13. $\sigma_{11} = 2\dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_2\partial x_3} + \dfrac{\partial^2\varphi_3}{\partial x_2^2}$, $\sigma_{22} = \dfrac{\partial^2\varphi_3}{\partial x_1^2}$, $\sigma_{33}=2\dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_1\partial x_2}$,

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1\partial x_3} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x_1\partial x_2},\quad \sigma_{13} = -\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1\partial x_3} - \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_2\partial x_3},\quad \sigma_{23} = \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_1\partial x_3}.$$

14. $\sigma_{11} = \dfrac{\partial^2\varphi_3}{\partial x_3^2}$, $\sigma_{22} = 2\dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1\partial x_3}$, $\sigma_{33} = 2\dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_2\partial x_3} + \dfrac{\partial^2\varphi_3}{\partial x_1^2}$,

$$\partial_{12} = -\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_2\partial x_3} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_3^2},\quad \sigma_{13} = \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_2\partial x_3} - \frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x_1\partial x_3},\quad \sigma_{23} = -\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1\partial x_2} - \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_1\partial x_3}.$$

15. $\sigma_{11} = \dfrac{\partial^2\varphi_3}{\partial x_2^2}$, $\sigma_{22} = 2\dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1\partial x_3}$, $\sigma_{33} = 2\dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_1\partial x_2}$,

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_2\partial x_3} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x_1\partial x_2},\quad \sigma_{13} = \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_2\partial x_3},\quad \sigma_{23} = -\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1\partial x_2} - \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_1\partial x_3}.$$

В [1] на основании представления (1) дан вывод новых общих формул теории упругости для расчета напряженно- деформированного состояния трехмерных анизотропных тел, находящихся под действием заданной силовой нагрузки.

Перечисленные выше независимые формы решения уравнений равновесия являются основой для построения других аналитических решений граничных задач для пространственных упругих тел, обладающих анизотропными свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прусов И.А., Василевич Ю.В. Об одном варианте представления общих формул теории упругости ортотропного тела. Вестник БГУ, сер. физ.-мат.н., №3, 1981. 2. Сайфуллин Э.Г. и др. Основные уравнения теории упругости в напряжениях и перемещениях. Сб. Исследования по теории пластин и оболочек, в. 18. Казань, Изд-во КГУ, 1985. 3. Купрадзе В.Д. и др. Трехмерные задачи математической теории упругости. – Тбилиси, 1968.

УДК 539.3

Василевич Ю.В., Можаровский В.В., Неумержицкий В.В., Неумержицкая Е.Ю., Селивончик Е.В.

МЕТОД РАСЧЕТА ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ ТВЕРДОЙ СРЕДЕ

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Известна математическая модель [1], описывающая волновые поля в окрестности ограждающей конструкции в виде тонкой твердой упругой плиты (слоя) в воздухе при падении на нее плоской продольной волны.

Гармонические колебания неограниченной по протяженности вертикальной плиты при воздействии продольной волны $p_1=p_{10}\ e^{-ik_0[(z+\delta)\cos\theta + y\sin\theta]}$ описываются уравнениями движения в форме Ламе

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\sigma}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\left[\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\rho_o\omega^2\right]\vartheta = 0,$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\left[\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\rho_o\omega^2\right]w = 0, \qquad (1)$$

где p_{10}-амплитуда давления в падающей плоской звуковой волне; $k_0=\omega/\rho_0$ – волновое число для воздуха; ω- круговая частота колебаний, ρ_o - плотность плиты; λ, μ - постоянные Ламе; y и z – вертикальная и горизонтальная оси координат с началом в середине плиты; ϑ и w – проекции смещения на оси y и z; 2δ - толщина плиты; θ - угол, образованный направлением распространения волны p_1 с осью z; c_0 – скорость звуковой волны.

Согласно закону Снеллиуса угол падения волны равен углу отражения, а поскольку слой разделяет одну и ту же среду, то направление распространения прошедшей волны совпадает с направлением падающей.

Давления в отраженной p_2 и прошедшей p_3 волнах запишем в форме

$$\rho_2 = \rho_{20} e^{-i\kappa_0[-(z+\delta)\cos\theta + y\sin\theta]}$$

$$\rho_3 = \rho_{30} e^{-i\kappa_0[(z-\delta)\cos\theta + y\sin\theta]} \qquad (2)$$

где p_{20}, p_{30} – амплитуды в отраженной и прошедшей волнах; сомножитель $e^{i\omega t}$ - опущен; t- время; остальные обозначения общеприняты.

Решение системы (1) ищем в виде

$$\vartheta = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad (3)$$

где φ и ψ - некоторые непрерывные и дифференцируемые функции координат y,z.

