УДК 519.10+658.264

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ СТРУКТУРЫ И СОСТАВА СИСТЕМЫ ЦЕНТРАЛИЗОВАННОГО ТЕПЛОСНАБЖЕНИЯ

Докт. техн. наук, проф. ***СЕДНИН В. А.****, канд. физ.-мат. наук, доц.* ***КОРЗНИКОВ А. Д.****, канд. техн. наук, доц.* ***СЕДНИН А. В.****, магистр. техн. наук* ***ШКЛЯР И. В.***

Белорусский национальный технический университет

Задача модернизации существующих систем централизованного теплоснабжения (СЦТ) является актуальной в современных условиях. Особенно сложна эта проблема для крупных городов с плотной застройкой и разветвленной системой тепловых сетей. Строительство административных, гражданско-социальных и жилых зданий в центре городов в последние годы еще больше увеличивает плотность застройки и тем самым приводит к возрастанию тепловых нагрузок. Ввиду того что одновременно происходит модернизация самих тепловых сетей и теплоисточников, представляет определенный практический интерес эффективное решение задачи оптимизации структуры и состава СЦТ. При этом необходимо рассматривать как структурную, так и параметрическую оптимизацию. В первом случае это касается ввода новых элементов (теплоисточников, теплопроводов, тепловых подстанций) в состав СЦТ, во втором – изменения их параметров (мощности, пропускной способности и режима отпуска теплоты). В данной статье рассматривается оптимальная модернизация тепловых сетей при условии, что мощности теплоисточников достаточно для покрытия возросшей потребности в тепловой энергии [1]. Задача решается для режима максимальной тепловой нагрузки.

Постановка задачи и математическая модель. Математическая модель структуры СЦТ представляется графом, множеством вершин V которого являются теплоисточники (источники), тепловые подстанции распределения и потребители (группы потребителей), а множеству его дуг U соответствуют тепломагистрали, связывающие эти элементы между собой, т. е. теплопроводы. Каждому теплоисточнику i, $i=\overline{1,m}$, поставлено в соответствие число q_i – мощность источника, а потребителю b_j, $j=\overline{1,n}$, – потребность в теплоте j-го потребителя. Кроме этого, задана пропускная способность каждой тепломагистрали. При увеличении потребности каждого потребителя на некоторую величину δ_j, $j=\overline{1,n}$, возникает задача модернизации СЦТ с целью увеличения пропускной способности тепловой сети. Таким образом, задача заключается в поиске варианта модернизации (синтезе) новой структуры СЦТ при известных удельных затратах c_{ij} каждого участка тепловой сети для увеличения его пропускной способности.

Как и в [2], рассмотрим сеть $G(V, U)$, где V – множество вершин, $|V|=r$, U – множество дуг. В сети выделены: подмножества $S\in V$ – вершины, в которых сосредоточены теплоисточники (источники); $T\in V$ – вершины, в которых сосредоточены пункты потребления теплоты (стоки). Известны пропускная способность d_{ij} дуги, $(i, j)\in U$, и удельная стоимость c_{ij} увеличения ее пропускной способности.

Рассмотрим два варианта задачи (без ограничения и с ограничением средств, выделенных на модернизацию).

1. Пусть известна величина потока $v_s \le q_s$ из каждого источника $s \in S$ и $v_t = b_t$ в каждый сток $t \in T$ сети $G(V, U)$. Для некоторого множества стоков $T' \in T$ требуется увеличить входящие потоки на величины δ_t, $t \in T'$, и соответственно суммарный поток из источников множества S в стоки множества T' на величину δ. Каким образом следует модернизировать СЦТ, увеличив пропускные способности дуг (тепломагистралей) с минимальными затратами, чтобы получить требуемые потоки?

2. Пусть известно, что суммарные затраты на преобразование сети ограничены некоторой величиной C. Как следует увеличить пропускные способности дуг (тепломагистралей), чтобы в модернизированной СЦТ получить как можно большую величину потока из источников множества S' в стоки множества T' (или увеличить величину потока между некоторыми источниками и стоками на заданную величину, максимально увеличив поток из источников множества S' в стоки множества T'), чтобы суммарные затраты на модернизацию СЦТ не превысили величину C?

