Доклады Академии наук БССР

1991 Январь Том 35 № 1

УДК 52-64+535.36+539.125.523

И. Н. РОГОВЦОВ

АСИМТОТИКА ФУНКЦИИ ГРИНА УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ ПЛОСКОГО СЛОЯ, СОДЕРЖАЩЕГО ТОЧЕЧНЫЙ МОНОНАПРАВЛЕННЫЙ ИСТОЧНИК

(Представлено академиком АН БССР Ф. И. Федоровым)

1. Вследствие относительной простоты структуры асимптотических решений уравнения переноса излучения они играют важную роль при изучении закономерностей многократного рассеяния света и весьма часто используются в приложениях теории переноса в астрофизике, гидрооптике, оптике рассеивающих сред. К настоящему времени наиболее существенные результаты получены при изучении асимптотических свойств решений уравнения переноса излучения для случая сред и источников, имеющих плоскопараллельную или сферическую симметрию (см., например, работы [1—7] и ссылки в них). Отысканию асимптотик функций Грина для однородных бесконечной среды, плоского слоя, шара и цилиндра, содержащих точечные или линейные мононаправленные источники, посвящено только несколько статей [8—12].

Ниже будет найдена асимптотика функции Грина уравнения переноса излучения для однородного слоя $\bar{V}$ большой оптической толщины τ_0, содержащего точечный мононаправленный источник, минимальное оптическое расстояние от которого до второй границы $\bar{S}_2$ слоя $\bar{V}$ равно τ^* ($\tau^*=\text{const}$). При этом будем считать, что точка «наблюдения» расположена на оптическом расстоянии τ_2 (это тоже наименьшее оптическое расстояние; $\tau_2=\text{const}$) от первой границы $\bar{S}_1$ слоя $\bar{V}$. В отличие от работы [11] здесь не будут накладываться ограничения на взаимное положение нормалей к границам слоя, проходящих через точку «наблюдения» и источник. Результат, полученный в работе, позволяет, в частности, выписать асимптотику интенсивности излучения (при $\tau_0\to\infty$) на конечной оптической глубине, отсчитываемой от одной границы слоя, когда его вторая граница облучается произвольным пучком внешнего излучения, что представляет существенный интерес для приложений. При получении искомой асимптотики будут использованы соотношения инвариантности, найденные в работах [13, 14] для случая сред сложной формы, и схема вывода асимптотик, использованная в [11]. Отметим, что эта схема в своей основе близка к методу, который применялся в классических работах [2, 3] при получении асимптотик полей излучения для полубесконечной среды и оптически толстого слоя, облучаемых бесконечно широкими мононаправленными пучками излучения.

2. Пусть однородный слой $\bar{V}$ содержит точечный мононаправленный «источник» $\delta(\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}^*)\delta(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{\Omega}^*)$, где концы оптических радиус-векторов $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\tau}^*$ задают соответственно точку «наблюдения» и положение источника, а $\boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}^*$ — единичные векторы, определяющие направления распространения и испускания излучения. Введем следующие обозначения: P — точка «наблюдения» (одновременно она задает конец вектора $\boldsymbol{\tau}$);

