МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра «Основы бизнеса»

В. В. Самойлюкович

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Методическое пособие

Часть 1

Минск
БНТУ
2013

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Основы бизнеса»

В. В. Самойлюкович

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Методическое пособие
для студентов специальности
1-26 02 01 «Бизнес-администрирование»

В 3 частях

Часть 1

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И РИСКА

Минск
БНТУ
2013

УДК ~~330.45:519.83 (075.8)~~
~~ББК 65в631.я7~~
С17

Рецензенты:
канд. экон. наук, доцент *З. Н. Козловская*;
канд. экон. наук, доцент *А. А. Косовский*

Самойлюкович, В. В.

С17 Количественные методы принятия управленческих решений : методическое пособие для студентов специальности 1-26 02 01 «Бизнес-администрирование» : в 3 ч. / В. В. Самойлюкович. – Минск : БНТУ, 2013– . – Ч. 1 : Принятие решений в условиях неопределенности и риска. – 2013. – 89 с.

ISBN 978-985-525-801-9 (Ч. 1).

В методическом пособии изложены основные понятия теории антагонистических и статистических игр, приведены способы их решения, изложены методы поиска оптимальных решений в позиционных играх.

Пособие ориентировано на студентов экономических специальностей, магистрантов, аспирантов специалистов экономического профиля.

УДК 330.45:519.83 (075.8)
ББК 65в631.я7

ISBN 978-985-525-801-9 (Ч. 1)
ISBN 978-985-525-802-6

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4

ГЛАВА 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР 5

1.1 Модель игры и ее структура 5

1.2 Классификация игр 6

1.3 Формальное представление игр 7

ГЛАВА 2 АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ 11

2.1 Антагонистическая игра, ее структура и свойства ... 11

2.2 Решение антагонистической игры в чистых стратегиях 16

2.3 Решение антагонистической игры в смешанных стратегиях 21

2.3.1 Графический метод решения матричной игры 22

2.3.2 Приведение матричной игры к задачам линейного программирования 28

2.4 Информационные технологии решения антагонистических игр 34

ЗАДАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ 39

ГЛАВА 3 МЕТОДЫ ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ 51

3.1 Основные понятия теории статистических решений 51

3.2 Критерии выбора оптимальных решений 53

3.3 Информационные технологии поиска оптимальных статистических решений 60

ЗАДАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ 64

ГЛАВА 4 ПОЗИЦИОННЫЕ ИГРЫ 71

4.1 Позиционная игра и ее структура 71

4.2 Методы поиска оптимальных стратегий в позиционных играх 77

ЗАДАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ 84

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 88

ВВЕДЕНИЕ

Принятие управленческих решений в быстро меняющихся условиях внешней и внутренней бизнес-среды реализуется в условиях определенности, неопределенности и риска.

Для управленческих решений, принимаемых в условиях определенности, свойственна полнота и точность информации о результатах каждого альтернативного варианта решения.

Неопределенность в принятии управленческих решений характеризуется отсутствием у руководителя прошлого опыта принятия решений в подобных ситуациях и невозможностью оценки вероятности возможных исходов ситуации. Неопределенность ситуации в предпринимательской деятельности может быть вызвана различными факторами: значительным числом объектов, ограниченностью процесса принятия решения во времени, высокой стоимостью получения дополнительной информации и т.д.

Ситуация риска характеризуется наличием у руководителя прошлого опыта, связанного с этими или похожими ситуациями и возможностью оценки вероятности наступления событий.

Пособие состоит из четырех разделов, каждый из которых посвящен изложению отдельного направления теории принятия решений.

В первом разделе изложены основные понятия теории игр, раскрывается область ее применения, сформулированы правила построения игровых моделей, приведена их классификация. Второй раздел посвящен вопросам решения конфликтных ситуаций методами антагонистических игр. Методы поиска оптимальных решений в условиях неопределенности и риска рассмотрены в третьем разделе «Методы теории статистических решений». Вопросы применения позиционных игр к поиску оптимальных управленческих решений освещаются в четвертом разделе.

В конце каждой главы пособия приведены варианты заданий для самостоятельного решения, которые могут использоваться для решения на практических занятиях по дисциплине, а также как варианты контрольных заданий при проверке знаний студентов.

Учебное пособие предназначено для студентов экономических специальностей вузов, аспирантов, специалистов экономического профиля.

Глава 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

1.1 Модель игры и ее структура

Математическая теория игр моделирует развитие ситуаций, в которых несколько сторон реализуют свои цели, и предлагает методы поиска оптимальных стратегий поведения игроков в условиях неопределенности и риска, а также доказывает существование решений, реализующих эти стратегии.

Под ***игрой*** понимают процессы взаимодействия двух или более сторон (игроков), ведущих борьбу за реализацию своих интересов. Достижение одним из игроков своей цели зависит от выбора способа действий другими игроками.

Модель игры описывает совокупность принципов, регламентирующих поведение всех участников игры, и включает следующие элементы:

1) *множество игроков* I – набор субъектов $i \in I$, взаимодействующих для реализации своих целей;
2) *множество всех возможных стратегий каждого игрока* $\{A_i\}$ – набор возможных решений (альтернатив), которые могут выбирать игроки, в зависимости от сложившейся в процессе игры ситуации;
3) *функцию платежа* $\{H_i\}$ – значение критерия эффективности, характеризующее выигрыш или проигрыш каждого игрока для каждого сочетания стратегий. Она отражает степень достижения участниками игры своих интересов. Функция платежа известна всем участникам игры и является количественной оценкой результата игры (исхода).

Выбор игроком одной из возможных стратегий в процессе игры называется ***ходом*** в игре. ***Ситуация*** в игре описывается вектором, содержащим решения игроков, принятые ими в определенный момент игры. Например, игрок A выбрал стратегию $a2$, а игрок B – стратегию $b1$, ситуация в игре запишется так: $(a2,b1)$.

Решить игру, значит определить оптимальные стратегии каждого игрока и значение результата игры, называемое ***ценой игры***. Стратегию игрока называют ***оптимальной***, если она обеспечивает ему наибольшую полезность – максимальный выигрыш или минимальный проигрыш.

1.2 Классификация игр

Многообразие ситуаций, моделируемых математической теорией игр, разнообразие участников игр и правил их поведения вызывают необходимость систематизации игр по основным классификационным признакам. Такую классификацию проводят по количеству участников, по принципу деления выигрыша, по типу взаимодействия игроков, по количеству возможных стратегий игроков и другим критериям.

Игры, в которых игроки реализуют свои индивидуальные противоположные цели в условиях конфликта, называются *антагонистическими*. *Неантагонистические* игры описывают взаимодействие игроков, интересы которых могут полностью или частично совпадать. Если, для получения большего выигрыша, правила неантагонистической игры позволяют сотрудничество участников и объединение их в группы – коалиции, такая игра называется *коалиционной*. В *бескоалиционной* игре целью каждого участника является получение по возможности большего индивидуального выигрыша. В *гибридных* играх игроки реализуют интересы коалиции, одновременно стремясь достичь своих индивидуальных целей.

Парной игрой или игрой двух лиц называют игру, в которой участвуют два игрока, игру с более чем двумя участниками – *множественной* игрой или игрой n лиц. Если количество участников игры конечно, говорят, что реализуется игра *с конечным множеством игроков*, если множество участников не ограничено – игра *с бесконечным множеством игроков*.

В *конечных* играх участники для достижения своих целей располагают только ограниченным числом стратегий, в *бесконечных* играх – число возможных стратегий участников бесконечно.

Статическая игра – это игра, в которой игроки выбирают стратегию один раз. В *динамических* или *многошаговых* играх участники совершают выбор стратегии последовательно во времени. Игрок в такой игре делает выбор следующего хода после изменения ситуации игры, вызванной предыдущим ходом одного из игроков. К динамическим играм относят позиционные, дифференциальные, рекурсивные, стохастические игры. Игру, в которой задается последовательность принятия решения игроками, называют *позиционной*.

В зависимости от степени информированности игрока о поведении противника различают игры с *полной* информацией и с *неполной* информацией.

Приведенная классификация игр не отражает всего многообразия их видов, используемых в научной терминологии и практике принятия решений, однако в ней присутствуют те необходимые классификационные признаки, которые будут использоваться в дальнейшем.

1.3 Формальное представление игр

Для представления игр используются экстенсивная и нормальная форма записи игры, а также описание игры характеристической функцией.

Экстенсивная или *расширенная форма* записи игры используется для представления игры с более чем двумя игроками, либо описания позиционных игр, в которых игроки делают ходы последовательно. Экстенсивная форма предполагает изображение игры в виде математического графа – ориентированного дерева. Каждая вершина такого дерева соответствует ситуации выбора решения игроком, дуги дерева – возможным стратегиям этого игрока в данной ситуации. Платежи записываются внизу дерева. Если игроки делают ходы одновременно, их вершины либо обводятся сплошной линией, либо соединяются пунктиром.

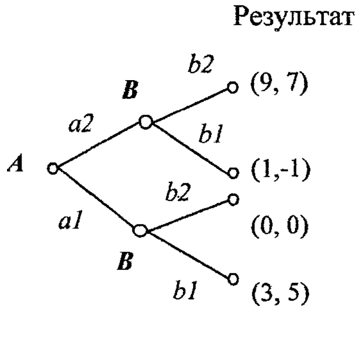

Рисунок 1 – Экстенсивная форма записи игры

<u>Пример 1.1</u>. В игре участвуют два игрока *A* и ***B*** (рисунок 1). Игрок *A* делает ход первым, он может выбрать одну из двух стратегий *a1* или *a2*. Игрок ***B*** анализирует свою позицию и выбирает стратегию либо *b1*,

либо *b2*. В ситуации (*a2,b1*) – игрок ***А*** выберет стратегию *a2*, а игрок ***В*** – стратегию *b1*, тогда выигрыш игрока ***А*** составит 1 единицу, а игрок ***В*** проиграет 1 единицу. В случае выбора игроком ***В*** – стратегии *b2*, выигрыш игрока ***А*** составит 9 единиц, а игрок ***В*** выиграет 7 единиц.

Нормальная форма записи игры обычно используется для представления антагонистических игр с конечным множеством игроков, в которых игроки выбирают стратегии одновременно, или не владеют информацией о действиях других участников игры.

Бескоалиционная игра в нормальной форме записывается следующим образом:

$$\Gamma = \ <I;\{S_i\};\{H_i\}>, \tag{1.1}$$

где I, $i \in I$ – множество игроков;

$\{S_i\}$ – множество стратегий игрока *i*;

$\{H_i\}$ – множество функций выигрыша игрока *i*.

В нормальной форме функции платежа игры записываются в виде матрицы следующего вида (таблица 1) называемой ***платежной матрицей*** или ***матрицей игры***. Строки этой матрицы соответствуют стратегиям первого игрока $(i = 1,...,m)$, где m – число

Таблица 1 – Матрица игры

		Стратегии 2-го игрока					
		1	2	…	j	…	n
Стратегии 1-го игрока	1	h'_{11}, h''_{11}	h'_{12}, h''_{12}	…	h'_{1j}, h''_{1j}	…	h'_{1n}, h''_{1n}
	2	h'_{21}, h''_{21}	h'_{22}, h''_{22}	…	h'_{2j}, h''_{2j}	…	h'_{2n}, h''_{2n}
	…	…	…	…	…	…	…
	i	h'_{i1}, h''_{i1}	h'_{i2}, h''_{i2}	…	h'_{ij}, h''_{ij}	…	h'_{in}, h''_{in}
	…	…	…	…	…	…	…
	m	h'_{m1}, h''_{m1}	h'_{m2}, h''_{m2}	…	h'_{mj}, h''_{mj}	…	h'_{mn}, h''_{mn}

конечных стратегий первого игрока, столбцы – стратегиям второго игрока $(j=1,...,n)$, где n – число конечных стратегий второго игрока.

В ячейках матрицы, образованных пересечением строк и столбцов, расположены два числа, значения которых показывают размер выигрыша первого и второго игрока соответственно. Таким образом, если первый игрок выбирает стратегию i (i-ую строку матрицы), а второй игрок – стратегию j (j-ый столбец) матрицы, тогда выигрыш первого игрока составит величину h'_{ij}, второго – h''_{ij}. Предполагается, что каждый участник игры знает все элементы платежной матрицы.

Пример 1.2. Игра из примера 1.1 задана в нормальной форме (таблица 2). В случае, когда первый игрок выбирает стратегию *a1*, а второй игрок – стратегию *b1*, их выигрыши составят 3 и 5 единиц соответственно.

Таблица 2 – Матрица игры

A \ B	b1	b2
a1	(3, 5)	(0, 0)
a2	(1,-1)	(9, 7)

Любую игру можно представить *с помощью характеристической функции*, однако наибольшее применение эта форма записи находит в коалиционных играх. В коалиционных играх не применяется понятие индивидуальных платежей. В этом случае игра представляется следующим образом:

$$\Gamma=(N,v), \tag{1.2}$$

где N – множество всех игроков;

$v:\ 2^N \to R$ – характеристическая функция.

Если в коалиционной игре с несколькими сторонами образуется коалиция C, тогда исходная игра трансформируется в антагонистическую игру двух игроков: коалиции C и коалиции $N \setminus C$ (всех остальных участников исходной игры, за исключением участников коалиции C). Выигрыш коалиции C будет некоторой характеристической величиной, зависящей от состава коалиции. Возможны 2^N

вариантов коалиций, где N - количество игроков). Выигрыш пустой коалиции равен нулю.

Пример 1.3: В игре двух игроков A и $\boldsymbol{B}$ $(N=2)$ возможны следующие четыре $(2^N=2^2=4)$ коалиции: $V(\varnothing); V(A); V(B); V(A,B)$.

Контрольные вопросы

1. Опишите модель игры и ее структуру.
2. Рассмотрите примеры конкретных экономических ситуаций, которые могут быть представлены в виде игры. Определите участников этих игр, их возможные стратегии и правила поведения, функции платежа. Классифицируйте эти игры.
3. Приведите примеры экономических ситуаций, которые могут быть представлены в виде антагонистической и неантагонистической игры, коалиционной игры, позиционной игры.
4. Какие формы записи игры используются для ее представления?

Глава 2 АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

2.1 Антагонистическая игра, ее структура и свойства

В антагонистической игре участвуют два игрока *A* и ***B***, игроки не информированы о действиях своих противников. Первый игрок *A* может выбрать одну стратегию a_i из множества возможных альтернатив $\{a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_m\}$, второй игрок ***B***, сделав ответный ход, может выбрать стратегию b_j из множества возможных решений $\{b_1, b_2, ..., b_j, ..., b_n\}$. Пара стратегий a_i и b_j образуют ситуацию (a_i, b_j) игры. Если для каждой из возможных ситуаций (a_i, b_j) в антагонистической игре Г заданы такие функции выигрышей h'_{ij} и h''_{ij} игрока *A* и игрока ***B*** соответственно, для которых справедливо условие (2.1):

$$h'_{ij} + h''_{ij} = s; \quad \forall i = \overline{1,m}; \quad \forall j = \overline{1,n}, \tag{2.1}$$

где $s \neq 0$ и s – константа, то антагонистическую игру Г называют матричной *антагонистической игрой двух лиц с ненулевой постоянной суммой.* Если в условии (2.1) константа $s = 0$, игру Г называют *игрой с нулевой суммой.*

Лемма: Любая парная антагонистическая игра с ненулевой суммой может быть преобразована к игре с нулевой суммой.

Преобразование игры двух лиц с ненулевой суммой к игре с нулевой суммой выполняется следующим образом: каждому игроку выплачивается сумма $s/2$, затем исходная платежная матрица игры H трансформируется в матрицу H' по следующему правилу $h'_{ij} = h_{ij} - s/2$.

Условие (2.1) для игры двух лиц с ненулевой суммой может быть записано в виде (2.2), которое соответствует равенству выигрыша первого игрока проигрышу второго:

$$h'_{ij} = -h''_{ij}; \quad \forall i = \overline{1,m}; \quad \forall j = \overline{1,n}. \tag{2.2}$$

Свойство (2.2) позволяет упростить платежную матрицу игры. Каждый элемент такой матрицы будет содержать одно значение h_{ij}, которое одновременно определяет выигрыш первого игрока и проигрыш второго в ситуации игры (a_i, b_j)(таблица 3). В случае, если элемент платежной матрицы $h_{ij} > 0$, тогда игрок ***B*** должен выплатить игроку ***A*** сумму своего проигрыша h_{ij}. Если $h_{ij} < 0$, второй игрок ***B*** получает свой выигрыш в сумме h_{ij} от игрока ***A***. Ситуации $h_{ij} = 0$ соответствует «ничья» и выплаты не производятся.

Таблица 3 – Платежная матрица парной антагонистической игры с нулевой суммой

		Стратегии 2-го игрока					
		1	2	…	j	…	n
Стратегии 1-го игрока	1	h_{11}	h_{12}	…	h_{1j}	…	h_{1n}
	2	h_{21}	h_{22}	…	h_{2j}	…	h_{2n}
	…	…	…	…	…	…	…
	i	h_{i1}	h_{i2}	…	h_{ij}	…	h_{in}
	…	…	…	…	…	…	…
	m	h_{m1}	h_{m2}	…	h_{mj}	…	h_{mn}

В игре двух лиц с нулевой суммой, как и в любой другой стратегической игре, результат игры зависит от поведения обоих игроков, которое основывается на правилах игры. Первый игрок в такой игре стремиться к максимальному выигрышу, а второй игрок – к минимальному проигрышу. Для нахождения решения игры необходимо определить оптимальные стратегии игроков и их выигрыши.

