

УДК 523.035:535.36:539.125.523

Н. Н. РОГОВЦОВ

АСИМПТОТИКИ ПОЛЕЙ ИЗЛУЧЕНИЯ В ОПТИЧЕСКИ ТОЛСТЫХ РАССЕИВАЮЩИХ СРЕДАХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

(Представлено академиком АН БССР Б. И. Степановым)

1. Метод «сложения слоев», предложенный в работах (^{1, 2}), оказался весьма плодотворным и получил дальнейшее развитие для плоскопараллельных и сферически симметричных сред (см. (³⁻⁷) и ссылки в них). Недавно в статьях (⁸⁻¹⁰) было введено множество полугрупповых операций, которые оставляют почти везде инвариантными поля излучения в объектах, имеющих произвольную конфигурацию и подстилающие поверхности с любыми физически допустимыми свойствами. Там же была дана формулировка общего принципа инвариантности (ОПИ). Эта формулировка содержит наиболее содержательную общую часть утверждений типа принципов инвариантности, которые были или могут быть сформулированы в рамках теории переноса и указанного подхода. Общий принцип инвариантности (¹⁰) охватывает полугрупповой и частично групповой аспекты, которые неявно использовались в методе, предложенном в работах (^{1, 2}). Заметим, что групповой аспект может быть учтен полностью введением дополнительного к сформулированным в (¹⁰) типа операций.

В неявном и явном виде инвариантность поля излучения по отношению к выделению некоторого подслоя или подобласти из всей среды (это весьма важный частный тип операций, определенных в (⁸⁻¹⁰)) использовалась соответственно в (^{5, 6}) и (⁷).

Цель этой статьи (см. также (^{11, 12})) состоит в том, чтобы продемонстрировать эффективность предложенного в (⁸⁻¹¹) подхода к решению задач теории переноса излучения для сред сложной формы. Сделаем это на примере получения асимптотик. При этом ниже будут использоваться обозначения, принятые в работах (⁸⁻¹¹).

2. Для решения задач теории переноса в случае объектов любого типа сформулируем общую схему использования подхода, основанного на ОПИ. Используя операции, указанные выше, конструируем подходящие общие соотношения инвариантности для данной проблемы, которые связывают между собой решения однотипных или различных задач. При этом удобным вспомогательным средством для их получения является, в частности, разбиение «траекторий» фотонов, блуждающих в среде, на топологически неэквивалентные типы, что придает соотношениям инвариантности ясный физический смысл. Далее, на основе общей информации о свойствах источников, рассеивающих объемов и их границ, некоторых аналитических свойств величин, входящих в общие соотношения инвариантности, выводятся более частные соотношения. Они уже сами по себе имеют непосредственный физический и математический интерес, и из них могут быть получены конкретные данные о свойствах решений рассматриваемых задач.

Следует особо подчеркнуть, что в рамках развитого в (8-12) общего подхода для решения задач теории переноса для сред произвольных конфигураций весьма важную роль играет относительность понятия границы одного и того же физического тела. Такая ситуация возникает вследствие наличия множества (10) операций, с помощью которых можно изменять геометрический и физический смысл, придаваемый границе тела. Например, по этой причине соотношения инвариантности, приведенные в (13), являются с точностью до несущественных изменений частными типами соотношений, выведенных ранее в работах (8-11).

3. Рассмотрим невогнутый объем V однородной рассеивающей среды, который имеет границу σ , полностью прозрачную для излучения. Пусть внутри V в точке, определенной \mathbf{r}^* (везде далее для краткости точки будем задавать их радиус-векторами), находится точечный диффузный источник $f(\Omega^*)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^*)$ ($\Omega^* \in \Omega$; $f(\Omega^*)$ — почти везде ограниченная функция). Предположим, что σ почти везде имеет касательную плоскость. Обозначим через $d(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')$ длину перпендикуляра, опущенного из точки \mathbf{r}' на касательную плоскость к σ , проведенную в точке \mathbf{r}'' . Пусть $\tau_0(\mathbf{r}') = \min_{\mathbf{r}'' \in \sigma} [\alpha d(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')]$, где α — коэффициент ослабления. Обозначим через S_1 некоторую поверхность, ограничивающую связный или несвязный объем V_1 , являющийся частью V .

