СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кунин, Ю. С. Усиление и расчет стальных конструкций их тонкостенных холодногнутых профилей с учетом податливости узловых соединений / Ю. С. Кунин, А. И. Колесов, И. А. Ямбаев, Д. А. Морозов // Вестник МГСУ. – 2012. – № 11. – С. 74–81.
2. Лапшин, А. А. Определение редуцированной площади поперечного сечения тонкостенного гнутого профиля / А. А. Лапшин, С. А. Жданова // Приволжский научный журнал / Нижегор. гос. архитектур.-строит. ун-т. – Н. Новгород, 2012. – № 4 (24). – С. 41–46.
3. ТУ 1122-140-0461443-03. Профили стальные гнутые повышенной жесткости / ООО «Волгоспецстрой». – Н. Новгород : [б. и.], 2003.
4. Айрумян, Э. Л. Рекомендации по проектированию, изготовлению и монтажу конструкций каркаса малоэтажных зданий и мансард из холодногнутых стальных оцинкованных профилей производства ООО «Балт-Профиль» / Э. Л. Айрумян. – М.: ЦНИИПСК им. Мельникова: [б. и.], 2004. – С. 70.

Получено: 05.10.2013 г.

УДК 534.1

Н. И. АРХИПОВА[1,2], аспирант, асс. кафедры общей физики и теоретической механики; В. И. ЕРОФЕЕВ[1,3], д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры теории упругости и пластичности, зам. дир. по научной работе; И. А. МИКЛАШЕВИЧ[4], д-р физ.-мат. наук, доц., зав. лабораторией; В. М. САНДАЛОВ[3], канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры теоретической механики

УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ В СОСТАВНОМ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОМ СТЕРЖНЕ

[1]ФГБУН «Институт проблем машиностроения Российской академии наук»
Россия, 603024, г. Н. Новгород, ул. Белинского, д. 85. Тел.: (831) 432-05-76; эл. почта: erf04@sinn.ru; united-friends@bk.ru
[2]ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»
Россия, 603950, г. Н. Новгород, ул. Ильинская, д. 65. Тел.: (831) 433-98-64; эл. почта: tm-nngasu@yandex.ru
[3]ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского»
Россия, 603950, г. Н. Новгород, пр. Гагарина, д. 23. Тел.: (831) 465-67-93.
[4]Белорусский национальный технический университет
Республика Беларусь, 220013, г. Минск, пр-т Независимости, д. 65; эл. почта: miklashevich@yahoo.com
Ключевые слова: уединенная волна, деформация, нелинейность, составной стержень.
Key words: solitary wave, strain, nonlinearity, composite rod.

Показано, что в составном нелинейно-упругом стержне, совершающем продольные колебания, могут формироваться локализованные волны (солитоны) деформации.

The article shows that localized waves (solitons) of strain can generate in a composite nonlinear elastic rod performing longitudinal oscillations.

В работах [1, 2] показано, что уточненные (неклассические) модели могут быть применены для описания динамических процессов в слоистых элементах конструкций. Рассуждения проводились на примерах двухслойного упругого стрежня и двухслойного вязкоупругого стержня, совершающих продольные колебания. Обе задачи рассматривались в линейной постановке.

В настоящей работе рассматривается составной стержень, представляющий собой совокупность двух нелинейно-упругих стержней (слоев), находящихся в контакте друг с другом.

Движение стержней описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} E_1S_1\left(1+\alpha_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right)\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=\rho_1S_1\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+R(u_1-u_2), \\ E_2S_2\left(1+\alpha_2\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right)\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=\rho_2S_2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+R(u_2-u_1), \end{cases} \qquad (1)$$

где u_i – продольные перемещения стержней; E_i, S_i, ρ_i – их параметры (модули Юнга, площади поперечных сечений и плотности) (i = 1, 2), R – коэффициент, характеризующий силу упругого взаимодействия стержней, $\alpha_{1,2}$ – коэффициенты, характеризующие их геометрические и физические нелинейности.

Система (1) может быть сведена к одному уравнению. Действительно, введем безразмерные переменные:

$$U=\frac{u}{u_0};\; y=\frac{x}{X};\; \tau=\frac{t}{T};\; \gamma=1+\frac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2},$$

обозначения:

$$D=C_2^2+C_1^2\frac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2};\; X=\Lambda;\; T^2=\frac{\Lambda^2\gamma}{D},$$

где u_0 – перемещение, Λ – длина волны, удовлетворяющие соотношению $u_0/\Lambda = 10^{-4}$; T – период волны, и, пренебрегая величинами, в которых степень отношения u_0/Λ выше 3, получим:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\rho_1S_1D}{R\gamma^2\Lambda^2}\frac{\partial^4 U}{\partial\tau^4}-\frac{\rho_1S_1(C_2^2+C_1^2)}{R\gamma\Lambda^2}\frac{\partial^4 U}{\partial y^2\partial\tau^2}+\frac{\rho_1S_1C_2^2C_1^2}{R\Lambda^2D}\frac{\partial^4 U}{\partial y^4}-$$
$$-\frac{\left(C_2^2\alpha_2+C_1^2\alpha_1\dfrac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2}\right)}{D}\frac{u_0}{\Lambda}\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0, \qquad (2)$$

где $C_1=\sqrt{\dfrac{E_1}{\rho_1}};\, C_2=\sqrt{\dfrac{E_2}{\rho_2}}$ – скорости продольных волн в стержнях.

