Доклады Академии наук БССР

1986 Том XXX № 10

УДК 535.36

Н. Н. РОГОВЦОВ

АСИМПТОТИКИ ПОЛЕЙ ИЗЛУЧЕНИЯ В СФЕРИЧЕСКИ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ ОПТИЧЕСКИ ТОЛСТЫХ РАССЕИВАЮЩИХ СРЕДАХ

(Представлено академиком АН БССР Ф. И. Федоровым)

Классическими работами В. А. Амбарцумяна [1] и В. В. Соболева [2, 3] было положено начало исследованию асимптотических свойств решений уравнения переноса излучения. К настоящему времени уже получено весьма большое число асимптотик для характеристик полей излучения в плоскопараллельных средах (см., например, [3—5] и ссылки в них). Найден также ряд асимптотических формул (см., например, [1, 6—8]) для случая сферически симметричных сред. Следует отметить, что асимптотики представляют большой интерес для приложений теории переноса ввиду их относительной простоты по сравнению с точными или численными решениями. Особую роль асимптотические выражения могут сыграть при изучении процесса многократного рассеяния света в средах сложной формы, поскольку поиск точных или численных решений соответствующих краевых задач для уравнения переноса в этих случаях сопряжен с определенными трудностями. В данной статье будут найдены асимптотики для интенсивностей излучения, выходящего из оптически толстых шара и цилиндра при наличии в них соответственно точечного и линейного источников.

Основные результаты работы будут найдены посредством использования следующих общих соотношений инвариантности [9—12]:

$$G_*(\mathbf{r},\ \Omega,\ \mathbf{r}^*,\ \Omega^*,\ V) = G_\infty(\mathbf{r},\ \Omega,\ \mathbf{r}^*,\ \Omega^*) - \iint_S dS' \int_{\Omega_+} (\mathbf{n}'\cdot\Omega')\, G_\infty(\mathbf{r},\ \Omega,\ \mathbf{r}',\ \Omega')\, G_*(\mathbf{r}',\ \Omega',\ \mathbf{r}^*,\ \Omega^*,\ V)\, d\Omega'; \tag{1}$$

$$G_*(\mathbf{r}',\ \Omega',\ \mathbf{r}^*,\ \Omega^*,\ V) = G_\infty(\mathbf{r}',\ \Omega',\ \mathbf{r}^*,\ \Omega^*) + \frac{1}{|\mathbf{n}'\cdot\Omega'|}\iint_S dS'' \int_{\Omega_-} (\mathbf{n}''\cdot\Omega'')\, G_\infty(\mathbf{r}'',\ \Omega'',\ \mathbf{r}^*,\ \Omega^*)\, G_s(\mathbf{r}'',\ -\Omega'',\ \mathbf{r}',\ -\Omega',V)\, d\Omega''; \tag{2}$$

$$\iint_S dS \int_{\Omega_+} (\mathbf{n}\cdot\Omega)\, G_*(\mathbf{r},\ \Omega,\ \mathbf{r}^*,\ \Omega^*,\ V)\, d\Omega = \iint_S dS \int_{\Omega} (\mathbf{n}\cdot\Omega)\, G_\infty(\mathbf{r},\ \Omega,\ \mathbf{r}^*,\ \Omega^*)\, d\Omega + \iint_S dS \int_{\Omega_+} (\mathbf{n}\cdot\Omega)\, I^*_{V_\infty}(\mathbf{r},\ -\Omega,\ V)\, G_*(\mathbf{r},\ \Omega,\ \mathbf{r}^*,\ \Omega^*,\ V)\, d\Omega. \tag{3}$$

