

## НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ

Белорусский национальный технический университет,  
Минск, Беларусь

При рассмотрении изгиба консоли прямоугольного поперечного сечения распределённой нагрузкой (рис.1) в курсе «Сопротивление материалов» установлено, что в поперечных сечениях возникают касательные напряжения, действующие в плоскости сечения, и нормальные напряжения, действующие перпендикулярно плоскости сечения. Эти напряжения определяются из следующих выражений (1).

$$\sigma_x = -\frac{M_x}{I_z} \cdot y; \tau_{xy} = -\frac{3 \cdot g \cdot x}{2 \cdot b \cdot h^3} \cdot (h^2 - 4 \cdot y^2); \sigma_y = 0 \quad (1)$$

где  $M_x = -\frac{g \cdot x^2}{2}$  – изгибающий момент в сечении на расстоянии  $X$  от начала координат;

$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$  – момент инерции сечения;

$g$  – интенсивность распределённой нагрузки;

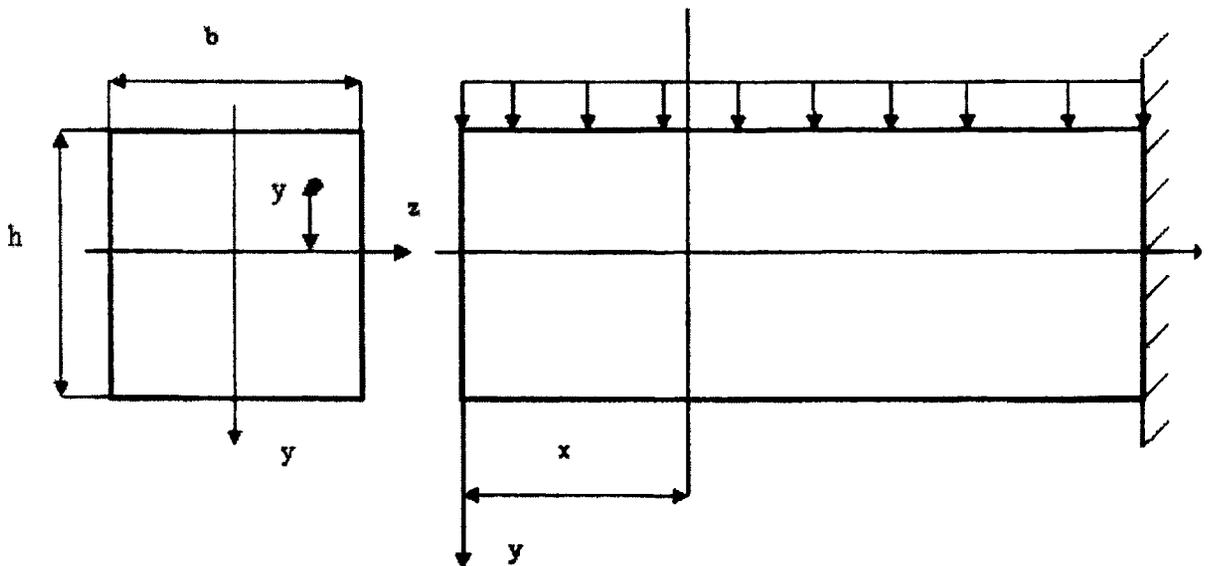


Рис. 1

Определим зависимости для этих же напряжений с точки зрения теории упругости.

Для решения этой задачи воспользуемся зависимостями выраженными через функцию напряжений (2).

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

где  $\varphi$  – функция напряжений, которая является функцией переменных  $X$  и  $Y$ .

Функция напряжений выбирается таким образом, чтобы она удовлетворяла следующему бигармоническому дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (3)$$

Для определения функции напряжений следует предположить, что в плоскости сечения действуют касательные напряжения, и они будут изменяться как по высоте сечения, так и по длине стержня в соответствии с изменением поперечной силы. Так как поперечная сила изменяется линейно вдоль оси X, то закон изменения касательных напряжений в общем виде можно представить:

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = x \cdot f_1(y). \quad (4)$$

Интегрируя последнее выражение, определим значение функции напряжений:

$$\varphi = -\frac{x^2}{2} \int f_1(y) dy + \int f(x) dx + f_2(y), \quad (5)$$

где  $f_1(y)$  и  $f_2(y)$  - неизвестные функции, зависящие от координаты Y, а  $f(x)$  - неизвестная функция зависящая только от координаты X.

