Доклады Академии наук Беларуси

1994 июль-август Том 38 № 4

УДК 52-64+535.36+539.125.523+517.937

Ф. Н. БОРОВИК, Н. Н. РОГОВЦОВ

МЕТОД ОТЫСКАНИЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ИНДИКАТРИСЫ РАССЕЯНИЯ

(Представлено академиком Ф. И. Федоровым)

1. Изучение процессов переноса излучения в бесконечной плоскопараллельной однородной среде $\overline{V}_\infty$, бесстолкновительного возбуждения молекул, размножения и гибели сводится к решению родственных с математической точки зрения бесконечных линейных систем алгебраических и дифференциальных уравнений. Методы решения такого рода систем в замкнутой форме были предложены в работах [1—3], в которых была использована, в частности, теория цепных дробей. Однако для получения конкретных результатов, представляющих непосредственный интерес для приложений, очень важно предложить удобные и эффективные полуаналитические алгоритмы вычисления искомых величин на основе указанных решений. До настоящего времени в теории переноса излучения не было разработано такого рода алгоритма вычисления нулевых азимутальных гармоник функций Грина для $\overline{V}_\infty$ и случая произвольной индикатрисы рассеяния $x(\chi)$ ($\chi \in [-1, 1]$). В данной статье решена эта задача. В отличие от метода Кейза при нахождении этих величин с помощью предложенного ниже способа не возникает необходимости расчетов сингулярных интегралов. Наиболее важными чертами данного алгоритма являются использование аналитических свойств цепных дробей и то, что при вычислениях число членов в разложениях искомых величин по полиномам Лежандра можно брать независимо от числа слагаемых в аналогичном разложении функции $x(\chi)$. Заметим, что совместное использование общих соотношений инвариантности (см. [4] и ссылки в ней), результатов этой работы и статьи [3] позволяет решать различные краевые задачи теории переноса излучения для полубесконечной среды, слоя и шара.

2. Пусть $G_\infty(\tau, \mu)$ и $G_\infty(\tau, \mu, \mu_1)$ — нулевые азимутальные гармоники функций Грина уравнения переноса излучения для среды $\overline{V}_\infty$, содержащей соответственно плоские изотропный или мононаправленный источники. Нулевые азимутальные гармоники функций, описывающих данные источники, имеют вид $g_1(\tau, \mu) = \delta(\tau)$, $g_2(\tau, \mu, \mu_1) = (2\pi)^{-1}\delta(\tau) \times \delta(\mu - \mu_1)$ (τ — оптическая глубина; μ, μ_1 — косинусы углов между осью оптических глубин и направлениями распространения, испускания излучения). Используя результаты работы [3], можно показать, что величина $G_\infty(\tau, \mu)$ представима в виде

$$G_\infty(\tau, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{\infty} (2s+1)\, h_s(\tau)\, P_s(\mu), \tag{1}$$

$$G_\infty(\tau, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega|\tau|)\, \overline{W}_1(\omega \operatorname{sign} \tau, \mu)\, d\omega + \Theta(\tau, \mu), \quad \tau \in (-\infty, \infty). \tag{2}$$

Здесь

$$h_s(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega|\tau|)\, \overline{W}_{2,s}(\omega \operatorname{sign} \tau)\, d\omega, \quad \overline{W}_{2,s}(\omega) = \tag{3}$$

$$= \pi^{-1} \mathfrak{D}_0(\omega^2)\, \Psi_s(\omega) = \mathfrak{N}_0^{-1}(\omega^2)\, \overline{W}_{3,s}(\omega), \quad \overline{W}_1(\omega, \mu) = \mathfrak{N}_0^{-1}(\omega^2)\, \overline{W}_4(\omega, \mu) =$$

$$= \frac{\Lambda}{2\pi} \mathfrak{D}_0(\omega^2)(1 - i\omega\mu)^{-1} \sum_{s=0}^{\infty} (2s+1) f_s \Psi_s(\omega) P_s(\mu), \quad \mathfrak{D}_l(\omega^2) = (c_l \mathfrak{N}_l(\omega^2))^{-1},$$

$$\Psi_0(\omega) \equiv 1, \quad \Psi_m(\omega) = (i\omega)^m m! \prod_{r=1}^{m} \mathfrak{D}_r(\omega^2), \quad c_l = (2l+1)(1 - \Lambda f_l),$$

$$\mathfrak{N}_l(\omega^2) = 1 + \cfrac{\nu_l \omega^2}{1 + \cfrac{\nu_{l+1}\omega^2}{1 + \dots}}, \quad \nu_l = (l+1)^2 (c_l c_{l+1})^{-1},$$

$$l \in N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}, \quad m \in N = \{1, 2, 3, \dots\},$$

$P_s(\mu)$ — полином Лежандра s-го порядка, f_l — соответствующие коэффициенты в разложении $x(\chi) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} (2s+1) f_s P_s(\chi) (f_0 = 1)$, $\Theta(\tau, \mu) = |\mu|^{-1} \times \theta(\tau\mu) \exp\left(-\left|\frac{\tau}{\mu}\right|\right)$ ($\theta(\dots)$ — функция Хэвисайда), Λ — альбедо однократного рассеяния ($0 < \Lambda < 1$).

