УДК 539.3

Горбач Н.И., Мирук А.С.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАДИУСА КРИВИЗНЫ КРИВОЙ ПРИ ЗАДАНИИ ЕЁ УРАВНЕНИЯ КООРДИНАТНЫМ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ СПОСОБАМИ

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

В работе дана методика определения радиуса кривизны плоской кривой при задании ее коорднинатным и параметрическим способами. Показано применение этих способов при изучении темв «Кинематика точки» курса теоретической механики.

Определен радиус кривизны параболы в некоторых характерных ее точках.

Возьмем на плоской кривой две точки M и M_1 (рис. 1), расположенные близко друг от друга. Угол $\Delta\alpha$ между касательными к кривой в точках M и M_1 называется углом смежности, соответствующим дуге $\overset{\frown}{MM_1}$. **Отношение угла смежности $\Delta\alpha$** к длине соответствующей дуги $\overset{\frown}{MM_1}=\Delta s$ называется средней кривизной дуги $\overset{\frown}{MM_1}$ и обозначается $\kappa_{ср}$, т.е.

$$\kappa_{ср}=\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}. \qquad (1)$$

Кривизной кривой в точке M называется предел, к которому стремится средняя кривизна дуги $\overset{\frown}{MM_1}$, когда точка M_1 вдоль по кривой стремится к точке M.

$$\kappa=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}. \qquad (2)$$

Величина, обратная кривизне, называется радиусом кривизны и обозначается ρ.

$$\rho=\frac{1}{\kappa}. \qquad (3)$$

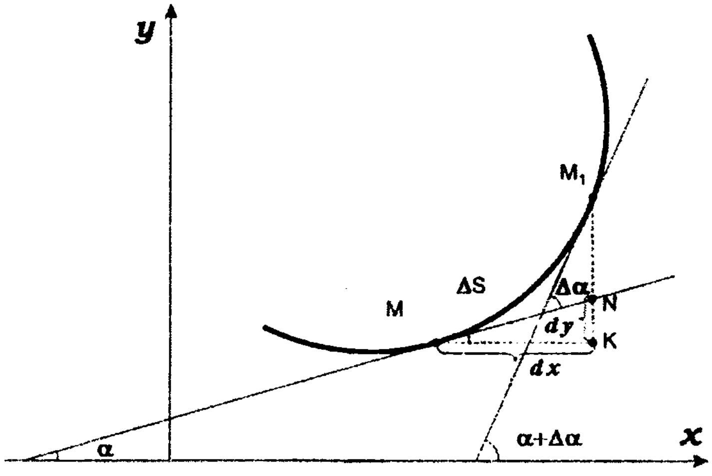

Рис. 1

Понятия кривизны и радиуса кривизны кривой используются в кинематике точки при определении ускорения точки, если ее движение задано естественным способом. В этом случае вводится понятие вектора кривизны кривой.

Для этого введём единичные векторы (орты) $\vec{\tau}$ и $\vec{\tau_1}$ касательных, проведенных в точках M и M_1 (рис. 2). Перенесём вектор $\vec{\tau_1}$ в точку M и построим векторную сумму

$$\vec{\tau_1}=\vec{\tau}+\vec{\Delta\tau} \qquad (4)$$

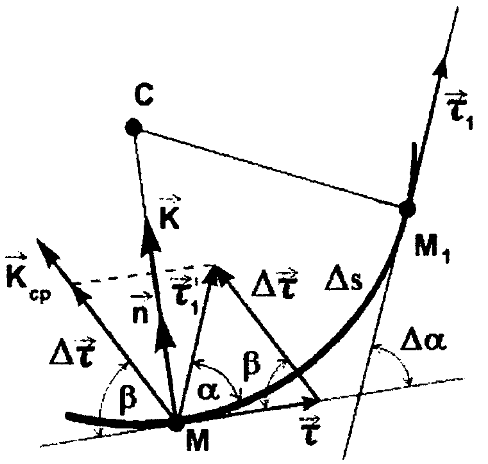

Рис. 2

Вектором средней кривизны называется отношение вектора $\overrightarrow{\Delta\tau}$ к длине Δs дуги $\overline{\mathrm{MM}_1}$, т.е.

$$\overrightarrow{\kappa_{\text{ср}}} = \frac{\overrightarrow{\Delta\tau}}{\Delta s}. \tag{5}$$

Вектор $\overrightarrow{\kappa_{\text{ср}}}$ характеризует поворот касательной к кривой на участке MM_1, направлен по $\overrightarrow{\Delta\tau}$, т.е. в сторону вогнутости кривой.

