

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ
УРАВНЕНИЯ ПРАНДТЛЯ ДЛЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ
С СОГЛАСОВАННЫМИ КОНТАКТНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ**

*Докт. физ.-мат. наук, проф. ЧИГАРЕВ А. В., докт. физ.-мат. наук МЕЛЕШКО И. Н.,
ПРОНКЕВИЧ С. А.*

Белорусский национальный технический университет

Как известно, к решению уравнения Прандтля сводятся задачи в различных областях механики, в том числе в контактной механике. В частности, задача о сжатии двух упругих тел, одно из которых имеет форму кругового цилиндра, а второе представляет собой бесконечное тело с круговым цилиндрическим вырезом, приводится к интегро-дифференциальному уравнению типа Прандтля для контактных напряжений. Разработка численных и аналитических методов решения уравнения Прандтля остается актуальной в связи с тем, что многие задачи технических систем приводят к необходимости поисков все более точных решений. Для инженерных приложений широкое использование САЕ-систем не уменьшает актуальности получения аналитических решений, позволяющих использовать их в задачах анализа и синтеза контактных деталей. Разработка аналитических методов дает возможность не только контролировать результаты, полученные с помощью САЕ-систем, но и находить более рациональные схемы решений.

Пусть упругий цилиндр радиусом, длина которого не менее порядка диаметра и более, вложен в упругое тело с цилиндрической полостью (рис. 1) так, что по нижней границе они находятся в контакте.

Под действием приложенных нагрузок в контактирующих телах возникают деформации и напряжения, которые удовлетворяют уравнениям равновесия так, что в сечении, расположенном достаточно далеко от торцов цилиндра, напряженно-деформированное состояние является плоским [1]

$$\frac{\partial \sigma_x^\alpha}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^\alpha}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y^\alpha}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}^\alpha}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

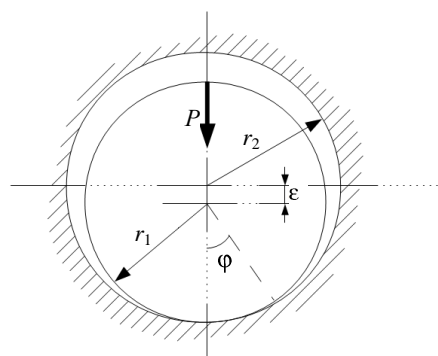


Рис. 1. Внутренний контакт областей с круговыми границами

Закон Гука имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x^\alpha &= 2G \left(\varepsilon_x^\alpha + \frac{\mu^\alpha}{1-2\mu^\alpha} \varepsilon^\alpha \right); \\ \sigma_y^\alpha &= 2G \left(\varepsilon_y^\alpha + \frac{\mu^\alpha}{1-2\mu^\alpha} \varepsilon^\alpha \right); \\ \tau_{xy}^\alpha &= \tau_{yx}^\alpha = G^\alpha \varepsilon_{xy}^\alpha. \end{aligned} \quad (2)$$

Формулы Коши записываются в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^\alpha &= \frac{\partial u^\alpha}{\partial x}; \quad \varepsilon_y^\alpha = \frac{\partial v^\alpha}{\partial y}; \\ \varepsilon_{xy}^\alpha &= \frac{\partial u^\alpha}{\partial y} + \frac{\partial v^\alpha}{\partial x}; \quad \varepsilon^\alpha = \varepsilon_x^\alpha + \varepsilon_y^\alpha, \end{aligned} \quad (3)$$

где индекс $\alpha = 1$ относится к цилиндрической полости, $\alpha = 2$ – к цилиндру. Примем: r_1, r_2 – радиусы отверстия полости и цилиндра соответственно; $\varepsilon = r_2 - r_1$ – радиальный зазор.

Переходя к комплексному потенциалу, представим перемещения u, v и напряжения в полярных координатах в виде [2]:

$$\sigma_{\zeta}^{\alpha} + \sigma_r^{\alpha} = 2 \left[\Phi^{\alpha} w + \overline{\Phi^{\alpha} w} \right];$$

$$\sigma_{\zeta}^{\alpha} - \sigma_r^{\alpha} + 2i \tau_{r\zeta}^{\alpha} = 2e^{2i\zeta} \left[\overline{w} \Phi^{\alpha} w + \Psi^{\alpha} w \right]; \quad (4)$$

$$2\mu^{\alpha} u^{\alpha} + iv^{\alpha} = k^{\alpha} \varphi^{\alpha} w - \overline{w \Phi^{\alpha} w} - \overline{\Psi^{\alpha} w},$$