С учетом (3) из (1) имеем

$$\nabla^2\varphi + \kappa_1^2\varphi = 0, \quad \nabla^2\psi + \kappa_2^2\psi = 0, \qquad (4)$$

где $\nabla = \dfrac{\partial^2}{\partial\sigma^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$; $\kappa_1 = \omega/\rho_1$ и $\kappa_2 = \omega/\rho_2$ - волновые числа для продольной и поперечной волн; c_1 и c_2 – скорости их распространения.

Решениями дифференциальных уравнений (4) являются функции

$$\varphi = (A_1 e^{\alpha_1 z} + A_2 e^{-\alpha_1 z}) e^{-i\kappa_0 y\sin\theta}$$

$$\psi = (A_3 e^{\alpha_2 z} + A_4 e^{-\alpha_2 z}) e^{-i\kappa_0 y\sin\theta} \qquad (5)$$

где $\alpha_1 = \omega[(c_1\sin\theta/c_0)^2]^{1/2}/c_1, \alpha_2 = \omega[(c_2\sin\theta/c_0)^2 - 1]^{1/2}/c_2; A_i(i=\overline{1,4})$ - постоянные интегрирования.

По найденным (5) потенциалам φ и ψ определяются перемещения и напряжения

$$v = -[(A_1 e^{\alpha_1 z} + A_2 e^{-\alpha_1 z}) i\kappa_0 \sin\theta + \alpha_2(A_3 e^{\alpha_2 z} - A_4 e^{-\alpha_2 z})] e^{-i\kappa_0 y\sin\theta},$$

$$w = [(A_1 e^{\alpha_1 z} - A_2 e^{-\alpha_1 z})\alpha_1 - (A_3 e^{\alpha_2 z} + A_4 e^{-\alpha_2 z}) i\kappa_0 \sin\theta] e^{-i\kappa_0 y\sin\theta},$$

$$\sigma_z = [(A_1 e^{\alpha_1 z} + A_2 e^{-\alpha_1 z}) a_1 - (A_3 e^{\alpha_2 z} - A_4 e^{-\alpha_2 z}) a_2] e^{-i\kappa_0 y\sin\theta},$$

$$\tau_{yz} = -[(A_1 e^{\alpha_1 z} - A_2 e^{-\alpha_1 z}) a_3 + (A_3 e^{\alpha_3 z} + A_4 e^{-\alpha_2 z}) a_4] e^{-i\kappa_0 y\sin\theta},$$

где $a_1 = (\lambda + 2\mu)\alpha_1^2 - \lambda\kappa_0^2\sin^2\theta, a_2 = 2i\mu\alpha_2\kappa_0\sin\theta,$

$a_3 = 2i\mu\alpha_1\kappa_0\sin\theta,\ a_4 = (\alpha_2^2 + \kappa_0^2\sin^2\theta)\mu;\ A_i$ – находятся с учетом заданных граничных условий на боковых поверхностях плиты.

Предположим, что вертикальная тонкая и бесконечная по протяженности плита, толщиной h, помещена в упругую твердую среду. Начало декартовой системы координат Oyz поместим на правой границе плиты, направив по этому контуру вверх ось y, а z- вправо. Ось x выбираем параллельно фронту волны. Будем считать, что плита жестко соединена с твердой средой. Полупространства, расположенные слева и справа от плиты обозначим соответственно 1 и 2. Пусть со среды 1 (z<-h) на плиту падает под углом θ плоская продольная гармоническая волна $\varphi_1 \exp[-i\alpha(z+h)]$. Потенциалы отраженных продольной и поперечной волн в среде 1 запишем в виде $\varphi_1' \exp[i\alpha(z+h)]$, $\psi_1' \exp[i\beta(z+h)]$. В полупространстве 2 (z>0) ,будут уходящие от границы плиты продольная $\varphi_2 \exp(-i\alpha z)$ и поперечная $\psi_2 \exp(-i\beta z)$ волны. Фактор $\exp i(\omega t - \xi x)$ всюду опускаем для сокращения записи формул. Здесь приняты следующие обозначения:

$\varphi_1, \varphi_1', \psi_1', \varphi_2, \psi_2$ - амплитуды соответствующих упомянутых волн; $\alpha = \kappa_1\cos\theta, \xi = \kappa_1\sin\theta = \kappa_2\sin\gamma, \beta = \kappa_2\cos\gamma;$ c_1 и c_2 - скорости продольной и поперечной волн в средах 1 и 2; θ и γ - углы, составляемые нормалями к фронтам продольной и поперечной волн с осью z.

Колебательное движение плиты происходит только в плоскости yz и не зависит от координаты x, т.к. вдоль нее давление на плиту постоянно. Следовательно, плита подвергается плоской деформации.