T — точка, определяющая положение источника (T — конец вектора τ; K — проекция точки P на границу $\bar{S}_1$; N_0 — проекция точки T на границу $\bar{S}_2$; $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ — единичные внешние нормали соответственно к границам $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$; $\beta=\arccos((\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{a}))$, где $\mathbf{a}=|\mathbf{KN}_0|^{-1}\mathbf{KN}_0$; $\beta_1=\arccos((\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{b}))$, $\mathbf{b}=|\mathbf{KN}_1|^{-1}\mathbf{KN}_1$, где $N_1\in\bar{S}_2$; $\beta_2=\arccos((\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{c}))$, где $\mathbf{c}=|\mathbf{KT}|^{-1}\mathbf{KT}$; $\beta_3=\arccos((\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{f}))$, где $\mathbf{f}=|\mathbf{N}_0\mathbf{P}|^{-1}\mathbf{N}_0\mathbf{P}$; $\beta_4=\arccos((\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{m}))$, где $\mathbf{m}=|\mathbf{PT}|^{-1}\mathbf{PT}$. В дальнейшем нам понадобятся две безразмерные прямоугольные декартовы системы координат $K\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ и $N_0\bar{X}_1\bar{Y}_1\bar{Z}_1$ (описанные выше и ниже геометрические объекты задаются в этих безразмерных системах; переход от исходных геометрических объектов к их образам в этих системах осуществляется с помощью отображения вида $\mathbf{r}\to\alpha\mathbf{r}$, где α — показатель ослабления, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор). Они расположены следующим образом: оси $\bar{Z}$ и $\bar{Z}_1$ ортогональны границам слоя и имеют направления, совпадающие соответственно с направлениями векторов $\mathbf{n}_2$ и $\mathbf{n}_1$; плоскости $K\bar{X}\bar{Y}$ и $N_0\bar{X}_1\bar{Y}_1$ совпадают соответственно с $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$; оси $\bar{X}$ и $\bar{X}_1$ параллельны друг другу и имеют одинаковые направления; оси $\bar{Y}$ и $\bar{Y}_1$ параллельны и имеют противоположные направления; плоскости $K\bar{Y}\bar{Z}$ и $N_0\bar{Y}_1\bar{Z}_1$ совпадают друг с другом; точка N_0 имеет координаты $(0, \tau_0\operatorname{tg}\beta, \tau_0)$ в системе $K\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$, а точка K имеет такие же координаты в системе $N_0\bar{X}_1\bar{Y}_1\bar{Z}_1$.

При выводе искомой асимптотики будем исходить из такого соотношения инвариантности [11, 13]:

$$\tilde{G}(\tau, \Omega, \tau^*, \Omega^*, \bar{V})=\tilde{G}_{(0,\infty)}(\tau, \Omega, \tau^*, \Omega^*)-$$

$$-\iint_{\bar{S}_2} d\bar{S}_2' \int_{\Omega_+} \tilde{G}_{(0,\infty)}(\tau, \Omega, \tau', \Omega')(\mathbf{n}_2\cdot\Omega')\tilde{G}(\tau', \Omega', \tau^*, \Omega^*, \bar{V})\,d\Omega',$$

$$P, T\in\bar{V}.$$

Здесь $\tilde{G}(\ldots)$ — функция Грина безразмерного уравнения переноса излучения для слоя $\bar{V}$ при наличии в нем «источника» $\delta(\tau-\tau^*)\delta(\Omega-\Omega^*)$; $\tilde{G}_{(0,\infty)}(\ldots)$ — функция Грина для случая полубесконечной среды $\bar{V}_{(0,\infty)}$, граница которой и ее внешняя нормаль совпадают соответственно с $\bar{S}_1$ и $\mathbf{n}_1$ и которая имеет оптические характеристики, идентичные реализующимся в $\bar{V}$; Ω_+ — полусфера, задаваемая условием $(\mathbf{n}_2\cdot\Omega')>0$. Заметим, что между $\tilde{G}_{(0,\infty)}(\ldots)$ и функцией Грина $\tilde{G}_\infty(\tau, \Omega, \tau^*, \Omega^*)$ для бесконечной однородной среды $\bar{V}_\infty$ (характеристики элементарного объема одинаковы в $\bar{V}_{(0,\infty)}$ и $\bar{V}_\infty$) существует связь [11, 13], аналогичная (1), на основе которой в [12] были найдены асимптотические выражения для поверхностной функции Грина на большой оптической глубине в $\bar{V}_{(0,\infty)}$. Используя результаты и метод, изложенный в [12], можно получить следующую асимптотику:

$$\tilde{G}_{(0,\infty)}(\tau, \Omega, \tau^*, \Omega^*)=\tilde{G}_\infty(\tau, \Omega, \tau^*, \Omega^*)-$$

$$-\frac{k\exp(-k|\mathbf{TK}|)}{2\pi^2 M|\mathbf{TK}|}\,i\left(\left(\Omega^*\cdot\frac{\mathbf{TK}}{|\mathbf{TK}|}\right)\right)\int_{\Omega_+}(\mathbf{n}_1\cdot\Omega'')\times$$

$$\times i\left(\left(\Omega''\cdot\frac{\mathbf{KT}}{|\mathbf{KT}|}\right)\right)I(0, \mu'', \varphi'', \mu_1, \varphi_1, \beta_2, \tau_2)\,d\Omega''+q, \quad (0<\Lambda<1)$$

$$q=o(|\mathbf{TK}|^{-1}\exp(-k|\mathbf{TK}|)), \quad |\mathbf{TK}|\to\infty, \quad \tau_0\to\infty.$$