Опишем сетевые модели для многополюсных сетей и алгоритмы решения этих задач, использующие идею модифицированных сетей и стоимостей. Обозначим через y_{ij} приращение пропускной способности дуги $(i, j) \in U$; x_{ij} – дуговой поток по этой дуге; $N(k)$ – множество вершин сети $G(V, U)$, соседних с вершиной $k \in V$.

Первая из сформулированных задач может быть записана следующим образом: минимизировать суммарные затраты $\sum_{(i,j)\in U} c_{ij} y_{ij}$ на модернизацию сети при условиях:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i\in N(k)} x_{ik} - \sum_{j\in N(k)} x_{kj} = 0,\ k \notin S \cup T; \\ &\sum_{j\in N(s)} x_{sj} \le q_s,\ s \in S; \\ &\sum_{i\in N(t_l)} x_{it_l} - \sum_{j\in N(t_l)} x_{t_l j} = b_{t_l},\ t_l \in T \setminus T'; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\sum_{i\in N(t_l)} x_{it_l} - \sum_{j\in N(t_l)} x_{t_l j} = b_{t_l} + \delta_{t_l},\ t_l \in T'; \quad (2)$$

$$0 \le x_{ij} \le d_{ij} + y_{ij},\ (i, j) \in U. \quad (3)$$

Если необходимо увеличить суммарный поток из источников множества S' в стоки множества T' на величину δ, то к условию (2) добавятся ограничения:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{t_l\in T'} \delta_{t_l} = \delta; \\ &v_{t_l} \ge 0,\ t_l \in T'. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Вторая задача может быть записана в следующем виде: максимизировать суммарное приращение потока $\delta = \sum_{t_l\in T'} \delta_{t_l}$ при условии, что выполняются ограничения (1)–(4) и

$$\sum_{(i,j)\in U} c_{ij} y_{ij} \le C. \quad (5)$$

Формирование модифицированной сети. Введем две дополнительные вершины s и t, полагая пропускные способности дуг (s, s_i), $s_i \in S$ и (t_j, t), $t_j \in T$, равными соответственно $d_{ss_i} = q_{s_i}$, $d_{t_j t} = b_{t_j}$, $t \in T \setminus T'$, $d_{t_j t} = b_t + \delta_t$, $t \in T'$, а стоимость увеличения их пропускной способности на условную единицу $c_{ss_i} = \infty$, $s_i \in S$, $c_{t_j t} = \infty$, $t_j \in T \setminus T'$, $c_{t_j t} = 0$, $t_j \in T'$. В модернизированной сети с множеством вершин $\overline{V} = V \cup s, t$, множеством дуг $\overline{U}$ необходимо увеличить пропускные способности дуг $(i, j) \in \overline{U}$ на величину y_{ij} таким образом, чтобы величина потоков по дугам (t_j, t), $t_j \in T'$, стала равной $b_{t_j} + \delta_{t_j}$, и при этом суммарные затраты на модернизацию сети, равные $\sum_{(i,j)\in U} c_{ij} y_{ij}$, были минимальными.

Матрица $Y = \|y_{ij}\|$, порядок которой определяется числом элементов множества $\overline{V}$, называется матрицей синтеза сети. Матрица $\overline{Y}^0 = \left\|\overline{y}_{ij}^0\right\|$, которая дает оптимальное решение, – матрицей оптимального синтеза сети.

Алгоритм нахождения матрицы оптимального синтеза сети. Начальный шаг. Строим однополюсную модифицированную сеть $G(\overline{V}, \overline{U})$, как описано выше. Полагаем все элементы матрицы $\overline{Y}^0 = \left\|\overline{y}_{ij}^0\right\|$ порядка $(r + 2) \times \times(r+2)$, равными нулю, а $\overline{X}^0 = \left\|\overline{x}_{ij}^0\right\|$ – максимальный поток в сети $G(\overline{V}, \overline{U})$ величины v, $v^0 = v + \delta$.

Шаг 1. Для имеющегося потока определяем матрицу модифицированных дуговых весов

$$c_{ij}^* = \begin{cases} 0, \text{ если } x_{ij} < d_{ij} \text{ или } 0 < x_{ji} \le d_{ji}; \\ c_{ij}, \text{ если } x_{ij} \ge d_{ij}; \\ -c_{ji}, \text{ если } x_{ji} \ge d_{ji}. \end{cases}$$

Элементы матрицы $R = \left\|r_{ij}\right\|$ полагаем равными $r_{ij} = j,\ i,\ j = \overline{1,(r+2)}$.