Воспользовавшись методикой решения выше изложенной задачи, нагрузку, действующую на плиту со стороны областей 1 и 2 разобьем на симметричную $\sigma_p = -0{,}5(\sigma_{z_1} + \sigma_{z_2})$, $\tau_c = 0{,}5(\tau_{xz_1} - \tau_{xz_2})$ и асимметричную $\sigma_a = 0{,}5(\sigma_{z_2} - \sigma_{z_1}), \tau_a = 0{,}5(\tau_{xz_1} + \tau_{xz_2})$ части.

При действии симметричной нагрузки полагаем, что поперечные перемещения частиц плиты равны нулю в силу их малости; отсутствует изгиб плиты; продольные смещения частиц плиты равны между собой. Продольные колебания u_0 срединной плоскости плиты, вызванные касательными напряжениями, описываются уравнением

$$\frac{E_n h}{1 - \nu n^2} \frac{d^2 u_0}{dy^2} + m_n \omega^2 u_0 = 2\tau_c, \qquad (6)$$

где $E_n, \nu_n, m_n = \rho_n h$ - модуль Юнга, коэффициент Пуассона, масса единицы площади плиты.

Поскольку рассматриваются вынужденные гармонические колебания, то решение уравнения (6) запишем в виде

$$u_0 = 2\tau_c(m_n\omega^2 - \frac{hE_n}{1 - \nu_n^2}\xi^2) = \frac{2\tau_c}{m_n\omega^2(1 - d)}, \qquad (7)$$

где $d = (c_n \sin\theta / c_1)^2, c_n = E_n /(1 - \nu_n^2)\rho_n$ - скорость продольной волны в плите.

При действии на плиту асимметричной нагрузки допускаем, что продольные перемещения частиц срединной плоскости плиты равны нулю; поперечные перемещения равны между собой; продольные перемещения поверхностей плиты с учетом их деформации от изгиба равны $u_{n_1} = 0{,}5hdw_n / dy,\ u_{n_2} = -0{,}5hdw_n / dy$.

Поперечные перемещения плиты описываются уравнением

$$\Delta d^4 w_n / dy^4 - m_n\omega^2 w_n = -2\sigma_a + hd\tau_a / dy, \qquad (8)$$

где $\Delta = E_n h^3 \left[12(1 - \nu_n^2)\right]^{-1}$ - цилиндрическая жесткость плиты.

Частное решение (8) запишем в форме

$$w_n = (2\sigma_a - i\xi h\tau_a)\left[m_n\omega^2(\nu - 1)\right]^{-1}, \qquad (9)$$

где $\nu = \Delta\xi^4 / m_n\omega^2 = (c_u \sin\theta / c_1)^4;\ c_u = (\Delta\omega^2 / m_n)^{1/4}$ - фазовая скорость изгибной волны в плите.

При жестком соединении плиты с упругой средой необходимо выполнение равенств одноименных компонент напряжений и перемещений, возникающих на границе плиты с материалом твердой среды. Из четырех граничных уравнений получим выражения для определения амплитуд отраженных φ_1', ψ_1' и прошедших φ_2, ψ_2 через плиту волн

$$\varphi_1' = -\left[\beta_1 w_n - i\xi u_0 + \varphi_1(\xi^2 - \alpha\beta)\right]\beta_2^{-1},\quad \psi_1' = (\beta_3\xi w_n + i\alpha u_0 - 2\varphi_1\alpha\xi)\beta_2^{-1},$$
$$\varphi_2 = (\beta_1 w_n + i\xi u_0)\beta_2^{-1},\quad \psi_2 = (\beta_3\xi w_n - i\alpha u_0)\beta_2^{-1}, \qquad (10)$$

где $\beta_1 = -0{,}5h\xi^2 + i\beta,\ \beta_2 = \xi^2 + \alpha\beta,\ \beta_3 = 0{,}5h\alpha + i.$

Подставив значения напряжений, выраженные через потенциалы (10), в уравнения (7) и (9), получим формулы для расчета поперечных и продольных перемещений плиты

$$w_n = \varphi_1\alpha(2e_0 + ie_1)\left[e_3(\nu - 1) - 2e_1(1 - 2n_2e_2) + i(2e_0 + 0{,}5n_1e_1\cos\theta + e_3\nu\eta\right]^{-1},$$
$$u_0 = -2\varphi_1\xi n_2\cos\theta\left[e_3(1 - d) - i(2n_2\cos\theta + e_3 d\eta)\right]^{-1}, \qquad (11)$$

где $n_1 = h\omega / c_1, n_2 = c_2 / c_1, e_0 = (1 - (n_2\sin\theta)^2)^{1/2}, e_1 = n_1 n_2 \sin^2\theta,$
$e_2 = e_0\cos\theta + n_2\sin^2\theta, e_3 = n_1 e_2 \rho_n / \rho, \nu = (n_1 c_o / c_1)^2 \sin^4\theta / 12;$

ρ - плотность материала упругой среды;

η - коэффициент потерь в материале плиты.