Решение уравнения (2) будем искать в классе стационарных волн, то есть в виде функции $U = U(y - v\tau)$, зависящей от $y - v\tau = \xi$, где v = const – скорость стационарной волны.

Уравнение в частных производных (2) сведется в этом случае к уравнению ангармонического осциллятора относительно продольной деформации $\dfrac{dU}{d\xi}=w$:

$$\frac{d^2w}{d\xi^2}+aw+bw^2=0, \qquad (3)$$

где:

$$a=\frac{v^2-1}{B};$$

$$b=-\frac{1}{2}\frac{C_2^2\alpha_2+C_1^2\alpha_1\dfrac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2}}{BD}\frac{u_0}{\Lambda};$$

$$B=\frac{\rho_1S_1D}{R\gamma^2\Lambda^2}v^4-\frac{\rho_1S_1(C_2^2+C_1^2)}{R\gamma\ \Lambda^2}v^2+\frac{\rho_1S_1C_2^2C_1^2}{RD\Lambda^2}.$$

Заметим, что корни уравнения $B = 0$ имеют вид:

$$v_1^2=\frac{C_2^2\gamma}{D};\ v_2^2=\frac{C_1^2\gamma}{D}.$$

Они, в частности, могут удовлетворять условию: $\frac{C_2^2\gamma}{D}=5-4\frac{C_1^2\gamma}{D}$ (для определенности считаем, что $C_1 > C_2$).

В этом случае $0<\frac{C_2^2\gamma}{D}<1;\ 1<\frac{C_1^2\gamma}{D}<\frac{5}{4}$, тогда $0<v_1^2<1;\ 1<v_2^2<\frac{5}{4}$.

Определим также знаки корней: между корней (–): $\frac{C_2^2\gamma}{D}<v^2<\frac{C_1^2\gamma}{D}$; вне корней (+): $v^2>\frac{C_1^2\gamma}{D},v^2<\frac{C_2^2\gamma}{D}$.

Анализ (3) показывает, что частными решениями уравнения (2) являются нелинейные уединенные стационарные волны (солитоны).

В первом случае ($a < 0,\ b > 0$) солитон имеет положительную полярность. Амплитуда солитона A_c и его ширина Δ описываются выражениями:

$$A_c=\frac{3(v^2-1)D}{(C_2^2\alpha_2+C_1^2\alpha_1\dfrac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2})\dfrac{u_0}{\Lambda}};\ \Delta=\frac{2}{\sqrt{\dfrac{v^2-1}{B}}}.$$

На рис. 1 приведены зависимости амплитуды и ширины солитона от его скорости.

В данном случае с ростом скорости уединенной стационарной волны ее амплитуда возрастает, а ширина уменьшается. Такое поведение характерно для классического солитона [3].

Во втором случае ($a < 0,\ b < 0$) солитон имеет отрицательную полярность. Его амплитуда и ширина описываются выражениями:

$$A_c=\frac{3(1-v^2)D}{(C_2^2\alpha_2+C_1^2\alpha_1\dfrac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2})\dfrac{u_0}{\gamma\Lambda}};\Delta=\frac{2}{\sqrt{\dfrac{1-v^2}{B}}}.$$

Зависимости амплитуды и ширины солитона от его скорости приведены на рис. 2.

$$A_c^*=\frac{3D}{(C_2^2\alpha_2+C_1^2\alpha_1\dfrac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2})\dfrac{u_0}{\gamma\Lambda}};\Delta^*=\frac{2}{\sqrt{\dfrac{RD\Lambda^2}{\rho_1S_1C_2^2C_1^2}}}.$$

В этом случае с ростом скорости уединенной стационарной волны одновременно увеличивается и ее амплитуда, и ширина. Такое поведение не характерно для классического солитона и является аномальным.