Вектор кривизны кривой в данной точке представляет собой предел отношения $\overrightarrow{\Delta\tau}$ к Δs, при $\Delta s \to 0$ т.е.

$$\vec{\kappa} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta\tau}}{\Delta s}. \tag{6}$$

Так как $\vec{\tau} = \vec{\tau}(s)$, т.е. зависит от перемещения точки по кривой, то

$$\vec{\kappa} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}. \tag{7}$$

Определим модуль и направление вектора кривизны кривой

$$|\vec{\kappa}| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\overrightarrow{\Delta\tau}|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{2|\vec{\tau}|\sin\frac{\Delta\alpha}{2}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \kappa = \frac{1}{\rho}, \tag{8}$$

т.е. модуль вектора кривизны равен кривизне кривой.

Вектор $\overrightarrow{\kappa_{\text{ср}}}$ составляет с касательной (ортом $\vec{\tau}$) угол $\beta = 90^\circ - \frac{\Delta\alpha}{2} \cdot \lim_{\Delta s \to 0} \beta = \lim_{\Delta s \to 0\ \Delta\alpha \to 0} \left(90^\circ - \frac{\Delta\alpha}{2}\right) = 90^\circ$, т.е. в пределе вектор $\overrightarrow{\kappa_{\text{ср}}}$ представляет собой вектор кривизны $\vec{\kappa}$, который направлен внутрь вогнутости кривой перпендикулярно касательной, т.е. по нормали к касательной. Введем единичный вектор $\vec{n}$ этой нормали. Тогда вектор кривизны можно представить в виде

$$\vec{\kappa} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \vec{n}\frac{1}{\rho}, \tag{9}$$

где $\rho = \mathrm{CM}$ – радиус кривизны кривой. С учётом формулы (9) определяется модуль и направление нормального ускорения точки. Поэтому радиус кривизны кривой в кинематике точки играет важную роль.

Выведем формулы для радиуса кривизны кривой при ее задании параметрическим и координатным способами.

Пусть плоская кривая задана параметрическим способом, т.е. даны её уравнения: $x = f_1(t)$ *и* $y = f_2(t)$. С учётом формулы (2) кривизна кривой

$$\kappa = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\dot{\alpha}}{\dot{s}}. \tag{10}$$

Из ΔMNK (Рис. 1) $tg\,\alpha = \frac{NK}{KM} = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot y}{\dot x}$. (11)

Тогда $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\dot y}{\dot x}$, а $\dot\alpha = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{yx-xy}{x^2+y^2}$. (12)

Так как $s = s(t)$, то $\dot s = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$, где $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$ – дифференциал дуги.

Тогда $\dot s = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dt} = \sqrt{\dot x^2+\dot y^2}$. (13)

Подставив (12) и (13) в (10), получим $\kappa = \frac{\ddot y\dot x - \ddot x\dot y}{(\dot x^2+\dot y^2)^{\frac{3}{2}}}$ (14)

Тогда радиус кривизны равен $\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{(\dot x^2+\dot y^2)^{\frac{3}{2}}}{|\ddot y\dot x - \ddot x\dot y|}$.

(15)

При задании плоской кривой координатным способом задаётся уравнение $y = f(x)$. Для вывода формулы радиуса кривизны в этом случае вместо производных по времени введём производные по аргументу x.

Для этого уравнение (15) преобразуем, заменив в нём аргумент t на x.

$$\rho = \frac{\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}-\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt}\right|} = \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2ydx-d^2xdy}{dt^3}\right|} = \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dx}\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dx}\right)\right|} = \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}, \quad (16)$$

так как $\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dx}\right) = 0$.

Окончательно с учётом, что $\frac{dy}{dx} = y'$, $\frac{d^2y}{dx^2} = y''$ выражение (16) примет вид

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}. \quad (17)$$

Раскроем физический смысл уравнения (15) и всех величин, входящих в это уравнение. Из кинематики точки известно, что

$\dot x = \frac{dx}{dt} = v_x$, $\dot y = \frac{dy}{dt} = v_y$, $\ddot x = \frac{dv_x}{dt} = a_x$, $\ddot y = \frac{dv_y}{dt} = a_y$ представляют проекции скорости и ускорения точки на декартовые оси координат при задании движения точки координатным способом. В этом случае радиус кривизны можно определить по формуле

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}, \quad (18)$$

где скорость $v = \sqrt{v_x^2+v_y^2}$, а нормальное ускорение $a_n = \frac{|a_y v_x - a_x v_y|}{v}$.