Поиск оптимального решения в играх с платежными матрицами большой размерности требует большого объема вычислений. Поэтому для снижения трудоемкости процесса исходную платежную матрицу H, трансформируют в некоторую упрощенную матрицу H' меньшей размерности. Далее находят решение игры Γ' с упрощенной матрицей H', и преобразуют его в решение исходной игры Γ с платежной матрицей H.

Упрощение платежной матрицы проводится в направлении снижения размерности матрицы, а также преобразования элементов исходной платежной матрицы к более удобному для вычислений виду.

Возможность снижения размерности матрицы основана на принципе доминирования стратегий игрока.

Принцип доминирования стратегий гласит: игрок не должен использовать с положительной вероятностью те чистые стратегии, применяя которые он, при любых действиях другого игрока, выигрывает строго меньше, чем при использовании некоторой другой стратегии.

Стратегия первого игрока a_i *доминирует* стратегию a_k этого же игрока, если выполняется условие (2.3):

$$h_{ij} \geq h_{kj}; \quad i \neq k; \quad \forall i = \overline{1,m}; \quad \forall j = \overline{1,n}. \tag{2.3}$$

или стратегия b_j второго игрока *доминирует* его стратегию b_l при условии (2.4):

$$h_{ij} \leq h_{il}; \quad j \neq l; \quad \forall i = \overline{1,m}; \quad \forall j = \overline{1,n}. \tag{2.4}$$

Стратегии a_k и b_l называются *доминируемыми*, а a_i и b_j – *доминирующими*. Это значит, что стратегия a_k при любых условиях будет хуже стратегии a_i первого игрока, потому что она будет обеспечивать ему меньший выигрыш, чем стратегия a_i. Аналогично, стратегия b_l будет невыгодна второму игроку, так как его проигрыш в этом случае будет больше, чем при выборе стратегии b_j.

Условие равенства в формулах (2.3) и (2.4) описывают частный случай доминирования – *дублирование* стратегий.

Снижение размерности исходной платежной матрицы возможно за счет исключения доминируемых стратегий игроков, вероятность выбора которых равна нулю.

Теорема: Пусть Г – игра, в платежной матрице H которой стратегия a_i первого игрока доминирует над a_k , а Г' - игра, платежная матрица H' которой получена из матрицы H исключением стратегии a_k (k-ой строки), тогда:

1) цена игры Г равна цене игры Г';
2) оптимальная смешанная стратегия $Q^* = (q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*)$ второго игрока в игре Г' является также его оптимальной смешанной стратегией в игре Г;
3) если $P'^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_i^*, ..., p_{k-1}^*, p_{k+1}^*, ..., p_m^*)$ - оптимальная смешанная стратегия первого игрока в игре Г', то его смешанная стратегия $P^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_i^*, ..., p_{k-1}^*, 0, p_{k+1}^*, ..., p_m^*)$ является оптимальной в игре Г.

Из теоремы следует, что строка k и столбец l, соответствующие доминируемым стратегиям a_k и b_l, могут быть исключены из исходной платежной матрицы для уменьшения ее размерности.

Преобразование элементов исходной платежной матрицы к более удобному для вычислений виду основано на свойстве стратегической эквивалентности игр.

Теорема: Решение $< a_i^*, b_j^*, V>$ является решением игры $\Gamma=<A, B, H>$, тогда и только тогда, когда $< a_i^*, b_j^*, cV+d>$ является решением игры $\Gamma'=<A, B, cH+d>$, где $c>0$, а d – любое вещественное число.

В соответствии с вышеизложенным, исходную игру Г трансформируют в эквивалентную игру Г', изменением каждого элемента платежной матрицы H на некоторую фиксированную величину. Такое преобразование изменит на это же значение цену V исходной игры, не изменяя при этом само решение исходной игры. Свойство эквивалентности позволяет преобразовать исходную платежную матрицу к виду, более удобному для расчетов.

Пример 2.1. Игра Г задана платежной матрицей H, следующего вида:

$$H=\begin{pmatrix} 0{,}03 & -0{,}06 & -0{,}03 & -0{,}04 \\ -0{,}08 & 0{,}04 & 0{,}02 & 0{,}04 \\ -0{,}04 & -0{,}06 & -0{,}03 & 0{,}06 \\ -0{,}04 & -0{,}06 & -0{,}04 & -0{,}04 \end{pmatrix}$$

Необходимо упростить платежную матрицу H игры Г.

Выполним преобразование $h'_{ij}=100\cdot h_{ij}+8$. Получим матрицу следующего вида:

$$H'=\begin{pmatrix} 11 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 12 & 10 & 12 \\ 4 & 2 & 5 & 14 \\ 4 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Проанализируем матрицу H'. Первая стратегия первого игрока доминирует его четвертую стратегию, каждый элемент первой строки больше либо равен соответствующему элементу четвертой строки $(11\geq 4;\ \ 2\geq 2;\ \ 5\geq 4;\ \ 4\geq 4)$ – исключаем четвертую строку. Второй столбец, оставшейся матрицы, доминирует его четвертый столбец $(2\leq 4;\ \ 12\leq 12;\ \ 2\leq 14)$, вычеркиваем четвертый столбец. Продолжая анализ, видим, что каждый элемент первой строки больше либо равен соответствующему элементу третьей строки $(11\geq 4;\ \ 2\geq 2;\ \ 5\geq 5)$, исключаем третью строку. Дальнейшее упрощение матрицы невозможно.

$$H'=\begin{pmatrix} 11 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 12 & 10 & 12 \\ 4 & 2 & 5 & 14 \\ \cancel{4} & \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{4} \end{pmatrix};\quad H'=\begin{pmatrix} 11 & 2 & 5 & \cancel{4} \\ 0 & 12 & 10 & \cancel{12} \\ 4 & 2 & 5 & \cancel{14} \end{pmatrix};$$

$$H'=\begin{pmatrix} 11 & 2 & 5 \\ 0 & 12 & 10 \\ \cancel{4} & \cancel{2} & \cancel{5} \end{pmatrix};\quad H'=\begin{pmatrix} 11 & 2 & 5 \\ 0 & 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

2.2 Решение антагонистической игры в чистых стратегиях

Методы решения антагонистических игр основаны на применении игроками ***принципа осторожности***, в соответствии с которым: *каждый игрок выбирает стратегии так, чтобы обеспечить себе гарантированный выигрыш независимо от действий противника.*

Реализуя принцип осторожности, первый игрок для каждой своей стратегии a_i находит значение ожидаемого выигрыша в наихудших условиях $\min\limits_j h_{ij} \quad (\forall i=\overline{1,m})$, а затем из этих значений выберет максимальное $\underline{V}$ (2.5) и соответствующую ему стратегию a_i^*:

$$\underline{V} = \max_i \min_j h_{ij} \quad (\forall i=\overline{1,m}; \quad \forall j=\overline{1,n}). \qquad (2.5)$$

Стратегию a_i^* называют ***максиминной***, а значение $\underline{V}$ – ***максимином*** или ***нижней ценой игры***, которое численно равно гарантированному выигрышу первого игрока, независимо от действий второго участника игры.

Второй игрок, анализируя платежную матрицу, сначала найдет максимальный ожидаемый проигрыш в наихудших ситуациях $\max\limits_i h_{ij} \quad (\forall j=\overline{1,n})$, который он может получить при выборе каждой своей стратегии b_j, а затем, из этих элементов выберет минимальный $\overline{V}$ (2.6) и соответствующую ему стратегию b_j^*:

$$\overline{V} = \min_j \max_i h_{ij} \quad (\forall i=\overline{1,m}; \quad \forall j=\overline{1,n}). \qquad (2.6)$$

Стратегию b_j^*, удовлетворяющую условию (2.6), называют ***минимаксной***, а значение $\overline{V}$ – ***верхней ценой игры*** или ***минимаксом.***

Если игрок ***B*** применяет свою минимаксную стратегию b_j^*, тогда игрок A при любой своей стратегии не может выиграть больше $\overline{V}$, в ситуации применения игроком A своей максиминной стратегии a_i^*

проигрыш игрока **B**, независимо от выбранной им стратегии, не превысит величины $\underline{V}$. Нижняя и верхняя цена игры задают ограничения на значение выигрыша первого и второго игрока соответственно. Условие (2.5) называют ***принципом максимина***, условие (2.6) – ***принципом минимакса***. Принцип максимина был впервые сформулирован Дж. фон Нейманом в 1928 г.

Теорема. Нижняя цена игры всегда не больше верхней цены игры, т.е. справедливо условие (2.7):

$$\underline{V} \le \overline{V}. \tag{2.7}$$

В ситуации, когда $\forall i = \overline{1,m}$ и $\forall j = \overline{1,n}$ элемент $h_{i^* j^*}$ платежной матрицы является одновременно минимальным в строке i^* и максимальным в строке j^*, т.е. справедливо условие (2.8) или для любой платежной матрицы выполняется условие (2.9):

$$h_{i^* j} \le h_{i^* j^*} \le h_{ij^*}, \tag{2.8}$$

$$\underline{V} \le h_{i^* j^*} \le \overline{V}, \tag{2.9}$$

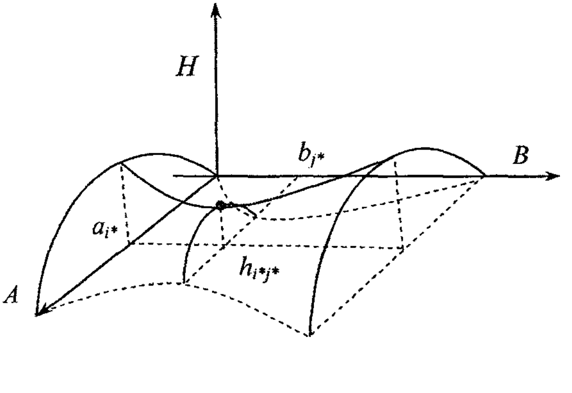

Рисунок 2 – Геометрическая интерпретация точки равновесия в игре тогда говорят, что в игре имеет место ситуация ***равновесия в чистых стратегиях***, элемент платежной матрицы $h_{i^* j^*}$ называют ***седловой точкой***, а игру Г – игрой с седловой точкой. Графическая интерпретация ситуации равновесия в игре изображена на рисунке 2.

В ситуации равновесия в чистых стратегиях верхняя и нижняя цена игры равны и равны значению $\underline{V} = \overline{V} = V = h_{i^* j^*}$, которое называется ***ценой игры***. Минимаксная стратегия a_i^* первого игрока и максиминная стратегии b_j^* второго игрока в этом случае являются их ***оптимальными стратегиями***, а их пара вместе с ценой игры V – ***решением игры*** Г:

$$\Gamma = < a_i^*; b_j^*; V > .$$

Каждому из участников игры не выгодно отклоняться от ситуации равновесия. В любых других случаях он получит меньший выигрыш или больший проигрыш, так как выбор игроком любой другой стратегии, отличной от равновесной, позволит его противнику получить лучший, чем равновесный результат в игре. В этом смысле ситуация равновесия является устойчивой. В антагонистических играх, реализуя свою максиминную (минимаксную) стратегию, игрок может достичь ситуации равновесия, при условии ее существования.

Платежная матрица конечной антагонистической игры может иметь несколько седловых точек, в этом случае игра будет иметь несколько альтернативных решений, доставляющих игре одну и ту же цену (см. пример 2.2).

Пример 2.2. Игра задана платежной матрицей:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Данная игра имеет четыре седловые точки h_{22}, h_{23}, h_{32}, h_{33}. Цена игры равна V=1 для всех седловых точек.

Пример 2.3. Найти решение матричной игры, заданной в нормальной форме в таблице 4.

Таблица 4 – Платежная матрица игры

A \ B	b_1	b_2	b_3
a_1	8	4	7
a_2	6	5	11
a_3	7	7	8

Определим нижнюю и верхнюю цену игры в чистых стратегиях, расчеты представлены в таблице 5.

Определим минимально возможные выигрыши первого игрока A для первой стратегии a_1: $\min(h_{11}, h_{12}, h_{13}) = \min(8,4,7) = 4$, аналогично для второй стратегии a_2: $\min(h_{21}, h_{22}, h_{23}) = \min(6,5,11) = 5$ и третьей стратегии a_3: $\min(h_{31}, h_{32}, h_{33}) = \min(7,7,8) = 7$.

Таблица 5 – Решение игры

A \ B		Стратегии 2-го игрока			$\min\limits_{j} h_{ij}$	$\underline{V} = \max\limits_{i} \min\limits_{j} h_{ij}$
		b_1	b_2	b_3		
Стратегии 1-го игрока	a_1	8	4	7	4	7
	a_2	6	5	11	5	
	a_3	7	7	8	7	
$\max\limits_{i} h_{ij}$		8	7	11	$\underline{V} = V = \overline{V} = 7$	
$\overline{V} = \min\limits_{j} \max\limits_{i} h_{ij}$		7				

Максиминной стратегией первого игрока A является стратегия a_3. При выборе этой стратегии первый игрок получит выигрыш 7 единиц. Нижняя цена игры $\underline{V} = \max\limits_{i} \min\limits_{j} h_{ij} = \max(4,5,7) = 7$.

Определим максимально возможные проигрыши второго игрока B – для первой стратегии b_1: $\max(h_{11}, h_{21}, h_{31}) = \max(8,6,7) = 8$, для второй стратегии b_2: $\max(h_{12}, h_{22}, h_{32}) = \max(4,5,7) = 7$, для третьей стратегии b_3: $\max(h_{13}, h_{23}, h_{33}) = \max(7,11,8) = 11$. Минимаксное значение достигается вторым игроком $\overline{V} = \min\limits_j \max\limits_i h_{ij} =$ $= \min(8,7,11) = 7$ при выборе второй стратегии b_2. Следовательно, верхняя цена игры равна $\overline{V} = 7$.

Нижняя и верхняя цена игры равны $\underline{V} = V = \overline{V}$, значит, игра имеет седловую точку h_{32}=7, цена игры равна V=7. В ситуации выбора стратегии a_3 первым игроком и выборе стратегии b_2 вторым игроком, первый игрок получит свой выигрыш в размере 7 единиц от второго игрока. Результат игры $Г = \langle a_3, b_2, 7 \rangle$.

Пример 2.4: Определим, имеет ли игра $Г$, заданная матрицей H' (см. пример 2.1), решение в чистых стратегиях.

$$H' = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 5 \\ 0 & 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

Решение запишем в табличном виде (таблица 6).

Для данной игры значение нижней цены игры не равно значению верхней цены игры $\underline{V} \neq \overline{V}$. Игра не имеет седловой точки, и, следовательно, решения в чистых стратегиях, поиск решения следует производить в смешанных стратегиях.

Таблица 6 – Решение игры

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">B
A</td><td colspan="3">Стратегии 2-го игрока</td><td rowspan="2">$\min\limits_j h_{ij}$</td><td rowspan="2">$\underline{V} = \max\limits_i \min\limits_j h_{ij}$</td></tr>
<tr><td>b_1</td><td>b_2</td><td>b_3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Стратегии 1-го игрока</td><td>a_1</td><td>11</td><td>2</td><td>5</td><td>2</td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td>a_2</td><td>0</td><td>12</td><td>10</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\max\limits_i h_{ij}$</td><td>11</td><td>12</td><td>10</td><td colspan="2" rowspan="2">$\underline{V} \neq \overline{V}$
$2 \leq V \leq 10$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\overline{V} = \min\limits_j \max\limits_i h_{ij}$</td><td colspan="3">10</td></tr>
</table>

2.3 Решение антагонистической игры в смешанных стратегиях

Если антагонистическая игра не имеет ситуации равновесия в чистых стратегиях, тогда игроки, применяя свои максиминную и минимаксную чистые стратегии, создают неустойчивую ситуацию, которую один из игроков может с выгодой изменить для себя. В этом случае каждый из игроков выбирает свои чистые стратегии случайно, с некоторой заранее заданной вероятностью, такие стратегии называют смешанными.

Смешанная стратегия первого игрока *A* задается *m*-мерным вектором $P=(p_1,p_2,...,p_i,...,p_m)$, где p_i – вероятность выбора первым игроком *A* своей чистой стратегии a_i, при этом $p_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \quad \forall j=\overline{1,n}.$

Смешанная стратегия второго игрока *B* определяется *n* - мерным вектором $Q=(q_1,q_2,...,q_j,...,q_n)$, где q_j – вероятность выбора вторым игроком *B* его чистой стратегии b_j, аналогично $q_j \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{n} q_j = 1 \quad \forall i=\overline{1,m}.$

Чистые стратегии игроков являются частным случаем их смешанных стратегий. Например, чистая стратегия a_i игрока *A* может быть представлена, как его смешанная стратегия следующего вида $P=(p_1,p_2,...,p_{i-1},p_i,p_{i+1},...,p_m)=(0,0,...,0,1,0,...,0)$, где *i*-тая компонента вектора *P* равна единице $p_i=1$, остальные вероятности равны нулю. Смешанная стратегия игрока определяет: с какой частотой будет применять игрок соответствующую ей чистую стратегию.

Теорема фон Неймана (основная теорема теории игр): Каждая конечная антагонистическая игра с нулевой суммой имеет, по крайней мере, одно оптимальное решение, возможно, среди смешанных стратегий.

