

$$\begin{aligned} \delta \bar{U}_0(r_0) &= \delta \bar{U}(r_0) / \delta \bar{U}_z^2(0, 0), \quad r_0 = r / a, \\ \delta \bar{U}(r_0) &= \begin{bmatrix} \delta U_r \\ \delta U_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_r^{(2)}(r, 0) - U_r^{(1)}(r, 0) \\ U_z^{(2)}(r, 0) - U_z^{(1)}(r, 0) \end{bmatrix}, \\ \delta \bar{U}(r_0) &= \frac{2}{\pi r_0} \sum_{k=0}^N \int_0^1 \theta(\zeta, r_0) \rho \omega(\zeta) \bar{P}_n(\zeta) d\zeta \quad \text{от } r_0 \leq 1. \\ \theta(\zeta, r_0) &= \begin{bmatrix} -\zeta / \sqrt{\zeta^2 - r_0^2} & 0 \\ 0 & r_0 / \sqrt{\zeta^2 - r_0^2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (15)$$

Зависимость величины раскрытия трещины  $\delta \bar{U}_r$  в зависимости от  $r_0$  при 1)  $k_0 = 0$ , 2)  $k_0 = 1$ , 3)  $k_0 = 2$ ;  $a/h = 1$  представлена на рис. 3

**Выводы:**

- 1) Из рис.2 следует, что зависимость коэффициента интенсивности напряжений имеет максимальное значение при длинах волн, кратких радиусу трещины.
- 2) Раскрытие трещины максимально в динамике ( $k_0 = 1$ ), когда длина волны равна радиусу трещины, причем в этом случае она больше, чем в статическом случае ( $k_0 = 0$ ).
- 3) Таким образом, наиболее надежна методика обнаружения трещины состоит в возбуждении волнового поля со спектром частот (длин волн) в области резонансных значений. Дифракционное взаимодействие волны с трещиной (включением) является сигналом о наличии трещин определенного масштаба.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Чигарев А.В., Юринок В.И. Оптимальное оценивание функции поврежденности материала по измерению АЭ «Акустическая эмиссия материалов и конструкций». – Ростов-на-Дону: сб. тер. докл. I Всесоюзная конференция, часть II, 1984. – с. 182-184. 2. Gubernatis J.E. Long-wave approximation for the scattering of elastic waves from flows with application to ellipsoidal voids and inclusions. J. Appl. Phys. v. 50, №6. – 1979, pp. 4046-4058. 3. Чигарев А.В. Распространение скачков напряжений акустической эмиссии в неоднородных средах. – Ростов-на-Дону: сб. тер. докл. I Всесоюзная конференция «Акустическая эмиссия материалов и конструкций», часть I, 1984. – с. 15-16. 4. Чигарев А.В. Распространение ударных волн в стохастически неоднородной упругой среде. Прикладная механика, т. 8. вып. 5, 1972 – с. 69-74. 5. Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б. ультразвуковые методы в физике твердого тела. М.: Мир, 1972. – 307с. 6. Лурье А.И. Теория упругости. М.: «Наука», 1970. – 939с. 7. Справочник по специальным функциям. М.: «Наука», 1979. – 832. 8. Астафьев Л.В. Нелинейная механика разрушения. «Самарский университет», 2001. – 631с.

УДК 539.3 519.6 519.5

Мелешко И.Н., Чигарев А.В.

**ДЕФОРМАЦИЯ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ НЕССИМЕТРИЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ**

*Белорусский национальный технический университет  
Минск, Беларусь*

Прогиб пластины под действием нагрузки распределенной по контуру изучается во многих прикладных задачах теории упругих пластин [1]. Как правило рассматриваются нагрузки равномерно распределенные по контуру. В случае кинематических граничных условий зависимость перемещений и их производных от круговой координаты усложняет решение задачи.

В данной работе на основе точного решения предельной задачи в интегральном виде конструируется его приближенное представление логарифмами. Полученные в работе приближенные фор-

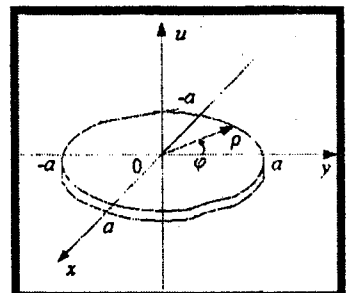


Рисунок 1

мулы сравнительно просты, не содержат квадратур и позволяют оценить погрешность вычислений.