Из стационарных аналогов соотношений (11), (12) статьи (11) с учетом формулы (6) работы (9), зависимости (14), имеющей место между средними интенсивностями излучения для точечного и плоского изотропных источников, явного выражения (15) функции Грина для бесконечной плоскопараллельной среды можно получить следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d\Omega \int_{\Omega} G_*(\dots) f_1(\Omega) f(\Omega^*) d\Omega^* &= \int_{\Omega} d\Omega \int_{\Omega} G_{\infty}(\dots) f_1(\Omega) f(\Omega^*) d\Omega^* - \\ &- \iint_{\sigma} d\sigma' \int_{\Omega_+} (\mathbf{n}' \cdot \Omega') d\Omega' \int_{\Omega} f_1(\Omega) G_{\infty}(\dots) d\Omega \int_{\Omega} G_{\infty}(\dots) f(\Omega^*) d\Omega^* + \\ &+ O(\chi), \quad (\tau_0(\mathbf{r}), \tau_0(\mathbf{r}^*) \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (1)$$

В левой части и в первом члене справа в (1) на месте многоточий должны стоять $\mathbf{r}, \Omega, \mathbf{r}^*, \Omega^*$ (для $G_*(\dots)$ дополнительно еще будет стоять буква V). Во втором члене справа под многоточиями понимается (читая слева направо) соответственно $\mathbf{r}, \Omega, \mathbf{r}', \Omega'$ и $\mathbf{r}', \Omega', \mathbf{r}^*, \Omega^*$. В (1) параметры $\tau_0(\mathbf{r})$ и $\tau_0(\mathbf{r}^*)$ стремятся к ∞ независимо друг от друга, $f_1(\Omega)$ — ограниченная почти везде на Ω функция, а величина χ задается одним из таких выражений:

$$\begin{aligned} \frac{\exp(-k\tau_0(\mathbf{r}))}{\tau_0(\mathbf{r})} \iint_{\sigma} \frac{\exp(-k\alpha d(\mathbf{r}^*, \mathbf{r}'))}{\alpha d(\mathbf{r}^*, \mathbf{r}')} d\sigma' &= \omega(\mathbf{r})\gamma(\mathbf{r}^*), \\ \omega(\mathbf{r}^*)\gamma(\mathbf{r}), \quad \omega(\mathbf{r})\omega(\mathbf{r}^*) S_{\sigma}, \end{aligned} \quad (2)$$

где k — наименьший неотрицательный корень характеристического уравнения; S_{σ} — площадь поверхности σ .

Из стационарных аналогов формулы (9) работы (9) или выражения (11) статьи (11) с учетом принципа взаимности и ряда данных, использованных при выводе (1), нетрудно получить такие асимптотики:

$$\int_{\Omega} G_*(\dots) f_1(\Omega) d\Omega = \int_{\Omega} G_{\infty}(\dots) f_1(\Omega) d\Omega + O(\omega(\mathbf{r})), \quad \tau_0(\mathbf{r}) \rightarrow \infty, \quad (3)$$

$$\int_{\Omega} G_*(\dots) f(\Omega^*) d\Omega^* = \int_{\Omega} G_{\infty}(\dots) f(\Omega^*) d\Omega^* + O(\omega(\mathbf{r}^*)), \quad \tau_0(\mathbf{r}^*) \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Под многоточиями в (3), (4) понимаем соответственно $\mathbf{r}, \Omega, \mathbf{r}^*, \Omega^*$. Асимптотические выражения (3), (4) имеют смысл и для консервативного рассея-

ния. Заметим, что главные части выражений (1) можно, по-видимому, использовать при $k \neq 0$ в качестве приближенных формул, причем их область применимости будет более широкой, чем у главных членов в (3), (4).