В (2) величины имеют такой смысл: k — наименьший неотрицательный корень характеристического уравнения; $i(\ldots)$ — глубинное тело яркости [3, 9] (считаем, что эта функция нормирована условием $\int_{-1}^{1} i(\mu)\,d\mu=$

$=2/\Lambda$ [3]); Λ — альбедо однократного рассеяния; $M=2\int\limits_{-1}^{1}\mu i^2(\mu)d\mu$; θ_1, φ_1 и θ'', φ'' — углы, соответствующие единичным векторам $(-\boldsymbol{\Omega})$ и $\boldsymbol{\Omega}''$ в сферической системе координат, согласованной с $KXYZ$ ($\mu_1=\cos\theta_1$; $\mu''=\cos\theta''$). Функция $I(...)$ в (2) является предельным значением величины $I(\tau, \mu'', \varphi'', \mu_1, \varphi_1, \beta_2, \tau_2)$, которая удовлетворяет краевой задаче

$$\mu''\frac{\partial I(\tau, \mu'', \varphi'', \mu_1, \varphi_1, \beta_2, \tau_2)}{\partial\tau}=-(1-k\sqrt{1-(\mu'')^2}\sin\beta_2\sin\varphi'')\times$$

$$\times I(\tau, \mu'', \varphi'', \mu_1, \varphi_1, \beta_2, \tau_2)+\frac{\Lambda}{4\pi}\int\limits_{\Omega}x(\gamma)I(\tau, \mu', \varphi', \mu_1, \varphi_1, \beta_2, \tau_2)d\Omega'+$$

$$+\delta(\tau-\tau_2)\delta(\mu''-\mu_1)\delta(\varphi''-\varphi_1),$$

$$I(0, |\mu''|, \varphi'', \mu_1, \varphi_1, \beta_2, \tau_2)=0, \quad \tau\geqslant 0, \tag{3}$$

где $x(\gamma)$ — индикатриса рассеяния; Ω — единичная сфера. Асимптотика для $\tilde{G}_{(0,\infty)}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\tau}', \boldsymbol{\Omega}')$, когда $\boldsymbol{\tau}'$ задает точки на $\bar{S}_2$, дается формулой (2), в которой сделаны следующие замены: $\boldsymbol{\tau}^*$ на $\boldsymbol{\tau}'$, $\boldsymbol{\Omega}^*$ на $\boldsymbol{\Omega}'$, β_2 на β_1, T на N_1. Это выражение, соотношения (1), (2) и асимптотика для $\tilde{G}_\infty(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\Omega}^*)$ при $|\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}^*|\to\infty$ [9—11] являются исходными для получения искомой асимптотической формулы.

3. Теперь воспользуемся вспомогательным приемом, введенным в работах [11, 12] и играющим важную роль при выводе искомого результата. Выделим на плоскости $\bar{S}_2$ круг $\bar{S}^*$ с радиусом τ_1 и центром в точке N_0. Будем считать, что $\tau_1\to\infty$ при $\tau_0\to\infty$, но при этом $\tau_1^2/\tau_0=o(1)$ при $\tau_0\to\infty$. Учитывая сделанные выше определения, предполагая непрерывность функции $i(\mu)$ на отрезке $[-1, 1]$, с помощью ряда элементарных преобразований асимптотического выражения для $\tilde{G}_{(0,\infty)}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\tau}', \boldsymbol{\Omega}')$ (способ его получения из (2) описан выше) приходим к такой асимптотике:

