Решая уравнение (3) совместно с уравнением статики  $\sum M_B = 0$ , получим искомые неизвестные:

$$\begin{cases} \frac{M_A l^2}{2} + \frac{V_A l^3}{6} - \frac{ql^4}{24} = 0; \\ M_A + V_A l - 0,5ql^2 + 0,2ql^2 = 0; \end{cases} \quad (4)$$

$$M_A = -0,025ql^2; \quad V_A = 0,325ql.$$

Записав уравнение статики в виде суммы моментов всех сил относительно опоры В и уравнение метода начальных параметров, выражающее ту мысль, что прогиб на опоре В равен нулю при начальных параметрах  $EJy_0 = 0$  и  $EJ\theta_0 = 0$ , получаем систему уравнений (4).

Недостатком этого подхода является необходимость решения системы двух уравнений с двумя неизвестными, в то время как по методу сил и с использованием уравнения трех моментов решается одно уравнение.

Для определения прогибов и построения изогнутой оси балки используется уравнение (1). Начальные параметры:  $EJy_0 = 0$ ,  $EJ\theta_0 = 0$ .

$$EJy = - \frac{0,025ql^2 z^2}{2} + \frac{0,325ql z^3}{6} - \frac{qz^4}{24} \Big|_I + \frac{v_B(z-l)^3}{6} + \frac{q(z-l)^4}{24} \Big|_II$$

Для вычисления прогибов в пролете вместо Z подставляем координату сечения в выражение для I-го участка, а для определения прогиба на консоли - в выражение для всей балки.

При  $Z = 0,25l$

$$EJy_{(z=0,25l)} = \frac{-0,025ql^2(0,25l)^2}{2} + \frac{0,325ql(0,25l)^3}{6} - \frac{q(0,25l)^4}{24} =$$

$$= -0,00078ql^4 + 0,00084ql^4 - 0,00016ql^4 = -0,00010ql^4;$$

$$EJy_{(z=0,5l)} = 0,0011ql^4; EJy_{(z=0,75l)} = 0,003ql^4; EJy_{(z=1,25l)} = -0,0151ql^4;$$

$$EJy_{(z=1,5l)} = -0,0494ql^4.$$

Знак изгибающих моментов определяет характер кривизны изогнутой оси балки. На тех участках, где ординаты эпюры моментов расположены под осью, кривая изогнутой оси направлена выпуклостью вверх (рис. 9.11е). В нулевых точках эпюры моментов наблюдается изменение кривизны деформированной оси балки.

## Глава 10. ПРОДОЛЬНЫЙ И ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

### 10.1. Общие сведения

Изгиб, при котором прогибы нарастают не только от поперечной нагрузки, но и от продольной (сжимающей) силы, называют продольно-поперечным, а возможный изгиб только от продольных сжимающих сил -

продольным изгибом.

Расчет на предупреждение изгиба в сжатых элементах конструкции называют расчетом на устойчивость. При этом полагается наличие порогового состояния между устойчивым (состоянием сжатия без выпучивания стержней) и неустойчивым (состоянием продольного изгиба), когда деформации изгиба внезапно возникают и нарастают вплоть до разрушения.

Таким пороговым состоянием является состояние безразличного равновесия, когда одновременно может существовать множество форм стержня с изогнутой осью и возможно состояние первоначальной прямолинейности.

Сжимающая нагрузка, вызывающая состояние безразличного равновесия, называется критической.

### 10.2. Формула Эйлера для критической силы

Начало теоретического определения критических нагрузок положил Д. Эйлером, который составил и решил задачу определения критической силы  $F_{кр}$  для стойки с шарнирно опертными концами (рис. 10.1).

В произвольном сечении

$$M = -F_{кр} y \quad (10.1)$$

$$EJ \frac{d^2 y}{dz^2} = M \quad (10.2)$$

дают систему разрешающих уравнений, из которых получим дифференциальное

уравнение

$$EJ \frac{d^2 y}{dz^2} + F_{кр} y = 0. \quad (10.3)$$

Для решения уравнения (10.3) составим характеристическое уравнение  $EJ r^2 + F_{кр} = 0$ , корни которого  $r_{1,2} = \pm \sqrt{F_{кр}/EJ} i = \pm ki$ .

Так как корни чисто мнимые, то решение дифференциального уравнения (10.3) запишется:

$$y = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz.$$

Из граничных условий (рис. 10.1)

при  $z = 0$   $y = 0$  и  $C_1 = 0$ ;

при  $z = l$   $y \neq 0$   $y = C_2 \sin kl = 0$ , или  $kl = n\pi$ ,

где  $n = 1, 2, 3$  и т.д.

Тогда 
$$\sqrt{\frac{F_{кр}}{EJ}} l = n\pi \text{ и } F_{кр} = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2}, \quad (10.4)$$

где  $n$  - количество полуволн синусоиды, по которой должна изгибаться ось бруса.

Часто вводят величину  $\mu = l/n$ , называемую коэффициентом приведения длины,  $\mu$  - величина, обратная количеству полуволн синусоиды, укладываемых на деформируемой (сжатой) длине стойки. Тогда формула Эйлера (10.4) приобретает вид

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu l)^2}. \quad (10.5)$$

Если считать, что при критической нагрузке возможна и прямолинейная ось, то  $\sigma = N/A$  и:  $\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ .

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (10.6)$$

где  $\lambda$  - гибкость стойки,  $\lambda = \frac{\mu l}{l_{min}}$ , (10.7)

величина  $\lambda$  введена Ясинским при исследовании пределов применимости формулы Эйлера.

### 10.3. Пределы применимости формулы Эйлера

Если построить график  $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ , то формула Эйлера в декартовых координатах изображается гиперболой второго порядка (рис. 10.2).

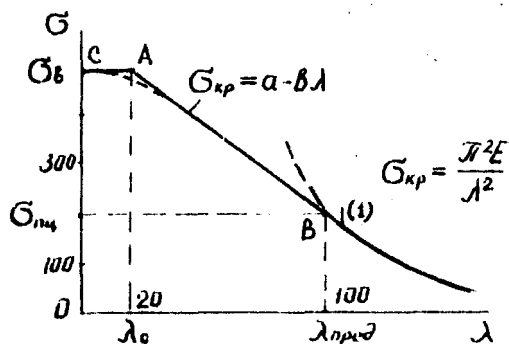


Рис. 10.2

Однако совершенно очевидно, что график  $\sigma_{кр}$  по Эйлеру для малых гибкостей не годится для практических расчетов, так как условие при  $\lambda \Rightarrow 0$   $\sigma_{кр} \Rightarrow \infty$  говорит только о том, что имеются такие стойки, которые не теряют устойчивость вплоть до наступления предела прочности или общего пластического деформиро-

яния для пластичных материалов. Поэтому график (I) на рис. 10.2 следует ограничить по напряжениям сверху  $\sigma_{кр} = \sigma_b$ , если  $\lambda < \lambda_0$ .

Формула Эйлера для  $\sigma_{кр}$  содержит модуль продольной упругости и справедлива до тех пор, пока  $E = const$ , т.е. ограничена сверху пределом пропорциональности. Иногда, если этой характеристики нет, ее можно заменить близкой (пределом текучести -  $\sigma_T$ ) и из  $\sigma_{кр}$  по Эйлера найти

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{Т}}} \approx \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{кр}}} \quad (10.8)$$

Для высокоуглеродистых сталей замена предела пропорциональности пределом текучести менее существенна и практически незаметна.

Между первой областью  $\lambda < \lambda_0$ , где стойки не теряют устойчивости, и третьей (III)  $\lambda > \lambda_{пред}$ , где критические напряжения определяются по формуле Эйлера, расположена вторая область (II), в которой потеря устойчивости имеет место, но для определения  $\sigma_{кр}$  формула Эйлера неприменима. От точки А до В график дополняют прямой

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (10.9)$$

где параметры  $a$  и  $b$  определяются условием прохождения через точки А и В или квадратной параболой

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2, \quad (10.9a)$$

где параметры  $a$ ,  $b$  и  $c$  определяются условием прохождения через точки А, В, С. При этом точку А слегка опускают  $\sigma_{кр/A} \approx 0,95\sigma_b$ .