где μ^{α} – коэффициенты Ляме для тела с полостью ($\alpha = 1$) и для цилиндра ($\alpha = 2$); $\varphi^{\alpha} w, \Psi^{\alpha} w$ – комплексные потенциалы Колосова – Мусхелишвили:

$$\varphi^{\alpha} w = \Phi^{\alpha} w; \quad \Psi^{\alpha} w = \Psi^{\alpha} w.$$

Кроме того, имеют место выражения [3]:

$$\Phi_1 w = \frac{k_1}{2\pi(1+k_1)} \frac{iY}{w} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\sigma_r \omega d\omega}{\omega - w};$$

$$\Phi_2 w = \frac{-iY}{2\pi(1+k_2)} \frac{1}{w} - \frac{iY}{\pi(1+k_2)} \frac{w}{r_2^2} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\sigma_r \xi d\xi}{\xi - w} - \frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{\sigma_r \xi d\xi}{\xi};$$

$$\Psi^{\alpha} w = \frac{r_1^2}{w^2} \Phi^{\alpha} w + \frac{r_1^2}{w^2} \overline{\Phi^{\alpha} \left(\frac{r_1^2}{w} \right)} - \frac{r_1^2}{w} \Phi^{\alpha} w,$$

где Y – главный вектор сил, приложенных к границе.

В области контакта, пренебрегая малыми более высокого порядка, и с учетом малости перемещений по сравнению с геометрическими размерами тел считаем, что выполнено следующее условие:

$$\varepsilon + u_1 \cos \zeta + v_1 \sin \zeta = u_2 \cos \zeta + v_2 - \delta - \varepsilon \sin \zeta, \quad (5)$$

где u_1, v_1 – компоненты перемещений для тела с цилиндрической полостью; u_2, v_2 – для цилиндра; δ – осадка центра цилиндра.

Тогда, учитывая принятые предположения, после элементарных преобразований получаем, что на дуге контакта L выполняется следующее соотношение:

$$\varepsilon + \frac{r_1}{E_1} \left(2G_{11} \left[\Phi_1 \eta + \overline{\Phi_1 \eta} \right] - G_{11} + v_1 G_{21} \sigma_r \right) + r_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{k_1 + 1}{4\mu_1} i \left[\Phi_1 \eta - \overline{\Phi_1 \eta} \right] \right) = \frac{r_2}{E_2} \left(2G_{12} \left[\Phi_2 \zeta + \overline{\Phi_2 \zeta} \right] - G_{12} + v_2 G_{22} \sigma_r \right) + r_2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{k_2 + 1}{4\mu_2} i \left[\Phi_2 \eta - \overline{\Phi_2 \eta} \right] \right), \quad (6)$$

где $1/\zeta = r_1 / r_2 \eta$; $\zeta = r_2 \eta / r_1 - i\varepsilon$.

Таким образом, из (5) и (6) получаем интегро-дифференциальное уравнение в виде [2]

$$\frac{\eta}{\pi i} \int_L \frac{\sigma_r' \omega d\omega}{\omega - \eta} = \gamma_1 \sigma_r \eta - \frac{iY}{\pi} \gamma_2 \left(\frac{1}{\eta} - \frac{\eta}{R^2} \right) - \gamma_3 \frac{Y}{\pi} - \gamma_4 b - \gamma_5 \varepsilon,$$

где

$$\gamma_1 = \frac{G_{12} - v_2 G_{22} E_1 r_1 r_2 - G_{11} - v_1 G_{21} E_2 r_1^2}{2 r_1^2 E_2 G_{11} + r^2 E_1 G_{12}};$$

$$\gamma_2 = \frac{1 + v_2 E_1 r_1 r_2 + k_1 (1 + v_1 E_2 r_1^2)}{4 r_1^2 E_2 G_{11} + r_2^2 E_1 G_{12}};$$

$$\gamma_3 = \frac{G_{12} \varepsilon r_1 E_1}{2 r_2 (1 + k_2 r_1^2 E_2 G_{11} + r_2^2 E_2 G_{12})};$$

$$\gamma_4 = \frac{G_{11} E_2}{r_1^2 E_2 G_{11} + r_2^2 E_1 G_{12}};$$

$$\gamma_5 = \frac{E_1 E_2}{2 r_1 E_2 G_{11} + r_2 E_1 G_{12}}; \quad \frac{b}{r_1^2} = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\sigma_r}{\omega} d\omega; \quad \eta = \text{Re} i \zeta.$$

