Доклады Академии наук БССР

1988 Том XXXII № 5

УДК 535.36

Н. Н. РОГОВЦОВ

ОБ АСИМПТОТИКАХ ПОЛЕЙ ИЗЛУЧЕНИЯ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ И ОПТИЧЕСКИ ТОЛСТЫХ РАССЕИВАЮЩИХ СРЕДАХ

(Представлено академиком АН БССР Ф. И. Федоровым)

Относительная простота структуры асимптотических решений уравнения переноса излучения позволяет играть им существенную роль как при выяснении закономерностей многократного рассеяния света, так и при рассмотрении конкретных задач теории переноса в астрофизике, гидрооптике, оптике рассеивающих сред и т. д. К настоящему времени наиболее подробно исследованы асимптотические свойства полей излучения в плоскопараллельных средах (см., напр., [1—5] и ссылки в них). Целый ряд асимптотик получен для сферически и цилиндрически симметричных конечных и бесконечных сред [5—9]. Первые результаты такого рода найдены и для сред сложной формы [10]. Значительная часть асимптотик, полученных в указанных выше публикациях, была найдена с помощью одной общей идеи, фактически применявшейся в классических работах В. А. Амбарцумяна и В. В. Соболева [1, 2]. В общем случае ее суть состоит в следующем: асимптотические решения уравнения переноса для рассеивающих тел некоторой конфигурации можно находить из выражений типа соотношений инвариантности (или интегральных соотношений) посредством подстановки в них известных асимптотик, входящих в эти выражения величин. При реализации данной идеи наиболее удобно использовать такие соотношения, в которые входят решения относительно просто решаемых канонических задач теории переноса для сред более простой формы по сравнению с конфигурацией исследуемого объекта.

В данной статье указанным выше способом получен ряд асимптотических решений уравнения переноса для полубесконечных и конечных плоских сред, содержащих точечные источники. Будет также найдена асимптотика для потока излучения через гладкую поверхность, ограничивающую оптически толстую почти консервативно рассеивающую однородную среду. Основные результаты работы будут получены с использованием подхода и соотношений инвариантности, которые предложены и описаны в статьях [11, 12].

Пусть на оптической глубине τ_0 полубесконечной однородной среды $\bar{V}_{(0,\infty)}$, ограниченной плоскостью $\bar{S}$, находится точечный мононаправленный источник. Найдем асимптотику функции Грина $\tilde{G}_{(0,\infty)}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\Omega}^*)$ уравнения переноса излучения при $\tau_0 \to \infty$ ($\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\tau}^*$ — радиусы-векторы, задающие положение точки «наблюдения» и источника; $\boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}^*$ — единичные векторы, определяющие направления распространения и испускания излучения). При этом дополнительно будем предполагать, что точка «наблюдения» лежит на $\bar{S}$, а оптическое расстояние τ_* от источника до прямой, которая проходит через точку «наблюдения» перпендикулярно $\bar{S}$, удовлетворяет условию $(\tau_*/\sqrt{\tau_0}) = o(1)$ при $\tau_0 \to \infty$. Для получения искомой асимптотики используем такое соотношение инвариантности

$$\tilde{G}_{(0,\infty)}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\Omega}^*) = \tilde{G}_\infty(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\Omega}^*) + \frac{1}{|(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\Omega})|}\iint\limits_{\bar{S}} d\bar{S}'' \times$$

$$\times \int\limits_{\Omega_-} (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\Omega}'')\tilde{G}_\infty(\boldsymbol{\tau}'', \boldsymbol{\Omega}'', \boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\Omega}^*)\tilde{G}_{\bar{S}}^-(\boldsymbol{\tau}'', -\boldsymbol{\Omega}'', \boldsymbol{\tau}, -\boldsymbol{\Omega}, \bar{V}_{(0,\infty)})\, d\Omega'', \qquad (1)$$