#### 10.4. Расчеты по коэффициенту $\varphi$

Имея график зависимости  $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ , можно получить график допускаемых напряжений уменьшением критических напряжений (рис. 10.3). Однако, введение постоянного коэффициента запаса устойчивости для всего диапазона стоек не рационально из-за того, что в области I коэффициент запаса  $n_y$  равен коэффициенту запаса прочности  $n_k$  по пределу прочности:

$$[n_y] = [\sigma_b / \sigma], \text{ а } [\sigma] = \sigma_b / [n_k] = \sigma_b / [n_y] = \sigma_b / [n_1]$$

$[\sigma]$  должно получаться основным т.е. допускаемым напряжением на сжатие. Например, для стали Ст. 3 при  $\sigma_s = 480$  МПа;  $\sigma_T = 240$  МПа;  $[\sigma] = 160$  МПа;  $[n_y] = 3$ ;  $[n_T] = 1,5$ .

В области большой гибкости, вследствие большой точности формулы Эйлера, нецелесообразно принимать  $[n_y] > 2$ .

Если построить график  $[\sigma]_y = f(\lambda)$ , то в безмерных координатах ( $[\sigma] = 1$ . рис. 10.3) получим кривую  $\varphi = f(\lambda)$ , где  $\varphi = [\sigma]_y / [\sigma]$  коэффициент продольного изгиба, называемый в машиностроении коэффициентом уменьшения основного допускаемого напряжения.

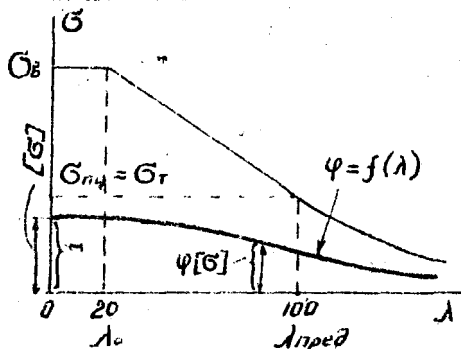


Рис. 10.3

Зависимость  $\varphi = f(\lambda)$  протабулирована (составлены таблицы). Если гибкость оказалась больше, чем отмечена в таблице, например, для стали Ст. 3  $\lambda > 200$ , то говорят о неприемлемой гибкости (слишком гибкая) конструкции, целесообразность которой требует дополнительного обоснования.

В расчетах по коэффициенту  $\varphi$  часто прибегают к удобному в практике условию проверки

$$0,95 [\sigma] \leq \frac{F}{\varphi A} \leq 1,05 [\sigma]. \quad (10.10)$$

Этот предел называют желательным, а второй — обязательным. Достойно условия (10.10) в постоянстве пределов, выраженных через осевое допускаемое напряжение. Выржения  $F/\varphi A$  не имеет физического смысла, так как  $\varphi$  должно стоять при  $[\sigma]$  в условии (10.10). Тогда это условие ограничивает напряжения  $\sigma = \frac{F}{A}$  величиной допускаемых на устойчивость  $[\sigma]_y = \varphi[\sigma]$ .

Пример I. В задаче № 17 контрольных заданий [1]. Стальной стержень (рис. 10.4) длиной  $l = 2,8$  м сжимается силой  $F = 300$  кН. Требуется: 1) найти размеры поперечного сечения при допускаемом напряжении на простое сжатие  $[\sigma] = 160$  МПа (расчет производить последовательными приближениями, предварительно задавшись коэффициентом  $\varphi = 0,5$ ); 2) найти критическую силу и коэффициент запаса устойчивости.

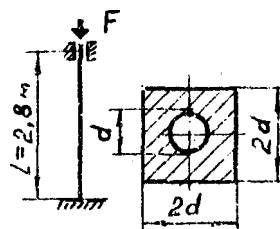


Рис. 10.4

При решении задачи № 17 вначале необходимо выразить величину площади сечения и минимального радиуса инерции сечения через характерный параметр ( $d$  или  $\alpha$ ).

Площадь сечения  
 $A = 4d^2 - \pi d^2/4 = 3,215 d^2$   
 Момент инерции  
 $J_x = J_y = (2d^4/12) - (\pi d^4/64) = 1,284 d^4$

Радиус инерции  $i_x = i_y = \sqrt{J_x/A} = 0,63d$ .

Задаем  $\varphi = 0,5$  и определяем площадь сечения из условия устойчивости

$$A \geq F/\varphi[\sigma] = 300 \cdot 10^3 / 0,5 \cdot 160 \cdot 10^6 = 37,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

Определяем  $d = \sqrt{A/3,215} = \sqrt{37,5/3,215} = 3,42 \text{ см}$ ;  $i_{\min} = 2,15 \text{ см}$ .

Гибкость  $\lambda = \pi l/i_{\min} = 0,5 \cdot 2,8 \cdot 10^2 / 2,15 = 65$ .

При  $\lambda = 60 \rightarrow \varphi = 0,86$  (по [2], [3])

$\lambda = 70 \rightarrow \varphi = 0,81$ .

Значение  $\varphi$  далеко от принятого  $\varphi = 0,5$ , поэтому расчет следует повторить при  $\varphi_I = \frac{0,5 + 0,84}{2} = 0,67$ .

Принимаем для второй попытки  $\varphi = 0,7$ .

$$A \geq \frac{F}{\varphi[G]} = \frac{300 \cdot 10^3}{0,7 \cdot 160 \cdot 10^6} = 26,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \quad d = \sqrt{\frac{26,8}{3,215}} = 2,89 \text{ см.}$$

$$l_{\min} = 0,63d = 1,82 \text{ см}; \quad \lambda = 0,5 \cdot 2,8 \cdot 10^2 / 1,82 = 77.$$

При  $\lambda = 70$   $\varphi = 0,81$  и при  $\lambda = 80$   $\varphi = 0,75$ .

$$\text{При } \lambda = 77 \quad \varphi = 0,75 + \frac{0,81 - 0,75}{10} (80 - 77) = 0,768.$$

Проводим проверку:  $F/\varphi A = 300 \cdot 10^3 / 0,768 \cdot 26,8 \cdot 10^{-4} = 145,7 \cdot 10^6 \text{ Па.}$

Недогрузка  $\frac{160 - 145,7}{160} \cdot 100\% = 8,9\%$ . В соответствии с условием (10.11) необходимо повторить расчет, т.к. сечение будет неэкономично.

$$\text{Принимаем } \varphi = \frac{0,7 + 0,768}{2} = 0,75.$$

$$A \geq F/\varphi[G] = 300 \cdot 10^3 / 0,75 \cdot 160 \cdot 10^6 = 25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \rightarrow d = 2,79 \text{ см.}$$

$$l_{\min} = 0,63d = 1,76 \text{ см}; \quad \lambda = 0,5 \cdot 2,8 \cdot 10^2 / 1,76 = 79,5 \rightarrow \varphi = 0,75.$$

$$F/\varphi A = 300 \cdot 10^3 / 0,75 \cdot 25 \cdot 10^{-4} = 161 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Сжимающее напряжение в стойке при  $A = 25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$

$$\sigma = F/A = 300 \cdot 10^3 / 25 \cdot 10^{-4} = 120 \cdot 10^6 \text{ Па} = 120 \text{ МПа.}$$

Для стали 3 при гибкости  $\lambda < 100$  критические напряжения определяют по формуле Ясинского:  $\sigma_{кр} = a - b\lambda = 310 - 1,14 \cdot 79,5 = 219 \text{ МПа.}$

$$\text{Запас устойчивости } n_s = \sigma_{кр} / \sigma = 219 / 120 = 1,82.$$

Пример 2. Для стойки, показанной на рис. 10.5, произвести расчет поперечного сечения по условию предыдущего примера.