С помощью ряда преобразований формальное выражение для $G_\infty(\tau, \mu, \mu_1)$, приведенное в [3], можно записать в таком виде:

$$G_\infty(\tau, \mu, \mu_1) = (2\pi)^{-1} \Theta(\tau, \mu)\, \delta(\mu - \mu_1) + G_\infty^1(\tau, \mu, \mu_1), \tag{4}$$

где

$$G_\infty^1(\tau, \mu, \mu_1) = \frac{\Lambda}{4\pi} P(\mu, \mu_1) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Theta(\tau - t, \mu)\, \Theta(t, \mu_1)\, dt + \tag{5}$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega|\tau|)\, \overline{W}_5(\omega \operatorname{sign} \tau, \mu)\, d\omega, \quad \overline{W}_5(\omega, \mu) = \mathfrak{N}_0^{-1}(\omega^2)\, \overline{W}_6(\omega, \mu) =$$

$$= (\Lambda^2/8\pi^2)((1 - i\omega\mu)(1 - i\omega\mu_1))^{-1} \sum_{s=0}^{\infty} (2s+1) f_s a_s(\omega) P_s(\mu),$$

$$P(\mu, \mu_1) = \sum_{s=0}^{\infty} (2s+1) f_s P_s(\mu) P_s(\mu_1).$$

Величины $a_s(\omega)$ в (5) удовлетворяют следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} i\omega(s+1) a_{s+1}(\omega) + i\omega s a_{s-1}(\omega) = c_s a_s(\omega) - v_s, \\ a_{-1}(\omega) \equiv 0, \quad s \in N_0, \end{cases} \tag{6}$$

где $v_s = (2s+1) f_s P_s(\mu_1)$. Можно показать, что существует единственное решение системы (6) в классе l_2, причем этот факт имеет место, если $x(\chi)$ удовлетворяет условию Гельдера [5] на отрезке $[-1, 1]$ и $\omega \in \mathbf{C} \setminus \mathfrak{A}$, где $\mathbf{C}$ — комплексная плоскость, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_2 = \{\omega | \omega = iy,\ y \in R \setminus (-1, 1)\}$, $\mathfrak{A}_1 = \{\omega | \omega = \pm ik_l,\ k_l \in (-1, 1),\ l = \overline{1, p},\ p < \infty\}$. Заметим, что $\mathfrak{A}_1$ состоит из нулей бесконечной цепной дроби $\mathfrak{N}_0(\omega^2)$ (она имеет нули только первого порядка).

Приведем решение системы (6) в форме, удобной для проведения вычислений. Выразив полиномы $\tilde{\Psi}_s(z)$ $(s \in N_0,\ z=(i\omega)^{-1})$, которые определены в [3], через конечные цепные дроби и приняв во внимание формулы (7) из [3], посредством ряда преобразований получим искомое решение в виде

$$a_0(\omega) = \mathfrak{D}_0(\omega^2) \sum_{s=0}^{\infty} v_s \Psi_s(\omega), \tag{7}$$

$$a_1(\omega) = \Psi_1(\omega)\,\mathfrak{D}_0(\omega^2)\,v_0 + c_0 \sum_{s=1}^{\infty} (i\omega)^{s-1} v_s s! \prod_{l=0}^{s} \mathfrak{D}_l(\omega^2), \tag{8}$$

$$a_m(\omega)|_{m\geqslant 2} = m! \sum_{s=0}^{m-1} (i\omega)^{m-s} (s!)^{-1} a_{s,s}(\omega) \prod_{l=s+1}^{m} \mathfrak{D}_l(\omega^2) + \tag{9}$$

$$+ \frac{c_{m-1}}{(i\omega)^m m!} \prod_{s=0}^{m-2} (c_s \mathfrak{U}_s(\omega^2)) \sum_{l=m}^{\infty} (i\omega)^l l! v_l \prod_{r=0}^{l} \mathfrak{D}_r(\omega^2),$$