Рассматривая совместно выражение (2) и (4) получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} - 2 \cdot \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{\partial^3 f_1(y)}{\partial y^3} + \frac{\partial^4 f_2(y)}{\partial y^4} = 0. \quad (6)$$

Полученные уравнения будут удовлетворяться при всех значениях X и Y, если:

$$\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} = 0; \quad \frac{\partial^3 f_1(y)}{\partial y^3} = 0; \quad \frac{\partial^4 f_2(y)}{\partial y^4} - 2 \cdot \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} = 0. \quad (7)$$

Из уравнений (7) следует:

$$\begin{cases} f_1(y) = c_1 \cdot \frac{y^2}{2} + c_2 \cdot y + c_3 \\ f_2(y) = c_1 \cdot \frac{y^5}{60} + c_2 \cdot \frac{y^4}{12} + c_5 \cdot \frac{y^3}{6} + c_6 \cdot \frac{y^2}{2} + c_7 \cdot y + c_8 \\ f(x) = c_9 \cdot \frac{x^2}{2} + c_{10} \cdot x + c_{11} \end{cases} \quad (8)$$

Рассматривая совместно систему уравнений (8) и уравнение (5) окончательно получим выражение для функции напряжений:

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{x^2}{2} \left( c_1 \cdot \frac{y^3}{6} + c_2 \cdot \frac{y^2}{2} + c_3 \cdot y + c_4 \right) + c_1 \cdot \frac{y^5}{60} + c_2 \cdot \frac{y^4}{12} + c_5 \cdot \frac{y^3}{6} + c_6 \cdot \frac{y^2}{2} + c_7 \cdot y + \\ & + c_8 + c_9 \cdot \frac{x^3}{6} + c_{10} \cdot \frac{x^2}{2} + c_{11} \cdot x + c_{12} \end{aligned} \quad (9)$$

где  $c_1 \dots c_{12}$  - постоянные интегрирования.

Рассматривая совместно выражения (9) и (2) получим зависимости для напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ :

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{x^2}{2} \cdot (c_1 \cdot y + c_2) + c_1 \cdot \frac{y^3}{3} + c_2 \cdot y^2 + c_5 \cdot y + c_6 \\ \sigma_y = -c_1 \cdot \frac{y^3}{6} - c_2 \cdot \frac{y^2}{2} - c_3 \cdot y + c_4 + c_9 \cdot x + c_{10} \\ \tau_{xy} = x \cdot (c_1 \cdot \frac{y^2}{2} + c_2 \cdot y + c_3) \end{cases} \quad (10)$$

Из граничного условия следует, что при  $y = 0$ ,  $\sigma_y = 0$ . Это условие выполняется в том случае, если  $c_2 = c_6 = 0$ .

Следующее граничное условие требует, чтобы при  $y = \frac{h}{2}$ ,  $\sigma_y = 0$ . Оно выполняется

$$\text{если } c_9 = 0, c_4 + c_{10} = -\frac{q}{2 \cdot b}$$

Из следующего граничного условия следует, что при  $y = \pm \frac{h}{2}$ ,  $\tau_{xy} = 0$ . Это условие будет выполнено, если  $c_3 = -c_1 \cdot \frac{h^2}{8}$ .

С учётом полученных постоянных интегрирования формулы (10) можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} \sigma_x = -c_1 \cdot \frac{x^2}{2} \cdot y + c_1 \cdot \frac{y^3}{3} + c_5 y \\ \sigma_y = -c_1 \cdot \frac{y^3}{3} - c_1 \frac{h^2}{8} \cdot y - \frac{q}{2 \cdot b} \\ \tau_{xy} = c_1 \cdot \frac{x}{8} \cdot (h^2 - 4 \cdot y^2) \end{cases} \quad (11)$$

Постоянную интегрирования  $c_1$  найдём из следующего условия:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot b \cdot dy = c_1 \cdot b \cdot \frac{x}{8} \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (h^2 - 4 \cdot y^2) \cdot dy = -q \cdot x$$

Откуда:

$$c_1 = -\frac{12 \cdot q}{b \cdot h^3} \quad (12)$$

Подставим постоянную интегрирования  $c_1$  в выражение (11) получим:

$$\begin{cases} \sigma_x = -x^2 \cdot \frac{6 \cdot q}{b \cdot h^3} \cdot y + \frac{4 \cdot q}{b \cdot h^3} \cdot y^3 + c_5 \cdot y \\ \sigma_y = \frac{3 \cdot q}{2 \cdot b \cdot h} \cdot y - \frac{2 \cdot q}{b \cdot h^3} \cdot y^3 - \frac{q}{2 \cdot b} \\ \tau_{xy} = -\frac{3 \cdot q \cdot x}{2 \cdot b \cdot h^3} \cdot (h^2 - 4 \cdot y^2) \end{cases} \quad (13)$$

Постоянную интегрирования  $c_5$  определим из следующего условия:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot y \cdot b \cdot dy = b \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( -x^2 \cdot \frac{6 \cdot q}{b \cdot h^3} \cdot y + \frac{4 \cdot q}{b \cdot h^3} \cdot y^3 + c_5 \cdot y \right) \cdot y \cdot dy = -\frac{q \cdot x^2}{2}$$