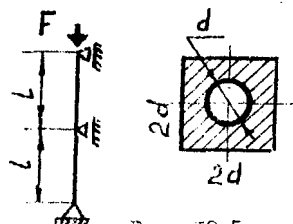


Рис. 10.5

$$l = 2,8 \text{ м};$$

$$[G] = 160 \text{ МПа}; \quad F = 300 \text{ кН}$$

$$\text{Площадь сечения } A = 3,215 d^2$$

$$\text{Момент инерции } J_x = J_y = 1,284 d^4$$

$$\text{Радиус инерции } i_x = i_y = 0,63d.$$

Решение. Для заданной стойки коэффициент приведения длины ( $\mu = 1$ ). Что-бы установить величину коэффициента



коэффициента приведения длины, необходимо представить себе изогнутую ось стойки, удовлетворяющую условиям ее закрепления, предполагая, что изогнутая ось - синусоида, и подсчитать количество полуволн синусоиды на длине  $l$ . Величина, обратная количеству полуволн синусоиды, представляет собой коэффициент приведения длины. Так как расстояния между опорами обозначены через  $l$ , то независимо от числа промежуточных опор на длине  $l$  будет укладываться одна полуволна синусоиды и  $\mu = 1$ . В случае, когда общая длина стойки обозначена через  $L$ , на этой длине расположится  $n - 1$  полуволн синусоиды, где  $n$  - число опор. Тогда  $\mu = l/(n - 1)$ .

Задаемся  $\varphi = 0,5$ .

Определяем площадь сечения из условия устойчивости:

$$A \geq F/\varphi [\text{Г}] = 300 \cdot 10^3 / 0,5 \cdot 160 \cdot 10^6 = 37,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

$$d = \sqrt{A/3,215} = \sqrt{37,5/3,215} = 3,42 \text{ см}; \quad l_{\min} = 0,63d = 2,15 \text{ см.}$$

$$\text{Гибкость } \lambda = \mu l / l_{\min} = 1,2,8 \cdot 10^2 / 2,15 = 130; \quad \varphi = 0,40.$$

$$\text{Для второй попытки } \varphi = (0,5 + 0,4) / 2 = 0,45.$$

Требуемая площадь

$$A \geq \frac{F}{\varphi [\text{Г}]} = \frac{300 \cdot 10^3}{0,45 \cdot 160 \cdot 10^6} = 41,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \quad d = 3,6 \text{ см}, \quad l_{\min} = 2,27 \text{ см.}$$

$$\text{Гибкость } \lambda = \mu l / l_{\min} = 1,2,8 \cdot 10^2 / 2,27 = 124.$$

$$\lambda = 120; \quad \varphi = 0,45; \quad \lambda = 130 \rightarrow \varphi = 0,40, \quad \lambda = 124 \rightarrow \varphi = 0,43.$$

$$\text{Проводим проверку: } F/\varphi A = 300 \cdot 10^3 / 0,43 \cdot 41,7 \cdot 10^{-4} = 167,5 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$\text{Перегрузка } \frac{167 - 160}{160} 100\% = 4,7\% < 5\%.$$

Следовательно, сечение выбрано удачно.

Так как гибкость  $\lambda = 124 > 100$ , для определения критической силы применима формула Эйлера:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1,254 \cdot 3,6^2 \cdot 10^{-4}}{(1,2,8)^2} = 5,30 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Коэффициент запаса

$$n_{\text{у}} = F_{\text{кр}} / F = 5,30 / 300 = 1,76.$$

### 10.5. Продольно-поперечный изгиб

Задача продольно-поперечного изгиба (рис. 10.6) отличается от решаемой в 10.2 тем, что в уравнении (10.1) имеется дополнительное слагаемое:

$$M = -F_{кр} y + M_n, \quad (10.11)$$

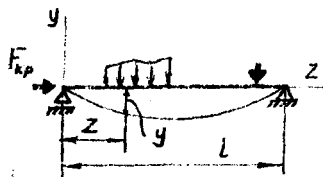


Рис. 10.6

где  $M_n$  - изгибающий момент от поперечной нагрузки, что приводит к дифференциальному уравнению с правой частью

$$EJ \frac{d^2 y}{dz^2} + F_{кр} y = M_n(z). \quad (10.12)$$

- Точное решение уравнения требует отыскания частного решения дифференциального уравнения в соответствии с правой частью. Это трудоемко и практически неприемлемо. Существует целый ряд приближенных решений, определяющих  $M$  и  $y$  при продольно-поперечном изгибе. Предлагаемое решение переключается с решением в [3], однако разрешающее уравнение

$$M/y = M_n / y_n \quad (10.13)$$

записывается сразу до гипотетических предположений деформации по синусоидам.

Решая (10.13) совместно с уравнением равновесия (10.11)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{M}{y} = \frac{M_n}{y_n}; & \quad \text{получим} \quad M = \frac{M_n^2}{M_n - F_{кр} y_n}; \quad y = \frac{M_n y_n}{M_n - F_{кр} y_n} \\ M = -F_{кр} y + M_n, & \end{aligned} \right.$$

$$\text{Если допустить, что} \quad \frac{M_n}{y_n} = F_3, \quad (10.14)$$

то решение соответствует приведенному в [3] и

$$M = \frac{M_n}{1 - F/F_3}, \quad (10.15)$$

$$y = \frac{y_n}{1 - F/F_3}, \quad (10.16)$$

$$\text{где} \quad F_3 = \frac{\pi^2 EJ}{(mL)^2}.$$

Приведенная в этом разделе информация позволяет не только решать задачи при продольно-поперечном изгибе без подсчета  $F_3$ , но и иметь тестовую оценку для  $F_3$  (10.14), полезную для стоек составных сечений переменной жесткости.

## Глава II. ДИНАМИЧЕСКОЕ НАГРУЖЕНИЕ

### II.1. Общие сведения

Ранее во всех случаях нагружения предполагался только статический характер внешнего воздействия, при котором нагрузки росли от нуля до конечного значения медленно, не вызывая ускорений в элементах машин и сооружений. Часто, особенно в машиностроении, взаимодействию элементов машин или механизмов сопутствуют ускорения и связанные с ними силы инерции, вызывающие дополнительные напряжения и деформации. Иногда эти дополнительные напряжения могут даже превышать напряжения от основных сил.

На практике влияние динамической нагрузки, как правило, учитывается с помощью так называемого динамического коэффициента  $K_d$ . При известной величине динамического коэффициента динамический расчет можно заменить статическим, увеличив статическую нагрузку в  $K_d$  раз.

$$F_d = F_{ст} K_d. \quad (II.1)$$

Динамический коэффициент во многих случаях определяют теоретически и в сложных случаях - экспериментально.

### II.2. Учет сил инерции

Если ускорение поддается учету с помощью законов механики, то расчет при динамическом нагружении сводят к обычному (статическому), используя принцип Даламбера. Согласно этому принципу, всякое движущееся тело может рассматриваться в состоянии мгновенного равновесия, если к действующим внешним силам добавить силы инерции, направленные в сторону, противоположную ускорению.

Пример. Пусть груз весом  $G$  поднимается вверх с ускорением  $a$  (рис. II.1). Определить напряжения в тросе, пренебрегая его весом.

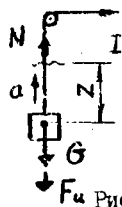


Рис. II.1

Решение. Если груз неподвижен, то в произвольном сечении  $I$  возникает статическое усилие, определяемое из условия равновесия нижней отсеченной части  $N_{ст} = G$ .

При подъеме груза с ускорением  $a$ , приложив к нему силу инерции  $F_и = ma = G \frac{a}{g}$  и рассмотрев равновесие нижней части, определим динамическое усилие :

$$N_{\partial} = G + G \frac{a}{g} = N_{ст} + N_{ст} \frac{a}{g} = N_{ст} \left(1 + \frac{a}{g}\right) = N_{ст} K_{\partial},$$

где  $K_{\partial}$  - динамический коэффициент,  $K_{\partial} = 1 + \frac{a}{g}$  (II.2)  
 Динамическое напряжения  $\sigma_{\partial} = N_{\partial}/A = \sigma_{ст} K_{\partial}$ .

