Доклады Национальной академии наук Беларуси

2003 май—июнь Том 47 № 3

УДК 52-62+535.36+539.125.523

Н. Н. РОГОВЦОВ, В. В. КАРПУК

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ СРЕДНИХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛЕЙ ИЗЛУЧЕНИЯ В ДИСПЕРСНЫХ СРЕДАХ РАЗЛИЧНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

(*Представлено академиком П. А. Апанасевичем*)

Белорусский национальный технический университет

Поступило 06.11.2002

1. Многие геофизические и астрофизические объекты (атмосферы Земли и планет, моря и океаны, диффузные и планетарные туманности, фотосферы звезд и др.), допустимо моделировать посредством рассеивающих поглощающих сред, имеющих плоскую или сферическую форму. Однако существует целый ряд такого рода сред (к ним относятся, например, облачные образования, протуберанцы, спикулы, коронарные лучи, аккреционные диски, факелы), которые характеризуются существенно более сложной конфигурацией, не обладающей плоскопараллельной или сферической симметрией. Эти объекты зачастую корректнее описывать посредством тел, имеющих форму цилиндров, сфероидов и даже невогнутых или вогнутых областей, не имеющих каких-либо содержательных свойств симметрии.

В отличие от классических задач [1,2] о переносе излучения в плоскопараллельных средах, исследование процесса многократного рассеяния света в объектах иной конфигурации является существенно более сложной и практически важной проблемой, решение которой еще весьма далеко от своего завершения. С помощью метода Монте-Карло и различных численных методов [3], в принципе, можно найти численные оценки для характеристик полей излучения в дисперсных средах сложной конфигурации. Но, к сожалению, эти методы не позволяют исследовать поведение полей излучения в рамках различных асимптотических режимов и выявлять закономерности процесса переноса излучения в аналитическом виде. Поэтому представляет значительный интерес разработка аналитических и полуаналитических методик решения разнообразных задач теории переноса излучения и оптики дисперсных сред для случая объектов (тел), которые не имеют плоскопараллельной симметрии.

Ранее в работах [4—12] был развит ряд методик указанных выше типов. Метод Кейза [4, 5] и методы, предложенные в [6—8] и основанные на использовании свойств интегральных преобразований, позволили решить ряд задач теории переноса для случая тел, имеющих формы конечного (бесконечного) шара или бесконечного кругового цилиндра. Способы отыскания асимптотик искомых характеристик полей излучения в средах, обладающих сферической, цилиндрической или трансляционной симметриями, были описаны в [6—10]. В [5] посредством интегрального преобразования Радона задача о переносе излучения в среде невогнутой формы была формально сведена к решению множества краевых задач для уравнения переноса излучения для случая плоскопараллельных слоев. Однако в [5] на основе этой идеи, к сожалению, не удалось получить содержательных результатов. В [10—12] был предложен подход, основанный на использовании общих соотношений инвариантности, которые позволяют находить в аналитическом виде двойные неравенства (нижние и верхние оценки), асимптотики, точные выражения и приближенные формулы для различных характеристик световых полей в средах (в частности, дисперсных) различной конфигурации.

Ниже с помощью подхода, изложенного в [10—12], найдены аналитические выражения и асимптотики для средних интенсивностей излучения и мощностей излучения для случая дисперсных сред, имеющих форму невогнутых тел (в частности, шара, сфероида, бесконечного кругового цилиндра, куба). Эти результаты позволяют исследовать функциональные зависимости данных величин от оптических и иных параметров, описывающих свойства указанных дисперсных сред. Отметим, что изучение этих зависимостей на основе других методов до сих пор практически не проводилось.

2. Рассмотрим дисперсную среду (тело) V, ограниченную невогнутой поверхностью S, которая не изменяет характеристик излучения, проходящего через нее. Будем предполагать, что внутри V (т. е. в $V^o = V \setminus S$ [12]) есть внутренние стационарные источники излучения, описываемые функцией $g(\vec{r},\vec{\Omega})$ ($\vec{r}$ — радиус — вектор точки «наблюдения»; $\vec{\Omega}$ — единичный вектор, задающий направление испускания или распространения излучения), причем $g(\vec{r},\vec{\Omega})dVd\Omega$ имеет смысл монохроматической мощности (она соответствует единичному спектральному интервалу) излучения, испускаемого элементом среды, расположенном в окрестности точки «наблюдения» и имеющим объем dV, в телесный угол $d\Omega$ около направления, определяемого $\vec{\Omega}$. Везде далее будем считать, что характеристики элементарного объема не зависят от положения точки «наблюдения» и поля излучения в среде V. Ограничимся также рассмотрением только случая монохроматического рассеяния. В качестве искомых характеристик полей излучения возьмем такие величины:

$$I_{\text{ср.}}(\vec{r}, V) = (4\pi)^{-1} \int\limits_{\Omega} I(\vec{r}, \ \vec{\Omega}; \ V)d\Omega, , \tag{1}$$

$$\Pi_1(S; \ V) = \iint\limits_{S(V^o)} dS \int\limits_{\Omega_+(\vec{r})} (\vec{n}(\vec{r}) \cdot \vec{\Omega}) I(\vec{r},\vec{\Omega}; \ V)d\Omega \, , \tag{2}$$

$$I^{\times}_{cp.}(S; \ V) = (\pi m(S))^{-1} \Pi_1(S; \ V). \tag{3}$$

Здесь $I(\vec{r},\vec{\Omega}; \ V)$ — интенсивность излучения в теле V; $m(S)$ — площадь границы S; Ω — единичная сфера (ей соответствует телесный угол 4π); $n(\vec{r})$ — единичная внешняя нормаль к внутренней стороне $S(V^o)$ границы S, в точке заданной $\vec{r}$; $\Omega_+(\vec{r})$ — полусфера, выделяемая из Ω условием $(\vec{n}(\vec{r}) \cdot \vec{\Omega}) > 0$; $I_{cp}(\vec{r};V)$ — средняя по Ω интенсивность излучения в точке, определенной $\vec{r}$; $\Pi_1(S; \ V)$ — монохроматическая мощность излучения, выходящего из V через S; $I^{\times}_{cp.}(S;V)$ имеет смысл усредненной на множестве всевозможных пар $(\vec{r}_S, \Omega_+(\vec{r}_S))$ интенсивности излучения, выходящего за пределы V ($\vec{r}_S$ задает точку на $S(V^o)$.

Приведенные ниже аналитические выражения и асимптотики были выведены на основе использования стационарного аналога общего соотношения инвариантности (1) из статьи [10] (или (5.22) из монографии [12]), двойных неравенств для $\Pi_1(S; \ V)$ [13] и асимптотик [14,15] функций Грина уравнения переноса излучения (УПИ) для случая бесконечной однородной среды V_∞, содержащей точечный изотропный источник.

3. Пусть V — дисперсная среда, имеющая форму шара. Разместим начало O правой прямоугольной декартовой системы координат $OXYZ$ в центре шара. Обозначим через $\vec{\tau} = \alpha\vec{r}$, где α — показатель ослабления, оптический радиус-вектор, а через $\tilde{V}$ — образ, в который переходит V при отображении $\vec{r}$ в $\vec{\tau}$. Допустим, что источники в V^o являются сферически симметричными, т. е.

$$g(\vec{r},\vec{\Omega}) = g(|\vec{r}|,(\vec{r} \cdot \vec{\Omega})|\vec{r}|^{-1}) = g(\alpha^{-1}|\vec{\tau}|,(\vec{\tau} \cdot \vec{\Omega})|\vec{\tau}|^{-1}) = \alpha g^*(|\vec{\tau}|,\mu), \quad \textit{где} \quad \mu = (\vec{\tau} \cdot \vec{\Omega})|\vec{\tau}|^{-1} .$$

