Доклады Академии наук БССР

1990 Декабрь Том 34 № 12

УДК 52-64+535.36+539.125.523

Н. Н. РОГОВЦОВ

ОБ АСИМПТОТИКАХ ФУНКЦИЙ ГРИНА УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ РАССЕИВАЮЩИХ СРЕД, ИМЕЮЩИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ФОРМУ

(Представлено академиком АН БССР Ф. И. Федоровым)

Начало исследованию асимптотических свойств характеристик полей излучения было положено в классических работах В. А. Амбарцумяна [1] и В. В. Соболева [2], в которых были найдены асимптотики для интенсивности излучения в глубине полубесконечной среды и коэффициентов яркости для оптически толстого слоя для случая облучения их бесконечно широким пучком излучения. Затем по мере развития аппарата теории переноса излучения в работах (см., например, [3—7] и ссылки в них) был получен целый ряд асимптотических решений уравнения переноса для оптически толстых сред, имеющих форму слоя, шара, сферической оболочки и цилиндра. Следует отметить, что из-за относительной простоты асимптотических формул они представляют особый интерес для приложений и выяснения общих закономерностей многократного рассеяния света. К тому же корректное применение численных алгоритмов и метода Монте-Карло в области реализации асимптотических режимов является достаточно сложной задачей. Поэтому изучение общей структуры асимптотических решений уравнения переноса излучения с помощью аналитического подхода полезно как с теоретической точки зрения, так и исходя из практических соображений (например, знание асимптотик позволяет более эффективно использовать указанные выше методы). Заметим, что отыскание асимптотик полей излучения представляет наибольший интерес для сред сложных конфигураций.

В статье будут найдены асимптотики функций Грина уравнения переноса излучения для сред цилиндрической формы двух типов. К первому отнесем рассеивающее поглощающее тело V_1, границей которого является цилиндрическая поверхность S_1, пересечение которой с плоскостью, перпендикулярной к образующим границы тела V_1, дает невогнутую кривую l (l — направляющая цилиндрической поверхности S_1). Тело V_1 будем называть бесконечным цилиндром. Под полубесконечным цилиндром V_2 будем понимать среду, имеющую форму тела, являющегося общей частью V_1 и одного из полупространств, на которое делит пространство плоскость S, перпендикулярная к образующим поверхности S_1. Обозначим границу тела V_2 через S_2, причем $S_2=S_3\cup S_4$, где S_3 — часть границы S_2, на которой «лежат» образующие цилиндрической поверхности, а S_4 — часть плоскости S, которая ограничена кривой $l_1=S\cap S_1$ (S_4 — торец полубесконечного цилиндра). Будем предполагать, что границы сред V_1 и V_2 полностью пропускают падающее на них излучение. К тому же потребуем, чтобы оптические характеристики сред в любом сечении тел V_1 и V_2 плоскостью, перпендикулярной образующим, не зависели от его положения. Однако они могут изменяться в пределах самого сечения.

Получим сначала асимптотику функции Грина $G(\mathbf{r}, \Omega, \mathbf{r}^*, \Omega^*, V_1)$ уравнения переноса излучения для случая бесконечного цилиндра V_1, содержащего внутри себя точечный мононаправленный источник $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}^*)\delta(\mathbf{\Omega}-\mathbf{\Omega}^*)$, где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}^*$ — радиус-векторы, задающие положения точки «наблюдения» и источника, а единичные векторы $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{\Omega}^*$ ($|\mathbf{\Omega}|=|\mathbf{\Omega}^*|=1$) определяют направления распространения и испускания излучения. Введем декартову прямоугольную систему координат $OXYZ$, плоскость OXY которой перпендикулярна образующим цилиндра V_1. В этой системе $\mathbf{r}=(x, y, z)$, $\mathbf{r}^*=(x^*, y^*, z^*)$, $\alpha=\alpha(x, y)$, где α — показатель ослабления. Пусть $\alpha_1=\inf\limits_{(x,y)\in\tilde{S}}\{\alpha(x, y)\}\geqslant \mathrm{const}>0$, где $\tilde{S}$ — область на плоскости OXY, ограниченная проекцией $\tilde{l}$ направляющей l на саму плоскость OXY. Теперь введем весьма важное с физической точки зрения ограничение, а именно будем считать, что $\alpha_1 d$ (d — точная верхняя грань длин всех отрезков, отсекаемых S_1 от прямых, пересекающих V_1 и параллельных OXY) является ограниченной величиной. Если $\alpha_1|z-z^*|\to\infty$, то естественно предположить, что в процессе многократного рассеяния в поперечном сечении цилиндра V_1 будет устанавливаться распределение поля излучения, независимое в относительных единицах от $|z-z^*|$. Данное утверждение есть фактически предположение о возможности разделения переменных, когда источник и точка «наблюдения» удалены друг от друга на большое оптическое расстояние $\alpha_1|z-z^*|$. В работе [8] исследованы математические вопросы, связанные с возможностью такого разделения. Итак, будем предполагать, что