### II. 3. Определение напряжений при ударе

Если ускорения нельзя учесть законами механики, то не поддаются учету и силы инерции. Это происходит при ударе, когда скорости соударяющихся тел или движущихся элементов изменяются в течение очень короткого времени. Теория удара базируется, с точки зрения закона сохранения энергии, на следующих допущениях:

напряжения и деформации следуют закону Гука, как и при статическом нагружении;

считают удар квазиупругим, предполагающим совместное движение (слияние) тел после их соприкосновения;

рассеяние энергии отсутствует, т.е. энергии соударяющихся тел полностью переходит в энергию упругой деформации.

При этих условиях после определения динамического коэффициента расчет сводят к статическому.

Рассмотрим случай, когда с высоты  $h$  на упругую систему падает груз весом  $F$ , вызывая динамическое перемещение  $\Delta \partial$  (рис. II.2).

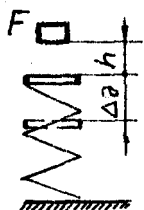


Рис. II.2

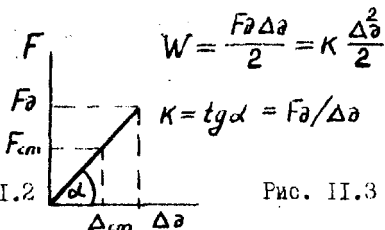


Рис. II.3

Потенциальная энергия поднятого груза до удара  $W_{п} = F(h + \Delta \partial)$  и после удара  $W_{п} = 0$ .

Разность энергии до и после соударения совершает работу упругого деформирования и численно равна

$$F(h + \Delta \partial) = K \frac{\Delta \partial^2}{2}, \quad (II.3)$$

где  $K$  - жесткость упругой системы.

В силу линейной зависимости перемещений от нагрузок и одинако-

ности нарастания перемещений в статике и динамике (рис. II.3)

$$K = \operatorname{tg} \alpha = F_{cm} / \Delta_{cm} = F_d / \Delta_d \quad (II.4)$$

Подставив (II.4) в (II.3), получим квадратное уравнение, связывающее динамические и статические перемещения с высотой падения груза:  $\Delta_d^2 - 2\Delta_d \Delta_{cm} - 2h \Delta_{cm} = 0$ .

Решение этого квадратного уравнения относительно  $\Delta_d$  дает  $\Delta_d = \Delta_{cm} \pm \sqrt{\Delta_{cm}^2 + 2h \Delta_{cm}}$  или  $\Delta_d = \Delta_{cm} (1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta_{cm}}) = \Delta_{cm} K_d$ ,

$$\text{где } K_d = 1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta_{cm}} \quad (II.5)$$

В последнем выражении знак минус перед радикалом опущен, как не имеющий физического смысла.

Условие прочности при ударе

$$\sigma_d = \sigma_{cm} K_d \leq [\sigma] \quad (II.6)$$

При внезапном приложении нагрузки ( $h = 0$ ) динамический коэффициент равен 2.

Таким образом, расчет на прочность и жесткость при динамических нагрузках производится по формулам статических нагрузок увеличением напряжений и перемещений в  $K_d$  раз, в том числе и при колебаниях.

Однако при колебаниях напряжения и деформации в статической оценке возникают от возмущающей силы  $F_u$ , а полные напряжения — от всей нагрузки  $F$  без возмущающей силы. Поэтому динамический коэффициент

$$K_d = 1 + \frac{F_u}{F} \beta = 1 + \frac{\Delta_u}{\Delta_{cm}} \beta \quad (II.7)$$

где  $\beta$  — коэффициент нарастания колебаний;  $F_u$  — возмущающая сила, т.е. несбалансированное усилие или вес несбалансированных частей;  $F$  — статическая нагрузка. И, когда определяется  $\sigma_d = \sigma_{cm} K_d$  или  $\Delta_d = \Delta_{cm} K_d$ , после подстановки  $K_d$  получаем

$$\Delta_d = \Delta_{cm} + \Delta_u \beta \quad (II.8)$$

Поэтому в теоретической механике  $\beta$  называют динамическим коэффициентом. Следует иметь в виду это двойное название одной и той же величины в двух родственных разделах механики. Коэффициент  $\beta$  определяется по формуле

$$\beta = \frac{i}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2 \omega^2}{\omega_0^2}}}, \quad (II.9)$$

где  $\omega$  - частота возмущающей силы;  $\omega_0$  - частота собственных колебаний;  $n$  - коэффициент затухания колебаний (для стальных конструкций  $n \approx 0,012 \omega_0$ ).

Если пренебречь влиянием затухания колебаний, выражение (II.9) будет иметь вид

$$\beta = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2}. \quad (II.10)$$

В задаче № 19 контрольных заданий [1] (рис. II.4) необходимо определить наибольшие динамические напряжения в сечении балки, на которой установлен электродвигатель весом  $Q$ , делающий  $n$  оборотов в минуту;  $H$  - центробежная сила инерции, возникающая вследствие неуравновешенности вращающихся частей электродвигателя.

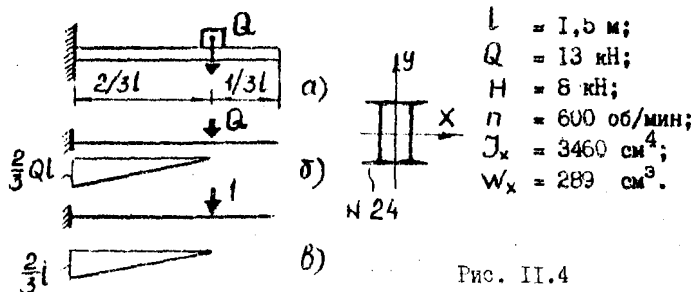


Рис. II.4

Решение. Статический расчет. Строим эпюру изгибающих моментов (рис. II.4б).

Для определения динамического коэффициента требуется найти статический прогиб под двигателем. Прогиб определим по Верещагину:

$$\Delta_{ст} = \frac{1}{EJ} \int_0^l \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} Ql \cdot \frac{2}{3} l \cdot \frac{1}{9} l = \frac{8Ql^3}{81EJ} = \frac{8 \cdot 13 \cdot 10^3 \cdot 1,5^3}{81 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3460 \cdot 10^{-2}} = 0,000312 \text{ м.}$$

Динамический расчет. Частота собственных колебаний балки с двигателем

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{9,8}{0,000312}} = 177,2 \text{ рад/с.}$$

Частота изменения возмущающей силы двигателя

$$\omega = \pi n / 30 = 3,14 \cdot 600 / 30 = 62,8 \text{ рад/с.}$$

Коэффициент нарастания колебаний

$$\beta = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2} = \frac{1}{1 - (62,8/177,2)^2} = 1,143.$$

Динамический коэффициент

$$K_d = 1 + \frac{\beta}{Q} = 1 + \frac{8}{13} \cdot 1,143 = 1,703.$$

Наибольшие динамические напряжения (в заделке)

$$\sigma_{d \max} = \frac{M_{ст \max}}{W_x} K_d = \frac{2 Q l}{3 W_x} K_d = \frac{2 \cdot 13 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{3 \cdot 289 \cdot 10^{-6}} \cdot 1,703 = 39,3 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

В задаче № 20 контрольных заданий [1] на двутавровую балку, свободно лежащую на двух жестких опорах (рис. 11.5а), с высоты  $h = 100 \text{ мм}$  падает груз  $F = 8 \cdot 10^3 \text{ Н}$ . Требуется: 1) найти наибольшее нормальное напряжение в балке; 2) решить аналогичную задачу при условии, что правая опора заменена пружиной, податливость которой (т.е. осадка от груза весом 1 кН) равна  $\alpha$ ; двутавр № 24  $J_x = 3460 \text{ см}^4$ ;  $W_x = 289 \text{ см}^3$ ;  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ;  $l = 2,4 \text{ м}$ ;  $\alpha = 24 \cdot 10^{-3} \text{ м/кН}$ .