Шаг 2. Последовательно для вершин $k = 1, 2, ..., (r+2)$ осуществляем тернарные операции $c_{ij}^* = \min(c_{ij}^*, c_{ik}^* + c_{kj}^*),\ i \ne j \ne k,$ полагая при этом

$$r_{ij} = \begin{cases} r_{ij}, \text{ если } c_{ij}^* \le c_{ik}^* + c_{kj}^*; \\ r_{ik}, \text{ если } c_{ij}^* > c_{ik}^* + c_{kj}^*. \end{cases}$$

Если $c_{st}^* = \infty$, то переходим к шагу 4, в противном случае – к шагу 3.

Шаг 3. С помощью элементов матрицы R находим путь L минимального веса из источников s в сток t: $r_{st} = i_1,\ r_{i_1 t} = i_2,\ ...,\ r_{i_k t} = t,$

$$L = \{(s, i_1), (i_1, i_2), ..., (i_{k-1}, i_k), (i_k, t)\}.$$

Пусть

$$L^+ = \{(i, j) \in L / x_{ij} < d_{ij}\},\ L^- = \{(i, j) \in L / 0 < x_{ji} \le d_{ji}\};$$

$$\overline{L}^+ = \{(i, j) \in L / x_{ij} \ge d_{ij}\},\ \overline{L}^- = \{(i, j) \in L / x_{ji} > d_{ji}\}.$$

Полагаем:

$$\varepsilon_1 = \min_{(i,j)\in L^+} (d_{ij} - x_{ij});\ \varepsilon_2 = \min_{(i,j)\in L^-} x_{ji};$$

$$\varepsilon_3 = \min_{(i,j)\in \overline{L}^-} (d_{ji} - x_{ji}).$$

Увеличиваем поток из источника s в сток t на величину δ, равную $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, если $\varepsilon + v \le v_0$ и $\varepsilon = v_0 - v$, если $\varepsilon + v > v_0$, изменяя поток вдоль пути L следующим образом: $x_{ji} := x_{ji} - \varepsilon$, если $(i, j) \in L^- \bigcup \overline{L}^-$, $x_{ij} := x_{ij} + \varepsilon$, если $(i, j) \in L^+ \bigcup \overline{L}^+$.

Если суммарный поток x_{ij}^0 достиг заданной величины, переходим к шагу 4. В противном случае – к шагу 1.

Шаг 4. Вычисляем матрицу $\overline{Y^0} = \left\|\overline{y}_{ij}^0\right\|$ оптимального синтеза приведенной сети $G(\overline{V}, \overline{U})$

$$\overline{y}_{ij}^0 = \begin{cases} x_{ij}^0 - d_{ij}, \text{ если } x_{ij}^0 > d_{ij}; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

В результате получим матрицу $\overline{Y^0} = \left\|\overline{y}_{ij}\right\|_{r\times r}$ оптимального синтеза исходной многополюсной сети $G(V, U)$ с минимальной стоимостью преобразования $C = \Sigma_i \Sigma_j c_{ij} y_{ij}^0$.

Поскольку увеличение потока каждый раз осуществляется вдоль пути минимального веса, а вес пути – это затраты, связанные с увеличением потока вдоль этого пути на единицу, то понятно, что суммарные затраты, связанные с синтезом сети заданной величины потока, будут минимальны [2].

Алгоритм максимального увеличения потока с заданным уровнем затрат. Начальный шаг. Строим однополюсную модифицированную сеть. Полагаем C_ε и все элементы матрицы преобразования $\overline{Y} = \left\|\overline{y}_{ij}\right\|$ равными нулю.

Шаг 1. Для потока $X = \left\|x_{ij}\right\|$ определяем матрицу модифицированных дуговых весов

$$c_{ij}^* = \begin{cases} 0, \text{ если } x_{ij} < d_{ij} \text{ или } 0 < x_{ji} \le d_{ji}; \\ c_{ij}, \text{ если } x_{ij} \ge d_{ij}; \\ -c_{ji}, \text{ если } x_{ji} > d_{ji}. \end{cases}$$

Элементы матрицы $R = \left\|r_{ij}\right\|$ полагаем равными $r_{ij} = j,\ i = \overline{1,(r+2)},\ j = \overline{1,(r+2)}$.