где

$$a_{0,0}(\omega) = v_0 \mathfrak{D}_0(\omega^2), \quad a_{1,1}(\omega) = c_0 \mathfrak{D}_0(\omega^2)\,\mathfrak{D}_1(\omega^2)\,v_1, \tag{10}$$

$$a_{r,r}(\omega)|_{r\geqslant 2} = v_r c_{r-1} ((i\omega)^r r!)^{-1}\,\mathfrak{D}_0(\omega^2)\,\Psi_r(\omega) \prod_{m=0}^{r-2} (c_m \mathfrak{U}_m(\omega^2));$$

$$\mathfrak{U}_0(\omega^2) = 1 + (c_0 c_1)^{-1}\omega^2, \quad \mathfrak{U}_n(\omega^2) = 1 + \nu_n \omega^2 \mathfrak{U}_{n-1}^{-1}(\omega^2),\ n \geqslant 1,$$

$$\mathfrak{U}_n(\omega^2) = \left[1;\ \frac{\nu_n\omega^2}{1},\ \frac{\nu_{n-1}\omega^2}{1},\ \ldots,\ \frac{\nu_0\omega^2}{1}\right]. \tag{11}$$

Заметим, что формула (7) совпадает с выражением для $a_0(\omega)$, приведенным в [3].

3. Кратко опишем способы вычисления величин, входящих в (1)—(5), (7)—(11). Расчет конечных цепных дробей $\mathfrak{U}_s(\omega^2)$ проводился по формулам (11). Вычисление бесконечных цепных дробей $\mathfrak{H}_r(\omega^2) = \mathfrak{R}_r^{-1}(\omega^2)$ осуществлялось с помощью рекуррентного соотношения

$$\mathfrak{H}_r(\omega^2) = (1 + \nu_r \omega^2 \mathfrak{H}_{r+1}(\omega^2))^{-1}, \tag{12}$$

причем в качестве $\mathfrak{H}_{r+1}(\omega^2)$ при достаточно больших $r (r \gg 1)$ брались точные или приближенные их значения. Наиболее простым приближенным соотношением для $\mathfrak{H}_{r+1}(\omega^2)$ при $r \gg 1$ является такое:

$$\mathfrak{H}_{r+1}(\omega^2) \approx \lim_{s\to\infty} \mathfrak{H}_s(\omega^2) = 2\left(1 + \sqrt{1+\omega^2}\right)^{-1} = (F(\omega))^{-1}. \tag{13}$$

В (13) нужно брать ветвь корня, принимающую положительные значения для $\forall\omega \in (-\infty, \infty)$ (при ее выделении делались разрезы на мнимой оси по непересекающимся лучам, исходящим из точек $\pm i$). Вместо $\mathfrak{H}_{r+1}(\omega^2)$ при $r \gg 1$ в (12) подставлялись также значения функций $\tilde{\mathfrak{H}}_{r+1}(\omega^2)$, которые находились с помощью рекуррентных формул

$$\tilde{\mathfrak{H}}_{r+1}(\omega^2) = (\tilde{\nu}_r \omega^2)^{-1} (\tilde{\mathfrak{H}}_r^{-1}(\omega^2) - 1), \quad r \in N_0,\ \omega \in \mathbf{C} \setminus \mathfrak{A}_2, \tag{14}$$

$$\tilde{\mathfrak{H}}_0(\omega^2) = \frac{1-\Lambda}{2}\left[\left(\int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{1-i\omega\mu}\right)^{-1} - \frac{\Lambda}{2}\right]^{-1}, \quad \omega \neq \pm k,\ k > 0,$$

где величины $\tilde{\nu}_r$ и $\tilde{\mathfrak{H}}_r(\omega^2)$ совпадают с ν_r и $\mathfrak{H}_r(\omega^2)$ при $f_r = \delta_{0r}$, а k — корень уравнения $1 = \frac{\Lambda}{2k}\ln((1+k)/(1-k))$. Соотношения (14) были получены из (12) и формул (2), (7) из работы [3]. Интеграл в (14) равен

$$A(\omega)=\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{1-i\omega\mu}=\frac{1}{\omega}\left[\frac{x}{|x|}\left(\operatorname{arctg}\frac{|\omega|^2+y}{|x|}-\operatorname{arctg}\frac{y-|\omega|^2}{|x|}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{i}{2}\ln\frac{|\omega|^2+2y+1}{|\omega|^2-2y+1}\right],\quad \omega=x+iy,\quad \omega\in\mathbf{C}\diagdown\mathfrak{A}_2. \tag{15}$$

Формулы (12)—(15) позволяют корректно рассчитывать величины $\mathfrak{H}_r(\omega^2)$ даже на сторонах разрезов, на которых $\operatorname{Im}\mathfrak{H}_r(\omega^2)$ имеют противоположные знаки.