Решение. Статический расчет.

Строим эпюру изгибающих моментов (рис. 11.5б):  $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} =$

$$= \frac{Fl}{4W_x} = \frac{8000 \cdot 2,4}{4 \cdot 289 \cdot 10^{-6}} = 16,6 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

Для определения динамического коэффициента необходимо вычислить статическое перемещение под силой  $F$  в балке без учета податливости опоры (прогиб) и с учетом осадки пружины (рис. 11.5в, г). Прогиб можно вычис-

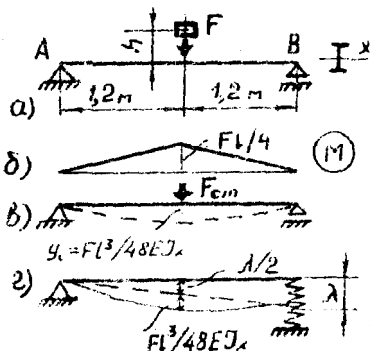


Рис. 11.5

лить различными способами. По справочнику для балки на двух опорах с нагрузкой, приложенной в середине пролета,

$$\Delta_{ст} = y_c = \frac{Fl^3}{48 EJ_x} = \frac{8000 \cdot 2,4^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,33 \text{ мм.}$$

Осадка пружины определяется реакцией правой опоры

$$\Delta = \alpha V_0 = 24 \cdot 10^{-3} \cdot 4 = 96 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 96 \text{ мм.}$$

Статическое перемещение с учетом податливости опоры

$$\Delta_{\text{ст}} = y + \Delta/2 = 0,33 + 96/2 = 48,3 \text{ мм.}$$

Вычисляем динамические коэффициенты и напряжения.

Без учета податливости

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,1}{0,33 \cdot 10^{-3}}} = 25,6 ;$$

$$\sigma_d = \sigma_{\text{ст}} K_d = 16,6 \cdot 25,6 = 425 \text{ Па.}$$

С учетом податливости

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,1}{48,3 \cdot 10^{-3}}} = 3,27 ;$$

$$\sigma_d = 16,6 \cdot 3,27 = 54,3 \text{ Па.}$$

Приведенный расчет показывает, что установка на опоре В пружины обеспечивает безопасную работу балки, в то время как при жесткой опоре динамические напряжения значительно превышают предел текучести.

В задаче № 21 контрольных заданий [I] валик и жестко соединенный с ним ломаный стержень вращаются с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси АВ (рис. II.6).

Требуется: 1) построить эпюру изгибающих моментов от сил инерции; 2) найти допускаемое число оборотов валика в минуту при  $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$  и  $\gamma = 78 \text{ кН/м}^3$ .

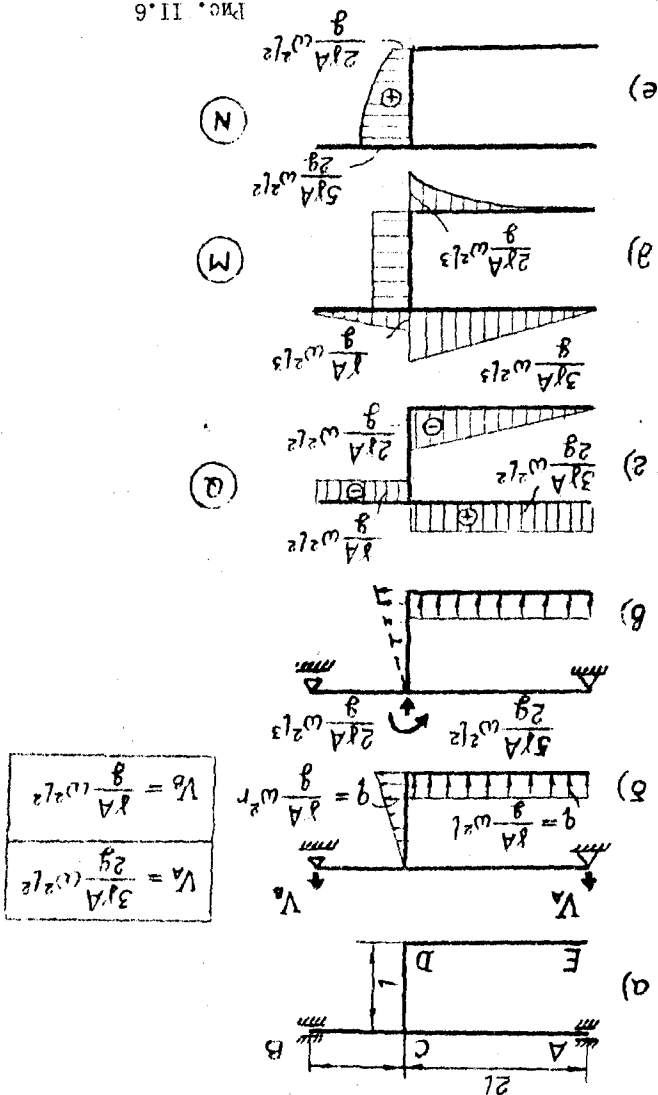
Решение. В задаче № 21 (рис. II.6) вся нагрузка обусловлена силами инерции, возникающими при вращении ломаного стержня вокруг оси АВ с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Сила инерции на единицу длины при вращении  $q = \gamma A \omega^2 r^2 / g$ .

Схема загрузки силами инерции показана на рис. II.6б. На участке СД сила инерции изменяется по линейному закону, а на участке ДЕ распределена равномерно ( $r = l$ ).

При определении реакций  $V_A$  и  $V_B$  можно воспользоваться заменой распределенной нагрузки сосредоточенной силой и изгибающим моментом (рис. II.6в). Строим эпюры внутренних силовых факторов (рис.



Pnc. II. 6



(рис. II, бг, д, е). Согласно эпюрам внутренних силовых факторов, опасными сечениями будут сечения в точке С стержня АВ

$$(M_c = \frac{3\gamma A}{g} \omega^2 l^3; \quad N = 0) \text{ и в точке С стержня СД}$$

$$(M_c = \frac{2\gamma A}{g} \omega^2 l^3; \quad N = \frac{5\gamma A}{2g} \omega^2 l^2.)$$

Из условия прочности  $\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} \leq [\sigma]$  определяется допустимая скорость вращения.

## Глава 12. РАСЧЕТ НА ВЫНОСЛИВОСТЬ

### 12.1. Общие сведения

Многие детали машин в процессе эксплуатации подвергаются действию переменных нагрузок. В таких условиях находятся, например, рельсы, зубья зубчатых колес, оси вагонов, рессоры, штоки поршней и другие детали.

Опыт показывает, что действие переменных во времени напряжений приводит к разрушению, которое происходит при напряжениях, значительно меньших предела прочности и даже предела текучести.

Разрушение материала, вызванное многократным действием переменных напряжений, называется усталостью. Свойство материала противостоять усталости называется выносливостью.