которое является частным случаем общего соотношения (12) из работы [12]. В (1) величины имеют следующий смысл: $\tilde{G}_\infty(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\Omega}^*)$ — функция Грина уравнения переноса для бесконечной однородной среды $\bar{V}_\infty$, оптические параметры которой идентичны реализующимся в $\bar{V}_{(0,\infty)}$; $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к $\bar{S}$; Ω_- — полусфера, определяемая условием $(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\Omega})<0$; $\tilde{G}_{\bar{S}}^-(\boldsymbol{\tau}'', -\boldsymbol{\Omega}'', \boldsymbol{\tau}, -\boldsymbol{\Omega}, \bar{V}_{(0,\infty)})$ — поверхностная функция Грина для полубесконечной однородной среды $\bar{V}_{(0,\infty)}$. Перепишем теперь выражение (1) в виде

$$\tilde{G}_{(0,\infty)}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\Omega}^*) = \tilde{G}_\infty(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\Omega}^*) + \frac{1}{|(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\Omega})|} \times \qquad (2)$$

$$\times \Big\{ \iint\limits_{\bar{S}_1} d\bar{S}'' \int\limits_{\Omega_-} (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\Omega}'')\tilde{G}_\infty(\boldsymbol{\tau}'', \boldsymbol{\Omega}'', \boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\Omega}^*)\tilde{G}_{\bar{S}}^-(\boldsymbol{\tau}'', -\boldsymbol{\Omega}'', \boldsymbol{\tau}, -\boldsymbol{\Omega}, \bar{V}_{(0,\infty)})\, d\Omega'' +$$

$$+ \iint\limits_{\bar{S}\setminus\bar{S}_1} d\bar{S}'' \int\limits_{\Omega_-} (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\Omega}'')\tilde{G}_\infty(\boldsymbol{\tau}'', \boldsymbol{\Omega}'', \boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\Omega}^*)\tilde{G}_{\bar{S}}^-(\boldsymbol{\tau}'', -\boldsymbol{\Omega}'', \boldsymbol{\tau}, -\boldsymbol{\Omega}, \bar{V}_{(0,\infty)})\, d\Omega'' \Big\},$$

где $\bar{S}_1$ — область на $\bar{S}$ в виде круга оптического радиуса τ_1 с центром в точке, задаваемой $\boldsymbol{\tau}$ (будем считать, что $(\tau_1/\sqrt{\tau_0}) = o(1)$ при $\tau_0\to\infty$). Для дальнейших преобразований (2) необходимо использовать асимптотику функции $\tilde{G}_\infty(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\Omega}^*)$ при $|\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}^*|\to\infty$ [13]. Представим ее в следующем виде [9]:

$$\tilde{G}_\infty(\boldsymbol{\tau}'', \boldsymbol{\Omega}'', \boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\Omega}^*) = \frac{k\exp(-k|\boldsymbol{\tau}''-\boldsymbol{\tau}^*|)}{2\pi^2 M|\boldsymbol{\tau}''-\boldsymbol{\tau}^*|} \times$$

$$\times i\left(\left(\boldsymbol{\Omega}''\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}''-\boldsymbol{\tau}^*}{|\boldsymbol{\tau}''-\boldsymbol{\tau}^*|}\right)\right) i\left(\left(\boldsymbol{\Omega}^*\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}''-\boldsymbol{\tau}^*}{|\boldsymbol{\tau}''-\boldsymbol{\tau}^*|}\right)\right) + \eta, \qquad (3)$$

$$\eta = q_1 + q_2,\quad q_2 = o(|\boldsymbol{\tau}''-\boldsymbol{\tau}^*|^{-1}\exp(-k|\boldsymbol{\tau}''-\boldsymbol{\tau}^*|)),$$