Для дальнейшего рассмотрения удобно преобразовать полученное выше интегральное уравнение к виду [4]

$$\frac{\Gamma}{B} \frac{x}{x} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma' t}{t - x} dt = f(x), \quad -1 < x < 1, \quad (7)$$

где $\Gamma(x) = \sigma w$; $B(x) = \frac{\eta}{\gamma_1 i}$; $f(x) = -\frac{Y}{\pi \eta} \gamma_2 \times$
 $\times \left(\frac{1}{\eta} - \frac{\eta}{R^2} \right) + \frac{i}{\eta} \left(\gamma_3 \frac{Y}{\pi} + \gamma_4 b + \gamma_5 \varepsilon \right)$ – известные
 функции; $\Gamma(x) = \sigma_r$ – искомая функция.

Будем считать, что $B(x)$ нигде, за возможным исключением концов отрезка $[-1, 1]$, в нуль не обращается. Кроме того, предполагается что

$$\Gamma(-1) = \alpha; \Gamma(1) = \beta. \quad (8)$$

1. Рассмотрим новый подход к приближенному решению уравнения (7) [5]. Использование квадратурной формулы специального вида позволяет значительно упростить вычислительную схему этого метода.

Преобразуем уравнения Прандтля к интегральному уравнению специального вида. Обозначим

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt = u(x)$$

и применим формулу обращения сингулярного интеграла с ядром Коши [6], тогда получим

$$\Gamma'(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} u(t)}{t-x} dt + \frac{C}{\sqrt{1-x^2}},$$

где C – произвольная постоянная и

$$\Gamma(x) = \int_{-1}^x \Gamma'(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^x u(t) H(x,t) dt + C \left(\arcsin x + \frac{\pi}{2} \right) + C_1, \quad (9)$$

где $H(x,t) = \ln \frac{1-xt + \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-t^2}}{|t-x|}$; C_1 – произвольная постоянная.

С помощью условия (8) находим, что $C_1 = \alpha$; $C = \frac{\beta - \alpha}{\pi}$.

Таким образом, краевая задача (7), (8) свелась к интегральному уравнению относительно функции $u(x)$

$$u(x) + \frac{1}{\pi B(x)} \int_{-1}^1 u(t) H(x,t) dt = F(x),$$

где

$$F(x) = f(x) + \frac{1}{B(x)} \left[\alpha - \beta \left(\arcsin x + \frac{\pi}{2} \right) - \alpha \right].$$

Обозначим $q(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)}$ и перепишем

последнее уравнение в виде

$$u(x) - \frac{q(x)}{\pi \sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 u(t) H(x,t) dt = F(x). \quad (10)$$

Введем оператор

$$K u = K u, x \equiv \frac{q(x)}{\pi \sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 u(t) H(x,t) dt. \quad (11)$$

Тогда интегральное уравнение (10) приводится к функциональному уравнению

$$u - K u = F. \quad (12)$$

$$\text{Из } \|K u\|_C \leq \max_{x \in [-1,1]} \left(\frac{|q(x)|}{\pi \sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 |H(x,t)| dt \right) \|u\|_C$$

следует, что $q(x)$ и $f(x)$ непрерывны на отрезке $[-1, 1]$. Тогда с учетом (11) получаем неравенство

$$\|K u\|_C \leq \max_{x \in [-1,1]} |q(x)| \|u\|_C.$$

2. Рассмотрим построение квадратурной формулы с неотрицательными коэффициентами. При построении вычислительной схемы решения интегрального уравнения главную роль играет способ аппроксимации интеграла квадратурной суммой.

Зададим на отрезке $[-1, 1]$ систему точек

$$x_k = kh; \quad k = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n; \quad h = \frac{2}{2n+1}$$

и аппроксимируем функцию $u(x)$ на этом отрезке по формуле

$$u(x) \approx \tilde{u}(x) = \sum_{k=-n}^n \theta_k(x) u(x_k),$$

в которой $\theta_k(x) = 1$, если $x \in \left[x_k - \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2} \right]$ и

$$\theta_k(x) = 0, \text{ если } x \notin \left[x_k - \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2} \right].$$

В результате получается квадратурная формула

$$\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 u(t)H(x,t)dt = \sum_{-n}^n A_k(x)u(x_k) + E(u,x), \quad (13)$$

где коэффициенты

$$A_k(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{x_k-\frac{h}{2}}^{x_k+\frac{h}{2}} H(x,t)dt; \quad (14)$$

$E(u,x)$ – остаточный член формулы (13).