Если P^* – оптимальная смешанная стратегия первого игрока $\boldsymbol{A}$, а Q^* – оптимальная смешанная стратегия второго игрока $\boldsymbol{B}$ в игре Г с платежной матрицей H, тогда цена игры V равна (2.10):

$$V = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} h_{ij} p_i^* q_j^* , \qquad (2.10)$$

а решением игры является совокупность $Г =< p_i^*; q_j^*; V >$.

При применении смешанных стратегий, стремления каждого участника игры направлены на максимизацию математического ожидания своего выигрыша либо минимизацию математического ожидания своего проигрыша.

Активными стратегиями игрока называют чистые стратегии игрока, которые входят в его оптимальную смешанную стратегию с ненулевыми вероятностями.

Теорема (об активных стратегиях): Если один из игроков выбирает свою оптимальную стратегию, его выигрыш постоянен и равен цене игры V, независимо от действий другого игрока, если тот строго придерживается своих активных стратегий.

Решение антагонистической игры в смешанных стратегиях можно выполнить графическим способом либо аналитически, сведением к задаче линейного программирования.

2.3.1 Графический метод решения матричной игры

Рассмотрим парную антагонистическую игру Г с ненулевой постоянной суммой, заданную матрицей H размерности (2×2).

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}.$$

Пусть первый игрок выбирает свою стратегию a_1 с вероятностью p_1, а вторую стратегию a_2 с вероятностью $p_2 = 1 - p_1$. Из теоремы об активных стратегиях следует, что если игрок A использует свою оптимальную смешанную стратегию в игре, математическое ожидание его выигрыша будет равно цене игры, не зависимо от действий игрока $\boldsymbol{B}$, если тот не выходит за границы своих активных стратегий. Значит, применение игроком ***B*** своей первой стратегии b_1 позволит игроку ***A*** получить свой ожидаемый выигрыш в размере $V = p_1h_{11} + p_2h_{12}$, в ситуации выбора игроком ***B*** второй стратегии b_2 – в размере $V = p_1h_{12} + p_2h_{22}$. По определению вероятности $p_1 + p_2 = 1$. Получим систему линейных уравнений (2.11):

$$\begin{cases} p_1h_{11} + p_2h_{21} = V; \\ p_1h_{12} + p_2h_{22} = V; \\ \quad p_1 + p_2 = 1. \end{cases} \tag{2.11}$$

Решение системы линейных уравнений (2.11) позволяет определить оптимальные смешанные стратегии $(\overset{*}{p_1}; \overset{*}{p_2})$ первого игрока ***A*** и цену игры V.

Аналогично определяют оптимальные смешанные стратегии второго игрока ***B*** и составляют систему уравнений (2.12):

$$\begin{cases} q_1h_{11} + q_2h_{12} = V; \\ q_1h_{21} + q_2h_{22} = V; \\ \quad q_1 + q_2 = 1. \end{cases} \tag{2.12}$$

Из решения системы линейных уравнений (2.12) устанавливают оптимальные смешанные стратегии $(\overset{*}{q_1}; \overset{*}{q_2})$ игрока ***B*** и цену игры V.

Рассмотрим графическую интерпретацию парной игры Г с платежной матрицей H (2×2) (рисунок 3). На плоскости в системе координат $P0Q$ на оси $0P$ отложим отрезок $[A_1, A_2]$ единичной длины.

На перпендикуляре A_1 отметим значения выигрыша h_{11} первого участника игры (точка B_1), который он получит при выборе своей первой стратегии a_1 в ситуации (a_1, b_1), на прямой A_2 – значение выигрыша h_{21} первого игрока при выборе второй стратегии a_2 в ситуации (a_2, b_1) (точка B'_1). Соединим эти точки прямой. Ординаты всех точек отрезка $[B_1, B'_1]$ соответствуют среднему выигрышу при любых действиях игрока A в ситуации выбора стратегии b_1 игроком $\boldsymbol{B}$, ординаты всех точек отрезка $[B_2, B'_2]$ – стратегии b_2 игрока $\boldsymbol{B}$. Игрок А выбирает оптимальную стратегию по принципу максимина. Таким образом линия $[B_2 M B'_1]$ определяет гарантированный минимальный платеж, который получит игрок A при любых действиях игрока $\boldsymbol{B}$ и является нижней границей игры. Стремление игрока A максимизировать свой выигрыш соответствует верхней точке этой линии – точке $\boldsymbol{M}$, точке оптимума. Стратегии игрока A, соответствующие прямым $[B_1, B'_1]$ и $[B_2, B'_2]$ являются его активными стратегиями. Координаты точки $\boldsymbol{M}$ находят как точки пересечения этих прямых из системы линейных уравнений (2.11). Аналогично определяем оптимальные стратегии для игрока $\boldsymbol{B}$ (рисунок 4).

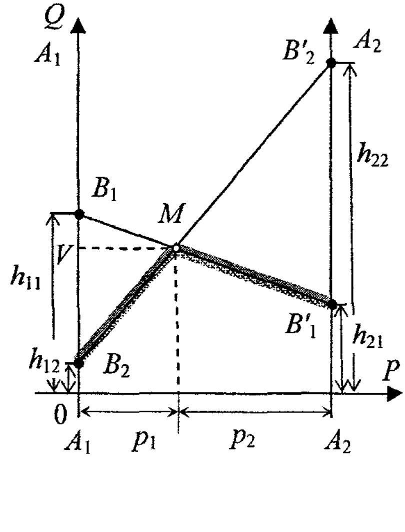

Рисунок 3 – Геометрическая интерпретация игры ($2 \times n$)

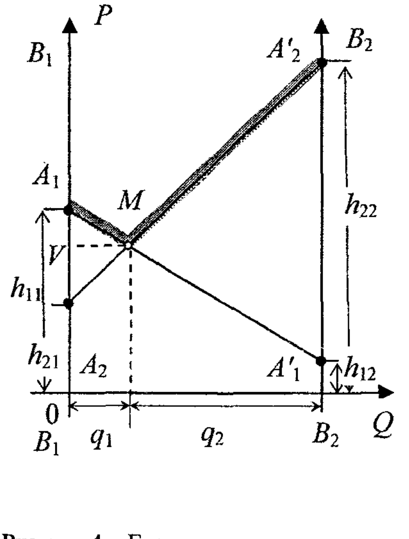

Рисунок 4 – Геометрическая интерпретация игры ($m \times 2$)

Теорема: Любая конечная игра с платежной матрицей H ($m \times n$) имеет решение, в котором число активных стратегий игрока не превосходит $r = \min(m, n)$.

Из этой теоремы следует, что конечная парная игра с платежной матрицей H_1 ($m\times 2$) или H_2 ($2\times n$) имеет решение, содержащее не более двух активных стратегий каждого из игроков.

Геометрический способ решения игры ($2\times n$) и ($m\times 2$) предполагает выполнение следующих действий:

1) в системе координат $P0Q$ выполняют построение прямых, соответствующих стратегиям второго (первого) игрока;
2) определяют нижнюю (верхнюю) границу игры;
3) определяют точку оптимума, которой является точка с максимальной (минимальной) ординатой нижней (верхней) границы игры.
4) находят стратегии игрока, соответствующие прямым, пересекающимся в точке оптимума. Стратегии первого игрока, пересекающиеся в точке с максимальной ординатой низшей (верхней) границы выигрыша (проигрыша), являются его активными стратегиями. Вероятности реализации таких активных стратегий отличны от нуля, вероятности выбора остальных стратегий игроком – равны нулю. Если в точке оптимума пересекаются более двух стратегий, для определения цены игры выбирают любые две из них.
5) для активных стратегий решают систему уравнений (2.11) и (2.12) и определяют смешанные стратегии игроков и цену игры.

Пример 2.5. Найти решение парной антагонистической игры Г с нулевой суммой графическим методом. Платежная матрица игры H представлена в таблице 7.

Проверим, имеет ли игра решение в чистых стратегиях, для этого определим нижнюю цену игры $\underline{V}$ и соответствующую ей максиминную стратегию a_i^* первого игрока и верхнюю цену игры $\overline{V}$ и соответствующую ей минимаксную стратегию b_j^* второго игрока. Расчеты приведены в таблице 8.

Таблица 7 – Платежная матрица игры

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	3	9	1	4	6
a_2	7	6	11	5	3

Таблица 8 – Решение игры

A \ B			Стратегии 2-го игрока					$\min\limits_j h_{ij}$	$\underline{V} = \max\limits_i \min\limits_j h_{ij}$
			b_1	b_2	b_3	b_4	b_5		
			q_1	q_2	q_3	q_4	q_5		
Стратегии 1-го игрока	a_1	p_1	3	9	1	4	6	1	3
	a_2	p_2	7	6	11	5	3	3	
$\max\limits_i h_{ij}$			7	9	11	5	6	$\underline{V} \neq \overline{V}$ $3 \le V \le 5$	
$\overline{V} = \min\limits_j \max\limits_i h_{ij}$			5						

Игра не имеет седловой точки и значит, не имеет решения в чистых стратегиях, цена игры находится в пределах $3 \le V \le 5$. Найдем решение игры в смешанных стратегиях. Платежная матрица H игры имеет размерность (2×5), это позволяет решить игру графическим способом.

Построим геометрическую интерпретацию игры в системе координат $P0Q$ (рисунок 5), на перпендикуляры A_1 и A_2 отложим значения показателей результатов игры при различных стратегиях. Геометрическая интерпретация этой игры иллюстрирует действие принципа доминирования стратегий: стратегия b_5 второго игрока (прямая (6,3)) доминирует его стратегию b_2 (прямая (9,6)), которая соответствует большему значению проигрыша игрока ***B*** при любых действиях игрока *A*. Стратегия b_2 неэффективна и, в дальнейшем, может быть исключена из рассмотрения.

Нижняя граница области допустимых решений показывает минимальный выигрыш первого игрока при применении им любых смешанных стратегий – это ломанная линия $1M_1M_23$. Точка M_2 этой линии имеет максимальную ординату и указывает на оптимальные смешанные стратегии, а ее ордината равна цене игры.

Для определения цены игры, найдем ординаты точки M_2 пересечения прямых (4,5) и (6,3), решив систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4p_1 + 5p_2 = V; \\ 6p_1 + 3p_2 = V; \\ \ \ p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

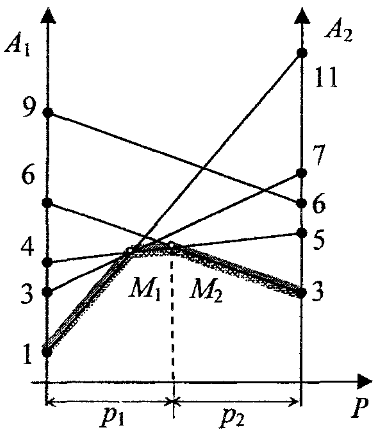

Рисунок 5 – Геометрическая интерпретация игры

Оптимальные стратегии игрока A равны
$P^* = (p_1^*, p_2^*) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, цена игры $V = 4{,}5$.

Решим систему линейных уравнений и определим оптимальные смешанные стратегии игрока $\boldsymbol{B}$:

$$\begin{cases} 4q_4 + 6q_5 = \dfrac{9}{2}; \\ 5q_4 + 3q_5 = \dfrac{9}{2}; \\ q_4 + q_5 = 1. \end{cases}$$

Оптимальные смешанные стратегии игрока $\boldsymbol{B}$ равны
$Q^* = (q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*, q_5^*) = \left(0; 0; 0; \frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$, цена игры $V = 4{,}5$.

Решение игры в смешанных стратегиях

$$\Gamma = \left\langle P^*, Q^*, V \right\rangle = \left\langle (p_1^*, p_2^*); \quad (q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*, q_5^*); \quad V \right\rangle =$$

$$=\left\langle \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right);\quad \left(0;0;0;\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right);\quad 4,5\right\rangle .$$

2.3.2 Приведение матричной игры к задачам линейного программирования

Аналитический метод решения основан на представлении антагонистической игры в виде пары взаимодвойственных задач линейного программирования, которые затем решают симплекс-методом либо с использованием прикладных программных средств.

Рассмотрим антагонистическую игру с платежной матрицей H $(m\times n)$. Определим оптимальные смешанные стратегии первого игрока $P^*=(p_1^*,p_2^*,...,p_i^*,...,p_m^*)$, второго игрока $Q^*=(q_1^*,q_2^*,...,q_j^*,...,q_n^*)$ и цену игры V. Элементы векторов P^* и Q^* определяют вероятность применения соответствующих чистых стратегий первым и вторым участником игры соответственно, следовательно, для них выполняется условие (2.13):

$$p_1^* + p_2^* + ... + p_i^* + ... + p_m^* = 1 \text{ или } \sum_{i=1}^{m} p_i = 1; \quad \forall j = \overline{1,n}. \qquad (2.13)$$

Аналогично

$$q_1^* + q_2^* + ... + q_j^* + ... + q_n^* = 1 \text{ или } \sum_{i=1}^{n} q_j = 1; \quad \forall i = \overline{1,m}. \qquad (2.14)$$

Выбор первым игроком любой из своих оптимальных смешанных стратегий гарантирует выполнение условия: математическое ожидание выигрыша первого игрока не меньше цены игры, при любых действиях второго игрока (2.15):

$$\sum_{i=1}^{m} h_{ij} p_i^* \geq V; \qquad \forall j = \overline{1,n}. \qquad (2.15)$$

Введем следующие обозначения (2.16):

$$y_i = \frac{p_i}{V}; \quad \forall i = \overline{1,m}. \qquad (2.16)$$

Будем полагать, что $V>0$, что верно при условии, когда все $h_{ij} > 0$. Последнее условие может быть получено трансформированием исходной матрицы.

Система неравенств (2.15) с учетом (2.16) примет вид (2.17):

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} h_{ij} y_i \geq 1; \quad \forall j = \overline{1,n}; \\ &y_i \geq 0; \quad \forall i = \overline{1,m}. \end{aligned} \qquad (2.17)$$

Формула (2.13) примет вид (2.18):

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = \frac{1}{V}. \qquad (2.18)$$

Так как первый игрок стремиться максимизировать свой выигрыш V и минимизировать величину $\frac{1}{V}$, задача линейного программирования для первого игрока имеет вид (2.19)-(2.21):

$$z = \sum_{i=1}^{m} y_i \rightarrow \min; \qquad (2.19)$$

$$\sum_{i=1}^{m} h_{ij} y_i \geq 1; \quad \forall j = \overline{1,n}; \qquad (2.20)$$

$$y_i \geq 0; \quad \forall i = \overline{1,m}. \qquad (2.21)$$

Аналогично для второго игрока:

$$f = \sum_{j=1}^{n} x_j \rightarrow \max; \qquad (2.22)$$

$$\sum_{j=1}^{n} h_{ij} x_j \le 1; \qquad \forall i = \overline{1,m}; \tag{2.23}$$

$$x_j \ge 0; \quad \forall j = \overline{1,n}. \tag{2.24}$$

где $x_j = \dfrac{q_j}{V}$, $\forall j = \overline{1,n}$.

Решив пару взаимодвойственных задач линейного программирования (2.19)-(2.21) и (2.22)-(2.24), определяют решение антагонистической игры по формулам (2.25)-(2.27).

Цена антагонистической игры равна:

$$V = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} y_i} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_j}. \tag{2.25}$$

Смешанные стратегии игроков определяют по формулам:

$$p_i = V \cdot y_i; \quad \forall i = \overline{1,m}; \tag{2.26}$$

$$q_j = V \cdot x_j; \quad \forall j = \overline{1,n}. \tag{2.27}$$

Пример 2.6 (Игра «Поставка товара») Коммерческая организация может осуществить поставку и реализацию товара четырех наименований b_1, b_2, b_3, b_4. Покупательский спрос неизвестен, однако может находиться в одном из трех возможных состояний a_1, a_2, a_3. Величина полученной прибыли p_{ij} от реализации товара j-того наименования определяется i-тым состоянием спроса. Дополнительные затраты, связанные с хранением, порчей товара, не пользующего спросом, равны l_j. Определить оптимальный ассортимент поставки товара, который обеспечит коммерческой организации максимально возможную прибыль.

Игра может быть сформулирована как антагонистическая игра, в которой первый игрок – «природа», стратегии которой описывают состояние спроса на товар a_1, a_2, a_3. Предприятие – второй игрок может реализовать одну из четырех стратегий закупать b_1, b_2, b_3, b_4 единиц товара соответственно.

Составим платежную матрицу H игры. Элемент h_{ij} равен величине прибыли, которую получит предприятие, закупая и реализуя товар j-го вида при i-ом состоянии спроса $h_{ij} = p_{ij} - l_i$. Результаты расчета представлены в таблице 9.

Таблица 9 – Платежная матрица игры

		Возможные виды продукции			
		b_1	b_2	b_3	b_4
Возможные состояния спроса	a_1	5	3	1	4
	a_2	3	6	3	2
	a_3	3	1	6	2

Проанализируем исходную платежную матрицу H и упростим ее. Четвертая стратегия второго игрока доминирует его первую стратегию, исключим первый столбец из платежной матрицы.

$$H' = \begin{pmatrix} \cancel{5} & 3 & 1 & 4 \\ \cancel{3} & 6 & 3 & 2 \\ \cancel{3} & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}; \quad H' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем нижнюю и верхнюю цену игры, решение выполним в таблице 10.