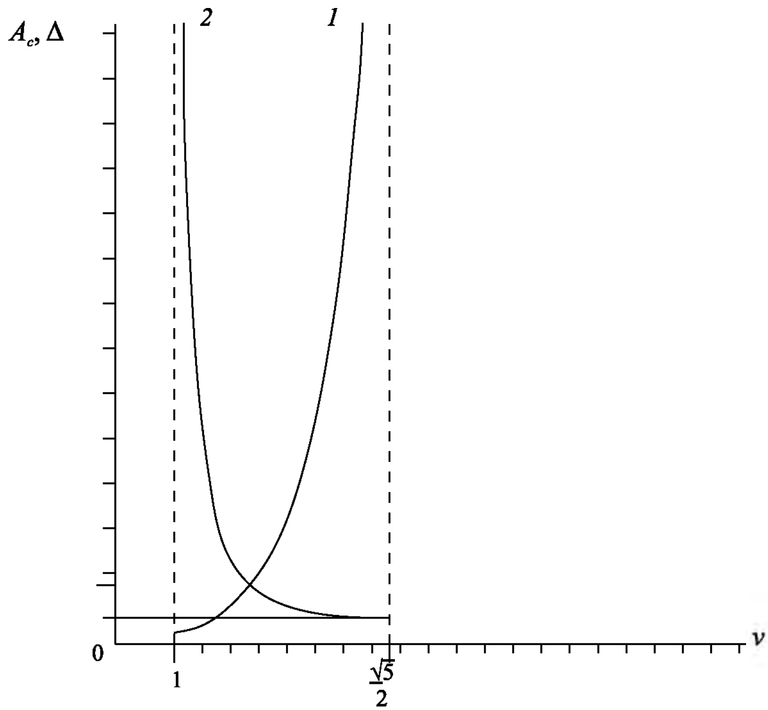

Рис. 1. Зависимость амплитуды (кривая *1*) и ширины (кривая *2*) солитона положительной полярности от его скорости

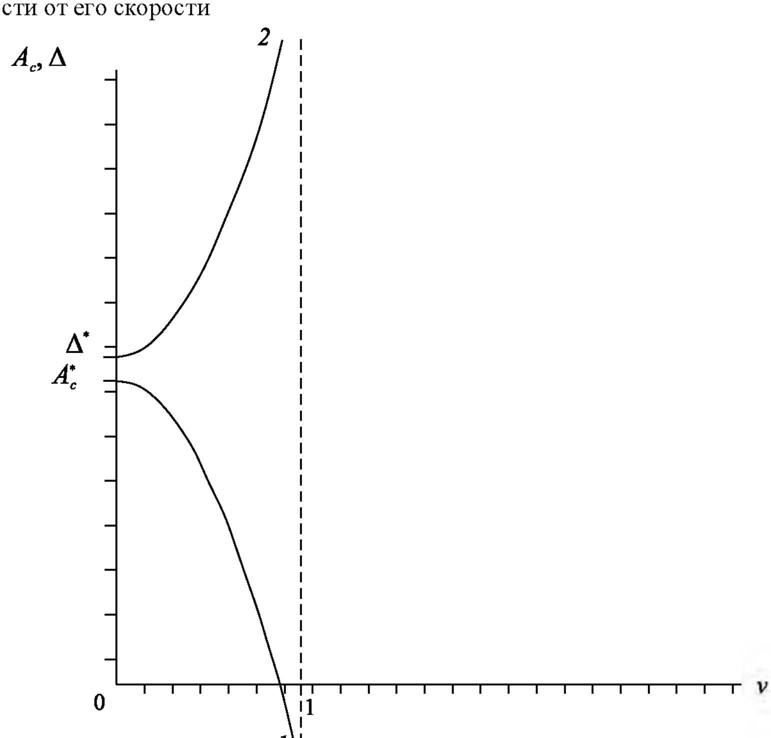

Рис. 2. Зависимость амплитуды (кривая *1*) и ширины (кривая *2*) солитона отрицательной полярности от его скорости.

Таким образом, в работе показано, что в составном нелинейно-упругом стержне могут формироваться локализованные волны (солитоны) деформации, имеющие как отрицательную, так и положительную полярность.

Работа выполнялась в рамках совместного проекта, финансируемого Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 12-08-90032-Бел-а) и Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (грант № Т12 Р-031).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипова, Н. И. Описание распространения упругих волн в слоистых элементах конструкций с помощью уточненных стержневых моделей / Н. И. Архипова, В. И. Ерофеев, Н. П. Семерикова // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. – 2011. – № 4. – С. 130–133.

2. Архипова, Н. И. Распространение продольных волн в составном вязко-упругом стержне / Н. И. Архипова, В. И. Ерофеев, В. В. Кажаев, Н. П. Семерикова // Приволжский научный журнал / Нижегор. гос. архитектур.-строит. ун-т. – Н. Новгород, 2013. – № 3. – С. 18–23.

3. Ерофеев, В. И. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках : обзор / В. И. Ерофеев, Н. В. Клюева // Акустический журнал. – 2002. – Т. 48, № 6. – С. 725–740.

Получено: 06.09.2013 г.