### 12.2. Виды циклов напряжений

Совокупность последовательных значений переменных напряжений за один период их изменения называется циклом напряжений. Параметрами цикла напряжений являются (рис. 12.1):

максимальное напряжение цикла (наибольшее по алгебраической величине)  $\sigma_{max}$  или  $\tau_{max}$ ;

минимальное напряжение цикла (наименьшее по алгебраической величине)  $\sigma_{min}$  или  $\tau_{min}$ ;

среднее напряжение цикла 
$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}; \quad (12.1)$$

амплитуда цикла

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}; \quad (12.2)$$

коэффициент асимметрии цикла

$$r = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}. \quad (12.3)$$

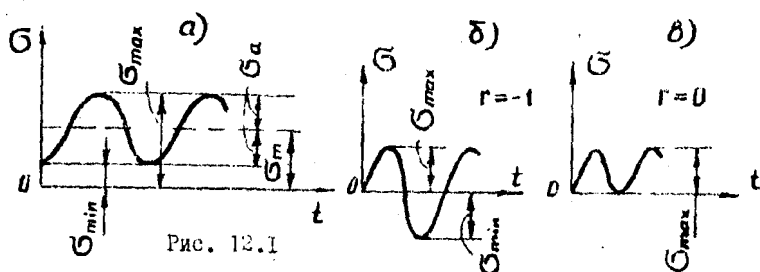


Рис. 12.1

Иногда вводится характеристика цикла:  $\rho = \sigma_a / \sigma_m. \quad (12.4)$

Из приведенных параметров любые две величины и даже одна с заданием коэффициента асимметрии определяет исходную информацию о цикле. В расчетах на выносливость чаще используется  $\sigma_{\max}$  и  $r$ , при этом

$$\sigma_a = \sigma_{\max} \frac{1-r}{2}; \quad \sigma_m = \sigma_{\max} \frac{1+r}{2}.$$

Циклы с одинаковыми значениями  $r$  называются подобными. Они могут быть симметричными, если максимальное значение напряжений равно минимальному по величине, но противоположно по знаку (рис. 12.1 б). Если же максимальное и минимальное напряжения не равны между собой, то цикл называется асимметричным (рис. 12.1 в).

Цикл, минимальное напряжение которого равно нулю, называется отнулевым или пульсирующим (рис. 12.1 в). Наиболее опасный для прочности материала — симметричный цикл.

Коэффициент асимметрии симметричного цикла  $r = -1$ , для пульсирующего цикла  $r = 0$  и при действии постоянных напряжений  $r = 1$ . Из графиков видно, что всякий асимметричный цикл можно получить наложением симметричного цикла напряжений на постоянное среднее напряжение.

Введение постоянной нагрузки как циклической с нулевым значением амплитуды цикла обеспечивает дополнительные данные и связь этого раздела со всем курсом, т.е. преимуществом в моделировании статических и циклических разрушений.

### 12.3. Кривая Велера. Предел выносливости

Для получения механических характеристик материала, необходимых для расчетов на прочность при переменных напряжениях, проводят специальные испытания на выносливость. Первые систематические испытания образцов с построением графика в координатах напряжение ( $\sigma_{max}$ ) и число циклов до разрушения ( $N$ ) выполнено Велером. Кривую Велера обычно представляют в полуделогарифмических координатах, а иногда и в двойных логарифмических координатах. Так "черные" металлы в полуделогарифмических координатах дают пару прямых, одна из которых параллельна (почти параллельна оси  $N$ ). Координаты точки пересечения прямых ( $\sigma_r, N_B$ ) соответствует базовому числу циклов и пределу выносливости.

Под пределом выносливости понимают наибольшее напряжение, которое способен выдержать образец при сколь угодно большом числе циклов.

Базовым числом называют минимальное число циклов, которое необходимо для установления того факта, что образец уже не разрушится при данных режимах испытания.

Иногда расчеты при циклических нагрузках ведут на условный предел выносливости (единственная силовая характеристика для цветных металлов и сплавов), под которым понимают наименьшее напряжение, при котором образец разрушается при заранее заданном числе циклов нагружения.

Наличие кривой Велера является достаточным условием расчета детали на выносливость, но только для данного вида нагружения с данным коэффициентом асимметрии цикла, аналогичной чистотой обработки, состоянием поверхности, размерами и т.д. Фактически для каждого вида нагружения, размера детали, качества обработки требуется проведение испытаний на выносливость и построение кривой Велера, что практически невыполнимо. Поэтому проводятся исследования влияния различных факторов на предел выносливости образца и разрабатываются методики расчета с использованием этих данных.

### 12.4. Диаграмма Хейга

Зависимость предела выносливости от коэффициента асимметрии удобно исследовать по диаграмме Хейга, построенной в координатах  $\sigma_m - \sigma_a$ .

К таким выводам приходят и сторонники диаграммы Смида, построенной в координатах  $\sigma_m$ ,  $\sigma_{max}$ ,  $\sigma_{min}$ .

На рис. 12.2 показана диаграмма Хейга для  $\sigma_{max} \geq 0$ .

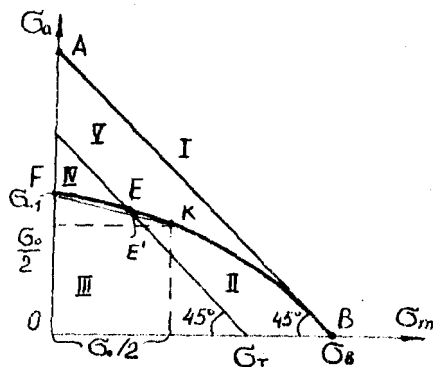


Рис. 12.2

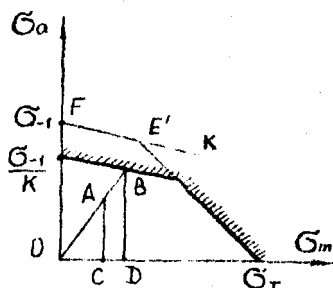


Рис. 12.3

Одной из особенностей диаграммы является определение

$$\sigma_{max} = \sigma_0 + \sigma_m, \quad (12.5)$$

что соответствует алгебраической сумме, а не геометрической. Поэтому две прямые, наклоненные к осям  $\sigma_a$  и  $\sigma_m$  под углом  $45^\circ$  и проходящие через  $\sigma_s$  и  $\sigma_T$ , разделяют диаграмму на три области.

1. Область неосуществимых напряжений (I) выше прямой AB, так как  $\sigma_{max} > \sigma_s$ .

2. Область пластического деформирования (II) между прямой CD и AB при  $\sigma_T \leq \sigma_{max} \leq \sigma_s$

3. Область упругого деформирования (III) при  $\sigma_{min} < \sigma_T$ . Кривая " $\sigma_a - \sigma_s$ " делит вторую и третью область на области неразрушающих нагрузок вследствие усталости и область разрушения при циклических нагрузках (IV-V).

Рабочая область напряжений (III), в которой напряжения ниже предела текучести и не превышают предела выносливости, представляет собой выделяемую искомым область диаграммы Хейга для расчетов на выносливость. Главная трудность - в определении кривой FE, поскольку эта часть должна быть установлена экспериментальным путем, а за каждой ее точкой стоит построение кривой Велера и определение  $\sigma_T$ . Это приводит к необходимости аппроксимации диаграммы Хейга с использованием минимального количества точек, связанных с испы-

танием на усталость.

Первое предложение принадлежит Серенсену-Кинасошвили и состоит в том, что криволинейная часть заменяется прямой, проходящей через точки  $F(\sigma_{-1}; 0)$  и  $K(\sigma_c/2; \sigma_c/2)$ , где  $\sigma_c$  - предел выносливости пульсирующего (отнулевого) цикла.

Ужик предложил аппроксимацию прямой, проходящей через точку  $F(\sigma_{-1}; 0)$  и точку  $(0, \sigma'_s)$ , где  $\sigma'_s$  - действительное напряжение разрыва. Затем последовали предложения аппроксимировать прямую, проходящую через точки  $F$  и  $B$ , и, наконец, - через точки  $F$  и  $C$ . Последняя аппроксимация допускает наибольшую ошибку, но она идет в запас прочности. Записав уравнение прямой по Зодербергу

$$\frac{\sigma_a - \sigma_{-1}}{0 - \sigma_{-1}} = \frac{\sigma_m - 0}{\sigma_r - 0} \left( \frac{y - y_1}{y_c - y_1} = \frac{x - x_1}{x_c - x_1} \right) \quad (12.6)$$

и подставляя  $\sigma_a = \sigma_{max}(1-r)/2$ ;  $\sigma_m = \sigma_{max}(1+r)/2$ ,  
при  $\sigma_{max} = \sigma_r$  получим

$$\sigma_r = \frac{2\sigma_r\sigma_{-1}}{\sigma_r(1-r) + \sigma_{-1}(1+r)} \quad (12.7)$$

Зависимость (12.7) определяет предел выносливости при заданном коэффициенте асимметрии цикла по Зодербергу, через предел текучести и предел выносливости при симметричном цикле.