В рамках этих допущений с помощью интегрирования по $\vec{\Omega}$ в пределах Ω стационарного аналога указанного выше соотношения инвариантности и деления результата на 4π с учетом принципа взаимности [4] получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{cp.}(\vec{\tau};\tilde{V}) = {} & \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-1}^{1} d\mu \int\limits_0^{\tau_0} u^2 du \int\limits_0^{2\pi} d\varphi' \int\limits_{-1}^{1} \tilde{G}^{\times}_{\infty}(F_1, F_2) g^*(u,\mu')d\mu' - \\ & \frac{\tau_0{}^2}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-1}^{1} d\mu \int\limits_0^{2\pi} d\varphi' \int\limits_0^{1} \mu' \tilde{I}_1(\tau_o,\mu') \tilde{G}^{\times}_{\infty}(F_{11}, F_{21})d\mu'. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $\tilde{I}_{\text{ср.}}(\vec{\tau};\tilde{V}) = I_{\text{ср.}}(\vec{r},V)$; $F_1 = F_1(u, \tau, \mu) = (u^2 - 2u\tau\mu + \tau^2)^{1/2}$, $F_2 = F_2(u, \tau, \mu, \mu', \varphi') = -(F_1(u, \tau, \mu))^{-1}[\tau((1-\mu^2) \cdot (1-(\mu')^2))^{1/2} \sin \varphi' + (u - \tau\mu) \mu']$; $F_{11} = F_1(\tau_o, \tau, \mu)$, $F_{21} = F_2(\tau_o, \tau, \mu, \mu', \varphi')$; τ_o — оптический радиус шара ($\tau_o = \alpha R$, где $R = |\vec{r}_S|$ — радиус шара);

$\tilde I_1(\tau_o,\mu') \equiv I(\vec r_S,\vec\Omega;V)\ \big|_{\vec\Omega\in\Omega_+(\vec r_S)} \equiv I(\vec r_S,(\vec r_S\cdot\vec\Omega)R^{-1})$ — интенсивность выходящего из шара излучения;

$$\tilde G^{\times}_{\infty}(|\vec\tau\,'-\vec\tau|,((\vec\tau\,'-\vec\tau)\cdot\vec\Omega\,')|\vec\tau\,'-\vec\tau|^{-1}) \equiv \tilde G_\infty(\vec\tau\,'-\vec\tau,\vec\Omega\,',\vec 0) \equiv \tilde G_\infty(\vec\tau\,',\vec\Omega\,',\vec\tau) \equiv \int\limits_{\Omega}\tilde G_\infty(\vec\tau\,',\vec\Omega\,',\vec\tau,\vec\Omega)d\Omega,$$

где $\tilde G_\infty(\vec\tau',\vec\Omega',\vec\tau,\vec\Omega)$ — функция Грина безразмерного УПИ для случая среды V_∞, имеющей те же локальные оптические характеристики, что и $\tilde V$, и содержащей «источник» вида $\delta(\vec\tau'-\vec\tau)\delta(\vec\Omega'-\vec\Omega)$. Оптический радиус-вектор $\vec\tau$ в (4) может задавать любую точку в $\tilde V$.

Соотношение (4) позволяет найти $I_{\text{ср.}}(\vec r,\ V)$ в любой точке среды V, если известна функция $\tilde G^{\times}_{\infty}(\ldots)$ и интенсивность излучения, выходящего из нее. Оно значительно упрощается, когда в оптически толстом шаре V (т. е. $\tau_0>>1$) содержится точечный изотропный источник (при этом $g(\vec r,\vec\Omega) \equiv C^*\delta(\vec r)$, $C^* = \text{const}$) или источники равномерно распределены в нем (т. е. $g(\vec r,\vec\Omega) \equiv C_1^* = \text{const}$), ибо для таких ситуаций известны асимптотики величин, входящих в правую часть (4) (см. [6, 14, 15]). В частности, для случая консервативного рассеяния (при этом альбедо однократного рассеяния Λ равно 1) и источника вида $C^*\delta(\vec r)$ из (4) следует такая асимптотика:

$$\tilde I_{cp.}(\vec\tau;\tilde V) \sim \frac{\alpha^2 C^*}{4\pi}\{\tilde G_\infty(|\vec\tau|) - \pi^{-1}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{-1}^{1}d\mu\int\limits_0^{2\pi}d\varphi'\int\limits_0^{1}\mu' u_0(\mu')\tilde G^{\times}_{\infty}(F_{11},F_{21})d\mu'\},\ |\vec\tau|\le\tau_o,\tau_o\to+\infty, \quad (5)$$

где $\tilde G_\infty(|\vec\tau|) = \int\limits_{\Omega}\tilde G_\infty(\vec\tau,\vec\Omega\,',\vec 0)d\Omega\,'$, $u_o(\mu)$ — коэффициент пропускания однородной консервативно рассеивающей полубесконечной среды [1]. Если $|\vec\tau| = \eta\tau_o$ и $(1-\eta)\tau_0 \to +\infty$ (т. е. точка «наблюдения» лежит на больших оптических расстояниях от границы шара; $\eta\in(0,\ 1)$), то с учетом асимптотики (4) из работы [15] получим из (5) следующее выражение:

$$\tilde I_{cp.}(\vec\tau;\tilde V) \sim \alpha^2(2\pi)^{-1}C^*(2^{-1}\tilde G_\infty(|\vec\tau|) - (3-x_1)(2\tau_o)^{-1} + 3\tau_o^{-2}\int\limits_0^1\mu^2 u_o(\mu))d\mu),\quad (1-\eta)\tau_o\to+\infty, \Lambda = 1, \quad (6)$$