Игра не имеет равновесия в чистых стратегиях, необходимо искать решение в смешанных стратегиях. Составим пару симметричных двойственных задач линейного программирования.

Таблица 10 – Решение игры

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="3">B / A</td><td colspan="3">Стратегии 2-го игрока</td><td rowspan="3">$\min\limits_j h_{ij}$</td><td rowspan="3">$\underline{V} = \max\limits_i \min\limits_j h_{ij}$</td></tr>
<tr><td>b_2</td><td>b_3</td><td>b_4</td></tr>
<tr><td>q_2</td><td>q_3</td><td>q_4</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Стратегии 1-го игрока</td><td>a_1</td><td>p_1</td><td>3</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td><td rowspan="3">2</td></tr>
<tr><td>a_2</td><td>p_2</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>a_3</td><td>p_3</td><td>1</td><td>6</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\max\limits_i h_{ij}$</td><td>6</td><td>6</td><td>4</td><td colspan="2" rowspan="2">$\underline{V} \neq \overline{V}$
$2 \leq V \leq 4$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\overline{V} = \min\limits_j \max\limits_i h_{ij}$</td><td colspan="3">4</td></tr>
</table>

Прямая задача

$$z = y_1 + y_2 + y_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 6y_2 + 1y_3 \geq 1; \\ 1y_1 + 3y_2 + 6y_3 \geq 1; \\ 4y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 1; \\ y_1 \geq 0; \quad y_2 \geq 0; \quad y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Двойственная задача

$$f = x_2 + x_3 + x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3x_2 + 1x_3 + 4x_4 \leq 1; \\ 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 1; \\ 1x_2 + 6x_3 + 2x_4 \leq 1; \\ x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0; \quad x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Решим задачи и получим следующие значения переменных:

$$Y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*) = (0{,}163; \quad 0{,}067; \quad 0{,}106); \qquad z^* = 0{,}337;$$

$$X^* = (x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (0{,}058; \quad 0{,}096; \quad 0{,}183); \qquad f^* = 0{,}337.$$

Отсюда, по формуле (2.25), вычислим цену игры:

$$V = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} y_i} = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j} = \frac{1}{0{,}337} = 2{,}971.$$

Определим смешанные стратегии игроков по формулам (2.26) и (2.27):

$$p_1 = V \cdot y_1 = 2{,}971 \cdot 0{,}163 = 0{,}486;$$
$$p_2 = V \cdot y_2 = 2{,}971 \cdot 0{,}067 = 0{,}200;$$
$$p_3 = V \cdot y_3 = 2{,}971 \cdot 0{,}106 = 0{,}314;$$
$$q_1 = V \cdot x_1 = 2{,}971 \cdot 0 = 0;$$
$$q_2 = V \cdot x_2 = 2{,}971 \cdot 0{,}058 = \frac{6}{35};$$
$$q_3 = V \cdot x_3 = 2{,}971 \cdot 0{,}096 = \frac{10}{35};$$
$$q_4 = V \cdot x_4 = 2{,}971 \cdot 0{,}183 = \frac{19}{35}.$$

Решение игры запишется в следующем виде:

$$\Gamma = \left\langle P^*, Q^*, V \right\rangle = \left\langle (p_1^*, p_2^*, p_3^*);\quad (q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*);\quad V \right\rangle =$$
$$= \left\langle (0{,}486;\ 0{,}200;\ 0{,}314);\ \left(0;\ \frac{6}{35};\ \frac{10}{35};\ \frac{19}{35}\right);\ 2{,}971 \right\rangle.$$

Предприятию следует закупать 35 единиц продукции в следующем ассортименте 6 единиц второго вида товара, 10 единиц третьего, 19 единиц четвертого, товар первого вида закупать нецелесообразно. В этом случае общая прибыль предприятия составит 2,971 ден. единиц.

Поиск оптимальных стратегий игроков и определение результата антагонистической игры следует выполнять в следующей последовательности:

1) Провести анализ платежной матрицы игры, исключить доминирующие и дублирующие стратегии, если необходимо, упростить платежную матрицу, преобразовав ее в эквивалентную, более удобную для проведения вычислений.
2) Вычислить нижнюю и верхнюю цену игры, и соответствующие им максиминную и минимаксную стратегии игроков.
3) Доказать существование либо отсутствие ситуации равновесия в чистых стратегиях:

a. если нижняя цена игры равна верхней цене игры, и игра имеет седловую точку, тогда решением игры в чистых стратегиях являются оптимальные стратегии игроков, образующие седловую точку.
b. если нижняя цена игры не равна верхней цене игры, решение следует искать в области смешанных стратегий.

4) Решение игры в смешанных стратегиях может быть получено:
   a. для игр с платежной матрицей размерности $(2 \times n)$ или $(m \times 2)$ – графическим методом;
   b. для игр с платежной матрицей размерности $(m \times n)$ – из решения пары взаимодвойственных задач линейного программирования.

Решение двух взаимно двойственных задач линейного программирования может быть выполнено с применением инструментальных средств решения задач математического программирования табличного процессора Microsoft Excel.

2.4 Информационные технологии решения антагонистических игр

Решение антагонистической игры с нулевой суммой удобно выполнять с использованием инструментальных средств табличного процессора Microsoft Excel.

Технологию решения игры, средствами табличного процессора Microsoft Excel, приведем для игры «Поставка товара» из примера 2.6.

Расчет оформим в табличном виде (рисунок 6). Введем исходные данные платежной матрицы игры на рабочий лист и формулы для расчета в таблицу на рабочем листе, как показано на рисунке 6.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	B			Стратегии 2-го игрока			$\min_j h_{ij}$	$\underline{V} = \max_i \min_j h_{ij}$
2				b1	b2	b3		
3	A			q1	q2	q3		
4	Стратегии	a1	p1	3	1	4	=МИН(D4:F4)	
5	1-го	a2	p2	6	3	2	=МИН(D5:F5)	
6	игрока	a3	p3	1	6	2	=МИН(D6:F6)	=МАКС(G4:G6)
7	$\max_i h_{ij}$			=МАКС(D4:D6)	=МАКС(E4:E6)	=МАКС(F4:F6)		
8	$\overline{V} = \min_j \max_i h_{ij}$			=МИН(D7:F7)				
9								

Рисунок 6 – Поиск решения игры в чистых стратегиях средствами табличного процессора MS Excel

Для определения минимально возможного выигрыша первого игрока при любых действиях второго игрока необходимо найти минимальное значение в каждой строке платежной матрицы. Это можно осуществить с помощью стандартной функции табличного процессора Microsoft Excel – функции **=МИН(число1; число2;...)**, которая возвращает наименьшее значение из списка аргументов. Например, для первой стратегии первого игрока (первая строка платежной матрицы), в ячейке **G4** зададим формулу **=МИН(D4:F4)**. Выполним аналогичные действия для всех стратегий первого игрока.

Рассчитаем значение нижней цены игры, для этого среди полученных значений минимального выигрыша для каждой стратегии первого игрока выберем максимальное значение. Такой расчет удобно выполнять с помощью стандартной функции табличного процессора Microsoft Excel – функции **=МАКС(число1; число2;...)**, которая возвращает наибольшее значение из списка аргументов. В ячейку **H6** запишем формулу **=МАКС(G4:G6)**.

Поиск величины максимально возможного проигрыша второго игрока при любых действиях его противника соответствует определению максимального значения каждого столбца платежной матрицы. Например, для первой стратегии второго игрока (первый столбец платежной матрицы), в ячейке **D7** зададим формулу **=МАКС(D4:D6)**. Выполним аналогичные действия для всех стратегий второго игрока.

Значение верхней цены игры соответствует минимальной величине из максимально возможных проигрышей второго игрока для каждой его стратегии. Запишем формулу **=МИН(D7:F7)** в ячейку **D8**.

Значения верхней и нижней цены игры не равны, в игре нет равновесия в чистых стратегиях, продолжим поиск решения игры в смешанных стратегиях.

Процесс построения пары взаимодвойственных задач линейного программирования подробно изложен в примере 2.4.

Табличный процессор Microsoft Excel содержит специальное инструментальное средство решения задач математического программирования, которое реализовано в виде надстройки «Поиск решения» (файл solver.xla) и является частью стандартного пакета Microsoft Office.

Первым этапом решения задачи линейного программирования является *ввод исходных данных* на рабочий лист.

Введем исходные данные прямой задачи линейного программирования на рабочий лист Microsoft Excel (рисунок 7).

Для расчета введем следующие формулы на рабочий лист:

– в ячейку **F4** – формулу целевой функции прямой задачи **=СУММ(A4:C4)**;

– в ячейки **E7:E9** – формулы левых частей ограничений задачи, например, в ячейку **E7** формулу для первого ограничения **=СУММПРОИЗВ(A4:C4; A7:C7)**, аналогично для остальных ячеек;

– в ячейку **F12** – формулу расчета цены игры **=1/F4**;

– в ячейки **A13:C13** – формулы расчета смешанных стратегий, в ячейку **A13** формулу для определения значения первой смешанной стратегии игрока **=F12*A4**, аналогично для остальных ячеек диапазона.

Вторым этапом решения задачи является *определение параметров решения* задачи в диалоговом окне надстройки «Поиск решения».

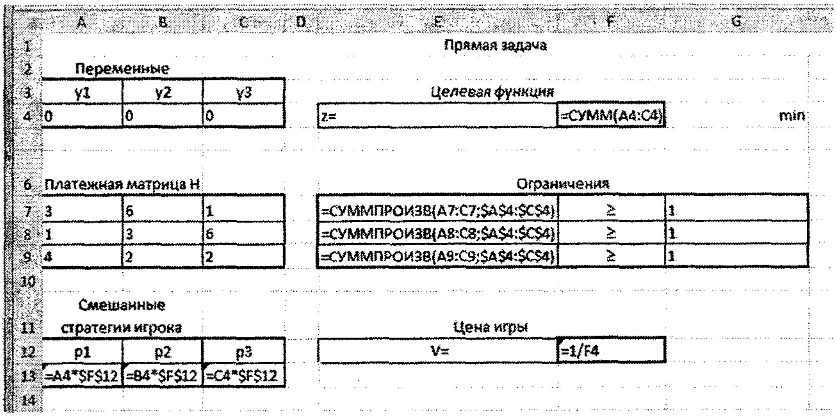

Рисунок 7 – Ввод исходных данных прямой задачи
линейного программирования

Вызов диалогового окна «**Параметры поиска решения**» осуществляется командой **Лента** | вкладка **Данные** | раздел **Анализ** | **Поиск решения**.

В диалоговом окне «**Параметры поиска решения**» необходимо установить следующие параметры процесса вычисления:

– в поле «**Оптимизировать целевую функцию**» ввести ссылку на ячейку, содержащую формулу целевой функции задачи - **$F$4**;

– переключатель «До» установить в значение ⊙**минимум**;

– в поле «**Изменяя ячейки переменных:**» ввести ссылку на диапазон ячеек с переменными задачи **$A$4:$C$4**;

– установить курсор в поле «**В соответствии с ограничениями:**», затем нажать кнопку «**Добавить**». Затем в диалоговом окне «**Добавление ограничения**» (рисунок 8) в поле «**Ссылка на ячейки:**» ввести ссылку на диапазон ячеек, содержащих формулы левых частей ограничений задачи: **$E$7:$E$9**, в поле со списком выбрать знак ограничений, в поле «**Ограничение:**» ввести ссылку на диапазон ячеек, содержащих правые части ограничений задачи **$G$7:$G$9**, нажать кнопку **OK**;

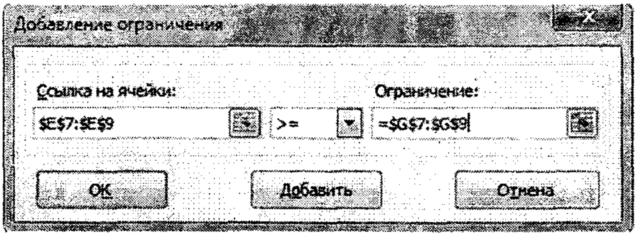

Рисунок 8 – Окно «Добавление ограничения»

– установить флажок ☑ **«Сделать переменные без ограничений неотрицательными»**;

– в поле со списком **«Выберите метод решения:»** выбрать значение **«Поиск решения линейных задач симплекс-методом»**.

Завершающим этапом поиска решения задачи является непосредственно *расчет оптимальных значений переменных* задачи. Для начала расчета следует нажать кнопку **«Найти решение»** в диалоговом окне **«Параметры поиска решения»**. Табличный процессор Microsoft Excel выполнит поиск решения задачи и сообщит о результатах этого процесса в специальном диалоговом окне **«Результаты поиска решения»**. Если решение найдено, пользователь может выбрать один из предложенных ему вариантов дальнейших действий: сохранить найденное решение либо отказаться от него, восстановив исходные значения. Установим переключатель в положение **«Сохранить найденное решение»**, значения результатов решения задачи будут выведены в соответствующих ячейках задачи (рисунок 9).

Аналогично решается двойственная задача.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1					Прямая задача			
2	Переменные							
3	y1	y2	y3		Целевая функция			
4	0,163	0,067	0,106		z=	0,337	min	
5								
6	Платежная матрица H				Ограничения			
7	3	6	1		1	≥	1	
8	1	3	6		1	≥	1	
9	4	2	2		1	≥	1	
10								
11	Смешанные стратегии игрока				Цена игры			
12	p1	p2	p3		V=	2,971		
13	0,486	0,200	0,314					
14								
15								

Рисунок 9 – Результаты решения задачи

ЗАДАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ

№ 2.1 – 2.30. Найти решение антагонистических матричных игр Γ_1 и Γ_2 с нулевой суммой, которые заданы платежными матрицами H_1 и H_2, в соответствии с вариантом задания, приведенным в таблице 11.

Решение целесообразно проводить в следующей последовательности:

1. Упростить платежную матрицу, исключив из нее доминируемые и дублирующие стратегии, если необходимо преобразовать исходную матрицу к эквивалентной, более удобного вида.
2. Найти нижнюю и верхнюю цену и убедиться в существовании седловой точки игры. Если седловая точка игры найдена, стратегии, которые ее образуют, являются оптимальными стратегиями игроков и вместе с ценой игры формируют решение игры.

3. Если у игры нет седловой точки, решение игры следует искать в смешанных стратегиях графическим способом.

Таблица 11 – Исходные данные

Вариант № 1
$H_1 = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -3 & 2 \\ 9 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ $H_2 = \begin{pmatrix} -12 & -3 & 9 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Вариант № 2
$H_1 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \\ -4 & -6 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$ $H_2 = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 14 & -4 \\ 8 & 0 & 8 & 6 \end{pmatrix}$
Вариант № 3
$H_1 = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -4 \\ -3 & 6 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ $H_2 = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -6 & 4 \\ 6 & -12 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
Вариант № 4
$H_1 = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 4 & -1 \\ -11 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ $H_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 6 & -6 \end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 11

Вариант
Вариант № 5
$H_1 = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -4 & 4 \\ -6 & 0 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}$ $H_2 = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 7 & -10 \\ -10 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$
Вариант № 6
$H_1 = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 9 & 1 \\ -5 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $H_2 = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 5 & 2 \\ 6 & 9 & -3 & 6 \end{pmatrix}$
Вариант № 7
$H_1 = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -4 \\ -3 & 6 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$ $H_2 = \begin{pmatrix} 12 & 7 & 8 & -1 \\ 8 & 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$
Вариант № 8
$H_1 = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 4 & -10 \\ -3 & 2 \\ -8 & -7 \end{pmatrix}$ $H_2 = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -3 & 4 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Вариант № 9
$H_1 = \begin{pmatrix} -10 & -7 \\ -8 & -7 \\ -1 & -5 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$ $H_2 = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 9 & 8 \\ 9 & -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 11

Вариант № 10	
$H_1 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \\ -4 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$	$H_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
Вариант № 11	
$H_1 = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -7 & 1 \\ -10 & -7 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}$	$H_2 = \begin{pmatrix} 6 & 11 & -4 & 5 \\ 5 & 8 & 2 & -7 \end{pmatrix}$
Вариант № 12	
$H_1 = \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ -2 & 4 \\ -8 & -5 \\ 10 & -8 \end{pmatrix}$	$H_2 = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 3 & -5 \\ -11 & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
Вариант № 13	
$H_1 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -8 & 4 \\ -4 & -6 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$	$H_2 = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 & 1 \\ 6 & 0 & 9 & 9 \end{pmatrix}$
Вариант № 14	
$H_1 = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 12 & -8 \\ -2 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$	$H_2 = \begin{pmatrix} 8 & 9 & -4 & 11 \\ -4 & 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 11

Вариант № 15
$H_1 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -4 \\ -3 & 6 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$ $H_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -5 \\ -4 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
Вариант № 16
$H_1 = \begin{pmatrix} -11 & -11 \\ 5 & 1 \\ -4 & 1 \\ -8 & -8 \end{pmatrix}$ $H_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$
Вариант № 17
$H_1 = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -1 & 5 \\ -7 & -4 \\ 11 & -7 \end{pmatrix}$ $H_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 & 0 \\ 7 & 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$
Вариант № 18
$H_1 = \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ 6 & 4 \\ -8 & 8 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$ $H_2 = \begin{pmatrix} 8 & -5 & 3 & 5 \\ 10 & 10 & -2 & 4 \end{pmatrix}$
Вариант № 19
$H_1 = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -8 & -4 \\ -5 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ $H_2 = \begin{pmatrix} 15 & 12 & -3 & 15 \\ 9 & -3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 11

Вариант № 20	
$H_1 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \\ -4 & -6 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$	$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
Вариант № 21	
$H_1 = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -4 & -3 \\ -2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$	$H_2 = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -5 & 11 \\ 3 & -5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$
Вариант № 22	
$H_1 = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ -3 & 5 \\ -9 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$	$H_2 = \begin{pmatrix} 8 & 9 & -4 & 9 \\ -7 & 11 & 11 & 11 \end{pmatrix}$
Вариант № 23	
$H_1 = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -9 & -1 \\ -13 & -6 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$	$H_2 = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 & 2 \\ 6 & 9 & -3 & 6 \end{pmatrix}$
Вариант № 24	
$H_1 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -4 & 4 \\ -5 & 0 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$	$H_2 = \begin{pmatrix} 9 & -12 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 11

Вариант № 25
$H_1 = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 3 & -7 \\ -8 & -10 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad H_2 = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 5 & -3 \\ 10 & -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$
Вариант № 26
$H_1 = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ -8 & -6 \\ 3 & -3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad H_2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$
Вариант № 27
$H_1 = \begin{pmatrix} -9 & -10 \\ -3 & 2 \\ 5 & -10 \\ -8 & -7 \end{pmatrix}$ $\quad H_2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 6 & -10 \\ -10 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$
Вариант № 28
$H_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad H_2 = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 8 & -6 \\ 4 & -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$
Вариант № 29
$H_1 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -5 & -4 \\ -5 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad H_2 = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Окончание таблицы 11

Вариант № 30	
$H_1 = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 2 & -3 \\ -10 & -5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$	$H_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

№ 2.31 – 2.60. Найти решение антагонистической матричной игры Г с нулевой суммой, которая задана платежной матрицей H, сведением к задаче линейного программирования. Варианты заданий приведены в таблице 12.