**Постановка задачи**

Круглая упругая пластина имеет радиус  $a$  и по контуру заданы перемещения и радиальные деформации, зависящие от угловой координаты рис. 1.

Изгибные перемещения  $u(\rho, \varphi)$  удовлетворяют уравнению

$$\Delta u = 0, \quad \rho < a$$

$$u|_{\rho=a} = g(\varphi), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|_{r=0} = L(\varphi), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

Переходя к безразмерной радиальной координате  $r = \rho / a$  запишем уравнения в виде

$$\Delta u = 0, \quad r < 1. \tag{1}$$

$$u|_{r=1} = g(\varphi), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r_2} \right| = L(\varphi) \cdot a^{-1} = l(\varphi). \tag{2}$$

Оператор  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ .

**1. Точное решение задачи (1), (2) в предельном случае.**

Бигармоническое уравнение (1) при граничных условиях (2) имеет единственное решение и искомая бигармоническая функция  $u = u(r, \varphi)$  может быть представлена в единичном круге с центром в начале координат с помощью двух гармонических функций  $u_1 = u_1(r, \varphi)$  и  $u_2 = u_2(r, \varphi)$  в виде

$$u = (r^2 - 1)u_1 + u_2. \tag{3}$$

При этом из граничных условий (2) для бигармонической функции  $u$  следуют граничные условия для гармонических функций  $u_1$  и  $u_2$

$$u_2|_{r=1} = g(\varphi), \quad \left( 2u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} = l(\varphi). \tag{4}$$

Гармонические в круге функции  $u_1$  и  $u_2$  при граничных условиях (4) могут быть найдены при помощи интеграла Пуассона

$$u_2(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau, \tag{5}$$

$$u_1(r, \varphi) = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} l(\tau) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau - r \frac{\partial u_2(r, \varphi)}{\partial r} \right]. \tag{6}$$

Подставляя эти выражения для  $u_1$  и  $u_2$  в формулу (3), получаем точное решение предельной задачи (1), (2) в виде

$$u(r, \varphi) = \frac{r^2 - 1}{2} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} l(\tau) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau - r \frac{\partial u_2(r, \varphi)}{\partial r} \right] + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau. \tag{7}$$

**2. Приближенное решение предельной задачи (1), (2).**

Для приближения интегралов Пуассона в представлении решения (7) воспользуемся полученной в [2] приближенной формулой и способом оценки ее погрешности. Можем записать приближенные равенства

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} l(\tau) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau \approx \sum_{-n}^n A_k(r, \varphi) l(\varphi_k), \tag{8}$$

где коэффициенты

$$A_k(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \left[ h + 2 \operatorname{Im} \left( \ln \left( 1 - ze^{-i(\varphi_k + \frac{h}{2})} \right) - \ln \left( 1 - ze^{-i(\varphi_k - \frac{h}{2})} \right) \right) \right], \tag{10}$$

А узлы  $\varphi_k = kh$ ,  $k = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$ ,  $h = \frac{2\pi}{n+1}$ . Квадратурные суммы в (8), (9) обладают замечательным свойством [2]: все коэффициенты  $A_k(r, \varphi)$  неотрицательны при всех  $r$  и  $\varphi$  и удовлетворяют соотношению

$$\sum_{-n}^n A_k(r, \varphi) = 1.$$

Однако, чтобы получить приближение производной  $\frac{\partial u_2(r, \varphi)}{\partial r}$  в формулах (6), (7), нам потребуется специальная приближенная формула для интеграла (5).

Гармоническая функция внутри единичного круга  $u_2(r, \varphi)$  представима также рядом

$$u_2(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) d\tau + \frac{1}{\pi} \sum_{-n}^n r^k \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) \cos(\tau - \varphi) d\tau.$$

Тогда

$$\begin{aligned} r \frac{\partial u_2(r, \varphi)}{\partial r} &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} k r^k \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) \cos(\tau - \varphi) d\tau = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} k r^k \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) d \sin(\tau - \varphi) = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left[ g(\tau) \sin k(\tau - \varphi) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} g'(\tau) \sin k(\tau - \varphi) d\tau \right] = \\ &= -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} r^k \int_{-\pi}^{\pi} g'(\tau) \sin k(\tau - \varphi) d\tau = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left[ \left( -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g'(\tau) \sin k\tau d\tau \right) \cos k\varphi + \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g'(\tau) \cos k\tau d\tau \right) \sin k\varphi \right]. \end{aligned}$$