Уравнение аппроксимирующей прямой  $FE$  по Ужику, проходящей через  $\sigma'_s$  получим заменой в равенстве (12.7)  $\sigma_r$  на соответствующую характеристику:

$$\text{по Ужику - } \sigma_r = \frac{2\sigma'_s\sigma_{-1}}{\sigma'_s(1-r) + \sigma_{-1}(1+r)};$$

$$\text{через } \sigma'_s - \sigma_r = \frac{2\sigma'_s\sigma_{-1}}{\sigma'_s(1-r) + \sigma_{-1}(1+r)} \quad (12.8)$$

Следует иметь в виду, что при расчете по этим формулам, как и по Серенсену-Кинасошвили, следует считаться с возможностью попадания в зону II (рис. 12.2), т.е. требуется проверка условия  $\sigma_r \leq \sigma_r$ .

Тогда  $\sigma_r$  определяется формулами (12.8). В противном случае следует принять  $\sigma_r = \sigma_r$ .

Аналогично, по Серенсену - Кинасошвили,

$$\frac{\sigma_a - \sigma_{-1}}{\frac{\sigma_0}{2} - \sigma_{-1}} = \frac{\sigma_m - 0}{\frac{\sigma_0}{2} - 0}; \quad (12.9)$$

$$\sigma_r = \frac{\sigma_{-1} \sigma_0}{\sigma_{-1}(1+r) - \sigma_0 r}. \quad (12.10)$$

Формулой (12.10) пользуются, если  $\sigma_r \leq \sigma_T$ .

## 12.5. Факторы, влияющие на предел выносливости.

### Расчет на прочность

Влияние масштабного фактора (размера деталей), концентрации напряжений, состояния поверхности и качества обработки и ряда других факторов учитывается коэффициентами, называемыми редуционными. Редуционные коэффициенты показывают, как изменяется (главным образом, уменьшается) предел выносливости детали по сравнению с пределом выносливости образца при симметричном цикле нагружения ( $r = -1$ ).

Название редуционные (понижающие) говорит о том, что имеются две возможности учесть влияние этих коэффициентов.

Подсчитывается предел выносливости детали с учетом редуционных коэффициентов.

$$n = \frac{\sigma_r \sigma}{\sigma_{\max}},$$

где  $\sigma_{\max}$  — максимальное напряжение в цикле;

$\sigma_r \sigma$  — предел выносливости детали.

Возможно определение  $\sigma_r$  образца без учета влияния различных факторов:

$$n = \frac{\sigma_r}{\sigma_p},$$

где  $\sigma_r$  — предел выносливости стандартного образца;

$\sigma_p$  — расчетное, т.е. увеличенное напряжение, составленное из действующего среднего и амплитуды цикла, но увеличенной за счет редуционных коэффициентов.

Коэффициент концентрации

$$K_\sigma = 1 + q(\alpha_\sigma - 1),$$

где  $q$  — коэффициент чувствительности к концентрации. Для серого чугуна  $q = 0$ , для высококачественных сталей  $q \approx 1$ ,  $\alpha_\sigma$  — теоретический коэффициент концентрации.

Масштабный коэффициент

$$K_{ДС} = \frac{\sigma_{-1D}}{\sigma_{-1}}$$

Коэффициент качества обработки поверхности

$$K_F = \frac{\sigma'_{-1}}{\sigma_{-1}},$$

где  $\sigma_{-1}$  - предел выносливости стандартного образца;

$\sigma'_{-1}$  - предел выносливости образца с заданной шероховатостью, измеряемой по ГОСТ 2789-73;

$K_V$  - коэффициент, учитывающий обработку поверхности с целью упрочнения путем обкатки, наклепа, дробеструйной обработки и т.д.

Иногда вводят один коэффициент, определяемый формулой

$$K = K_G / K_{ДС} K_F.$$

За последнее время получила большое распространение следующая зависимость:

$$K = \left( \frac{K_G}{K_{ДС}} + \frac{1}{K_F} - 1 \right) \frac{1}{K_V}.$$

Если представить диаграмму Хейга с аппроксимацией по Серенсену, то рабочая зона отмечена штриховой линией (рис. 12.3) и ограничена сверху уравнением  $\sigma_a = \frac{1}{K} (\sigma_{-1} - \psi \sigma_m)$ , где  $\psi$  - угловой коэффициент, а справа -  $\sigma_{max} \leq \sigma_T$ .

Для напряженного состояния, характеризуемого точкой А, коэффициент запаса определится из вспомогательных построений на рис. 12.3:

$$n_r = \frac{BD + DO}{AC + CO} = \frac{BO}{AO} = \frac{BD}{AC} = \frac{DO}{CO},$$

$$\text{но } \sigma_a(B) = \sigma_m(B) \frac{\sigma_a(A)}{\sigma_m(A)} \quad \text{и} \quad \sigma_a(B) = \frac{1}{K} (\sigma_{-1} - \psi \sigma_m(B)).$$

Следовательно,

$$\sigma_m(B) = \frac{\sigma_{-1}}{K \sigma_a(A) + \psi \sigma_m(A)} \sigma_m(A)$$

$$\text{и} \quad n_r = \frac{\sigma_{-1}}{K \sigma_a + \psi \sigma_m} \approx \frac{\sigma_{-1D}}{\sigma_a + \psi \sigma_m}. \quad (12.12)$$



Если точка  $B$  не встретит верхнего ограничения, то коэффициент запаса по прочности и по текучести будет равен  $[n]$ , заложенному в статический расчет, который, как правило, предшествует расчету на выносливость.

Аналогично по касательным напряжениям

$$n_r = \frac{\bar{\tau} - 1}{K \bar{\tau}_a + \psi \bar{\tau}_m} \quad (12.13)$$

Для наиболее часто встречающихся в практике расчетов с  $\sigma$  и  $\tau$  (упрощенное плоское напряженное состояние) пользуются эмпирической формулой Гафа и Полларда

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2} \quad (12.14)$$

Эта же формула для коэффициентов запаса получается из эллиптической формулы для проверки прочности [5].

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} \quad (12.15)$$

где  $n_\sigma, n_\tau$  - порционные коэффициенты запаса для нормальных напряжений без касательных и касательных без нормальных,  $n$  - общий коэффициент запаса прочности.

Пример. Задача # 22 контрольных заданий [1]. В опасном сечении вала с диаметром  $d$  действует крутящий момент  $M_K$  и изгибающий момент  $M_u$ . Вал сделан из углеродистой стали (предел прочности  $\sigma_B = 520$  МПа, а предел текучести  $\sigma_T = 240$  МПа) и не имеет резких переходов, выточек, канавок; поверхность его часто обработана резцом.

Определить коэффициент запаса прочности в опасном сечении вала, приняв нормальные напряжения изгиба изменяющимися по симметричному циклу, а касательные напряжения кручения - по пульсирующему циклу (от нуля до максимального значения).

Коэффициенты концентрации напряжений и масштабные коэффициенты можно считать соответственно одинаковыми для нормальных и для касательных напряжений. Из табл. 19 [1]  $M_K = 220$  Нм,  $M_u = 250$  Нм,  $d = 35$  мм.