где x_l – $(l+1)$-й коэффициент в разложении индикатрисы рассеяния по системе полиномов Лежандра. Если дополнительно точка «наблюдения» лежит на большом оптическом расстоянии и от центра шара, то из (6) можно получить такую простую асимптотику:

$$\tilde I_{cp.}(\vec\tau;\tilde V) \sim \alpha^2(2\pi)^{-1}C^*((3-x_1)(2\tau_o\eta)^{-1}(1-\eta) + 3\tau_o^{-2}\int\limits_0^1\mu^2 u_o(\mu)d\mu),\quad \eta\tau_o\to+\infty,(1-\eta)\tau_o\to+\infty, \Lambda = 1. \quad (7)$$

Когда $g(\vec r,\ \vec\Omega) \equiv C_1^*$ и точка «наблюдения» находится на большом оптическом расстоянии от границы шара, из (4) с учетом асимптотик, найденных в [6, 14, 15], получим

$$\tilde I_{cp.}(\vec\tau;\tilde V) \sim \alpha^{-1}C_1{}^*[6^{-1}(3-x_1)(\tau_o{}^2-\tau^2) + 2\tau_o\int\limits_0^1\mu^2 u_o(\mu)d\mu],\ (1-\eta)\tau_o\to+\infty,\quad \eta\in[0,1), \Lambda = 1. \quad (8)$$

Заметим, что на основе (4) можно найти ряд асимптотик и для случая неконсервативного рассеяния ($\Lambda\in(0,\ 1)$).

4. Выпишем ряд асимптотик для монохроматических мощностей излучения, выходящего из оптически толстых невогнутых дисперсных сред, содержащих на больших оптических расстояниях от всех точек их границ точечные изотропные стационарные источники с монохроматической мощностью E_0. o

4.1. Пусть $\tau_0(S)$ — минимальное оптическое расстояние от такого источника до границы S тела V. Обозначим через $\tilde\rho_s(\theta,\varphi)$ оптическое расстояние от источника до точки P, в которой пересекается с S луч, исходящий из начала O правой прямоугольной безразмерной декартовой системы координат $O\tilde X\tilde Y\tilde Z$ (точка O совмещена с источником) в направлении, характеризуемом углами θ, φ в сферической системе координат, согласованной с $O\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$. Тогда с учетом формулы (7) из работы [14] и двойных неравенств для $\Pi_1(S;\ V)$ [13] можно найти такую общую приближенную формулу:

$$\Pi_1(S;\ V) \approx B(\Lambda)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (\tilde{\rho}_S(\theta,\varphi) + k_1^{-1})\exp(-k_1\tilde{\rho}_S(\theta,\varphi))\sin\theta d\theta. \qquad (9)$$

Здесь $B(\Lambda) = (4-\Lambda)(8\pi(2-\Lambda)k_1\Upsilon_1)^{-1}$; k_1 — наименьший неотрицательный корень характеристического уравнения для УПИ [1]; $\Upsilon_1 = \left.\frac{d\Re_0(z)}{dz}\right|_{z=-k_1^2}$, где $\Re_o(z) = \left[1; \frac{\nu_o z}{1}, \frac{\nu_1 z}{1}, \ldots\right]$— бесконечная цепная дробь, в которой $\nu_l = (l+1)^2(c_l c_{l+1})^{-1}, c_l = (2l+1)[1-\Lambda(x_l/(2l+1))]$. Выражение (9) имеет смысл при $\tau_0(S) \to +\infty$ или $\Lambda \to 1$. К тому же при выводе (9) предполагалось, что индикатриса рассеяния является сферической или произвольной, но вытянутой в направлении вперед. Отметим, что верхняя оценка относительной погрешности формулы (9) при $\tau_0(S) \to +\infty$ или $\Lambda\to 1$ будет стремиться к $\Lambda(2(2-\Lambda))^{-1}$.