Заменяя последний ряд интегралом, получим

$$r \frac{\partial u_2(r, \varphi)}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g'(\tau) \frac{2r \sin(\tau - \varphi)}{1 - 2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau. \quad (12)$$

По системе точек (11) построим квадратную формулу для интеграла в (12). Пусть

$$g'(\varphi) \approx \tilde{g}'(\varphi) = \sum_{-n}^n \theta_k(\varphi) g'(\varphi_k), \quad (13)$$

где

$$\theta_k(\varphi) = \begin{cases} 1, & \varphi \in \left[ \varphi_k - \frac{h}{2}, \varphi_k + \frac{h}{2} \right], \\ 0, & \varphi \notin \left[ \varphi_k - \frac{h}{2}, \varphi_k + \frac{h}{2} \right]. \end{cases}$$

Тогда

$$r \frac{\partial u_2(r, \varphi)}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g'(\tau) \frac{2r \sin(\tau - \varphi)}{1 - 2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau \approx \sum_{-n}^n B_k(r, \varphi) g'(\varphi_k). \quad (14)$$

Где коэффициенты

$$B_k(r, \varphi) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_k - \frac{h}{2}}^{\varphi_k + \frac{h}{2}} g'(\tau) \frac{2r \sin(\tau - \varphi)}{1 - 2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau. \quad (15)$$

Займемся вычислением коэффициентов  $B_k(r, \varphi)$ . Преобразовав ядро под знаком интеграла в (12) в ряд

$$\begin{aligned} \frac{2r \sin(\tau - \varphi)}{1 - 2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} &= -\operatorname{Im} \frac{t+z}{t-z} = -\operatorname{Im} \left( \frac{2t}{t-z} - 1 \right) = \\ &= -2 \operatorname{Im} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{t^m} \right) = -2 \sum_{m=1}^{\infty} r^m \sin m(\tau - \varphi) \end{aligned}$$

получаем

$$B_k(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} r^m \int_{\varphi_k - \frac{h}{2}}^{\varphi_k + \frac{h}{2}} g' \sin m(\tau - \varphi) d\tau = -\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m}{m} \left[ \cos m \left( \varphi_k + \frac{h}{2} - n \right) - \cos m \right] =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m e^{im \left( \varphi_k - \frac{h}{2} - \varphi \right)}}{m} - \frac{r^m e^{im \left( \varphi_k - \frac{h}{2} - \varphi \right)}}{m} \right].$$

Заменим ряды их суммами. Тогда коэффициенты

$$- B_k(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[ \ln \left( 1 - ze^{-i \left( \varphi_k - \frac{h}{2} \right)} \right) - \ln \left( 1 - ze^{-i \left( \varphi_k + \frac{h}{2} \right)} \right) \right]. \quad (16)$$

Подставляя приближенные выражения интегралов (8), (9), (14) с коэффициентами (11), (16) в формулу (7), находим приближенное решение предельной задачи (1), (2)

$$\tilde{u}(r, \varphi) = \sum_{-n}^n A_k(r, \varphi) g(\varphi_k) - \frac{1-r^2}{2} \left[ \sum_{-n}^n A_k(r, \varphi) l(\varphi_k) - \sum_{-n}^n B_k(r, \varphi) g'(\varphi_k) \right].$$

Оценим погрешность приближенного решения.

**Теорема.** Пусть функция  $l(\varphi)$  непрерывна на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , а  $g(\varphi)$  — непрерывно дифференцируемая функция на этом отрезке, тогда имеет место следующая оценка погрешности приближенной формулы (17):

$$|u(r, \varphi) - \tilde{u}(r, \varphi)| \leq \frac{1-r^2}{2} \omega(l, h) + \omega(g, h) + \omega(g', h), \quad (18)$$

где  $\omega(l, h)$ ,  $\omega(g, h)$ ,  $\omega(g', h)$  — модули непрерывности соответствующих функций.

Если же функции  $l(\varphi)$  и  $g'(\varphi)$  также непрерывно дифференцируемы на  $[-\pi, \pi]$ , то справедливо неравенство

$$|u(r, \varphi) - \tilde{u}(r, \varphi)| \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1-r^2}{2} M_l + M_g + M_g^* \right) h, \quad (19)$$

$$M_l = \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |l(\varphi)|, \quad M_g = \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |g(\varphi)|, \quad M_g^* = \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |g'(\varphi)|.$$