$$G(\mathbf{r},\ \mathbf{\Omega},\ \mathbf{r}^*,\ \mathbf{\Omega}^*,\ V_1)=f(z-z^*)\,\Phi(x,\ y;\ \mathbf{\Omega})\,\Phi_1(x^*,\ y^*;\ \mathbf{\Omega}^*)+ \tag{1}$$

$$+\eta,\quad \alpha_1|z-z^*|\to\infty,$$

$$\mathbf{\Omega}=(\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi,\ \sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi,\ \mu),$$

$$\mathbf{\Omega}^*=(\sqrt{1-(\mu^*)^2}\cos\varphi^*,\ \sqrt{1-(\mu^*)^2}\sin\varphi^*,\ \mu^*).$$

Здесь функции $f(\ldots)$, $\Phi(\ldots)$, $\Phi_1(\ldots)$ подлежат определению; функция η убывает при $\alpha_1|z-z^*|\to\infty$ быстрее, чем первый член в правой части (1) (в общем случае η — обобщенная функция); μ, φ и μ^*, φ^* — угловые координаты векторов $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{\Omega}^*$ в сферической системе координат, согласованной с системой $OXYZ$. Положим $z^*<0$, $z>0$. Тогда из результатов работ [9, 10] следует, что имеет место следующее соотношение инвариантности:

$$G(\mathbf{r},\ \mathbf{\Omega},\ \mathbf{r}^*,\ \mathbf{\Omega}^*,\ V_1)=-\iint\limits_{\tilde{S}} d\tilde{S}'\int\limits_{\Omega}(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{\Omega}')\,G(\mathbf{r},\ \mathbf{\Omega},\ \mathbf{r}',\ \mathbf{\Omega}',\ V_1)\times \tag{2}$$

$$\times G(\mathbf{r}',\ \mathbf{\Omega}',\ \mathbf{r}^*,\ \mathbf{\Omega}^*,\ V_1)\,d\Omega',$$

где $\mathbf{n}'=-\mathbf{k}$ ($\mathbf{k}$ — вектор, имеющий направление оси z; $|\mathbf{n}'|=1$), Ω — единичная сфера. Подставляя (1) в (2) и отбрасывая члены более высокого порядка, получим (при $\alpha_1 z\to\infty$, $\alpha_1|z^*|\to\infty$) соотношение

$$f(z-z^*)=-f(z)\,f(-z^*)\times \tag{3}$$

$$\times\iint\limits_{\tilde{S}} d\tilde{S}'\int\limits_{\Omega}(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{\Omega}')\,\Phi(x',\ y';\ \mathbf{\Omega}')\,\Phi_1(x',\ y';\ \mathbf{\Omega}')\,d\Omega'.$$

Выберем нормировку функций $\Phi(\ldots)$, $\Phi_1(\ldots)$ так, чтобы выполнялось условие

$$\iint\limits_{\tilde{S}} d\tilde{S}'\int\limits_{\Omega}(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{\Omega}')\,\Phi(x',\ y';\ \mathbf{\Omega}')\,\Phi_1(x',\ y';\ \mathbf{\Omega}')\,d\Omega'=-1. \tag{4}$$