Анализ формул (11) показал, что наибольшего снижения амплитуд в прошедших через плиту волнах можно достичь при выполнении условий $h\omega_1 > c_1$ и угле падения

$$\theta \geq 1{,}5 \arcsin(\sqrt[4]{12} / \sqrt{h\omega c_n / c_1^2}). \qquad (12)$$

Оценку передачи колебаний через плиту в твердой среде можно получить на основе анализа энергии в прошедших и падающей волнах. С учетом комплексных значений скоростей потенциалы падающей продольной волны и волн в среде за плитой запишем в виде

$$\varphi_1\, exp\{-i[\alpha(z+h)+\xi y-\omega t]-0{,}5\eta_1[\alpha(z+h)+\xi y]\},$$
$$\varphi=\varphi_2\, exp[-i(\alpha z+\xi y-\omega t)-0{,}5\eta_1(\alpha z+\xi y)],$$
$$\psi=\psi_2\, exp[-i(\beta z+\xi y-\omega t)-0{,}5\eta_2(\beta z+\xi y)],$$

где η_1 и η_2 - коэффициенты потерь продольной и поперечной волн в упругой среде.

Плотность упругой энергии в волне складывается из плотностей кинетической и потенциальной энергий [2]

$$E(y,z,t)=\frac{\rho}{2}\left\{(\frac{\partial\vartheta}{\partial t})^2+(\frac{\partial w}{\partial t})^2+2(c_1^2-2c_2^2)\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+c_1^2\left[(\frac{\partial w}{\partial z})^2+(\frac{\partial\vartheta}{\partial y})^2\right]+c_2^2(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial\vartheta}{\partial z})^2\right\}. \quad (13)$$

Воспользовавшись выражениями φ_2, ψ_2 с учетом поперечного колебания w_n плиты и продольного смещения u_0 ее срединной плоскости, определим горизонтальную w и вертикальную ϑ компоненты смещения произвольной точки за плитой. Отделив в формулах для w и ϑ вещественные части, подставим их в (13). Усредняя затем полученное выражение по времени за период и пренебрегая членами, содержащими η_1^2 и η_2^2, среднюю по времени плотность энергии в прошедшей продольной и трансформированной поперечной волнах, отнесенную к средней по времени плотности энергии в падающей волне, запишем в форме $\tau_\theta=\tau_{\theta_1}+\tau_{\theta_2}$,

где $\tau_{\theta_1}=0{,}25e_2^{-2}e_8^{-1}e_9^{-1}\sin^2 2\theta\{e_9(1+0{,}25n_1^2\cos^2\theta)(e_1^2+4e_0^2)+$
$+4n_2\cos\theta[2n_2\cos\theta(0{,}5e_8-e_{11}-0{,}5n_1e_{10}\cos\theta)+e_7(e_{10}-0{,}5n_1e_{11}\cos\theta)\ ]\}\cdot$ -часть энергии в $exp[-z(\eta_2\beta-\eta_1\alpha)]$

падающей волне, перенесенная трансформированной поперечной волной;

$$\tau_{\theta_2}=e_2^{-2}e_8^{-1}e_9^{-1}\cos^2\theta\{4e_9[1-n_2^2\sin^2\theta(1-0{,}25n_1^2\sin^2\theta)\ ]^2+4n_2^2\sin^2\theta\cdot$$
$$\cdot\langle n_2^2e_8\sin^2\theta+2n_2\cos\theta[2e_0(e_0e_6-e_1e_5)-0{,}5e_1^2e_6\ ]-e_7[2e_0(e_0e_5+e_1e_6)-0{,}5e_1^2e_5\ ]\rangle\ \}$$-

часть энергии, перенесенная прошедшей продольной волной;

где $e_4=2n_2\cos\theta+e_3d\eta,\ e_5=e_3(v-1)-2e_1(1-2n_2e_2),$

$e_6=2e_0+0{,}5n_1e_1\cos\theta+e_3v\eta,\ e_7=e_3(1-d),\ e_8=e_5^2+e_6^2,$

$e_9=e_7^2+4n_2^2\cos^2\theta,\ e_{10}=2e_0e_5+e_1e_6,\ e_{11}=2e_0e_6-e_1e_5.$

Численные расчеты передачи колебаний показали, что потери энергии в материале плиты можно не учитывать. Основная доля энергии падающей продольной волны переносится через плиту продольными же волнами и энергией возникающих поперечных волн можно пренебречь. Плита является эффективной виброограждающей конструкцией при выполнении условий (12).

ЛИТЕРАТУРА

1. Заборов В.И. Теория звукоизоляции ограждающих конструкций. - М.: Стройиздат, 1969.-184с. 2. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. – М.: Наука, 1981.-288с.