**Доказательство.** Сравнивая формулы (7) и (17), получаем

$$|u(r, \varphi) - \tilde{u}(r, \varphi)| \leq \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau - \sum_{-n}^n A_k(r, \varphi) g(\varphi_k) \right| +$$

$$+ \frac{1-r^2}{2} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} l(\tau) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau - \sum_{-n}^n A_k(r, \varphi) l(\varphi_k) \right| + \quad (20)$$

$$+ \frac{1-r^2}{2} \left| r \frac{du_2(r, \varphi)}{dr} - \sum_{-n}^n B_k(r, \varphi) g'(\varphi_k) \right| = E_1(r, \varphi) + E_2(r, \varphi) + E_3(r, \varphi).$$

Воспользовавшись способом оценки приближенных формул для интеграла Пуассона в работе [2] находим, что

$$E_1(r, \varphi) \leq \frac{1-r^2}{2} \omega(l, h), \quad E_2(r, \varphi) \leq \omega(g, h), \quad (21)$$

если функции  $l(\varphi)$  и  $g(\varphi)$  непрерывны на отрезке  $[-\varphi, \varphi]$  и

$$E_1(r, \varphi) \leq \frac{1-r^2}{4} M_l h, \quad E_2(r, \varphi) \leq \frac{M_g}{2} h, \quad (22)$$

если функции  $l(\varphi)$  и  $g(\varphi)$  непрерывно дифференцируемы на этом отрезке.

Далее, слагаемое  $E_3(r, \varphi)$  запишем в виде интеграла и оценим его

$$E_3(r, \varphi) \leq \frac{1-r^2}{2} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [g'(\tau) - \tilde{g}'(\tau)] \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [g'(\tau) - \tilde{g}'(\tau)] \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau.$$

Под знаком последнего интеграла снова имеет ядро Пуассона.

Следовательно

$$E_3 \leq \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |g'(\varphi) - \tilde{g}'(\varphi)| - \omega(g', h), \quad (23)$$

когда  $g'(\varphi)$  непрерывна на отрезке  $[-\pi, \pi]$  и

$$E_3(r, \varphi) \leq \frac{M^*}{2} h, \quad (24)$$

когда  $g'(\varphi)$  непрерывно дифференцируема на этом отрезке.

Подставив в (20) вместо  $E_1(r, \varphi)$ ,  $E_2(r, \varphi)$ ,  $E_3(r, \varphi)$  соответствующие оценки (21)-(24), получаем неравенства (18), (19).

Приближенная формула (17) с оценкой погрешности (19) позволяет нам получать приближенное решение предельной задачи (1), (2) с заданной точностью.

**Примечание.** Как известно, действительная часть интеграла Шварца представляет собой интеграл Пуассона с такой же плотностью, т.е.

$$\operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \frac{t+z}{t-z} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\tau-\varphi)+r^2} d\tau, \quad (25)$$

где  $t = e^{i\tau}$ ,  $z = re^{i\varphi}$ ,  $|z| < 1$ ,  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ .

Точные методы вычисления интегралов Шварца и Гильберта, изложенные в монографиях [4, 5] часто дают возможность получать точное решение предельной задачи (1), (2), не содержащее интегралов.

**Пример.** Пусть граничные условия (2) имеют вид

$$u|_{r=1} = \sin n\varphi \quad (n - \text{целое}) \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=1} = |\varphi|, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

Интегралы Шварца с такими плотностями вычисляются точно

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin n\tau \frac{t+z}{t-z} d\tau = -iz^n, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tau| \frac{t+z}{t-z} d\tau = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} [L^2(z) - L_*^2(z)],$$

где  $L^2(z)$  и  $L_*^2(z)$  – полилогарифмы второго порядка, определяемые в круге  $|z| < 1$  следующими рядами:

$$L^2(z) = \sum_1^{\infty} \frac{z^k}{k^2}, \quad L_*^2(z) = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{k^2}.$$

Тогда, учитывая взаимосвязь (25) интегралов Пуассона и Шварца, на основе формулы (7) находим

$$u(r, \varphi) = \frac{1-r^2}{2} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \operatorname{Re}(L^2(z) - L_*^2(z)) - nr^n \sin n\varphi \right] + r^n \sin n\varphi.$$

Пусть  $n = 1$ , ограничимся в  $L^2(z)$ ,  $L_*^2(z)$  членами с  $n = 2$ , тогда получим

$$u(r, \varphi) = \frac{1-r^2}{2} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} r \cos \varphi - r \sin \varphi \right] + r \sin \varphi.$$

Таким образом, предложенный метод позволяет получать приближенные решения в тех случаях, когда отсутствует симметрия задачи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. Московский университет, 1969. – 695с.