$$\tilde{G}_{(0,\infty)}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\tau}', \boldsymbol{\Omega}')=\tilde{G}_\infty(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\tau}', \boldsymbol{\Omega}')+$$

$$+\frac{k\cos\beta\exp(-k\tau_0/\cos\beta_1)}{2\pi^2M\tau_0}\,i\left(\left(\boldsymbol{\Omega}'\cdot\frac{\mathbf{N}_0\mathbf{K}}{|\mathbf{N}_0\mathbf{K}|}\right)\right)\times \tag{4}$$

$$\times\Phi(\mu_1, \varphi_1, \tau_2, \beta)+q_1, \quad q_1=o\left(\frac{\cos\beta}{\tau_0}\exp\left(-\frac{k\tau_0}{\cos\beta_1}\right)\right),$$

$$|\mathbf{KN}_0|\to\infty, \quad \tau_0\to\infty, \quad N_1\in\bar{S}^*, \quad (0<\Lambda<1),$$

где

$$\Phi(\mu_1, \varphi_1, \tau_2, \beta)=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi''\int\limits_{-1}^{0}\mu''i(\sqrt{1-(\mu'')^2}\sin\varphi''\sin\beta+\mu''\cos\beta)\times$$

$$\times I(0, \mu'', \varphi'', \mu_1, \varphi_1, \beta, \tau_2)d\mu''. \tag{5}$$

При отыскании (4) были к тому же учтены следующие достаточно просто выводимые выражения:

$$i\left(\left(\mathbf{g}\cdot\frac{\mathbf{KN}_1}{|\mathbf{KN}_1|}\right)\right)=i\left(\left(\mathbf{g}\cdot\frac{\mathbf{KN}_0}{|\mathbf{KN}_0|}\right)\right)+\omega_1, \quad |\mathbf{g}|=1, \tag{6}$$

$$\cos\beta_1=(1+\omega_2)\cos\beta,$$

$$\Phi(\mu_1, \varphi_1, \tau_2, \beta_1)=\Phi(\mu_1, \varphi_1, \tau_2, \beta)+\omega_3,$$

где ω_i — функции, стремящиеся для $\forall N_1\in\bar{S}^*$ к нулю при $\tau_0\to\infty$, $|\mathbf{KN}_0|\to\infty$. Используя формулу Тейлора и геометрические соображения, можно также получить такое асимптотическое выражение:

$$\exp [k((\tau_0/\cos\beta) - |\mathbf{KN}_1|)] = \exp (k\bar{y}' \sin\beta)(1+\omega_1),$$

$$\omega_1 = o(1) \text{ при } |\mathbf{KN}_0| \to \infty, \ \tau_0 \to \infty \text{ и } \forall N_1 \in \bar{S}^*,$$

где $\bar{y}'$ — вторая координата точки N_1 в системе $N_0\bar{X}_1\bar{Y}_1\bar{Z}_1$ ($\mathbf{N}_0\mathbf{N}_1 = (\bar{x}', \bar{y}', 0)$ в данной системе). Разбивая теперь интеграл по $\bar{S}_2$ в (на сумму интегралов по $\bar{S}^*$ и $\bar{S}_2 \setminus \bar{S}^*$, подставляя в интеграл по $\bar{S}^*$ соо ношения (4), (7), учитывая (2) и то, что при $\tau_0 \to \infty$ значения функци $\bar{G}(\boldsymbol{\tau}', \boldsymbol{\Omega}', \boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\Omega}^*, \bar{V})$ на границе $\bar{S}_2$ слоя $\bar{V}$ будут стремиться к соотве ствующим значениям функции Грина для случая полубесконечной ср ды, с помощью ряда преобразований и оценок придем к следующ искомой асимптотике:

$$\bar{G}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\Omega}^*, \bar{V}) = k(2\pi^2 M\tau_0)^{-1} \cos\beta \exp(-k\tau_0/\cos\beta) \times$$
$$\times U(\mu_1, \varphi_1, \tau_2, \beta) U(\mu^*, \varphi^*, \tau^*, \beta) + q_2 + \eta_1,$$
$$q_2 = o(\tau_0^{-1} \cos\beta \exp(-k\tau_0/\cos\beta)), \ \beta = \text{const},$$
$$\tau_0 \to \infty, \ (0 < \Lambda < 1), \qquad (8)$$