$$|\boldsymbol{\tau}''-\boldsymbol{\tau}^*|\to\infty,\quad (0<\Lambda<1),$$

где k — наименьший неотрицательный корень характеристического уравнения; Λ — альбедо однократного рассеяния; $i(\ldots)$ — глубинное тело яркости (будем считать, что эта функция нормирована условием $\int_{-1}^{1} i(\mu)\,d\mu = (2/\Lambda)$ [2]); $M = 2\int_{-1}^{1}\mu i^2(\mu)\,d\mu$; q_1 — обобщенная функция, описывающая прямое и первые кратности рассеянного излучения (ее явный вид приведен в [14]); q_2 — ограниченная функция. Если теперь подставить (3) и асимптотики величин $|\boldsymbol{\tau}''-\boldsymbol{\tau}^*|$, $\left(\boldsymbol{\Omega}''\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}''-\boldsymbol{\tau}^*}{|\boldsymbol{\tau}''-\boldsymbol{\tau}^*|}\right)$, $\left(\boldsymbol{\Omega}^*\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}''-\boldsymbol{\tau}^*}{|\boldsymbol{\tau}''-\boldsymbol{\tau}^*|}\right)$ при $\tau_0\to\infty$ (при этом считаем, что $\boldsymbol{\tau}''$ задает точки на $\bar{S}_1$) в (2), сделать физически оправданное допущение о непрерывной зависимости функции $i(\mu)$ от аргумента $\mu\in[-1, 1]$, то с помощью ряда элементарных преобразований полученного из (2) таким образом выражения приходим к такой асимптотической формуле:

$$\tilde{G}_{(0,\infty)}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\Omega}^*) = \eta + q_3 +$$

$$+\frac{k\exp(-k\tau_0)}{2\pi^2\tau_0}i((\mathbf{n}\cdot\Omega^*))u((\mathbf{n}\cdot\Omega)), \tag{4}$$

$$q_3=o(\tau_0^{-1}\exp(-k\tau_0)),\ (\tau_*/\sqrt{\tau_0})=o(1),\ \tau_0\to\infty\ \ (0<\Lambda<1).$$

Здесь $u(\ldots)$ — коэффициент пропускания полубесконечной среды [2].

На основе общего соотношения инвариантности (12) из статьи [12] и асимптотики (4) в свою очередь по аналогии со способом вывода (4) можно получить асимптотическое выражение для поверхностной функции Грина $\tilde{G}_{\bar{s}}(\boldsymbol{\tau}, \Omega, \boldsymbol{\tau}^*, \Omega^*, \bar{V})$ уравнения переноса излучения для случая однородного слоя $\bar{V}$ оптической толщины τ_0. Оно имеет вид

$$\tilde{G}_{\bar{s}}(\boldsymbol{\tau}, \Omega, \boldsymbol{\tau}^*, \Omega^*, \bar{V})\sim|(\mathbf{n}_2\cdot\Omega^*)|\frac{Mk\exp(-k\tau_0)}{2\pi^2\tau_0}\times$$
$$\times u((\mathbf{n}_2\cdot\Omega^*))u((\mathbf{n}_2\cdot\Omega)), \tag{5}$$
$$(\tau_2:\sqrt{\tau_0})=o(1),\ \tau_0\to\infty\ \ ((\mathbf{n}_2\cdot\Omega)>0,\ (\mathbf{n}_2\cdot\Omega^*)>0).$$

Здесь $\mathbf{n}_2$ — внешняя нормаль ко второй границе слоя, на которой лежит точка «наблюдения» (она задается $\boldsymbol{\tau}$); τ_2 — минимальное оптическое расстояние между прямыми, проходящими перпендикулярно границам слоя через концы радиус-векторов $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\tau}^*$ ($\boldsymbol{\tau}^*$ задает точку на первой границе слоя).

Рассмотрим однородную почти консервативно-рассеивающую среду $\bar{V}_*$, ограниченную гладкой невогнутой границей $\bar{S}_*$ и содержащую произвольные внутренние источники излучения. Обозначим через $\bar{V}_1(P, \tau_3)$ шар, полностью принадлежащий $\bar{V}_*$ и касающийся $\bar{S}_*$ в точке P (τ_3 — оптический радиус этого шара). Пусть $\tau_4(P)$ — максимальное значение τ_3 на множестве шаров с указанными свойствами. Под τ^* будем понимать минимальное значение $\tau_4(P)$ при $P\in\bar{S}_*$. Используя формулы из статьи [10], которые дают нижние и верхние оценки для потока $\Pi(\Sigma)$ излучения, выходящего через всю границу Σ невогнутого тела, можно показать, что, по крайней мере, для случая изотропного рассеяния справедлива асимптотика

$$(\Pi(\bar{S}_*)/\Pi_\infty(\bar{S}_*))=2+O(k+(k\tau^*)^{-1}), \tag{6}$$
$$k\tau^*\to\infty,\ k\to0\ (\Lambda\to1).$$