Таблица 12 – Исходные данные

Вариант № 1	Вариант № 4
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 \\ 7 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 & 6 & 10 & 7 & 14 \\ 6 & 11 & 5 & 8 & 9 \\ 12 & 6 & 10 & 7 & 14 \\ 6 & 5 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$
Вариант № 2	Вариант № 5
$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 8 & 9 \\ 8 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 12

Вариант № 3	Вариант № 6
$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
Вариант № 7	Вариант № 11
$\begin{pmatrix} 6 & 7 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 8 & 5 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
Вариант № 8	Вариант № 12
$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 8 & 5 & -1 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 3 & 6 & 2 \\ 7 & 13 & 10 & 4 & 9 \\ 11 & 10 & 9 & 8 & 13 \\ 7 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$
Вариант № 9	Вариант № 13
$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 8 \\ 8 & 5 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 7 & 3 \\ 9 & 3 & 3 & 9 \\ 10 & 7 & 10 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 9 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 12

Вариант № 10	Вариант № 14
$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 10 & 9 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 2 & 10 & 9 \\ -3 & -2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
Вариант № 15	Вариант № 19
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 5 & 7 \\ -2 & 0 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
Вариант № 16	Вариант № 20
$\begin{pmatrix} 6 & 7 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 8 & 5 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & -6 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & -5 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
Вариант № 17	Вариант № 21
$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 & 7 \\ 5 & 9 & 5 & 10 \\ 6 & 7 & 6 & 8 \\ 7 & 8 & 7 & 9 \\ 9 & 2 & 9 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 12

Вариант № 18	Вариант № 22
$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 5 & 10 \\ 6 & 1 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 3 & 10 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & -1 & 6 & 6 \end{pmatrix}$
Вариант № 23	Вариант № 27
$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 4 & 10 \\ 6 & 10 & 6 & 10 \\ 7 & 3 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 & 4 & 10 & 10 \\ 8 & 6 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 3 & 6 \\ 4 & 9 & 4 & 9 \\ 7 & 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$
Вариант № 24	Вариант № 28
$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 3 & 10 \\ 2 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 & 10 \\ 6 & 2 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 6 & 7 \\ 8 & 6 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$
Вариант № 25	Вариант № 29
$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 4 & 10 \\ 2 & 8 & 2 & 9 \\ 6 & 4 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 7 & 8 \\ 8 & 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 9 \\ 5 & 12 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 8 & 11 \\ 6 & 8 & 5 & 10 \end{pmatrix}$

Окончание таблицы 12

Вариант № 26	Вариант № 30
$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 7 & 6 & 10 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -4 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 3 & 5 \\ -4 & -2 & -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение антагонистической игры с нулевой суммой, ненулевой суммой. Приведите примеры экономических ситуаций, которые могут быть представлены как антагонистическая игра с нулевой суммой.
2. Какие способы упрощения платежной матрицы существуют? Какие принципы положены в основу этой операции?
3. Какие стратегии игрока называют чистыми, смешанными? Чем смешанная стратегия игрока отличается от его чистой стратегии?
4. Какие стратегии игрока называют активными, оптимальными?
5. К какой ситуации приводит следование игроком принципа максимина (принципа минимакса)?
6. В каких ситуациях значение нижней и верхней цены игры равны (неравны)?
7. Как определить цену игры?
8. Приведите последовательность этапов решения антагонистической игры.
9. Как решить игру графическим способом? Укажите область применения этого метода.
10. Запишите в общем виде задачи линейного программирования, которые можно составить для решения матричной антагонистической игры? Каким образом можно получить решение игры из решения этих задач?

Глава 3 МЕТОДЫ ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

3.1 Основные понятия теории статистических решений

Предпринимательская деятельность осуществляется как взаимодействия предпринимателя с внешней бизнес-средой, для которого характерны риск и неопределенность. Бизнес-среда может рассматриваться как совокупность большого числа внешних обстоятельств, не контролируемых предпринимателем, однако влияющих на его решения. В таких условиях информация о реализации возможных решений неизвестна либо известна с некоторой вероятностью (например, спрос на товар, курс валют, курс акций и т.д.).

Определить оптимальное решение в ситуациях, когда результат зависит от некоторых внешних обстоятельств, от внешнего состояния бизнес-среды, можно методами теории статистических решений. Теория статистических решений базируется на математическом аппарате теории игр, однако, в отличие от антагонистических игр нескольких участников, она моделирует деятельность игрока, обладающего возможностью выбора оптимальных стратегий в игре, с нейтральным по отношению к нему игроком – *природой*.Под природой понимается внешнее бизнес окружение предпринимателя, игрока в игре с природой называют *статистиком*.Действуя случайным образом, природа не стремится реализовывать свои оптимальные стратегии, она может как препятствовать выигрышу статистика, так и способствовать ему. Неопределенность в статистической игре обусловлена неполнотой либо отсутствием информации о поведении природыу статистика.

Модель игры с природой имеет следующую структуру:

1) Множество всевозможных состояний v_i природы $v=\{v_1,v_2,...,v_i,...,v_m\}$, где v_i–i-тая *чистаястратегия*природы. Если известны только распределение вероятности $p(v)$ случайной величины v на множестве состояний природы, говорят о *смешанных стратегиях природы.*
2) Множество всевозможных действийa_j статистика $a=\{a_1,a_2,...,a_j,...,a_n\}$, где элементы a_j называют *чистыми*

ми стратегиями статистика. Если известны только распределение вероятности $q(a)$ случайной величины a на множестве действий статистика, говорят о *смешанных стратегиях статистика.*

3) *Функция платежа*, которая определяет результат выбора статистиком каждой из всевозможных альтернатив для каждого из вероятных состояний природы. В зависимости от экономической ситуации функция платежа может быть выражена функцией потерь $L(v,a)$ или функцией выигрыша $G(v,a)$, которая выражает потери или выигрыш статистика соответственно, определяемые его действием a и состоянием природы v. Функция платежа, может быть задана в виде матрицы игры или в табличной форме.

Таблица 14 – Матрица потерь

$v \backslash a$	a_1	a_2	a_3
v_1	l_{11}	l_{12}	l_{13}
v_2	l_{21}	l_{22}	l_{23}

Таблица 15 – Матрица выигрышей

$v \backslash a$	a_1	a_2	a_3
v_1	g_{11}	g_{12}	g_{13}
v_2	g_{21}	g_{22}	g_{23}

Для оценки действий статистика в игре с природой, вместе с функцией платежа, используется понятие «риск». Риск статистика показывает разность между платежами, связанными с выбором статистиком своей стратегии в условиях определенности и неопределенности состояний природы. Для функции платежа, выраженной матрицей выигрышей, риском статистика r_{ij}, использующего стратегию a_j при состоянии природы v_i, называется разность между его максимальным выигрышем от выбора стратегии a_j, в условиях полной информации о реализации состояний природы, и выигрыша в условиях отсутствия такой информации:

$$r_{ij} = (\max_j g_{ij}) - g_{ij}, \quad \forall i = \overline{1,m}; \quad \forall j = \overline{1,n}.$$

Если функция платежа выражена матрицей потерь, под риском статистика r_{ij}, использующего стратегию a_j при состоянии природы

v_i, понимают разность между потерями игрока, когда он применяет стратегию a_j, не зная состояния природы v_i, и минимальными потерями в условиях, если бы он знал его.

$$r_{ij} = l_{ij} - \min_j l_{ij}, \quad \forall i = \overline{1,m}; \quad \forall j = \overline{1,n}.$$

Проанализировав сложившуюся ситуацию в игре и возможные альтернативы, лицо принимающее решение, используя свой опыт, эрудицию, квалификацию и интуицию, осуществляет выбор окончательного варианта решения с учетом некоторого формального критерия оптимальности. Статистик стремится минимизировать потери, то есть он ищет такое действие, при котором потери минимальны, либо нацелен максимизировать выигрыш, и выбирает ту альтернативу, которая обеспечит наибольший выигрыш.

Решение задачи заключается в выборе такой чистой стратегии a_j, при которой средние потери в зависимости от принимаемых действий минимальны (3.1) либо выигрыш статистика максимален (3.2):

$$\sum_v p(v)L(v,a)\cdot \to \min \qquad (3.1)$$

$$\sum_v p(v)G(v,a)\cdot \to \max \qquad (3.2)$$

или в случае смешанных стратегий статистика соответственно (3.3), (3.4):

$$\sum_v \sum_a p(v)\cdot q(a)\cdot L(v,a) \to \min \qquad (3.3)$$

$$\sum_v \sum_a p(v)\cdot q(a)\cdot G(v,a) \to \max \qquad (3.4)$$

3.2 Критерии выбора оптимальных решений

Решение задач теории статистических решений проводится в следующей последовательности:

1) необходимо определить цель решения;
2) установить возможные варианты обстоятельств – стратегий природы;

3) рассмотреть все возможные альтернативные варианты решений – стратегии статистика;
4) определить все возможные исходы каждого варианта в зависимости от сложившихся обстоятельств и оценить количественно каждый исход, т.е. построить платежную матрицу игры;
5) используя критерии выбора, найти наилучшее решение на основе количественной оценки возможного развития ситуаций и поставленной цели;
6) рассчитать ожидаемую стоимостную оценку каждой альтернативы и ожидаемую ценность достоверной информации.

Критерии выбора оптимальных стратегий в статистической игре предлагают логическую схему принятия решения, они оценивают решение с различных точек зрения и позволяют принимать более ответственное управленческое решение.

Критерии выбора оптимальной стратегии статистической игры приведены в таблице 16.

Таблица 16 – Критерии выбора оптимальной стратегии статистической игры

Название критерия\Описание критерия	Формула критерия	
	для функции выигрыша $G(v,a)$	для функции потерь $L(v,a)$
Критерий Вальда (или крайнего пессимизма или осторожного наблюдателя). Согласно этому критерию игра с природой ведется как игра с разумным, агрессивным противником, препятствующим достижению успеха статистиком.	Оптимальная стратегия a^* обеспечит максимальный выигрыш в наихудшей ситуации: $$W = \max_j \min_i G(v,a) = \max_j \min_i g_{ij}$$	Оптимальная стратегия a^* гарантирует, что даже в наихудшей ситуации потери не превысят некоторого минимума, а остальные ситуации будут в этом смысле более благоприятны или, по крайней мере, не хуже. $$W = \min_j \max_i L(v,a) = \min_j \max_i l_{ij}$$
Критерий Сэвиджа (или минимаксного риска или минимакса сожалений). Критерий Сэвиджа является пессимистическим критерием.	Стратегия a^* считается оптимальной, если она минимизирует максимальный риск. $$S = \min_j \max_i r_{ij}$$	
Критерий Гурвица (или критерий оптимизма-пессимизма) λ и k - эмпирический коэффициент пессимизма-оптимизма, величина которого определяется с помощью методов экспертным путем	$$H = \max_j \left[k \cdot \min_i g_{ij} + (1-k) \cdot \max_i g_{ij} \right]$$ $$0 \le k \le 1$$	$$H = \min_j \left[\lambda \cdot \min_i l_{ij} + (1-\lambda) \cdot \max_i l_{ij} \right]$$ $$0 \le \lambda \le 1$$

Окончание таблицы 16

Название критерия\Описание критерия	Формула критерия	
	для функции выигрыша $G(v,a)$	для функции потерь $L(v,a)$
Критерий «крайнего оптимизма» применяется при крайне благоприятном развитии ситуации	Оптимальной стратегией a^* является та альтернатива, при которой статистик получит наибольший выигрыш, независимо от состояний природы: $$O = \max_j \max_i g_{ij}$$	Оптимальной стратегией a^* является та альтернатива, при которой статистик получит наибольший выигрыш, независимо от состояний природы: $$O = \min_j \min_i l_{ij}$$
Критерий Бернулли-Лапласа (или недостаточного обоснования) применяется в ситуациях, когда о фактическом состоянии природы ничего не известно, тогда они принимаются равновероятными	Наилучшей стратегией a^* является решение, которое максимизирует величину среднего выигрыша: $$BL = \max_j \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} g_{ij}$$	Наилучшей стратегией a^* является решение, которое минимизирует величину средних потерь: $$BL = \min_j \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} l_{ij}$$
Критерий Байеса оценивает стратегию статистика путем усреднения платежей либо риска по всем возможным состояниям природы v с учетом априорного[1] распределения вероятностей $p(v)$	Наилучшей стратегией a^* является решение, которое максимизирует величину ожидаемого среднего выигрыша: $$\beta = \max_j \sum_{i=1}^{m} p(v_i) \cdot g_{ij}$$	Наилучшей стратегией a^* является решение, которое минимизирует величину ожидаемых средних потерь: $$\beta = \min_j \sum_{i=1}^{m} p(v_i) \cdot l_{ij}$$
	или минимизирует средний ожидаемый риск: $\beta = \min_j \sum_{i=1}^{m} p(v_i) \cdot r_{ij}$	

[1] Априори (от лат. a priori) – понятие теории познания, характеризующее знание, предшествующее опыту

Пример 3.1. *Коммерческое предприятие ОАО «Веселый жираф» на торговых площадях своего магазина осуществляет розничную продажу товаров для детей пяти товарных групп: одежда для девочек, одежда для мальчиков, товары для новорожденных, игрушки и канцелярские товары. В летний период спрос на данные категории товаров снижается, поэтому руководство предприятия решило расширить ассортимент товаров, организовав уличную торговлю в течении 100 дней. Для этого к помещению магазина планируется пристроить террасу для детского кафе, в котором будет организована продажа мороженного, прохладительных напитков, соков, и т.п. Обсуждается возможность постройки большой остекленной террасы площадью 50 м^2, или установки на этой же площади столиков с тентами, либо ничего не предпринимать. Затраты по организации дополнительной уличной торговли (включая строительство террасы либо на приобретение столов с тентами, зарплату сезонных продавцов, получение разрешения и т.д.) на террасе составляют 185 млн. руб., под тентами – 55 млн.руб. Уровень спроса на эту группу товаров зависит от погодных условий: в жаркую погоду наблюдается высокий спрос, в теплую – средний, в холодную - низкий. Руководство магазина считает, что уличная торговля привлечет дополнительный приток клиентов в магазин, что увеличит среднедневную прибыль от основной группы товаров. Прогноз основных показателей работы уличной торговли в день приведен в таблице 17.*

Таблица 17 – Показатели работы торговли предприятия ОАО «Веселый жираф»

Показатель	*Среднедневной доход по дополнительной группе товаров*		*Дополнительная среднедневная прибыль по основной группе*		*Вероятность спроса*
Уровень спроса	Терраса	Тент	Терраса	Тент	
Высокий спрос	2,5	1,5	0,9	0,4	0,3
Средний спрос	2	1	0,6	0,2	0,5
Низкий спрос	1	0,5	0,5	0,1	0,2

В данной ситуации рассматривается модель принятия решений в статистической игре двух игроков: руководство предприятия и «природа». Под «природой» понимается некая совокупность внешних обстоятельств, которая определяет уровень спроса на дополнительную группу товаров, который может оказаться в одном из следующих состояний: v_1 – высокий уровень спроса; v_2 – средний; v_3 – низкий. В зависимости от сложившейся ситуации руководство предприятия может принимать такие решения: a_1 – построить террасу для организации уличной торговли; a_2 – приобрести столы с тентами; a_3 – ничего не предпринимать.