где

$$U(\tilde{\mu}, \tilde{\varphi}, \tilde{\tau}, \beta) = \exp(k\tilde{\tau}\cos\beta)\, i\,(\sqrt{1-(\tilde{\mu})^2}\sin\beta\sin\tilde{\varphi} + \tilde{\mu}\cos\beta) +$$
$$+ \Phi(\tilde{\mu}, \tilde{\varphi}, \tilde{\tau}, \beta),$$

а величины θ^*, φ^* — угловые координаты вектора $\boldsymbol{\Omega}^*$ в сферическ системе, согласованной с системой $N_0\bar{X}_1\bar{Y}_1\bar{Z}_1$ ($\mu^* = \cos\theta^*$). Функция в (8) задает прямое и первые три кратности рассеянного излучени При получении (8) были также приняты во внимание асимптотика дл $\bar{G}_\infty(\ldots)$ [9—11], соотношения $\beta_i = \beta + o(1)$ при $\tau_0 \to \infty$ ($i = 2, 3, 4$; $\beta = \text{const}$) и неравенство $(|\mathbf{KN}_0| - |\mathbf{KN}_1|) \leqslant |\mathbf{N}_0\mathbf{N}_1| \sin\beta$ ($N_1 \in \bar{S}_2$). Пр $\beta \to 0$, $\tau^* \to 0$, $\tau_2 \to 0$ соотношение (8) переходит в асимптотику, получе ную ранее в [11], причем при этих условиях функция $M^{-1}U(\ldots)$ стр мится к коэффициенту пропускания для полубесконечной среды [3 Если проинтегрировать (8) по μ^* и φ^* соответственно на отрезка $[-1, 1]$ и $[0, 2\pi]$, а затем умножить на $\alpha^2 L$ (L — величина, имеюща размерность мощности), то получим асимптотику интенсивности изл чения в оптически толстом слое, который содержит точечный изотро ный источник мощности $4\pi L$.

Summary

On the basis of the general invariant relations the asymptotic expression is found f Green's function of the radiative transfer equation for a homogeneous optically thick lay which contains a monodirectional point source. In deriving this asymptotic formulae it assumed that the source and a receiver are at fixed optical distances from the first a the second boundaries of a layer, respectively. Another limitations for mutual position the source and the receiver are not suggested. Being a part of the asymptotic expressio the quantities are expressed with solutions of the radiative transfer equation for the pl ne-parallel semi-infinite anisotropic absorbing mediums.

Литература

1. Амбарцумян В. А. // Науч. тр. Ереван, 1960. Т. 1. 2. Соболев В. В. Пер нос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М., 1956. 3. Соболев В. В. Ра сеяние света в атмосферах планет. М., 1972. 4. Иванов В. В., Волков Е. В. // У зап. ЛГУ. 1978. Вып. 57, № 400. С. 3—30. 5. Соболев В. В. // Докл. АН СССР. 198 Т. 273, № 3. С. 573—576. 6. Колесов А. К. // Астрофизика. 1985. Т. 22, № 1. С. 177- 187. 7. Пагирнер Д. И. // Астрофизика. 1972. Т. 8, № 3. С. 353—368. 8. Романо ва Л. М. // Изв. АН СССР. ФАО. 1968. Т. 4, № 3. С. 311—320. 9. Долин Л. С. // Опти ка моря. М., 1983. С. 118—122. 10. Роговцов Н. Н. // Докл. АН БССР. 1986. Т. 30 № 10. С. 901—904. 11. Роговцов Н. Н. // Астрофизика. 1988. Т. 29, № 3. С. 602—61 12. Роговцов Н. Н. // Докл. АН БССР. 1988. Т. 32, № 12. С. 1085—1088. 13. Рогов цов Н. Н. // Журнал прикл. спектроскопии. 1981. Т. 35, № 6. С. 1044—1055. 14. Пик чян О. В. // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262, № 4. С. 860—863.

Белорусский политехнический институт

Поступило 24.07