Здесь $\Pi_\infty(\bar{S}_*)$ — поток излучения через всю границу $\bar{S}_*$, когда тело $\bar{V}_*$ вместе с источниками «погружено» в $\bar{V}_\infty$. Заметим, что $\Pi_\infty(\bar{S}_*)$ нетрудно выписать в явном виде, если воспользоваться выражением для $\int\limits_\Omega\tilde{G}_\infty(\ldots)d\Omega^*$, найденным в [15]. К тому же для $\Pi_\infty(\bar{S}_*)$ легко получить асимптотики, если источники изотропны и лежат на больших оптических расстояниях от $\bar{S}_*$ (при этом на форму $\bar{S}_*$ дополнительных ограничений не накладывается). В частности, при наличии точечного изотропного источника мощности E_0 можно получить такую асимптотику

$$\Pi_\infty(\bar{S}_*)=\frac{2(1-\Lambda)E_0}{\pi M\Lambda^2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}(k^{-1}+\bar{\rho}(\theta,\varphi))\exp(-k\bar{\rho}(\theta,\varphi))\sin\theta d\theta+$$
$$+O[E_0(1-\Lambda)(1+a_1)\exp(-k_1a_1)], \tag{7}$$
$$a_1\to\infty\ \text{или}\ \Lambda\to1.$$

Здесь $\bar{\rho}(\theta, \varphi)$ — оптическое расстояние от источника до точки $P\in\bar{S}_*(\theta,$

φ — угловые координаты P в сферической системе координат); $a_1 = \min \bar{\rho}(\ldots)$ при $\theta \in [0, \pi]$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$; k_1 равно единице или второму неотрицательному корню характеристического уравнения. Формула (7) справедлива для любой индикатрисы рассеяния и существенно упрощается тогда, когда $\bar{S}_*$ имеет достаточно простую форму (например, является эллипсоидом вращения или эллиптическим цилиндром).

Summary

A number of asymptotic expressions are found for characteristics of the radiation fields in nonconcave media, which contain point sources.

Литература

1. Амбарцумян В. А. Научные труды. Ереван, 1960. Т. 1. 430 с. 2. Соболев В. В. Рассеяние света в атмосферах планет. М., 1972. 336 с. 3. Гермогенова Т. А. // ЖВМ и МФ. 1961. Т. 1, № 6. С. 1001—1019. 4. Иванов В. В., Волков Е. В. // Ученые записки ЛГУ. 1978. № 400, вып. 57. С. 3—30. 5. Роговцов Н. Н., Самсон А. М. // Астрофизика. 1985. Т. 23, № 1. С. 163—176. 6. Соболев В. В. // ДАН СССР. 1983. Т. 273, № 3. С. 573—576. 7. Колесов А. К. // Астрофизика. 1985. Т. 22, № 1. С. 177—187. 8. Роговцов Н. Н. // ЖПС. 1986. Т. 44, № 4. С. 659—663. 9. Роговцов Н. Н. // ДАН БССР. 1986. Т. 30, № 10. С. 901—904. 10. Роговцов Н. Н. // Изв. АН СССР. ФАО. 1985. Т. 21, № 10. С. 1111—1112. 11. Роговцов Н. Н. // ЖПС. 1981. Т. 34, № 2. С. 335—342. 12. Роговцов Н. Н. // ЖПС. 1981. Т. 35, № 6. С. 1044—1050. 13. Долин Л. С. // Оптика моря. М., 1983. С. 118—122. 14. Гермогенова Т. А. Локальные свойства решений уравнения переноса. М., 1986. 272 с. 15. Колесов А. К. // ДАН СССР. 1983. Т. 272, № 1. С. 53—56.

Белорусский политехнический институт

Поступило 05.03.87