4.2. Предположим, что в дисперсной среде V рассеяние изотропно. Тогда величину $B(\Lambda)$ в (9) надо заменить на выражение $B(\Lambda) = (4\pi)^{-1}k_1B_1(\Lambda)E_0 = k_1(1-\Lambda)(4-\Lambda)(1-k_1^2)[4\pi\Lambda(2-\Lambda)(\Lambda + k_1^2-1)]^{-1}E_0$. Соотношение (9) при этом допускает дополнительные упрощения, когда форма тела V обладает какой-либо симметрией. Используя обобщенный метод Лапласа [14], из (9) возможно найти ряд достаточно простых асимптотических приближенных выражений.

a. Пусть V имеет форму шара, а источник находится в его центре. Тогда имеет место такое выражение:

$$\Pi_1(S;V) \approx 4\pi B(\Lambda)(\tau_o + k_1^{-1})\exp(-k_1\tau_o), \tau_o \to +\infty \quad \text{или} \quad \Lambda \to 1, \qquad (10)$$

где $\tau_0 = \tau_o(S)$.

b. Если в центре симметрии оптически толстого тела V, имеющего форму куба с оптической длиной ребра, равной $\tilde{d}$, находится источник, то (9) примет вид

$$\Pi_1(S;V) \approx 3B_1(\Lambda)E_o\exp(-(k_1\tilde{d}/2)), \quad k_1\tilde{d} \to +\infty. \qquad (11)$$

c. Допустим, что $V = V_1$ — дисперсная среда, обладающая формой «сжатого» сфероида (оптические длины его полуосей равны $\tilde{a}, \tilde{a}, \tilde{c}$, причем $\tilde{c} = \xi\tilde{a}$, где $\xi \in (0,\ 1)$) и содержащая в центре симметрии источник. Тогда из (9) следует справедливость такого выражения:

$$\Pi_1(S;V) \approx B_1(\Lambda)(1-\xi^2)^{-1}E_o\exp(-k_1\tilde{c}), \quad k_1\tilde{c} \to +\infty. \qquad (12)$$

d. Предположим, что тело $V = V_2$ имеет форму «вытянутого» сфероида (т. е. $\tilde{c} = \xi\tilde{a}$, где $\xi \in (1, +\infty)$) и является оптически толстым. При наличии источника в его центре симметрии из (9) получим, что

$$\Pi_1(S;V) \approx \xi(\xi^2-1)^{-1/2}(\pi k_1\tilde{a}/2)^{1/2}B_1(\Lambda)E_o\exp(-k_1\tilde{a}), \quad k_1\tilde{a} \to +\infty. \qquad (13)$$

e. Пусть V — оптически толстый бесконечный круговой цилиндр. Тогда на основе (9) или (13) можно показать, что

$$\Pi_1(S;V) \approx (\pi k_1\tilde{a}/2)^{1/2}B_1(\Lambda)E_o\exp(-k_1\tilde{a}), \quad k_1\tilde{a} \to +\infty, \qquad (14)$$

где $\tilde{a}$ — оптический радиус этого цилиндра.

5. Найдем асимптотики величины $I^{\times}_{cp.}(S;V)$ для случаев оптически толстых почти консервативно рассеивающих (т. е. $((1-\Lambda)/(3-x_1)) = h \ll 1$) тел V_1 и V_2 (это сфероиды). При этом допустим, как и ранее, что в их центрах симметрии содержатся точечные изотропные источники с монохроматической мощностью E_0. Принимая теперь во внимание неравенства и асимптотики, приведенные в [13,14], с учетом (3) получим такие асимптотические выражения:

$$I^{\times}_{cp.}(S_1;V_1) \sim \frac{2\alpha^2E_o\tilde{c}^{-2}\exp(-k_1\tilde{c})}{\pi^2\beta^2[2\xi^{-2} + \beta^{-1}\ln((1+\beta)/(1-\beta)]}, \quad k_1\tilde{c} \to +\infty, \qquad (15)$$

$$I^{\times}_{cp.}(S_2;V_2) \sim \frac{\alpha^2 k_1{}^{1/2} E_0 \tilde{a}^{-3/2} \exp(-k_1\tilde{a})}{\pi\sqrt{2\pi}\xi[(\pi/2) - \arccos(\xi^{-1}\beta) + \xi^{-2}\beta]}, \quad k_1\tilde{a} \to +\infty. \tag{16}$$

При этом в (15), (16) следует считать, что $h \to 0$, а $\beta = \left|1 - \xi^2\right|^{1/2}$.