Здесь V — невогнутое рассеивающее тело, имеющее полностью прозрачную для излучения границу S; Ω, Ω', Ω'', Ω^*— единичные векторы, задающие направления распространения или испускания излучения; $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$, $\mathbf{n}''$ — внешние нормали к S в точках, определяемых радиус-векторами $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}''$ $(|\mathbf{n}'|=|\mathbf{n}''|=|\mathbf{n}|=1)$; $G_*(\ldots)$ и $G_s(\ldots)$ — объемная и поверхностная функции Грина уравнения переноса излучения для случая тела V; $G_\infty(\ldots)$ — объемная функция Грина для бесконечной среды V_∞, которая имеет часть, идентичную V по оптическим и геометрическим свойствам; Ω_+ и Ω_- — полусферы единичной сферы Ω, которые определяются условиями типа $(\Omega\cdot\mathbf{n})>0$, $(\Omega\cdot\mathbf{n})<0$; $I^*_{V_\infty}(\mathbf{r}, -\Omega, V)=\iiint\limits_V dV' \int\limits_\Omega (\alpha-\sigma)\, G_\infty(\mathbf{r}', \Omega', \mathbf{r}, \Omega)\, d\Omega'$ (α и σ — показатели ослабления и рассеяния). Радиус-векторы $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}^*$, $\mathbf{r}'$ в (1), (2) задают точки соответственно в V, $\overset{0}{V}=V\backslash S$, S (для краткости будем отмечать это таким образом: $\mathbf{r}\in V$, $\mathbf{r}^*\in \overset{0}{V}$, $\mathbf{r}'\in S$). Ниже будет показано (см. также [3]), что с помощью выражений (1)—(3) можно находить асимптотики для характеристик полей излучения в оптически толстых средах.

Пусть V — однородный неконсервативно рассеивающий шар. Допустим, что в его центре находится точечный мононаправленный «источник» $\delta(\Omega-\Omega^*)\,\delta(\mathbf{r})$ ($\mathbf{r}^*=0$, т. е. предполагаем, что начало прямоугольной декартовой системы координат совпадает с центром шара). Для получения искомой асимптотики воспользуемся таким асимптотическим представлением для $G_\infty(\ldots)$:

$$G_\infty(\mathbf{r}'', \Omega'', 0, \Omega^*) = C\,(\tau'')^{-1}\, i(\mu'')\, i(\mu_2^*)\, \exp(-k\tau'') + \eta,$$
$$\tau''\to\infty \quad (0<\Lambda<1). \tag{4}$$

В (4) величины имеют следующий смысл: $\tau''=\alpha|\mathbf{r}''|$; k — наименьший неотрицательный корень характеристического уравнения; $i(\ldots)$ — глубинное тело яркости [3, 14]; $\mu''=\left(\Omega''\cdot\dfrac{\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}''|}\right)$, $\mu_2^*=\left(\Omega^*\cdot\dfrac{\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}''|}\right)$; η—функция, допускающая оценку $(\tau'')^{-2}\iint\limits_S dS'' \int\limits_{\Omega_+}(\mathbf{n}''\cdot\Omega'')\,\eta\, d\Omega''=o\left((\tau'')^{-1}\exp(-k\tau'')\right)$ при $\tau''\to\infty$; S — граница шара; $C=\mathrm{const}$; Λ — альбедо однократного рассеяния. Первый член в правой части (4) был получен в работе [14] (см. также [15]). Нетрудно показать, что $C=\alpha^2 k(2\pi^2 M)^{-1}$, где $M=2\int\limits_{-1}^{1}\zeta i^2(\zeta)\,d\zeta$.

Подставив (4) в (2) и проделав ряд элементарных преобразований, получим

$$G_*(\mathbf{r}', \Omega', \mathbf{0}, \Omega^*, V) = C\,(\tau')^{-1}\exp(-k\tau')\,[i(\mu')\,i(\mu_1^*) + \tag{5}$$
$$+ (|\mu'|)^{-1}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\Omega d\Omega''\iint\limits_{\tilde S_\varepsilon}\mu''\, i(\mu'')\, i(\mu_2^*)\, G_s(\mathbf{r}'', -\Omega'', \mathbf{r}', -\Omega', V)\, dS''] +$$
$$+ \varkappa, \quad \mathbf{r}'\in S, \quad \Omega'\in\Omega_+;$$
$$\varkappa = \eta + (|\mu'|)^{-1}\iint\limits_S dS''\int\limits_{\Omega_-}\mu''\eta\, G_s(\mathbf{r}'', -\Omega'', \mathbf{r}', -\Omega', V)\, d\Omega'',$$
$$(\tau')^{-2}\iint\limits_S dS'\int\limits_{\Omega_+}\varkappa\mu\, d\Omega' = o\left((\tau')^{-1}\exp(-k\tau')\right) \tag{6}$$

