УДК 539.3

Василевич Ю.В., Неумержицкий В.В., Неумержицкая Е.Ю., Язневич А.М.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЩИХ ФОРМУЛ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Разработка новых аналитических решений по определению напряженно-деформированного состояния трехмерных тел, материал которых обладает анизотропными свойствами, может базироваться на подходах и методах построения решений аналогичных граничных задач для изотропных тел [1-3]. При решении задач математической теории упругости в напряжениях существуют различные формы представления решений уравнений равновесия. Без учета объемных сил известны представления Максвелла

$$\sigma_{ii} = \frac{\partial^2 \varphi_\kappa}{\partial \upsilon_j^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \upsilon_\kappa^2}, \quad \sigma_{ij} = -\frac{\partial^2 \varphi_\kappa}{\partial \upsilon_i \partial x_j}, \tag{1}$$

и Морера

$$\sigma_{ii} = \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_j \partial x_\kappa}, \quad \sigma_{ij} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \psi_\kappa}{\partial x_\kappa}\right), \tag{2}$$

где i, j, к =1,2,3; $I \neq j \neq к$; $\varphi_\kappa, \varphi_j, \psi_i, \psi_j, \psi_\kappa$ - некоторые дифференцируемые функции аргументов; остальные обозначения общеприняты.

При таких формах решения уравнений равновесия $\sigma_{ij,j} = 0$, компоненты тензора деформации должны удовлетворять уравнениям неразрывности деформаций.

На основании принципа независимости действия сил доказано, что решение задачи теории упругости единственно. Исходя из теоремы единственности следует, что входящие в представления (1), (2) функции должны удовлетворять шести дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial^2 \varphi_\kappa}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_\kappa^2} = \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_j \partial x_\kappa}; \; 2\frac{\partial^2 \varphi_\kappa}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \psi_\kappa}{\partial x_\kappa}\right) \tag{3}$$

Если предположить, что функции φ_i и ψ_i имеют структуру обобщенных деформаций, представленных через обобщенные перемещения F_i

$$\varepsilon_{ii} = \varphi_i = \frac{\partial F_i}{\partial x_i}, \quad \varepsilon_{ij} = -\psi_\kappa = -\left(\frac{\partial F_\kappa}{\partial x_j} + \frac{\partial F_\kappa}{\partial x_i}\right), \tag{4}$$

то соотношения (3) будут представлять условия совместности деформаций, которые тождественно удовлетворяются при представлении деформаций в виде (4).

Следовательно, решения уравнений равновесия в форме (1), (2) будут совпадать, если справедливы представления (4). В этом случае компоненты напряжения можно выразить через функции F_i.

$$\sigma_{ii} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_\kappa}\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_\kappa} + \frac{\partial F_\kappa}{\partial x_j}\right), \quad \sigma_{ij} = -\frac{\partial^3 F_\kappa}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}.$$

Кроме решения уравнений равновесия в форме Максвелла и Морера существует еще 15 независимых форм решения. Как указано в [2] их можно найти путем видоизменения функционала Кастильяно таким образом, чтобы каждый раз из него вытекали три различных соотношения Сен-Венана

1. $\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_3^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1 \partial x_3},$

$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_3^2}, \quad \sigma_{13} = -\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1 \partial x_2},$

$$\sigma_{33} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{23} = -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1^2}.$$

2. $$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_3^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_3^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1 \partial}, \quad \sigma_{33} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2^2},$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \sigma_{13} = -\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{23} = -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

3. $$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_3^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_3^2}, \quad \sigma_{33} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$\sigma_{12} = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_3^2}, \quad \sigma_{13} = -\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \sigma_{23} = -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1 \partial x_3}.$$

4. $$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{33} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2^2},$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1 \partial x_3}, \quad \sigma_{13} = -\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \sigma_{23} = -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1^2}.$$

5. $$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1 \partial x_3}, \quad \sigma_{33} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2^2},$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \sigma_{13} = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{23} = -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1 \partial x_2},$$

6. $$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{33} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1 \partial x_3},$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_3^2}, \quad \sigma_{13} = -\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \sigma_{23} = -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1 \partial x_3}.$$

7. $$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{33} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2},$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1 \partial x_3}, \quad \sigma_{13} = -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \sigma_{23} = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1^2}.$$

8. $$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1 \partial x_3}, \quad \sigma_{33} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2},$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \sigma_{13} = -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{23} = -\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

9. $$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{33} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_3^2}, \quad \sigma_{13} = -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \sigma_{23} = -\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1 \partial x_3}.$$