Шар V является предельным случаем сфероидов V_1 и V_2 (V_1 и V_2 совпадают с V при $\xi = 1$). Соответствующую асимптотику для величины $I^{\times}_{cp.}(S;V)$ возможно найти на основе (3) и формулы (14) из [14]. Она имеет вид

$$I^{\times}_{cp.}(S;V) \sim \alpha^2 k_1 (2\pi^2)^{-1} E_0 \tau_0{}^{-1} \exp(-k_1\tau_0), \quad k_1\tau_0 \to +\infty, \quad h \to 0. \tag{17}$$

6. Из полученных выше аналитических выражений и асимптотик (4)—(17) следует, что закономерности многократного рассеяния света в дисперсных средах, не имеющих плоскопараллельной симметрии, носят зачастую существенно более сложный характер по сравнению с выявленными при решении классических задач теории переноса излучения [1]. В частности, они достаточно сильно варьируются при существенном изменении конфигурации дисперсных сред. Однако имеется ряд и общих сходных черт в поведении величины $\Pi_1(S;\ V)$ для дисперсных сред различной формы. Например, формулы (11) и (12) указывают на схожесть типа функциональных зависимостей величины $\Pi_1(S;\ V)$ от $\tau_0(S)$ для тех случаев, когда $\tau_0(S) \to +\infty$ и V имеет форму куба или «сжатого» сфероида. Утверждение такого же рода верно и тогда, когда V является «вытянутым» сфероидом или бесконечным круговым цилиндром (см. выражения (13), (14)). Следует отметить, что при прочих равных условиях вид функциональной зависимости главного члена асимптотики величины $\Pi_1(S;\ V)$ от $\tau_0 = \tau_0(S)$ (при $\tau_0 \to +\infty$) будет таким же, как и в (11), (12), если V — плоскопараллельный слой, который имеет оптическую толщину $2\tau_0$ и содержит на оптической глубине τ_0 точечный изотропный источник.

Литература

1. Соболев В. В. Рассеяние света в атмосферах планет. М., 1972.
2. Минин И. Н. Теория переноса излучения в атмосферах планет. М., 1988.
3. Крестьяникова М. А., Басс Л. П., Кузнецов В. С. В тезисах международного симпозиума стран СНГ «Атмосферная радиация» 18—21 июня 2002 г. С. 21—22.
4. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М., 1972.
5. Ершов Ю. И., Шихов С. Б. Методы решения краевых задач теории переноса. М., 1977.
6. Колесов А. К. // Астрофизика. 1985. Т. 22, № 1. С. 177—187.
7. Нагирнер Д. И. // Астрофизика. 1994. Т. 37, № 1. С. 111—127.
8. Нагирнер Д. И. // Астрофизика. 1994. Т. 37, № 4. С. 665—670.
9. Гермогенова Т. А., Павельева Е. Б. // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1989. Т. 29, № 8. С. 1195—1211.
10. Роговцов Н. Н. // Докл. АН БССР. 1981. Т. 25, № 5. С. 420—423.
11. Роговцов Н. Н. // Докл. АН Беларуси. 1992. Т. 36, № 1. С. 26—29.
12. Роговцов Н. Н. Свойства и принципы инвариантности. Приложение к решению задач математической физики. Ч. 1. Мн., 1999.
13. Роговцов Н. Н. // Изв. АН СССР. ФАО. 1985. Т. 21, № 10. С. 1111—1112.
14. Роговцов Н. Н. // Докл. АН Беларуси. 1997. Т. 41, № 5. С. 52—57.
15. Роговцов Н. Н. // Докл. НАН Беларуси. 2002. Т. 46, № 5. С. 50—53.

ROGOVTSOV N. N., KARPUK V. V.

ANALYTICAL EXPRESSIONS FOR AVERAGE AND INTEGRAL CHARACTERISTICS OF RADIATION FIELDS IN DISPERSION MEDIA OF DIFFERENT CONFIGURATIONS

Summary

Some analytical expressions and asymptotical formulas are obtained for average intensities and integral characteristics of the radiation fields in nonconcave dispersion media.