при $\tau'=\alpha|\mathbf{r}'|\to\infty$. Остальные обозначения в (5) имеют следующий смысл: $\mu'=(\Omega'\cdot\mathbf{n}')$, $\mu_1^*=(\Omega^*\cdot\mathbf{n}')$, $\tilde S_\varepsilon = S\setminus S_\varepsilon(\mathbf{r}')$ ($S_\varepsilon(\mathbf{r}')$ представляет собой ε-окрестность точки, задаваемой $\mathbf{r}'$, на сфере S). Из общих соображений следует, что для случая неконсервативного рассеяния ($\Lambda<1$) и $\tau'\to\infty$ второй член в квадратных скобках в (5) стремится при любых $\mu'\geqslant\Delta>0$ к величине $2i(\mu_1^*)\int\limits_{-1}^{0}\rho_0(|\xi''|, |\mu'|)\,\xi''\, i(\xi'')\, d\xi''$ ($\rho_0(\ldots)$ — нулевая азимутальная гармоника коэффициента диффузного отражения для полубесконечной среды [3]). С учетом сказанного и соотношения $i(|\mu'|) - 2\int\limits_0^1 \xi'' i(-\xi'')\rho_0(|\mu'|, \xi'')d\xi'' = Mu(|\mu'|)$ [3] ($u(|\mu'|)$ — коэффициент пропускания полубесконечной среды [3]) находим из (5) искомую асимптотику для шара:

$$G_*(\mathbf{r}', \boldsymbol{\Omega}', 0, \boldsymbol{\Omega}^*, V) = \alpha^2 k(2\pi^2\tau')^{-1} u(|\mu'|)\, i(\mu_1^*)\exp(-k\tau') + \varkappa_1,$$

$$(\tau')^{-2}\iint\limits_S dS' \int\limits_{\Omega_+} \varkappa_1 \mu' d\Omega' = o((\tau')^{-1}\exp(-k\tau')), \tag{7}$$

$$\tau' \to \infty\ (0 < \Lambda < 1,\ \boldsymbol{\Omega}' \in \Omega_+,\ \mathbf{r}' \in S).$$

Поскольку при $\tau' = \mathrm{const}$ и $\mu' \to +0$ функция Грина $G_*(\ldots)$ стремится к нулю, то первый член в (7) не дает равномерной аппроксимации величины $G_*(\ldots)$ при $0 \leqslant \mu' \leqslant \Delta_1 < 1$. Очевидно, что с помощью (7) легко найти асимптотику для интенсивности $I(\mathbf{r}', \boldsymbol{\Omega}', V)$ излучения, выходящего из оптически толстого шара, содержащего в центре произвольный диффузный источник. В частности, для случая изотропного источника мощности $4\pi E_0$ можно получить следующую асимптотику для $I(\ldots)$:

$$I(\mathbf{r}', \boldsymbol{\Omega}', V) = 2\alpha^2 k E_0(\Lambda\pi\tau')^{-1} u(|\mu'|)\exp(-k\tau') + \chi(\mathbf{r}', \boldsymbol{\Omega}') \tag{8}$$

$$(\mathbf{r}' \in S,\ \boldsymbol{\Omega}' \in \Omega_+,\ 0 < \Lambda < 1),$$

$$(\tau')^{-2}\iint\limits_S dS' \int\limits_{\Omega_+} \mu'(1 - I^*_{V_\infty}(\mathbf{r}', -\boldsymbol{\Omega}', V))\chi(\mathbf{r}', \boldsymbol{\Omega}')d\Omega' =$$

$$= O((\tau')^{-2} E_0 \exp(-k\tau')),\ \tau' \to \infty.$$

При выводе (8) предполагалось, что характеристическое уравнение имеет конечное число дискретных корней. Оценка остаточного члена $\chi(\mathbf{r}', \boldsymbol{\Omega}')$ в (8) производилась с помощью соотношения (3). Первый член в (8) при $E_0 = (L/4\pi)$ с точностью до величин более высокого порядка совпадает с асимптотикой, полученной в [6, 8] (в данных работах не производилась оценка остаточных членов).