Из (3), (4) с учетом того, что z и z^* произвольные (в рамках ограничений $\alpha_1 z\gg 1$, $\alpha_1|z^*|\gg 1$, $\alpha_1|z-z^*|\gg 1$) числа, получаем $f(z)=\exp(\pm k|z|)$. Так как поле излучения при $\alpha_1|z-z^*|\to\infty$ должно убывать, то следует положить $f(z)=f(|z|)=\exp(-k|z|)$ (k — неотрицательное число). Теперь найдем связь между $\Phi(\ldots)$ и $\Phi_1(\ldots)$. Воспользовавшись принципом взаимности и соотношением (1), приходим к такому выражению:

$$\Phi_1(x,\ y;\ \Omega)=\Phi_1(x,\ y;\ \sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi,\ \sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi,\ \mu)= \tag{5}$$
$$=C\Phi(x,\ -y;\ -\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi,\ \sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi,\ \mu),\ C=\mathrm{const}.$$

Подставив (5) в (4), получим условие нормировки для функции $\Phi(\ldots)$

$$C\iint_{\tilde{S}} d\tilde{S}'\int_{\Omega}(\mathbf{n}'\cdot\Omega')\,\Phi(x',\ y';\ \mu',\ \varphi')\,\tilde{\Phi}(x',\ -y';\ \mu',\ \pi-\varphi')\,d\Omega'=-1, \tag{6}$$

$$\tilde{\Phi}(x,\ y;\ \mu,\ \varphi)=\Phi(x,\ y;\ \sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi,\ \sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi,\ \mu). \tag{7}$$

Из (1), (5), (7) находим искомую асимптотику

$$G(\mathbf{r},\ \Omega,\ \mathbf{r}^*,\ \Omega^*,\ V_1)=C\exp(-k\,|z-z^*|)\,\tilde{\Phi}(x,\ y;\ \mu,\ \varphi)\times$$
$$\times\tilde{\Phi}(x^*,\ -y^*;\ \mu^*,\ \pi-\varphi^*)+\eta,\ \alpha_1|z-z^*|\to\infty. \tag{8}$$

Поскольку выражение (8) должно удовлетворять однородному уравнению переноса, приходим к такой краевой задаче для определения функции $\tilde{\Phi}(\ldots)$ (см. также [8]):

$$-k\mu\tilde{\Phi}(x,\ y;\ \mu,\ \varphi)+\Omega_\perp\cdot\nabla_\perp\tilde{\Phi}(x,\ y;\ \mu,\ \varphi)= \tag{9}$$
$$=-\alpha(x,\ y)\,\tilde{\Phi}(x,\ y;\ \mu,\ \varphi)+\frac{\sigma(x,\ y)}{4\pi}\int_{\Omega}\chi(x,\ y;\ \gamma)\,\tilde{\Phi}(x,\ y;\ \mu',\ \varphi')\,d\Omega',$$

$$\nabla_\perp=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j},\quad \Omega_\perp=(\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi,\quad \sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi),$$

$$\mathbf{r}_\perp=(x,\ y),\quad \tilde{\Phi}(x,\ y;\ \mu,\ \varphi)\Big|_{\substack{\mathbf{r}_\perp\in\tilde{l}\\ \mathbf{n}_1\cdot\Omega_\perp>0}}=0,$$

где $\sigma(x,\ y)$ — показатель рассеяния, $\mathbf{n}_1$ — внутренняя нормаль к границе S_1 в точке, задаваемой $\mathbf{r}=(x,\ y,\ 0)$, а $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — единичные орты системы OXY ($\chi(\ldots)$ — индикатриса рассеяния). Задача (9) может решаться для любой заданной нормировки функции $\tilde{\Phi}(\ldots)$, а затем константу C в (8) следует находить из условия (6).