Шаг 2. Последовательно для вершины $k = 1, 2, ..., (r+2)$ осуществляем тернарные операции $c_{ij}^* = \min(c_{ij}^*, c_{ik}^* + c_{kj}^*)$ для всех $i \neq j \neq k$.

Одновременно с тернарной операцией изменяем элементы матрицы R по следующему правилу:

$$r_{ij} = \begin{cases} r_{ij}, \text{ если } c_{ij}^* \le c_{ik}^* + c_{kj}^*; \\ r_{ik}, \text{ если } c_{ij}^* > c_{ik}^* + c_{kj}^*. \end{cases}$$

Шаг 3. Элемент c_{st}^* указывает минимальный вес пути из источника s в сток t, а элементы матрицы R: $r_{st} = i_1$, $r_{i_1 t} = i_2$, ..., $r_{i_{k-1} t} = i_k$, $r_{i_k t} = t$ указывают этот путь $L = s, i_1, i_2, ..., i_{k-1}, i_k, t$. Если $c_{st}^* = \infty$, задача решена. В противном случае полагаем $\varepsilon_1 = \min\limits_{(i,j)\in L^+} (d_{ij} - x_{ij})$ для множества L^+ ненасыщенных дуг, проходимых в $(s-t)$ – пути L в направлении потока, $\varepsilon_2 = \min\limits_{(i,j)\in L^-} x_{ji}$ для множества $\overline{L}^-$ дуг (i, j) проходим в $(s-t)$ – пути L в направлении, противоположном направлению потока, $\varepsilon_3 = \min\limits_{(i,j)\in \overline{L}^-} (x_{ji} - d_{ji})$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

Если $C_\varepsilon + \varepsilon c_{st}^* \le C$, то положим $C_\varepsilon := C_\varepsilon + \varepsilon c_{st}^*$ и переходим к шагу 4.

Если $C_\varepsilon := C_\varepsilon + \varepsilon \sum\limits_{(i,j)\in L} c_{ij}^* > C$, то $\varepsilon = (C - C_\varepsilon)/c_{st}^*$, $C = C_\varepsilon$ и переходим к шагу 4.

Шаг 4. Увеличиваем поток из источника s в сток t:

$$x_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + \varepsilon, \text{ если } (i, j) \in L^+ \bigcup \overline{L}^+; \\ x_{ij} - \varepsilon, \text{ если } (j, i) \in L^- \bigcup \overline{L}^-. \end{cases}$$

Если $C_\varepsilon < C$, переходим к шагу 1. В противном случае алгоритм заканчивает работу. Вычисляем элементы матрицы оптимального синтеза $\overline{Y^0} = \left\| \overline{y}_{ij}^0 \right\|$ приведенной сети

$$\overline{y}_{ij}^0 = \begin{cases} x_{ij}^0 - \overline{d}_{ij}, \text{ если } x_{ij}^0 > \overline{d}_{ij}; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Корректность алгоритма следует из того, что, как это было доказано в [2], в сети не возникает циклов отрицательного веса и по построению матрицы $\overline{C} = \left\| \overline{c}_{ij} \right\|$ стоимости оптимального синтеза исходной многополюсной и приведенной сети совпадают.

ВЫВОДЫ

1. Представлены алгоритмы, позволяющие эффективно решать задачи по выбору варианта модернизации топологически сложных систем централизованного теплоснабжения при их развитии в результате увеличения тепловых нагрузок.

2. Разработанные алгоритм и программное средство можно рекомендовать для использования при создании перспективных планов развития систем теплоснабжения городов и населенных пунктов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Седнин, В. А.** Теория и практика создания автоматизированных систем управления теплоснабжением / В. А. Седнин. – Минск: БНТУ, 2005. – 192 с.
2. **Корзников, А. Д.** Оптимальный синтез многополюсных сетей / А. Д. Корзников // Вестник БНТУ. – 2005. – № 4. – С. 52–57.

Поступила 03.05.2013