Рассчитаем возможную прибыль от принятия каждого из решений и составим платежную матрицу. Решение a_1 построить террасу в условия высокого спроса v_1 принесет доход от продажи основной продукции за весь период уличной торговли равный (2,5*100) млн. руб., прибыль с учетом затрат по организации – (2,5*100 –185) млн. руб., общая прибыль с учетом дополнительной прибыли от основной группы товаров – g_{11}=((2,5*100 - 185)+(0,9*100)). Аналогично получаем прибыль для всех возможных комбинаций состояний спроса и решений, результаты представим в таблице 18.

Таблица 18 – Платежная матрица игры

		решения			$p(v_i)$
состояния природы	j / i	a_1	a_2	a_3	
	v_1	155	135	0	0,35
	v_2	75	65	0	0,4
	v_3	-35	5	0	0,25

Цель руководства предприятия выбрать решение, которое принесет предприятию наибольшую прибыль.

Сначала рассмотрим первый случай – *принятие решения в условиях риска*: В ситуации, когда руководству недостаточно информации для принятия решения, все состояния природы принимают равновероятными, используем критерий Бернулли-Лапласа:

$$L = \max_j \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} g_{ij} = \frac{1}{3}\max_j \{155+75+(-35);\quad 135+65+5;\quad 0+0+0\} =$$

$$= \max_j \{65 \quad 68,33 \quad 0\} = 68,33.$$

При отсутствии информации о возможном спросе руководству предприятия целесообразно выбрать стратегию a_2, что принесет прибыль в размере 68,33 млн.руб. Руководство магазина получило у консалтингового агентства оценки вероятности спроса (таблица 18). Применим критерий Байеса, согласно которому лучшей является стратегия, обеспечивающая наибольшую прибыль по всем возможным состояниям природы:

$$\beta = \max_j \sum_{i=1}^{3} p(v_i) \cdot g_{ij} =$$

$$= \max_j(155 \cdot 0{,}35 + 75 \cdot 0{,}4 + (-35) \cdot 0{,}25;\quad 135 \cdot 0{,}35 + 65 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}25;\quad 0 \cdot 0{,}35 + 0 \cdot 0{,}4 + 0 \cdot 0{,}25) =$$

$= \max_j(75{,}5;\ \ 74{,}5;\ \ 0) = 75{,}5$. Следовательно, в условиях риска следует выбрать стратегию a_1 - это обеспечить максимальную прибыль 75,5 млн. руб.

Затем рассмотрим – *принятие решений в условиях неопределенности* – пессимистический сценарий – ситуация с точки зрения скептика, предполагающего наихудшее развитие событий. По критерию Вальда, при наихудшем развитии ситуации руководство должно выбрать стратегию a_2, что сопряжено с прибылью 5 млн. руб.

$$W = \max_j \min_i g_{ij} = \max_j \min_i \begin{pmatrix} 155 & 135 & 0 \\ 75 & 65 & 0 \\ -35 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \max_j \begin{pmatrix} -35 & 5 & 0 \end{pmatrix} = 5.$$

По критерию Сэвиджа необходимо сначала рассчитать матрицу риска, для этого в каждой строке матрицы определяем максимальный элемент и определяем разности между ним и каждым элементом этой же строки матрицы.

$$r = (\max_j g_{ij}) - g_{ij} = \begin{pmatrix} 155 \\ 75 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 155 & 135 & 0 \\ 75 & 65 & 0 \\ -35 & 5 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 155-155 & 155-135 & 155-0 \\ 75-75 & 75-65 & 75-0 \\ -30-5 & 5-5 & 5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 155 \\ 0 & 10 & 75 \\ 40 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$S=\max_j \min_i r_{ij}=\max_j \min_i \begin{pmatrix} 0 & 20 & 155 \\ 0 & 10 & 75 \\ 40 & 0 & 5 \end{pmatrix}=\max_j \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}=5\sim a_3.$$

Оптимальной стратегией по критерию Сэвиджа является стратегия a_3 – обеспечивает минимизацию максимального риска 5 млн.руб.

При оптимистическом подходе к оценке ситуации используем критерий Гурвица для $k=0,2$:

$$H=\max_j\left[0,2\cdot(-35)+0,8\cdot 155 \quad 0,2\cdot 5+0,8\cdot 135 \quad 0,2\cdot 0+0,8\cdot 0\right]=$$

$=\max_j\left[117 \quad 109 \quad 0\right]=117,$ следует использовать стратегию a_1, тогда прибыль составит 117 млн.руб.

Крайний оптимист рекомендует стратегию a_1: $O=\max_j \max_i g_{ij}=155$ млн.руб.

Вывод: руководству в данной ситуации следует использовать стратегию a_1 построить террасу для организации уличной торговли, что принесет предприятию среднюю ожидаемую прибыль в пределах [77,5; 155] млн. руб., где величина 155 млн. руб. крайне оптимистическая оценка, а значение 77,5 – пессимистическая оценка. Для минимизации риска следует выбрать стратегию a_3 ничего не предпринимать.

3.3 Информационные технологии поиска оптимальных статистических решений

Технологию поиска оптимальных решений в статистических играх средствами табличного процессора Microsoft Excel рассмотрим на примере задачи организации уличной торговли (пример 3.1).

Для решения задачи введем исходные данные на рабочий лист Microsoft Excel (рисунок 10). Рассчитаем значения платежной матрицы. Значение прибыли предприятия при принятии решения a_1 (строительство террасы) в условиях высокого уровня спроса соответствует элементу платежной матрицы g_{11}. Для его расчета в ячейку **D11** введем формулу **=(C3*100-$C$6)+E3*100**. Вычисление значений платежей для остальных состояний природы выполняется аналогично.

	B	C	D	E	F	G
1	Показатель	*Среднедневной доход по дополнительной группе товаров*		*Дополнительная среднедневная прибыль по основной группе*		*Вероятность спроса*
2	*Уровень спроса*	Терраса	Тент	Терраса	Тент	
3	Высокий спрос	2,5	1,5	0,9	0,4	0,3
4	Средний спрос	2	1	0,6	0,2	0,5
5	Низкий спрос	1	0,5	0,5	0,1	0,2
6	Затраты	185	55			
7						
8			решения			$p(v_i)$
9–10	состояния природы	j / i	a_1	a_2	a_3	
11		v_1	155	135	0	0,35
12		v_2	75	65	0	0,4
13		v_3	-35	5	0	0,25
14						

Рисунок 10 – Исходные данные задачи

Принятие решения о строительстве тента принесет предприятию прибыль в условиях высокого спроса в размере g_{12} ден. единиц, ее значение вычислим в ячейке **E11** по формуле **=(D3*100-$D$6)+F3*100**. Распространим формулу на остальные ячейки столбца. Решение «ничего не предпринимать» не требует дополнительных затрат, однако и не приносит прибыли, поэтому значения платежа в этом случае равны нулю.

Расчет оптимального решения по пессимистическому критерию Вальда представлен на рисунке 11, по критерию Сэвиджа – на рисунке 12, по критерию Гурвица – на рисунке 13.

Определение оптимального решения в условиях риска приведено на рисунке 14.

	B	C	D	E	F	G
18			Принятие решений в условия неопределенности			
19			решения			
20	состояния природы	j / i	a_1	a_2	a_3	
21						
22		v_1	155	135	0	
23		v_2	75	65	0	
24		v_3	-35	5	0	
25	Критерий Вальда		=МИН(D22:D24)	=МИН(E22:E24)	=МИН(F22:F24)	=МАКС(D25:F25)
26	Критерий крайнего оптимизма					=МАКС(D22:F24)

Рисунок 11 – Поиск оптимального решения по критерию Вальда

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
30			Платежная			max g_{ij}	Матрица рисков			
31			решения				решения			
32	состояния природы	j / i	a_1	a_2	a_3		a_1	a_2	a_3	
33										
34		v_1	155	135	0	=МАКС(D34:F34)	=$G$34-D34	=$G$34-E34	=$G$34-F34	
35		v_2	75	65	0	=МАКС(D35:F35)	=$G$35-D35	=$G$35-E35	=$G$35-F35	
36		v_3	-35	5	0	=МАКС(D36:F36)	=$G$36-D36	=$G$36-E36	=$G$36-F36	
37	Критерий Севиджа						=МИН(H34:H36)	=МИН(I34:I36)	=МИН(J34:J36)	=МАКС(H37:J37)

Рисунок 12 – Поиск оптимального решения по критерию Сэвиджа

	B	C	D	E	F	G	H
49			Платежная матрица				
50			решения				
51–52	состояния природы	j / i	a_1	a_2	a_3		
53		v_1	155	135	0		
54		v_2	75	65	0		
55		v_3	-35	5	0		
56		min g_{ij}	=МИН(D53:D55)	=МИН(E53:E55)	=МИН(F53:F55)	k=	0,2
57		max g_{ij}	=МАКС(D53:D56)	=МАКС(E53:E56)	=МАКС(F53:F56)	$(1-k)$=	=1-H56
58	Критерий Гурвица		=СУММПРОИЗВ(D56:D57;$H$56:$H$57)	=СУММПРОИЗВ(	=СУММПРОИЗВ(F	=МАКС(D58:F58)	
59							

Рисунок 13 – Поиск оптимального решения по критерию Гурвица

	B	C	D	E	F	G
7	Принятие решений в условия риска					
8			решения			$p(v_i)$
9–10	состояния природы	j / i	a_1	a_2	a_3	
11		v_1	155	135	0	0,35
12		v_2	75	65	0	0,4
13		v_3	-35	5	0	0,25
14	Критерий Бернулли-Лапласа		=СУММ(D11:D13)/3	=СУММ(E11:E13)/3	=СУММ(F11:F13)/	=МАКС(D14:F14)
15	Критерий Байеса		=СУММПРОИЗВ(D11:D13;$G$11:$G$13)	=СУММПРОИЗВ(E11:E13;$G$11:$G$13)	=СУММПРОИЗВ(F	=МАКС(D15:F15)
16						

Рисунок 14 – Поиск оптимального решения в условиях риска

ЗАДАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ

№ 3.1 – 3.5

После нескольких лет эксплуатации автомобили транспортного предприятия могут оказаться в одном из следующих состояний: требуется текущий ремонт (ТР), необходимо произвести средний ремонт (СР) либо произвести капитальный ремонт (КР). Руководство предприятия может принимать следующие решения: произвести ремонт своими силами (А1), отремонтировать оборудование на специализированном сервисном центре (А2) или заменить оборудование новым (А3). Величина затрат предприятия, при реализации каждого из возможных решений, определяется будущим техническим состоянием автомобиля. Необходимо придать описанной экономической ситуации игровую схему, установить характер игры и выявить его участников. Высказать рекомендации по оптимальному образу действий руководства предприятия.

Исходные данные задания по вариантам приведены в таблице 19.

Таблица 19–Исходные данные

Номер варианта	Состояние оборудования	Затраты предприятия при различных решениях			Вероятность состояния	Коэффициент оптимизма-пессимизма
		А1	А2	А3		
1	ТР	6	8	16	0,3	0,7
	СР	12	13	11	0,5	
	КР	10	7	17	0,2	
2	ТР	5	6	21	0,4	0,9
	СР	7	4	16	0,45	
	КР	10	8	7	0,15	
3	ТР	9	16	13	0,35	0,7
	СР	12	11	10	0,5	
	КР	8	17	19	0,15	

Окончание таблицы 19

Номер варианта	Состояние оборудования	Затраты предприятия при различных решениях			Вероятность состояния	Коэффициент оптимизма-пессимизма
		A1	A2	A3		
4	ТР	10	8	16	0,2	0,6
	СР	13	15	12	0,65	
	КР	11	10	19	0,15	
5	ТР	14	21	19	0,3	0,7
	СР	10	13	11	0,45	
	КР	16	11	15	0,25	

№ 3.6 – 3.10

Предприятие планирует строительство логистического центра для управления товарными потоками. Интенсивность товарных потоков, и, соответственно, требуемые параметры логистического центра, точно не определены. Предложены четыре варианта проектных решений, отличающихся размерами помещения, местом расположения и системой автоматизации центра. Необходимо найти наилучшее решение, если рассматриваются четыре прогнозируемых значения интенсивности товарного потока. Для этого необходимо определить:

- значения критериев Вальда, Лапласа, Гурвица для всех вариантов строительства. При определении критерия Гурвица коэффициент, выражающий долю оптимизма, задать на уровне *k*.
- как изменятся принятые решения, если установлены вероятности уровней интенсивности потоков?
- вычислить матрицу рисков и определить значение критерия Сэвиджа.

Необходимо обосновать наилучшее решение, проанализировав всю совокупность полученных критериев.

Исходные данные задания по вариантам приведены в таблице 20.

Таблица 20–Исходные данные

Номер варианта	Уровень интенсивности	Прибыль предприятия при различных проектных решениях				Вероятность состояния	k
		A1	A2	A3	A4		
1	1	73	67	67	73	0,3	0,2
	2	53	51	67	65	0,2	
	3	64	73	56	71	0,2	
	4	60	76	72	71	0,3	
2	1	81	79	68	68	0,2	0,3
	2	57	74	59	67	0,45	
	3	65	63	68	54	0,15	
	4	67	74	72	62	0,2	
3	1	78	65	68	59	0,3	0,7
	2	60	74	60	68	0,1	
	3	49	67	59	49	0,2	
	4	78	54	78	59	0,4	
4	1	49	69	53	78	0,1	0,4
	2	56	66	54	55	0,1	
	3	61	63	68	73	0,4	
	4	57	64	69	67	0,4	
5	1	65	69	66	56	0,3	0,2
	2	55	50	56	67	0,3	
	3	56	55	77	78	0,3	
	4	54	78	78	69	0,1	

№ 3.11 – 3.15

Розничное торговое предприятие разработало несколько вариантов плана продаж товаров (П1,П2,П3,П4,П5) на предстоящей сельско-хозяйственной ярмарке «Кирмаш» с учетом меняющейся конъюнктуры рынка (К1,К2,К3,К4) и спроса покупателей, получающейся от их возможных сочетаний. Величина прибыли представлены в виде матрицы выигрышей в таблице 21. Определить оптимальный план продаж товаров на сельско-хозяйственной ярмарке. Коэффициент оптимизма-пессимизма в критерии Гурвица принять равным *k*.

Таблица 21–Исходные данные

Номер варианта	Конъюнктура рынка	Прибыль предприятия при различных планах продаж					Вероятность спроса	*k*
		П1	П2	П3	П4	П5		
1	К1	5,6	7,4	7,3	6,2	5,6	0,2	0, 6
	К2	3,9	5,7	3,2	4,3	3,9	0,3	
	К3	6,6	4,4	5,8	3,5	6,6	0,1	
	К4	4,5	3,8	6,3	5,9	4,5	0,4	
2	К1	9,1	6,4	8,2	5,6	9,1	0,1	0,25
	К2	6,5	9,2	6,3	8,4	6,5	0,55	
	К3	5,9	10,0	9,4	6,2	5,9	0,05	
	К4	10,0	8,3	10,6	9,5	10,0	0,3	
3	К1	7,1	9,3	9,2	8,4	6,6	0,2	0,35
	К2	9,3	7,2	8,7	6,5	8,9	0,2	
	К3	5,9	8,8	7,3	9,4	5,1	0,1	
	К4	8,8	6,4	6,4	7,4	9,5	0,5	
4	К1	6,3	5,8	5,5	9,3	7,5	0,1	0,2
	К2	11,1	9,4	5,8	6,7	10,2	0,2	
	К3	7,5	11,2	9,3	10,3	6,9	0,3	
	К4	6,3	10,4	11,3	9,2	8,1	0,4	
5	К1	1,5	8,2	7,6	11,4	9,1	0,2	0,4
	К2	5,7	4,9	13,0	7,8	11,7	0,4	
	К3	11,1	9,4	5,8	6,7	10,2	0,2	
	К4	7,5	11,2	9,3	10,3	6,9	0,2	

№ 3.16 – 3.20

Одно из транспортных предприятий должно определить уровень своих провозных возможностей так, чтобы удовлетворить спрос клиентов на транспортные услуги на планируемый период. Спрос на транспортные услуги не известен, но ожидается (прогнозируется), что он может принять одно из четырех значений: С1, С2, С3 или С4 тыс. т. Для каждого уровня спроса рассчитан наилучший уровень провозных возможностей транспортного предприятия, минимизирующий его ожидаемые затраты. Отклонения от этих уровней приводят к дополнительным затратам, вызванных простоем подвижного состава, либо упущенной выгоде, из-за неполного удовлетворения спроса на транспортные услуги. В таблице 22 приведены прогнозируемые затраты предприятия по организации перевозок. Необходимо высказать рекомендации по оптимальному выбору уровня провозных возможностей.