Решение. Определяем максимальные напряжения цикла :

$$\sigma_a = \sigma_{max} = \frac{M_a}{W} = \frac{250 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 35^3} = 58,3 \text{ МПа};$$

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{W_p} = \frac{220 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 35^3} = 25,6 \text{ МПа};$$

$$\tau_a = \tau_m = \tau_{max} / 2 = 25,6 / 2 = 12,8 \text{ МПа}.$$

Масштабный коэффициент (согласно [1]) будет

$$\beta_m = 1,2 + 0,1(d-3) = 1,2 + 0,1(3,5-3) = 1,25.$$

Коэффициент концентрации

$$K = 1,2 + 0,2 \frac{\sigma_b - 400}{1100} = 1,2 + 0,2 \frac{520 - 400}{1100} = 1,22.$$

Примечание: в формуле для определения коэффициента концентрации, приведенной в [1] следует подставлять  $\sigma_b$  в (кг/мм<sup>2</sup>). Если формулу привести к размерности напряжений в МПа, то она примет вид

$$K = 1,2 + 0,2 \frac{\sigma_b - 400}{1100}.$$

Предел выносливости стандартного образца при симметричном цикле изгиба  $\sigma_{-1} = 0,4 \quad \sigma_b = 208 \text{ МПа}; \quad \tau_{-1} = 0,22 \sigma_b = 114 \text{ МПа}.$  С учетом концентрации и масштабного фактора пределы выносливости будут

$$\sigma_{-1D} = \frac{\sigma_{-1}}{K \beta_m} = \frac{208}{1,22 \cdot 1,25} = 136,4 \text{ МПа};$$

$$\tau_{-1D} = \frac{\tau_{-1}}{K \beta_m} = \frac{114}{1,22 \cdot 1,25} = 74,7 \text{ МПа};$$

$$\tau_r = \sigma_r / 2 = 240 / 2 = 120 \text{ МПа} \quad (\text{по эмпирической формуле}).$$

Порциональный коэффициент запаса прочности по нормальным напряжениям

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1D}}{\sigma_{max}} = \frac{136,4}{58,3} = 2,34.$$

Предел выносливости детали по касательным напряжениям при пульсирующем цикле найдем по Зодербергу (12.7).

$$\tau_{0D} = \frac{2\tau_r \tau_{-1}}{\tau_r(1-r) + \tau_{-1}(1+r)} = \frac{2 \cdot 120 \cdot 74,7}{120 + 74,7} = 92 \text{ МПа}.$$

Порциональный коэффициент запаса прочности по касательным напряжениям

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{02}}{\tau_{max}} = \frac{92}{25,6} = 3,6.$$

Общий коэффициент запаса

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \frac{2,34 \cdot 3,6}{\sqrt{2,34^2 + 3,6^2}} = 1,97.$$

Формула Зодерберга (12.7) дает ошибку в запас прочности, поэтому величина коэффициента запаса будет несколько меньшей, чем при расчете по Серенсену-Кинасошвили.

Если расчет вести по формуле (12.12), то  $n_{\sigma} = 2,34$ ; а

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{k\tau_a + \psi\tau_m} \approx \frac{\tau_{-1D}}{\tau_a + \psi\tau_m} = \frac{74,7}{12,8 + 0,1 \cdot 12,8} = 5,3,$$

где  $\psi$  - угловой коэффициент наклона прямой, изменяющейся незначительно в зависимости от редуционных коэффициентов, может быть принят для углеродистой стали равным 0,1 [3].

Общий коэффициент запаса

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \frac{2,34 \cdot 5,3}{\sqrt{2,34^2 + 5,3^2}} = 2,110.$$

## Л и т е р а т у р а

1. Сопротивление материалов: Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников всех специальностей технических высших учебных заведений, кроме строительных / А.В. Дарков, Б.Н. Кубуков. - М.: Высш. школа, 1985.
2. Д а р к о в А.В., Ш п и р о Г.С. Сопротивление материалов. - М.: Высш. школа, 1989.
3. Ф е о д о с ь е в В.И. Сопротивление материалов. - М.: Наука, 1986.
4. Методическое пособие для самостоятельной работы и решения задач по сопротивлению материалов для студентов заочной формы обучения механических специальностей / Г.С. Крылов, И.П. Молосаев, В.И. Новиков. - Мн.: БИИ, 1990.
5. Т а т у р Г.К. Общий курс сопротивления материалов. - Мн.: Высш. школа, 1974.

## О г л а в л е н и е

<b>Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ</b> .....	3
1.1. Задачи сопротивления материалов.....	3
1.2. Реальный объект и расчетная схема .....	3
1.3. Деформации. Внешние силы.....	5
1.4. Напряжения. Закон Гука.....	6
1.5. Внутренние силовые факторы. Метод сечений.....	8
1.6. Виды деформаций бруса. Методы расчета на прочность.....	9
<b>Глава 2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ</b> .....	11
2.1. Определение продольных сил .....	11
2.2. Напряжения и деформации .....	12
2.3. Механические свойства материалов.....	17
2.4. Допускаемые напряжения. Условие прочности.....	19
2.5. Статически неопределимые системы.....	21
<b>Глава 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ</b> ..	27
3.1. Основные понятия.....	27
3.2. Моменты инерции простых фигур.....	29
3.3. Преобразование моментов инерции при параллельном переносе осей.....	30
3.4. Преобразование моментов инерции при повороте осей.....	30
<b>Глава 4. ОСНОВЫ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ</b> .....	37
4.1. Элементы теории напряжений.....	37
4.2. Понятие о трехосном напряженном состоянии.....	39
4.3. Деформации.....	41
4.4. Обобщенный закон Гука.....	42
4.5. Удельная потенциальная энергия деформации.....	44
<b>Глава 5. КРУЧЕНИЕ</b> .....	47
5.1. Построение эпюр крутящих моментов.....	47
5.2. Определение напряжений в брусках круглого поперечного сечения.....	48
5.3. Расчеты на прочность и жесткость при кручении...	49

Глава 6. ИЗГИБ .....	53
6.1. Общие сведения.....	53
6.2. Типы спор балок.....	54
6.3. Определение внутренних сил.....	54
6.4. Дифференциальные зависимости при изгибе.....	55
6.5. Определение нормальных напряжений. Расчет на прочность.....	57
6.6. Касательные напряжения при изгибе.....	59
6.7. Примеры.....	61
Глава 7. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ .....	63
7.1. Основные понятия.....	63
7.2. Теории предельных состояний.....	64
7.2. Косой изгиб .....	65
7.2. Изгиб с растяжением (сжатие).....	70
7.3. Внецентренное растяжение (сжатие).....	71
7.4. Кручение с изгибом.....	76
Глава 8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИИ .....	82
8.1. Дифференциальные уравнения изогнутой оси.....	82
8.2. Универсальное уравнение изогнутой оси и метод начальных параметров.....	83
8.3. Энергетические методы определения перемещений.....	85
8.4. Правила Верещагина.....	87
Глава 9. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ .....	90
9.1. Статическая неопределимость.....	90
9.2. Метод сил.....	91
9.3. Использование симметрии и кососимметрии при выборе основной системы.....	96
9.4. Неразрезные балки.....	101
Глава 10. ПРОДОЛЬНЫЙ И ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ .....	106
10.1. Общие сведения.....	106
10.2. Формула Эйлера для критической силы.....	107
10.3. Пределы применимости формулы Эйлера.....	108
10.4. Расчеты по коэффициенту $\varphi$ .....	109
10.5. Продольно-поперечный изгиб.....	114

Глава 11. ДИНАМИЧЕСКОЕ НАГРУЖЕНИЕ .....	115
11.1. Общие сведения.....	115
11.2. Учет сил инерции.....	115
11.3. Определение напряжений при ударе.....	116
Глава 12. РАСЧЕТ НА ВЫНОСЛИВОСТЬ .....	122
12.1. Общие сведения.....	122
12.2. Биды циклов напряжений.....	122
12.3. Кривая Велера. Предел выносливости.....	124
12.4. Диаграмма Хейга.....	124
12.5. Факторы, влияющие на предел выносливости. Расчет на прочность.....	127

**Учебное издание**

**НОВИКОВ Владимир Иванович  
КРЫЛОВ Геннадий Сергеевич**

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

**Учебно-методическое пособие  
для студентов-заочников механических  
специальностей технических вузов**

---

**Редактор Г.В.Ширкина. Корректор Н.А.Школьников**

**Подписано в печать 28.03.94.**

**Формат 60x84<sup>1</sup>/16. Бумага тип. № 2. Offset. печать.**

---

**Усл.печ.л. 7,9. Уч.-изд.л. 6,2. Тир. 500. Зак. 242.**

**Белорусская государственная политехническая академия.**

**Отпечатано на роталпринте БГА. 220027, Минск, пр. Ф.Скорины, 65.**