С целью выяснения аналитических свойств цепных дробей и сокращения объема вычислений при расчетах интегралов по ω использовались асимптотические и аппроксимационные формулы для $\tilde{a}_s(\omega)$, $a_s(\omega)$ $\Bigl($величины $\tilde{a}_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathfrak{D}_0(\omega^2)\,\Psi_s(\omega)$ удовлетворяют системе (6) при $v_s=(2/\pi)^{\frac{1}{2}}\,\delta_{0s}\Bigr)$, справедливые соответственно при $|\omega|\to\infty$ и $|\omega|\gg 1$. Используя соотношение (2) из [3] и формулы Сохоцкого — Племелли [5], можно получить асимптотику

$$\tilde{a}_0(\omega)\sim(2\pi)^{-\frac{1}{2}}A(\omega)+\sqrt{2}\,\Lambda\pi^{\frac{3}{2}}\omega^{-2}\left[\frac{1}{4}-3\pi^{-2}f_1+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\sum_{r=1}^{\infty}(4r+1)f_{2r}\left(\frac{(2r-1)!!}{(2r)!!}\right)^2-\frac{1}{\pi^2}\sum_{r=1}^{\infty}(4r+3)f_{2r+1}\left(\frac{(2r)!!}{(2r+1)!!}\right)^2\right],$$

$$|\omega|\to\infty,\quad \omega\in\mathbf{C}\diagdown\mathfrak{A}. \tag{16}$$

После вычисления $\tilde{a}_0(\omega)$ (при $|\omega|\gg 1$) по формуле (16) отыскивались величины $\tilde{a}_s(\omega)$ посредством использования прямой рекурсии (рекуррентными формулами служили выражения (6) при $v_s=(2/\pi)^{\frac{1}{2}}\,\delta_{0s}$ и замене в них $a_s(\omega)$ на $\tilde{a}_s(\omega)$), которая при $|\omega|\gg 1$ является слабо неустойчивой и может применяться для определения $\tilde{a}_s(\omega)$ при $s\gg 1$. Аппроксимационные и асимптотические формулы выводились и другим способом, основанным на использовании (12), (13). Он позволил найти такого рода формулы также и для $a_s(\omega)$. Из (13) видно, что $F(\omega)\sim\frac{1}{2}(1+|x|+iy\operatorname{sign}x)$ при $|\omega|\to\infty$. С учетом этого и (15), (16) приходим к заключению, что $\mathfrak{N}_r(\omega^2)\sim\sim\varkappa_r+\upsilon_r(|x|+iy\operatorname{sign}x)$ при $|\omega|\to\infty$ $(r\in N_0)$, где коэффициенты $\varkappa_r$ и υ_r находятся по формулам $\varkappa_r=1-\nu_r\varkappa_{r+1}\upsilon_{r+1}^{-2}$, $\upsilon_r=\nu_r\upsilon_{r+1}^{-1}$, в которых при $r\gg 1$ следует заменить υ_{r+1} и $\varkappa_{r+1}$ на $(1/2)$. С помощью этих выражений для $\mathfrak{N}_r(\omega^2)$ и (7) была найдена асимптотика для $a_0(\omega)$ при $|\omega|\to\infty$, а затем с использованием (6) получены аппроксимационные формулы для $a_s(\omega)$.

При вычислении интегралов по ω, входящих в (1), (2), (5), использовалось контурное интегрирование (см. также [3]). Подынтегральные функции в этих интегралах представимы в форме $H(\omega,\ \tau,\ \ldots)=\mathfrak{N}_0^{-1}(\omega^2)\times\times B(\omega\operatorname{sign}\tau,\ \ldots)\exp(-i\omega|\tau|)$, причем явный вид $B(\omega\operatorname{sign}\tau,\ \ldots)$ легко найти из (3), (5), (7) — (10). Указанные интегралы с помощью контурного интегрирования были приведены к виду

$$\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega,\ \tau,\ \ldots)\,d\omega=\pi q\sum_{l=1}^{p_1}\frac{B(-ik_l\operatorname{sign}\tau,\ \ldots)}{k_l\Upsilon_l}\exp(-k_l|\tau|)+\mathrm{M}. \tag{17}$$