Из последнего выражения легко установить, что:

$$c_5 = -\frac{3 \cdot q}{5 \cdot b \cdot h} \quad (14)$$

Подставив значение  $c_5$  в выражение (13) окончательно получим формулы для определения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ , которые будут иметь вид:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{4 \cdot q}{b \cdot h^3} \cdot y^3 - \frac{6 \cdot q}{b \cdot h^3} \cdot x^2 \cdot y - \frac{3 \cdot q}{5 \cdot b \cdot h} \cdot y \\ \sigma_y = \frac{3 \cdot q}{2 \cdot b \cdot h} \cdot y - \frac{2 \cdot q}{b \cdot h^3} \cdot y^3 - \frac{q}{2 \cdot b} \\ \tau_{xy} = -\frac{3 \cdot q \cdot x}{2 \cdot b \cdot h^3} \cdot (h^2 - 4 \cdot y^2) \end{cases} \quad (15)$$

Распределения нормальных напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  показано на рис. 2

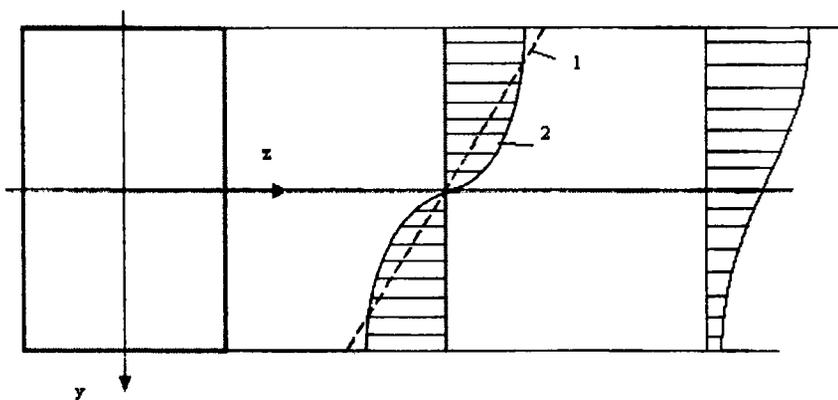


Рис. 2

где 1б – распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$  по методу сопротивления материалов;

2б – распределение напряжений  $\sigma_x$  по полученной формуле;

в – распределение напряжений  $\sigma_y$  по полученной формуле;

Анализируя одновременно выражения (1) и (15) приходим к следующему выводу: нормальные напряжения  $\sigma_x$  изменяются по высоте сечения по закону кубической параболы, но не по линейному закону как установлено в курсе «Сопротивление материалов». Причём максимальные напряжения при  $y = \pm \frac{h}{2}$  могут быть как большие, так и меньше по величине напряжений, определяемых по методу сопротивления материалов и это зависит от соотношения между шириной и высотой поперечного сечения стержня. В стержне, нагруженном распределённой нагрузкой напряжение  $\sigma_y$ , отличны от нуля. Касательные напряжения полученные методами теории упругости и сопротивления материалов, не отличаются друг от друга.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев В.Н. Сопротивление материалов. Наука, Москва, 1972. 2. Ван-Цзи-де Прикладная теория упругости. Физматгиз, Москва, 1959.

УДК 621.18.654

*Апетёнок П.А., Абу Сахьон Вассим, Николаев В.А.*

### ПРИМЕНЕНИЕ ПК В ПРОЕКТИРОВАНИИ И РАСЧЁТЕ МНОГОЗВЕННОГО МЕХАНИЗМА В ПРИЛОЖЕНИИ EXCEL

*Белорусский национальный технический университет  
Минск, Беларусь*

С развитием информационных технологий, в настоящее время широко используются возможности ПК для проектирования различных механизмов. Это обусловлено высокими требованиями к надёжности и долговечности машин и их элементов, что и определяет рост конкурентоспособности изделий, разработанных с помощью многокритериального подхода к проектированию оптимальной конструкции. Данная работа посвящена теме проектирования и расчёта многозвеного механизма с помощью ПК. Задача программы заключается в определении различных параметров механизма (кинематика, силовой расчёт) по заданным параметрам. В приложении Excel производится расчёт и отображение графической информации этого механизма, который может использоваться в различных областях машиностроения.

Исходными данными для проектирования являются:

- Геометрические параметры механизма
- Масса каждого звена
- Угловая скорость вращения кривошипа
- Моменты инерции звеньев механизма

После ввода исходных данных, автоматически производится расчёт для каждого положения механизма через  $6^\circ$ , и построение графической информации.

Программа условно разбита на 2 части: кинематику и силовой расчёт.

▪ В первой части отображаются: базовая схема механизма; область ввода размеров; схема механизма, построенная по введённым данным; область диагностики; план 12-ти положений; график функции положения, аналогов скорости и ускорения ползуна; числовые данные результатов кинематического расчёта.

▪ Во второй части отображаются: область ввода рабочей нагрузки для каждого положения механизма через  $6^\circ$ ; область ввода угловой скорости кривошипа, массы и моментов инерции звеньев; график рабочей нагрузки; диаграмма амплитуды гармоник; годограф главного вектора