Тогда $$\rho = \frac{v^3}{|a_y v_x - a_x v_y|} = \frac{(v_x^2+v_y^2)^{\frac{3}{2}}}{|a_y v_x - a_x v_y|}, \qquad (19)$$

что соответствует формуле (15). В этом случае нормальное ускорение можно определять по формуле $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$, где полное ускорение $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, а касательное $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ и затем воспользоваться формулой (18).

В качестве примера рассмотрим определение радиуса кривизны траектории тела, брошенного с некоторой начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Траекторией в этом случае является парабола, параметрические уравнения которой

$$x = v_0 t \cos \alpha,$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \qquad (20)$$

Исключив из этих уравнений время t, получим уравнение траектории в координатной форме

$$y = x\, tg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0{}^2\cos{}^2\alpha}. \qquad (21)$$

Определим радиус кривизны траектории в начальный момент времени и в наивысшей ее точке.

а) Используем параметрический способ задания траектории. Определяем проекции скорости и ускорения точки на оси координат

$$\dot{x} = v_x = v_0 \cos\alpha \; ; \dot{y} = v_y = v_0 \sin\alpha - gt;$$

$$\ddot{x} = a_x = 0 \; ; , \ddot{y} = a_y = -g.$$

В начальный момент $t = 0$

$$\rho_0 = \frac{((v_0 \cos\alpha)^2 + (v_0 \sin\alpha)^2)^{\frac{3}{2}}}{|-gv_0 \cos\alpha - 0 \cdot v_0 \sin\alpha|} = \frac{v_0^2}{g cos\alpha}.$$

В наивысшей точке $v_y = 0$

$$\rho = \frac{v_0^3 \cos^3\alpha}{v_0\, g \cos\alpha} = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{g}.$$

б) Используем координатный способ задания траектории. Определяем производные

$$y' = \frac{dy}{dx} = tg\alpha - \frac{gx}{v_0{}^2\cos^2\alpha};$$

$$y'' = -\frac{g}{v_0{}^2\cos^2\alpha}.$$

В начальный момент $x = 0$

$$\rho_0 = \frac{(1 + tg^2\,\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}} = \frac{v_0^2}{g cos\alpha}.$$

В наивысшей точке функция $y = f(x)$ имеет максимум, поэтому $y' = 0$, а

$$\rho = \frac{1}{\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}} = \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}.$$

Полученные значения ρ по первому и второму способам в точности совпадают, и в зависимости от способа задания уравнения траектории можно пользоваться уравнениями (15), (18), (19) при параметрическом способе или уравнением (17) при координатном способе задания траектории.

Однако, при координатном способе задания траектории, т.е. когда известна функция $y = f(x)$, радиус кривизны траектории можно определить в любой ее точке, для чего необходимо вычислить только значения производных y' и y'' при соответствующих значениях аргумента x, что является весьма полезным при определении давления при движении, например, автомобиля по выпуклому мосту.

ЛИТЕРАТУРА

1. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Госиздат, 1963. – 870 с. 2 Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Ч. 1. М.: Высшая школа, 1984. – 343 с.

УДК 621.791.72

Девойно О.Г., Кардаполова М.А., Луцко Н.И., Лапковский А.С.

ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ВАЛИКОВ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ ЛАЗЕРНОЙ НАПЛАВКИ

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

В последнее время все более широкое применение в различных отраслях промышленности находит лазерная наплавка покрытий [1, 2]. Область ее применения постоянно увеличивается. Она используется как традиционно, для восстановления размеров изношенных деталей машин и оборудования или придания поверхности определенных физико-механических характеристик [3, 4, 5], так и в сравнительно новых методах создания новых деталей (или ремонта деталей) путем их непосредственного формирования при наплавке с применением компьютерных пространственных (3D) моделей деталей и систем ЧПУ с обратной связью [6, 7, 8, 9, 10] (методы Direct Metal Deposition – DMD, Laser Rapid Forming – LRF, Rapid Prototyping – RP, Laser Engineered Net Shaping – LENS и тд.), а также для получения материалов с заранее заданны-