В статье ⁽¹²⁾ был предложен эффективный и достаточно точный метод расчета светимостей и потоков излучения для случая невогнутых рассеивающих тел. Приведем здесь асимптотику для потока излучения через s_1 при наличии в V источника вида $f(\Omega) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^*)$. Обозначим эту величину через $\Pi(s_1, \mathbf{r}^*, V)$. Из выражений (11), (12) работы ⁽¹¹⁾ с учетом ограниченности при $\rho = 0$ и $V_0 = V_\infty$ (V_∞ — бесконечная однородная среда) величины $I^*(\dots)$, определенной в ⁽¹²⁾, получим

$$\begin{aligned} \Pi(s_1, \mathbf{r}^*, V) = & \Pi_\infty(s_1, \mathbf{r}^*) - \iint_{\sigma} d\sigma' \int_{\Omega_+} (\mathbf{n}' \cdot \boldsymbol{\Omega}') \Pi_\infty(s_1, \mathbf{r}', \boldsymbol{\Omega}') d\Omega' \times \\ & \times \int_{\Omega} G_\infty(\dots) f(\Omega^*) d\Omega^* + O(\gamma(\mathbf{r}^*)), \quad \tau_0(\mathbf{r}^*) \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\Pi_\infty(s_1, \mathbf{r}^*)$ и $\Pi_\infty(s_1, \mathbf{r}', \boldsymbol{\Omega}')$ — потоки излучения через s_1 , когда V «погружен» в V_∞ при наличии в ней соответственно источников $f(\Omega) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^*)$ и $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\Omega - \boldsymbol{\Omega}')$. Под многоточиями понимается $\mathbf{r}', \boldsymbol{\Omega}', \mathbf{r}^*, \Omega^*$. Последний член в (5) можно заменить на $O(S_0 \omega(\mathbf{r}^*))$. Подчеркнем, что формула (5) справедлива при любом расположении s_1 относительно границы σ . Асимптотику (5) возможно использовать для оценки энергии излучения, поглощенной в V_1 .

Заметим, что функции Грина $G_\infty(\dots)$ для однородной бесконечной среды, входящие в (1), (3) — (5), можно в ряде случаев (см. ссылки в ^(8, 9, 12)) найти в явной аналитической форме точными или приближенными методами. На основе результатов работ ^(8–11) можно также получить асимптотики полей излучения и при наличии в V точечного мононаправленного источника.

Отметим, что на основе ОПИ нетрудно выписать общие соотношения инвариантности и с учетом поляризации. В ^(8–11) для простоты были приведены соотношения инвариантности только для скалярного варианта теории переноса. Подчеркнем, что число таких соотношений, вообще говоря, принципиально не ограничено ввиду наличия бесконечного множества указанных в ⁽¹⁰⁾ операций. Однако наибольший интерес для приложений, по-видимому, будут иметь наиболее простые среди них.

В заключение автор выражает свою признательность А. М. Самсону за полезное обсуждение результатов.

Summary

On the basis of the general invariant relations obtained by the author earlier, a number of asymptotic formulas for characteristics of the radiation fields in optically thick scattering complicate-configuration media are derived.

Литература

- ¹ Амбарцумян В. А. — ДАН СССР, 1943, т. 38, № 8, с. 257—260. ² Амбарцумян В. А. Научные тр.— Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1960, т. 1.— 430 с. ³ Соболев В. В. Рассеяние света в атмосферах планет.— М.: Физматгиз, 1972.— 336 с. ⁴ Bellman R. E., Kagiwada H. H., Kalaba R. E.— J. Math. Physics, 1968, vol. 9, N 6, p. 909—912. ⁵ Енгибарян Н. Б., Мнацаканян М. А.— ДАН СССР, 1974, т. 217, № 3, с. 533—535. ⁶ Иванов В. В.— Астрон. журн., 1975, т. 52, № 2, с. 217—226. ⁷ Яновицкий Э. Г. Препринт ИТФ-79-117Р.— Киев, 1979.— 39 с. ⁸ Роговцов Н. Н.— Изв. АН СССР. ФАО, 1980, т. 16, № 3, с. 244—253. ⁹ Роговцов Н. Н.— ЖПС, 1981, т. 34, № 2, с. 335—342. ¹⁰ Роговцов Н. Н.— ДАН БССР, 1981, т. 25, № 5, с. 420—423. ¹¹ Роговцов Н. Н.— ЖПС, 1981, т. 35, № 6, с. 1044—1050. ¹² Роговцов Н. Н.— ДАН БССР, 1983, т. 27, № 1, с. 34—37. ¹³ Пикичян О. В.— ДАН СССР, 1982, т. 262, № 4, с. 860—863. ¹⁴ Фано У., Спенсер Л., Бергер М. Перенос гамма-излучения.— М.: Госатомиздат, 1963.— 284 с. ¹⁵ Mika J. R.— Nucl. Sci. Eng., 1961, vol. 11, N 4, p. 415—427.