Таблица 22–Исходные данные

Номер варианта	Состояние спроса	Затраты предприятия при различных решениях				Вероятность спроса	*k*
		А1	А2	А3	А4		
1	С1	6	12	20	24	0,2	0, 6
	С2	9	17	9	28	0,3	
	С3	23	18	15	19	0,1	
	С4	27	24	21	15	0,4	
2	С1	15	12	11	23	0,1	0,25
	С2	21	15	19	17	0,55	
	С3	20	16	15	21	0,05	
	С4	18	20	12	13	0,3	
3	С1	30	80	50	16	0,2	0,35
	С2	54	60	10	15	0,2	
	С3	21	26	35	48	0,1	
	С4	32	39	15	24	0,5	

Окончание таблицы 22

Номер варианта	Состояние спроса	Затраты предприятия при различных решениях				Вероятность спроса	k
4	C1	15	1	6	2	0	0,2
	C2	12	6	5	8	0,2	
	C3	40	70	30	25	0,3	
	C4	60	50	45	20	0,5	
5	C1	50	30	40	35	0,2	0,4
	C2	20	25	15	20	0,4	
	C3	25	24	10	25	0,2	
	C4	15	28	12	15	0,2	

№ 3.21 – 3.25

Инвестиционная компания имеет возможность приобрести акции нескольких предприятий (Ф1, Ф2, Ф3, Ф4) на фондовом рынке. К окончанию исследуемого периода рынок ценных бумаг может быть на подъеме (S1), наступить его спад (S3), остаться без изменений (S2). Финансовые аналитики прогнозируют доход по акциям в зависимости от состояния рынка. Величина суммы, имеющихся денежных средств для инвестирования, и номинальная стоимость акций содержатся в таблице 23. Процентный доход по акциям и вероятность состояния фондового рынка приведены в таблице 24.

Необходимо высказать рекомендации по формированию оптимального портфеля акций инвестиционной компании.

Таблица 23–Исходные данные

Номер варианта	Номинальная стоимость акций				Сумма денежных средств
	Ф1	Ф2	Ф3	Ф4	
1	1	15	5	2	20
2	5	10	2	15	20
3	5	10	15	25	50
4	50	20	30	10	100
5	12	15	3	5	60

Таблица 24 Исходные данные

Номер варианта	Состояние рынка	Доход по акции компании				Вероятность состояния рынка	k
		Ф1	Ф2	Ф3	Ф4		
1	S1	1	5	4	3	0,2	0,75
	S2	1	3	2	2	0,6	
	S3	0	2	1,5	1	0,2	
2	S1	4	6	1	8	0,5	0,8
	S2	2	4	1	5	0,35	
	S3	1	3	0	-2	0,15	
3	S1	8	9	7	10	0,25	0,6
	S2	7	7	6	3	0,6	
	S3	6	5	4	-4	0,15	
4	S1	3	1	1	1	0,3	0,4
	S2	0,5	1	0	0	0,5	
	S3	-5	-3	-2	-1	0,2	
5	S1	8	8	10	10	0,3	0,3
	S2	3	4	5	2	0,55	
	S3	-1	0	-4	-2	0,15	

Контрольные вопросы

1. Каковы особенности статистической игры? Что понимают под термином «природа». Приведите примеры экономических ситуаций, которые могут быть представлены как статистическая игра.
2. Какие критерии применяются для поиска оптимальных стратегий статистических игр в условиях неопределенности, в условиях риска?
3. Приведите последовательность этапов решения статистической игры.

Глава 4 ПОЗИЦИОННЫЕ ИГРЫ

4.1 Позиционная игра и ее структура

Игры, в которых задана последовательность принятия игроками решений в условиях неполной информации и/или изменяющейся во времени ситуации, называют ***позиционными*** играми, возможные варианты принятия решения игроком – ***альтернативами*** в игре, а состояния игры – ***позициями***. Право первого хода в позиционной игре определяется случайным образом. На следующих ходах игры, игрок осуществляет выбор одного решения из множества возможных, в соответствии с правилами игры либо случайным образом, обладая при этом полной информацией о решениях, принятых противником. Примером позиционных игр могут служить шахматы, шашки, домино и др.

Позиционная игра записывается в экстенсивной форме в виде древовидного графа – ***дерева решений***. Дерево решений (рисунок 15) содержит вершины двух типов: вершины-события (позиции) и вершины-решения (альтернативы). Вершины-решения соответствуют моментам принятия решений и обозначаются на дереве решений квадратами, вершины-события – моменты возникновения различных исходов и изображаются кружками.

Дуги (ветви) графа соответствуют переходам между логически связанными решениями и случайными событиями. Из вершины решения, выходит столько дуг, сколько вариантов решения существует, из вершины-события – сколько отдельных исходов события возможно. Над дугами, записывают номер решения или варианта события. Над дугами, выходящими из вершины-события, также могут записывать вероятности реализации исхода события, соответствующего этой дуге. Рядом с конечными вершинами записывают финансовый результат, который соответствует данному варианту развития события.

Выбор конкретной альтернативы лицом принимающим решение соответствует выбору определенной ветви (варианта решения) графа.

Позиции, не имеющие альтернативы, называются окончательными, ведущие в них пути – ***партиями***. Часть дерева решений, описывающая игру из некоторой позиции, называют ***подыгрой***.

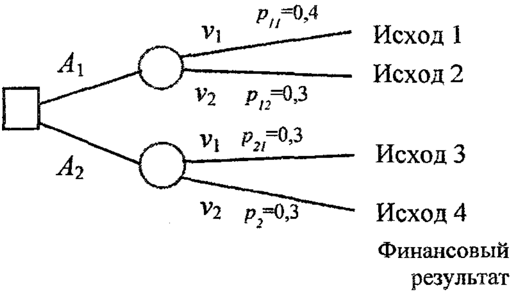

Рисунок 15 – Пример дерева решений

Процесс построения дерева решения выполняется от исходного решения или события по направлению к конечным, процесс поиска оптимального решения осуществляется в противоположном направлении – от конечных висячих вершин к начальному событию.

Позиционные игры моделируют поведение фирм в условиях рынка. Классическим примером позиционной игры является игра «Вступление на рынок». Рассмотрим процесс построения дерева решений позиционной игры на примере этой игры.

Пример 4.1 (Игра «Вступление на рынок»). На рынке доминирует компания-производитель – фирма *A*, монопольное положение которой приносит ей прибыль 10 млрд. ден. ед. Фирма ***B*** решает вопрос о выходе на этот рынок при следующих известных условиях. В случае вступления фирмой ***B*** на рынок фирма А может отреагировать следующим образом:

A_1 – не уступать в объеме производства – прибыль фирмы *A* при этом понизится до 3 млрд. ден. ед. вследствие снижения рыночной цены, фирма ***B*** понесет убытки в 2 млрд. ден. ед. из-за падения рыночной цены и из-за того, что предварительные затраты на проработку рынка и организацию производства не будут компенсированы;

A_2 – снизить объем производства и поделить прибыль с конкурентом фирмой ***B*** – по 5 млрд. ден. ед.

Если фирма ***B*** воздержится от вступления на рынок, то она ничего не выигрывает и не проигрывает, т.е. ее прибыль будет нулевой. В этом случае у фирмы *A* два варианта поведения:

A_1 – не снижать объем производства с прибылью 10 млрд. ден. ед.;

A_2 – снизить объем производства со снижением прибыли до 8 млрд. ден. ед.

Эта конечная игра в нормальной форме описывается матрицей игры следующего вида (таблица 25), в экстенсивной форме – в виде дерева решений (рисунок 16).

Таблица 25 – Платежная матрица игры «Вступление на рынок»

			Стратегии фирмы А	
			не снижать объем производства	снизить объем производства
			A_1	A_2
Стратегии фирмы В	вступить на рынок	B_1	(3; -2)	(5; 5)
	не вступать на рынок	B_2	(10; 0)	(8; 0)

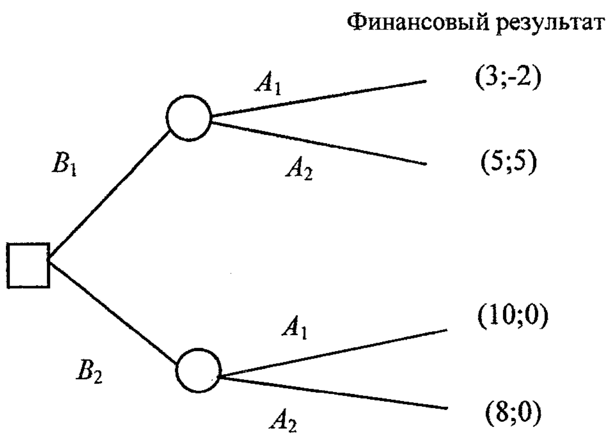

Рисунок 16 – Дерево решений игры «Вступление на рынок»

Пример 4.2 (Игра «Страхование»). Отечественное предприятие осуществляет поставку товара на экспорт. Оплата производится в долларах США в момент завершения поставки. Покупатель – малоизвестная фирма в одной из зарубежных стран. Руководство предприятия, желая обезопасить себя от непоступления денег по данному контракту, приняло решение дополнительно изучить финансовое состояние фирмы, показатели и конъюнктуру рынка для достаточно надежной экспертной оценки вероятности неплатежа (результаты этого анализа пока не готовы) и провести переговоры со страховым обществом о страховании риска неплатежа. Имеются предположения страхового общества о величине страховой премии и франшизы при страховании риска неплатежа по сделке с поставкой товара. Задача сводится к оценке предпочтительности двух вариантов действий предприятия: заключении договора о страховании риска неплатежа и отказа от такого договора.

Возможные стратегии предприятия:

A_1 – заключить договор страхования с суммой страховой премии размером I и величиной франшизы f;

A_2 – не заключать договор страхования;

Возможные ситуации развития событий:

v_1 – оплата покупателем поставки в сумме T;

v_2 – покупатель не оплатил поставку.

Пусть p вероятность того, что фирма покупатель своевременно осуществляет платеж. Построим дерево решений игры (рисунок 17).

Будем следовать рекомендациям теории полезности, построим оценки полезности для каждого из возможных исходов.

С учетом требований нормирования полезность ситуации, при которой договор страхования не заключается, а покупатель не платит, будет равна нулю. Если договор страхования не заключен, а покупатель заплатит, то фирма – поставщик получит максимально возможный финансовый результат – всю сумму стоимости партии поставки. В ситуации заключения договора страхования и оплаты покупателем поставки, предприятие теряет сумму в размере страховой премии. Если договор страхования заключен, но, покупатель не оплатил поставку товара, предприятие получает компенсацию от страховой компании в размере $(1-f)T$, платит страховщику страховую премию по договору в размере I.

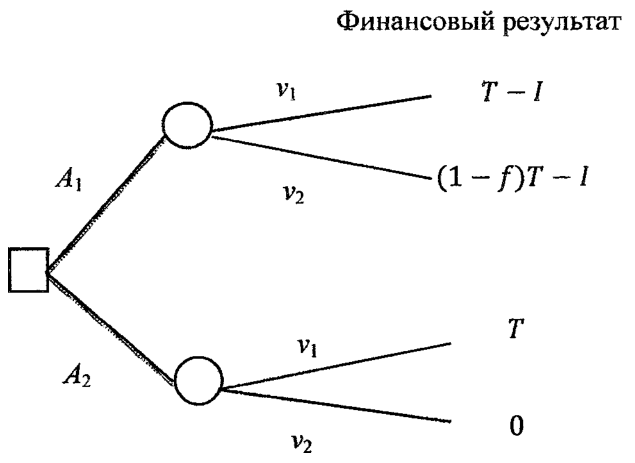

Рисунок 17 – Дерево решений игры «Страхование»

Пример 4.3. (Игра «Поставка товара») Ритейлер мебели «Домовой» рассматривает вопрос о поставках дорогой элитной мебели из Италии. Перед фирмой стоит задача обеспечения необходимого запаса товаров для продажи мебели магазинам, ведущим торговлю в розницу. Мебель из натурального дерева пользуется большим спросом на рынке РБ, и реализуется по высоким ценам.

Руководство предприятия считает, что текущий уровень спроса на мебель зависит от уровня доходов населения страны. По мнению руководства предприятия, уровень доходов населения может изменяться в трех направлениях: остаться постоянным, начнется небольшой рост доходов, начнется небольшое снижение доходов.

Руководство может реализовать одну из трех альтернатив: импортировать сейчас, отложить на полгода, отложить на один год.

Прогноз возможных прибылей при каждом развитии ситуации представлен в таблице 26. Задача руководства принять такое решение, которое обеспечит максимальную прибыль предприятию.

Таблица 26 – Платежная матрица игры «Поставка товара»

События		Решения			Вероятность свершения события
		импортировать сейчас	отложить на полгода	отложить на один год	
	$i \backslash j$	A_1	A_2	A_3	q_i
рост доходов	v_1	800	600	500	0,4
постоянный уровень доходов	v_2	450	370	200	0,3
снижение доходов	v_3	-324	50	80	0,3

Дерево решений игры представлено на рисунке 18.

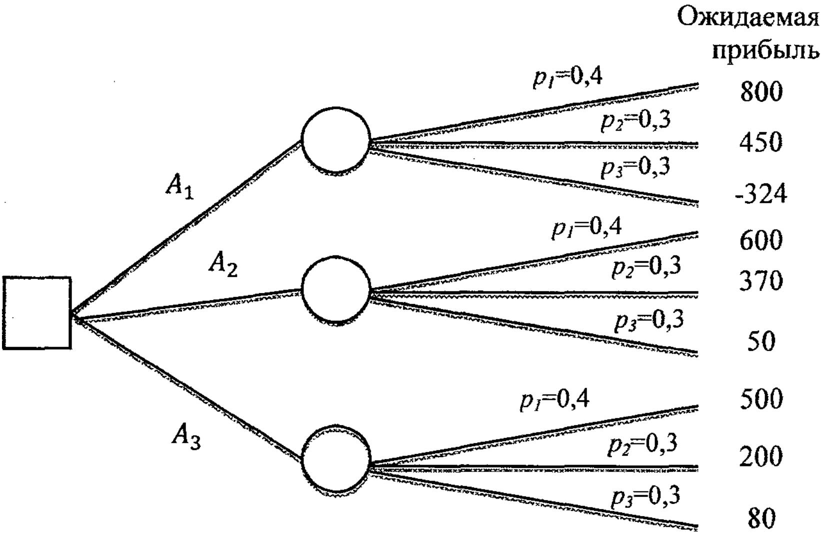

Рисунок 18 – Дерево решений игры «Поставка товара»

4.2 Методы поиска оптимальных стратегий в позиционных играх

Поиск оптимальных стратегий в позиционных играх предполагает определение платежа каждого решения и оценки среднего финансового результата каждого события. Он основан на принципах теории решений Байеса[2], в соответствии с которыми выполняется: во-первых, формирование экспертом, специалистом в прикладной области, на основании собственного опыта, интуиции и других факторов, вектора априорных вероятностей[3] событий; во-вторых, расчет платежей по каждому предполагаемому варианту развития событий; в–третьих, выбор наиболее оптимального варианта согласно установленному критерию.

Процесс поиска оптимального решения в позиционных играх выполняется в два этапа – синтез и анализ дерева решений, которые включают следующие действия и задачи:

1. *синтез дерева решений* предполагает:

1.1 постановку задачи, в ходе которой выполняется формализация экономической ситуации и выделение факторов, влияющих на процесс принятия решения, определение возможных альтернатив;

1.2 оценку вероятностей состояний среды и возможности исхода каждого события;

1.3 определение платежей для каждой возможной комбинации решений и состояний среды;

1.4 построение дерева решений, как процесс изображения графа от начальной вершины к конечным;

2. *анализ дерева решений* предполагает:

2.1 расчет ожидаемой величины полезности для вершин-событий, как математическое ожидание оценок отдельных исходов с учетом их вероятности. Если из i-той вершины-события дерева решений, выходит несколько дуг, соответствующих отдельным ис-

---

[2] **Байесовская статистика** – получила свое название по имени английского математика, преподобного Томаса Байеса (1702-1761).

[3] **Вероятность** - термин «вероятность» здесь понимается не только, как как частота появления некоторого события в будущем, но и мера убежденности в истинности сделанного утверждения.

ходам, тогда оценка P_i этой вершины-события является математическим ожиданием платежей h_{ik}, по каждому исходу с вероятностью p_k по формуле:

$$P_i = \sum_{\forall k \in e_i^-} p_k h_{ik}, \tag{4.1}$$

где h_{ik} – платеж, соответствующий k-тому исходу i-того события;

p_k – вероятность k-того исхода;

e_i^- – множество дуг (исходов), выходящих из i-той вершины-события.

2.2 расчет ожидаемого платежа для вершины-решения P_j по критерию максимума (4.2) либо минимума (4.3) платежа:

$$P_j = \max_{\forall i \in e_j^+} P_i \tag{4.2}$$

$$P_j = \min_{\forall i \in e_j^+} P_i, \tag{4.3}$$

где P_j – оценка полезности каждой i-той позиции, соединенной с j-той альтернативой;

e_j^+ – множество дуг, выходящих из j-ой вершины-решения.

2.3 расчет оценок вершин графа выполняется в обратном направлении от конечных вершин графа к начальной, полученная оценка начальной вершины указывает оптимальное решение.

Основным преимуществом применения позиционных игр для поиска оптимальных решений является возможность решать довольно сложные задачи, существенным недостатком данного метода является его субъективность, зависимость выносимых суждений от опыта и знаний эксперта.

Рассмотрим экономические ситуации, которые требуют принятия решений с оценкой возможных последствий.

Пример 4.4. Проиллюстрируем процесс расчета оценок вершин дерева для игры «Поставка товара» из примера 4.3.