10. $$\sigma_{11} = 2\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \sigma_{22} = 2\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_3^2}, \quad \sigma_{33} = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_2^2},$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \sigma_{13} = -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_3^2}, \quad \sigma_{23} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_2 \partial x_3}.$$

11. $$\sigma_{11} = 2\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \sigma_{22} = 2\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_3}, \quad \sigma_{33} = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1^2},$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \sigma_{13} = -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_1 \partial x_3}.$$

12. $$\sigma_{11} = 2\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_3^2}, \quad \sigma_{33} = 2\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_2^2},$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_3^2}, \quad \sigma_{13} = -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \sigma_{23} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_2 \partial x_3}.$$

13. $\sigma_{11} = 2\dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_2\partial x_3} + \dfrac{\partial^2\varphi_3}{\partial x_2^2}$, $\sigma_{22} = \dfrac{\partial^2\varphi_3}{\partial x_1^2}$, $\sigma_{33}=2\dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_1\partial x_2}$,

$\sigma_{12} = -\dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1\partial x_3} + \dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_3^2} - \dfrac{\partial^2\varphi_3}{\partial x_1\partial x_2}$, $\sigma_{13} = -\dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1\partial x_3} - \dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_2\partial x_3}$, $\sigma_{23} = \dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_1\partial x_3}$.

14. $\sigma_{11} = \dfrac{\partial^2\varphi_3}{\partial x_3^2}$, $\sigma_{22} = 2\dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1\partial x_3}$, $\sigma_{33} = 2\dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_2\partial x_3} + \dfrac{\partial^2\varphi_3}{\partial x_1^2}$,

$\partial_{12} = -\dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_2\partial x_3} + \dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_3^2}$, $\sigma_{13} = \dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_2\partial x_3} - \dfrac{\partial^2\varphi_3}{\partial x_1\partial x_3}$, $\sigma_{23} = -\dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1\partial x_2} - \dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_1\partial x_3}$.

15. $\sigma_{11} = \dfrac{\partial^2\varphi_3}{\partial x_2^2}$, $\sigma_{22} = 2\dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1\partial x_3}$, $\sigma_{33} = 2\dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_1\partial x_2}$,

$\sigma_{12} = -\dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_2\partial x_3} + \dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_3^2} - \dfrac{\partial^2\varphi_3}{\partial x_1\partial x_2}$, $\sigma_{13} = \dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_2\partial x_3}$, $\sigma_{23} = -\dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1\partial x_2} - \dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_1\partial x_3}$.

В [1] на основании представления (1) дан вывод новых общих формул теории упругости для расчета напряженно- деформированного состояния трехмерных анизотропных тел, находящихся под действием заданной силовой нагрузки.

Перечисленные выше независимые формы решения уравнений равновесия являются основой для построения других аналитических решений граничных задач для пространственных упругих тел, обладающих анизотропными свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прусов И.А., Василевич Ю.В. Об одном варианте представления общих формул теории упругости ортотропного тела. Вестник БГУ, сер. физ.-мат.н., №3, 1981. 2. Сайфуллин Э.Г. и др. Основные уравнения теории упругости в напряжениях и перемещениях. Сб. Исследования по теории пластин и оболочек, в. 18. Казань, Изд-во КГУ, 1985. 3. Купрадзе В.Д. и др. Трехмерные задачи математической теории упругости. – Тбилиси, 1968.

УДК 539.3

Василевич Ю.В., Можаровский В.В., Неумержицкий В.В.,
Неумержицкая Е.Ю., Селивончик Е.В.

МЕТОД РАСЧЕТА ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ ТВЕРДОЙ СРЕДЕ

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Известна математическая модель [1], описывающая волновые поля в окрестности ограждающей конструкции в виде тонкой твердой упругой плиты (слоя) в воздухе при падении на нее плоской продольной волны.

Гармонические колебания неограниченной по протяженности вертикальной плиты при воздействии продольной волны $p_1=p_{10}\, e^{-ik_0[(z+\delta)\cos\theta+y\sin\theta]}$ описываются уравнениями движения в форме Ламе

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\sigma}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\left[\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\rho_o\omega^2\right]\vartheta=0,$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\left[\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\rho_o\omega^2\right]w=0, \quad (1)$$

где p_{10}-амплитуда давления в падающей плоской звуковой волне; $k_0=\omega/\rho_0$ – волновое число для воздуха; ω- круговая частота колебаний, ρ_o - плотность плиты; λ, μ - постоянные Ламе; y и z – вертикальная и горизонтальная оси координат с началом в середине плиты; ϑ и w – проекции