Если в бесконечной однородной среде V_∞ содержится линейный мононаправленный «источник» вида $\delta(x)\delta(y)\delta(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}^*)$ (будем считать, что задана система координат $OXYZ$ и источник расположен на оси аппликат), то из (4) можно получить следующую асимптотику:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_\infty(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, z'\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\Omega}^*)\, dz' \sim \frac{\alpha}{\pi M}\sqrt{\frac{k}{2\pi\tau_0}}\, i((\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{n}))\, i((\boldsymbol{\Omega}^*\cdot\mathbf{n})) \times$$

$$\times \exp(-k\tau_0),\ \tau_0 \to \infty\ (0 < \Lambda < 1). \tag{9}$$

Здесь $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S (она задается уравнением $x^2 + y^2 = \left(\frac{\tau_0}{\alpha}\right)^2$) в точке, определяемой $\mathbf{r}$; $\mathbf{e}_3$ — вектор, имеющий компоненты (0, 0, 1). Из (9) и (2) аналогично способу получения (7) легко найти такую асимптотику для случая однородного кругового цилиндра V:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_*(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, z'\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\Omega}^*, V)dz' \sim \frac{\alpha}{\pi}\sqrt{\frac{k}{2\pi\tau_0}}\, i((\boldsymbol{\Omega}^*\cdot\mathbf{n}))\, u((\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{n})) \times$$

$$\times \exp(-k\tau_0),\ \tau_0 \to \infty\ (0 < \Lambda < 1).$$

Под τ_0 в (10) надо понимать оптический радиус цилиндра V и считать, что линейный источник расположен на оси симметрии V (остальные величины имеют тот же смысл, что и в формуле (9)). С помощью (3) и (10) нетрудно дать оценку порядка остаточного члена асимптотики для интенсивности излучения, выходящего из оптически толстого цилиндра, имеющего линейный изотропный источник на оси симметрии. Отметим, что формулы (1), (7), (10) позволяют найти асимптотики для характеристик полей излучения внутри шара и цилиндра.

Summary

Asymptotic formulas for radiation intensity in optically thick scattering media with spherical and cylindrical symmetry are derived on the basis of the general invariant relations obtained earlier by the author.

Литература

1. Амбарцумян В. А. // Науч. тр. Ереван, 1960. Т. 1. 430 с. 2. Соболев В. В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М., 1956. 392 с. 3. Соболев В. В. Рассеяние света в атмосферах планет. М., 1972. 335 с. 4. Гермогенова Т. А., Коновалов Н. В. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1974. Т. 14, № 4. С. 928—946. 5. Яновицкий Э. Г. // Астрон. журн. 1980. Т. 57, № 6. С. 1277—1286. 6. Соболев В. В. // ДАН СССР. 1983. Т. 273, № 3. С. 573—576. 7. Колесов А. К. // Астрофизика. 1984. Т. 20, № 1. С. 133—147. 8. Колесов А. К. // Астрофизика. 1985. Т. 22, № 1. С. 177—187. 9. Роговцов Н. Н. // ЖПС. 1981. Т. 34, № 2. С. 335—342. 10. Роговцов Н. Н. // ЖПС. 1981. Т. 35, № 6, С. 1044—1050. 11. Роговцов Н. Н. // ДАН БССР. 1983. Т. 25, № 5. С. 420—423. 12. Роговцов Н. Н. // ДАН БССР. 1983. Т. 27, № 1. С. 34—37. 13. Роговцов Н. Н. // ДАН БССР. 1983. Т. 27, № 10. С. 901—903. 14. Долин Л. С. // Оптика моря. М., 1983. С. 118—122. 15. Фано У., Спенсер Л., Бергер М. Перенос гамма-излучения. М., 1963. 284 с.

Белорусский политехнический институт *Поступило 31.10.85*