Оценку вершины события A_1 рассчитаем по формуле (4.1), которая примет вид:

$$P_{A_1} = p_1 \cdot h_{11} + p_2 \cdot h_{12} + p_3 \cdot h_{13} = 0{,}4 \cdot 800 + 0{,}3 \cdot 450 + 0{,}3 \cdot (-324) = 357{,}8.$$

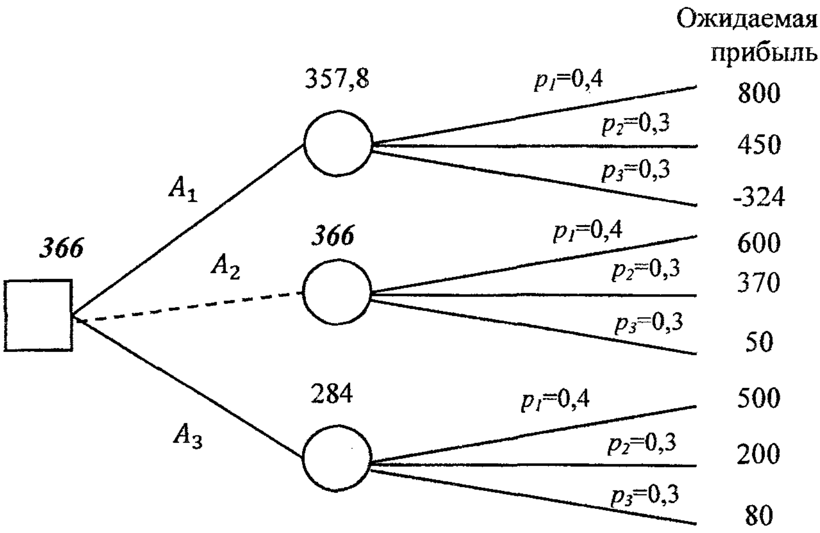

Рисунок 19 – Дерево решений игры «Поставка товара»

Аналогично для остальных вершин-событий:

$$P_{A_2} = p_1 \cdot h_{21} + p_2 \cdot h_{22} + p_3 \cdot h_{23} = 0,4 \cdot 600 + 0,3 \cdot 370 + 0,3 \cdot 50 = 366.$$

$$P_{A_3} = p_1 \cdot h_{31} + p_2 \cdot h_{32} + p_3 \cdot h_{33} = 0,4 \cdot 500 + 0,3 \cdot 200 + 0,3 \cdot 80 = 284.$$

Выберем оптимальное решение по критерию максимизации ожидаемой средней прибыли (4.2):

$$P_0 = \max(P_{A_1}; P_{A_2}; P_{A_3}) = \max(357,8; \quad 366; \quad 284) = 366.$$

В результате оптимальной будет стратегия A_2, которая обеспечит предприятию среднюю ожидаемую прибыль в размере 366 ден.ед. (рисунок 19).

Пример 4.5.(Игра «Страхование»)

Рассмотрим расчет оценок вершин дерева для игры «Поставка товара» из примера 4.3.

Поскольку оплата и неоплата поставки случайное событие (вершина), ее оценка строится как средневзвешенная с учетом вероятностей сумм оценок отдельных последствий (исходов) события. При отказе от заключения договора страхования мы с вероятностью p получаем полезность 1 и вероятностью $(1\text{-}p)$ – полезность 0. Оценка вершины будет равна p (вероятности платежа).

Если договор страхования риска платежа заключается, то с вероятностью p мы получим исход, полезность которого равна полезности суммы $(1\text{-}f)T\text{-}I$. Полезность вершины «оплата поставки» на этой ветви будет равна средневзвешенному из этих двух вершин. Оценка корневой вершины дерева, соответствующей решению о заключении договора страхования риска неплатежа, формируется как максимальная из оценок вершин «случайное событие – оплата поставки» на двух конкурирующих ветвях дерева.

Пример 4.6 (Игра «Инвестирование»). Администрация предприятия решает вопрос об инвестировании средств в проект **А**, проект **В** или в действующий торговый комплекс **С**. С вероятностью 0,5 инвестиции в проекты **А** и **В** могут принести выигрыши h_{11} и h_{12} в определенных денежных единицах: 250 либо -170 и h_{21} и h_{22} равные 140 либо -30 соответственно. Инвестирование торгового комплекса принесет гарантированную прибыль 25. Высказать рекомендации по оптимальному варианту инвестирования.

Выполним синтез дерева решения, оно представлено на рисунке 20. Определим прогнозируемую прибыль как математическое ожидание случайной величины, которая может принимать два значения с вероятностями p_1 и p_2:

$$P_A = p_1 \cdot h_{11} + p_2 \cdot h_{12} = 0,5 \cdot 250 + 0,5 \cdot (-170) = 40.$$

$$P_B = p_1 \cdot h_{21} + p_2 \cdot h_{22} = 0,5 \cdot 140 + 0,5 \cdot (-30) = 55.$$

$$P_C = 25.$$

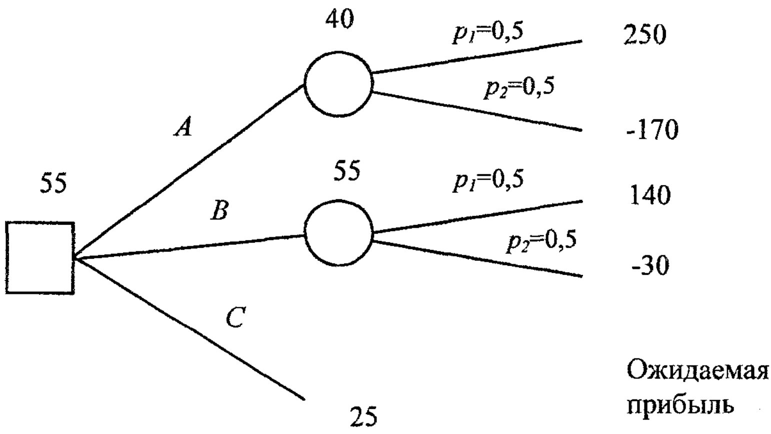

Рисунок 20 – Дерево решений игры «Инвестирование»

Если в качестве критерия выигрыша принять величину ожидаемой прибыли (4.2), следует выбрать проект **В**.

Действительно,

$$P_0 = \max(P_A; P_B; P_C) = \max(40; \quad 55; \quad 25) = 55.$$

На практике для анализа и принятия ответственных решений исход противоположных событий редко принимается равновероятным. Обычно для снижения степени неопределенности информации проводится дополнительное исследование и анализ, сложившейся экономической ситуации.

Пример 4.7 (процедура принятия решений при анализе дополнительных условий).

Пусть руководство предприятия из примера 4.6 решило заказать дополнительное исследование и оценку эффективности рассматриваемых инвестиционных проектов у консалтингового агентства. Стоимость услуг консалтингового агентства оценивается величиной 10 денежных единиц. Пусть уточненная информация заключается в следующем: ситуация будет благоприятной с вероятностью 0,55, причем в этих условиях вероятности p_1 и p_2 выигрышей для проектов **А** и **В** составят (0,8;0,2) и (0,3;0,7) соответственно. Дерево решений с учетом этих условий примет вид, представленный на рисунке 21.

Введем следующие обозначения: v_1 – благоприятная ситуация, v_2 – неблагоприятная ситуация, A_1 – проводить дополнительное исследование и A_2 – не проводить дополнительное исследование.

Расчет ожидаемой прибыли с учетом затрат на дополнительную информацию производим по формуле:

$$P_0 = \max(P_{A_1}; P_{A_2}) = \max(102{,}55 - 10; \quad 55) = 92{,}55.$$

Анализ результатов от вершин к корням показывает, что следует проводить дополнительное исследование: в случае благоприятного прогноза, следует инвестировать в проект *А*, это принесет предприятию прогнозируемую среднюю прибыль 156 единиц, при неблагоприятной ситуации – в проект *С*, что гарантирует результат 25 единиц. Если предприятие откажется от дополнительного исследования, следует инвестировать в проект ***В***, предприятие получит средний ожидаемый доход в размере 55 единиц.

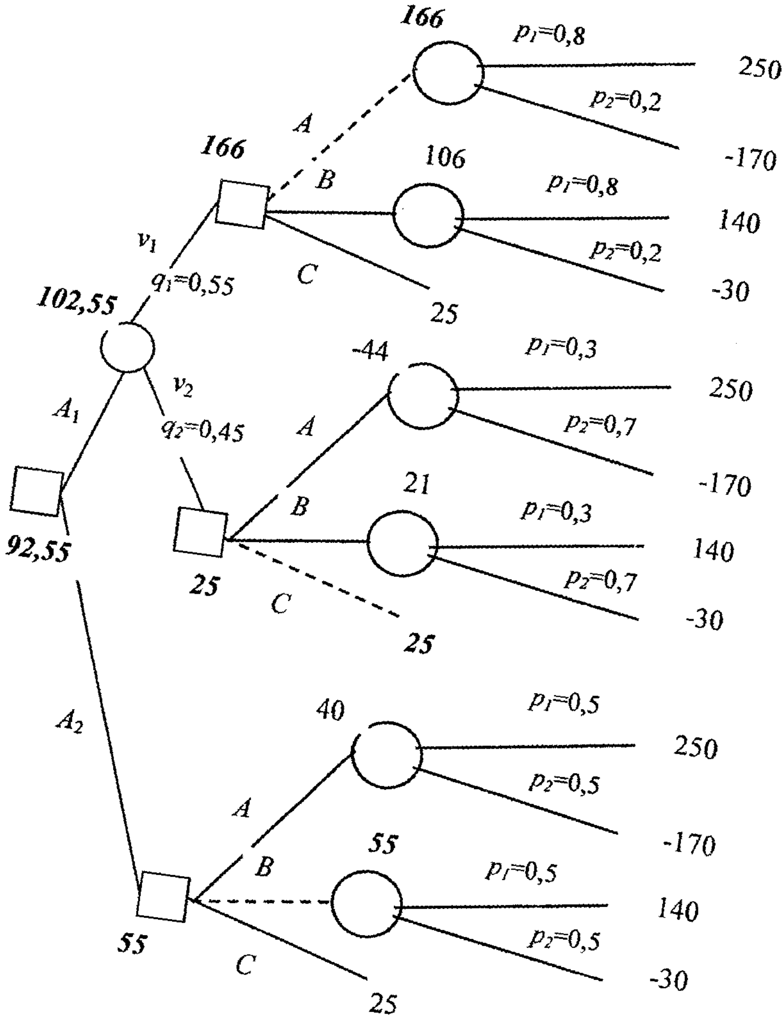

Рисунок 21 – Дерево решений игры «Инвестирование»

A_3

ЗАДАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ

№ 4.1 – 4.30

Рассмотреть экономические ситуации, описанные в заданиях № 3.1 – 3.30, как позиционную игру. Необходимо:

– определить структуру игры, вероятные исходы событий, возможные варианты действий лица принимающего решения, финансовый результат, каждого сочетания стратегий и исходов и, построить дерево решений игры;

– найти решение позиционной игры.

В игре первый ход делает лицо, принимающее решения.

№ 4.31-4.35

Руководство предприятия из заданий 4.1 - 4.5 может провести дополнительное диагностическое исследование технического состояния оборудования, которое требует дополнительных затрат.

Уточненная информация о вероятности состояния после проведения диагностики оборудования, а также стоимость проведения диагностики для различных вариантов заданий приведены в таблице 27.

Таблица 27–Исходные данные

Номер варианта	Вероятности состояний оборудования после диагностики			Дополнительные затраты
	ТР	СР	КР	
1	0,2	0,2	0,6	1,3
2	0,2	0,1	0,7	2
3	0,1	0,7	0,2	1
4	0,1	0,1	0,8	2,5
5	0,2	0,7	0,1	1,5

Если дополнительное исследование не производится, вероятности состояния оборудования следует принять из статистических данных учета ТО и Р аналогичного оборудования, эксплуатируемого на предприятии (таблица 19).

Определить, как изменится оптимальное решение, при анализе дополнительной информации о состояниях оборудования, которое может быть получено проведением исследования.

Определить меру риска решений в игре.

№ 4.36-4.40

Для уточнения рыночной ситуации предприятие (из заданий 4.6-4.10) может заказать проведение дополнительного исследования рынка у консалтингового агентства. Прогноз развития рыночной ситуации консалтингового агентства может быть благоприятным (Р) и неблагоприятным (К). Вероятности развития ситуации на рынке и стоимость услуг консалтингового агентства, а также уровень интенсивности товарных потоков при разных рыночных ситуациях даны в таблице 28.

Вероятность уровней интенсивности товарных потоков без проведения дополнительного исследования принять равной значениям из таблицы 20.

Таблица 28–Исходные данные

Номер варианта	Вероятность рыночной ситуации		Вероятность спроса				Стоимость услуг
			1	2	3	4	
1	Р	0,4	0,2	0,6	0,1	0,1	10
	К	0,6	0,1	0,1	0,1	0,7	
2	Р	0,6	0,05	0,15	0,7	0,1	10
	К	0,4	0,3	0,2	0,4	0,1	
3	Р	0,7	0,2	0,45	0,15	0,2	15
	К	0,3	0,1	0,1	0,1	0,7	
4	Р	0,65	0,3	0,5	0,1	0,1	5
	К	0,35	0,1	0,3	0,5	0,1	
5	Р	0,55	0,5	0,25	0,1	0,15	25
	К	0,45	0,8	0,1	0,05	0,05	

Определить, как изменится оптимальное решение, при анализе дополнительной информации об интенсивности товарных потоков.

Определить меру риска решений в игре.

№ 4.41-4.45

Коммерческое предприятие решает вопрос о целесообразности обращения в маркетинговое агентство для получения дополнительной информации о спросе на товары, реализуемые на ярмарке. Маркетинговое агентство может провести исследование потенциальных потребителей, которое требует дополнительных затрат. Вероятность спроса при благоприятном (П) или неблагоприятном (О) прогнозе, стоимость услуг маркетингового агентства и вероятности спроса при различных вариантах прогноза приведены в таблице 29.

Вероятность состояний спроса без проведения дополнительного исследования принять равной значениям из таблицы 21.

Таблица 29–Исходные данные

Номер варианта	Вероятность прогноза		Вероятность спроса				Стоимость услуг
			К1	К2	К3	К4	
1	П	0,55	0,4	0,3	0,1	0,2	0,1
	О	0,45	0,2	0,2	0,5	0,1	
2	П	0,35	0,1	0,1	0,1	0,7	0,1
	О	0,65	0,7	0,1	0,1	0,1	
3	П	0,25	0,1	0,2	0,6	0,1	5
	О	0,75	0,1	0,4	0,4	0,1	
4	П	0,2	0,05	0,05	0,1	0,8	0,5
	О	0,8	0,05	0,85	0,05	0,05	
5	П	0,55	0,6	0,2	0,1	0,1	0,2
	О	0,45	0,2	0,6	0,1	0,1	

Определить, как изменится оптимальное решение, при анализе дополнительной информации о состояниях спроса.

Определить меру риска решений в игре.

Контрольные вопросы

1. Каковы особенности позиционной игры? Приведите примеры экономических ситуаций, которые могут быть представлены как позиционная игра.
2. Как изображается структура позиционной игры? Каковы свойства дерева решений?
3. Как рассчитывается оценка вершин исходов?
4. Какие критерии используются для оценки вершин-решений?
5. Каковы способы анализа дополнительной информации при выборе оптимального решения позиционной игры?
6. Приведите последовательность этапов решения позиционной игры.
7. Как оценивается риск в позиционной игре?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васин, А.А. Теория игр и модели математической экономики: учебное пособие для студентов / А.А. Васин, В.В. Морозов. – М.: Макс-пресс, 2005. – 271 с.
2. Замков, О.О. Математические методы в экономике: учебник / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных; под общ. ред. А.В. Сидоровича. – М.: Изд-во «Дело и Сервис», 2001. – 368 с.
3. Колесник, Г.В. Теория игр / Г. В. Колесник. – М.: URSS: Либроком, 2012. – 148 с.
4. Костевич, Л.С. Исследование операций. Теория игр: учебное пособие для студентов экономических специальностей учреждений, обеспечивающих получение высшего образования / Л.С. Костевич, А.А. Лапко. – Минск: Вышэйшая школа, 2008. – 367 с.
5. Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. – М.: Наука, 1974.
6. Красс, М.С. Математические методы и модели для магистрантов экономики: учебное пособие по направлению «Экономика» и другим экономическим специальностям / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – СПб: Питер: Лидер, 2010. – 496 с.
7. Лефевр, В.А. Алгебра конфликта / В.А. Лефевр, Г.Л. Смолян.– М.: URSS: Либроком, 2011. – 59 с.
8. Мулен, Э. Теория игр с примерами из математической экономики / Э. Мулен; пер. с франц. – М.: Мир, 1985.
9. Нейман, Дж. фон. Теория игр и экономическое поведение / Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн.
10. Оуэн, Г. Теория игр: учебное пособие / Г. Оуэн; пер. с англ. – М.: URSS: ЛКИ, 2008. – 230 с.
11. Петросян, Л.А. Устойчивые решения позиционных игр / Л.А. Петросян, Д.В. Кузютин. – СПб: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2008. – 327 с.
12. Таха, Х.А. Введение в исследование операций / Х.А. Таха; пер. с англ. – М.: Вильямс, 2005. – 901 с.
13. Экономико-математические методы и модели / под. ред. А.В. Кузнецова. – Минск: БГЭУ, 1999.

Учебное издание

САМОЙЛЮКОВИЧ Валентина Владимировна

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Методическое пособие
для студентов специальности
1-26 02 01 «Бизнес-администрирование»

В 3 частях

Часть 1

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И РИСКА

Технический редактор *О. В. Песенько*

Подписано в печать 27.12.2012. Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 5,17. Уч.-изд. л. 4,04. Тираж 120. Заказ 1116.
Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет. ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.