Таблица значений $G_\infty(\tau, \mu)$

μ	τ					
	0,125	5	10	20	40	80
—1.0	0.143—1	0.606—2	0.346—2	0.140—2	0.300—3	0.196—4
—0.8	0.226—1	0.901—2	0.503—2	0.198—2	0.418—3	0.269—4
—0.6	0.402—1	0.145—1	0.782—2	0.297—2	0.609—3	0.385—4
—0.4	0.881—1	0.265—1	0.135—1	0.483—2	0.947—3	0.583—4
—0.2	0.308	0.606—1	0.274—1	0.886—2	0.161—2	0.948—4
0.0	9.68	0.220	0.749—1	0.196—1	0.310—2	0.170—3
0.2	5.27	1.10	0.295	0.563—1	0.708—2	0.343—3
0.4	2.57	1.36	0.652	0.163	0.190—1	0.805—3
0.6	1.70	1.14	0.732	0.289	0.477—1	0.214—2
0.8	1.27	0.951	0.692	0.355	0.890—1	0.567—2
1.0	1.01	0.806	0.630	0.376	0.127	0.127—1

Здесь M — контурный интеграл от функции $H(\ldots)$ по контуру Γ (Γ — односвязный контур, который лежит в нижней полуплоскости и не пересекает сам себя и мнимую ось, когда $\mathrm{Im}\,\omega \in (-\infty, -1]$; он симметричен относительно этой оси и не проходит через нули функции $\mathfrak{N}_0(\omega^2)$, причем для $\forall\omega \in \Gamma$ имеет место $|\mathrm{Re}\,\omega| \leqslant \Delta < \infty$); p_1 — число нулей функции $\mathfrak{N}_0(\omega^2)$, лежащих не ниже Γ и не выше вещественной оси; $q = 0$ при $p_1 = 0$ и $q = 1$ при $p_1 \geqslant 1$; величины Υ_l, введенные в [3], вычислялись с помощью рекуррентной формулы ($r \in N_0$)

$$\Upsilon_{lr} = \nu_r \mathfrak{N}_{r+1}^{-1}(-k_l^2)(1 + k_l^2 \Upsilon_{lr+1} \mathfrak{N}_{r+1}^{-1}(-k_l^2)),\ \Upsilon_{l0} = \Upsilon_l, \tag{18}$$

причем в качестве Υ_{lr+1} при $r \gg 1$ бралось значение $\frac{1}{4}(1 - k_l^2)^{-\frac{1}{2}}$. Отделение и вычисление нулей функции $\mathfrak{N}_0(\omega^2)$ проводилось путем построения системы полиномов Штурма аналогично методу, изложенному в [6]. Подчеркнем, что варьирование контура Γ позволяет вычислять только часть нулей или не вычислять их вовсе.

Вычисление $G_\infty(\tau, \mu)$ при $|\tau| \ll 1$ проводилось по формулам (2), (3) (в (2) явно выделен вклад в $G_\infty(\tau, \mu)$ нерассеянного излучения). Конкретные вычисления $G_\infty(\tau, \mu)$, $G_\infty(\tau, \mu, \mu_1)$ выполнялись для случая индикатрисы Хеньи—Гринстейна (для нее $f_s = g^s$, $g \in (0,1)$). При рассмотрении наихудших ситуаций ($g > 0.9$, $|\tau| \ll 1$) в рядах для искомых величин, содержащих полиномы Лежандра, приходилось учитывать не более 600÷700 слагаемых. Эффективность алгоритма практически не зависит от Λ. Объем вычислений существенно сокращается при выполнении любого из неравенств $|\tau| \gg 1$, $g \leqslant 0.9$. В таблице приведены значения $G_\infty(\tau, \mu)$ для $\Lambda = 0.95$, $g = 0.995$.

Summary

A convenient and efficient method of calculating zero azimuthal harmonics of the Green function of radiation transfer equation for infinite homogeneous planeparallel medium containing plane isotropic or monodirectional source is presented. This method is approrpriate in the case of highly anisotropic phase function.

Литература

1. Роговцов Н. Н. // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26, № 4. С. 600—607. 2. Боровик Ф. Н., Роговцов Н. Н., Самсон А. М. К решению конечных и бесконечных систем дифференциальных уравнений, описывающих процессы переноса излучения и многофотонного бесстолкновительного возбуждения молекул. Минск, 1991 (Препринт / ИФ АН БССР: 620). 3. Роговцов Н. Н., Боровик Ф. Н. // Докл. АН Беларуси. 1993. Т. 37, № 6. С. 39—44. 4. Роговцов Н. Н. // Рассеяние и поглощение света в природных и искусственных дисперсных средах. Минск, 1991. С. 58—81. 5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977. 6. Garcia R. D., Siewart C. E. // J. Q. S. R. T. 1989. Vol. 42, N 5. P. 385—394.

Белорусская государственная политехническая академия

Поступило 16.07.94