Пусть в полубесконечном цилиндре V_2 находится точечный мононаправленный источник $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}^*)\,\delta(\Omega-\Omega^*)$. Расположим теперь прямоугольную декартову систему координат $OXYZ$ так, чтобы плоскости OXY принадлежала часть S_4 границы S_2, а ось Z имела направление, совпадающее с направлением внутренней нормали к S_4. Используя общие соотношения инвариантности [9, 10], с помощью которых связываются между собой функции Грина $G(\mathbf{r},\ \Omega,\ \mathbf{r}^*,\ \Omega^*,\ V_2)$, $G(\mathbf{r},\ \Omega,\ \mathbf{r}^*,\ \Omega^*,\ V_1)$ ($G(\ldots,\ V_2)$ — функция Грина уравнения переноса для тела V_2), и асимптотику (8), можно найти следующее асимптотическое выражение:

$$G(\mathbf{r},\ \Omega,\ \mathbf{r}^*,\ \Omega^*,\ V_2)=C\exp(-kz)\,\tilde{\Phi}(x,\ y;\ \mu,\ \varphi)\times$$
$$\times\tilde{U}(x^*,\ y^*,\ z^*;\ \mu^*,\ \varphi^*)+\eta,\quad \alpha_1 z\to\infty,\quad \alpha_1 z^*=\mathrm{const}, \tag{10}$$

$$\tilde{U}(x^*,\ y^*,\ z^*;\ \mu^*,\ \varphi^*)=\exp(kz^*)\,\tilde{\Phi}(x^*,\ -y^*;\ \mu^*,\ \pi-\varphi^*)-$$
$$-\iint_{S_4} dS_4'\int_{\Omega_+}(\mathbf{n}'\cdot\Omega')\,\tilde{\Phi}(x',\ -y';\ \mu',\ \pi-\varphi')\,G(\mathbf{r}',\ \Omega',\ \mathbf{r}^*,\ \Omega^*,\ V_2)\,d\Omega',$$

$$\mathbf{r}=(x,\ y,\ z),\ \mathbf{r}^*=(x^*,\ y^*,\ z^*),\ \mathbf{r}'=(x',\ y',\ 0).$$

Здесь $\mathbf{n}'$ — внешняя нормаль к S_4 ($|\mathbf{n}'|=1$); компоненты векторов Ω, Ω^* в системе $OXYZ$ даются формулами (1); η — функция, аналогичная по свойствам η. Асимптотика (10) соответствует случаю, когда точка «наблюдения» находится на большой оптической глубине. Из (10) видно, что для полного задания $G(\mathbf{r},\ \Omega,\ \mathbf{r}^*\ \Omega^*,\ V_2)$ при $\alpha_1 z \gg 1$ нужно найти значения этой же функции на границе S_4. Следует отметить, что при $\mathbf{r}^*=(x^*,\ y^*,\ 0)$ (т. е. источник лежит на торце S_4) можно на основе общих соотношений инвариантности [9, 10] сформулировать уравнения для непосредственного определения $G(...,\ V_2)$ при $\mathbf{r}=(x,\ y,\ 0)$, минуя решение общей задачи об отыскании поля излучения во всем цилиндре V_2.

Summary

Asymptotic expressions are found for Green's functions of the radiative transfer equations for infinite and semi-infinite cylinders, which contain monodirectional point sources.

Литература

1. Амбарцумян В. А. // Научные труды. Ереван, 1960. Т. 1. 2. Соболев В. В. Рассеяние света в атмосферах планет. М., 1972. 3. Соболев В. В. // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 3. 4. Колесов А. К. // Астрофизика. 1985. Т. 22, № 1. С. 177—187. 5. Роговцов Н. Н., Самсон А. М. // Астрофизика. 1985. Т. 23, № 1. С. 163—176. 6. Роговцов Н. Н. // Астрофизика. 1988. Т. 29, № 3. С. 602—612. 7. Роговцов Н. Н. // Докл. АН БССР. 1988. Т. 32, № 12. С. 1085—1088. 8. Гермогенова Т. А., Павельева Е. Б. // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. 1989. Т. 29, № 8. С. 1195—1211. 9. Роговцов Н. Н. // Журн. прикл. спектроскопии. 1981. Т. 35, № 6. С. 1044—1050. 10. Роговцов Н. Н. // Докл. АН БССР. 1981. Т. 25, № 5. С. 420—423.

Белорусский политехнический институт

Поступило 06.07.90