Очевидно, что все $A_k(x)$ неотрицательны для всех $x \in [-1, 1]$

$$\sum_{-n}^n A_k(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 H(x,t)dt = 1. \quad (15)$$

Вычислив интеграл в равенстве (14), находим

$$A_k(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[\left(x_k + \frac{h}{2} - x \right) H \left(x, x_k + \frac{h}{2} \right) - \left(x_k - \frac{h}{2} - x \right) H \left(x, x_k - \frac{h}{2} \right) \right] + \frac{1}{\pi} \left[\arcsin \left(x_k + \frac{h}{2} \right) - \arcsin \left(x_k - \frac{h}{2} \right) \right]. \quad (16)$$

Если функция $u(x)$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$, то остаток приближенной формулы (15) можно оценить неравенством

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \frac{M}{2} h, \quad M = \max_{x \in [-1,1]} |u'(x)|. \quad (17)$$

Остаточный член квадратурной формулы (13)

$$E(u;x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 u(t) - \tilde{u}(t) H(x,t)dt.$$

Оценивая его по модулю с учетом (11), получаем неравенство

$$|E(u;x)| \leq \max_{x \in [-1,1]} |u(x) - \tilde{u}(x)|. \quad (18)$$

Подставив вместо интеграла в уравнение (10) его представление квадратурной формулой (13), приходим к равенству

$$u(x) - q(x) \sum_{-n}^n A_k(x)u(x_k) = F(x)q(x)E(u,x). \quad (19)$$

Удовлетворяя это соотношение в узлах квадратурной формулы (13), получаем систему равенств

$$u(x_j) - q(x_j) \sum_{-n}^n A_k(x_j)u(x_k) = F(x_j) + q(x_j)E(u,x_j), \quad j = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n. \quad (20)$$

Удовлетворяя этому уравнению в узлах квадратурной формулы x_k и отбрасывая слагаемое $q(x)E(u,x)$, будем иметь систему линейных алгебраических уравнений:

$$u_j - q(x_j) \sum_{-n}^n A_k(x_j)u_k = F(x_j), \quad j = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n, \quad (21)$$

где u_k – приближенные значения $u(x_k)$ в узлах x_k .

Приближенное решение интегрального уравнения (10) можно получить из (19), если отбросить в нем слагаемое $q(x)E(u,x)$ и заменить значения $u(x_k)$ приближенными значениями u_k , найденными из системы (21). Имеем

$$\tilde{u}(x) = F(x) + q(x) \sum_{-n}^n A_k(x)u_k. \quad (22)$$

С другой стороны, точное решение

$$u(x) = F(x) + q(x) \sum_{-n}^n A_k(x)u(x_k) + q(x)E(u,x).$$

Сравнивая два последних равенства, получим

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq |q(x)| \sum_{-n}^n |A_k(x)| |u(x_k) - u_k| + |q(x)| |E(u,x)|.$$

Из этого неравенства, равенства (15) следует равномерная по $x \in [-1; 1]$ оценка погрешности приближенного решения (22)

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \frac{q}{1-q} \omega(u, h). \quad (23)$$

В качестве приближенного решения уравнения (7) можно взять

$$\tilde{\Gamma}(x) = B(x)F(x) - B(x)\tilde{u}(x)$$

или, вспоминая, что $q(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)}$ и подставляя $\tilde{y}(x)$ из (22), имеем

$$\tilde{\Gamma}(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{-n}^n A_k(x) u_k. \quad (24)$$

Нетрудно убедиться, что точное решение можно записать в виде

$$\Gamma(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{-n}^n A_k(x) u(x_k) + \sqrt{1-x^2} E(u, x). \quad (25)$$

Из равенств (24) и (25) находим разность

$$\Gamma(x) - \tilde{\Gamma}(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{-n}^n A_k(x) u(x_k) - u_k + \sqrt{1-x^2} E(u, x). \quad (26)$$

Отсюда с учетом равенства (11) получим оценку погрешности $\tilde{\Gamma}(x)$.

Численное моделирование. В качестве примера решения были рассмотрены тело с отверстием единичного радиуса $R = 0,1$ м и цилиндр радиусом $r = 0,099$ м. Материалом для тела и цилиндра являлась сталь со следующими физическими характеристиками: модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0,23$.

Изложенное выше решение сравнивали с решением, предложенным И. Штаерманом [7], а также с численным решением с использованием конечно-элементной программы ANSYS.

Распределение контактного давления p , полученное в системе ANSYS и на основе аналитического решения И. Штаермана с помощью вышеизложенного алгоритма, представлено на рис. 2.

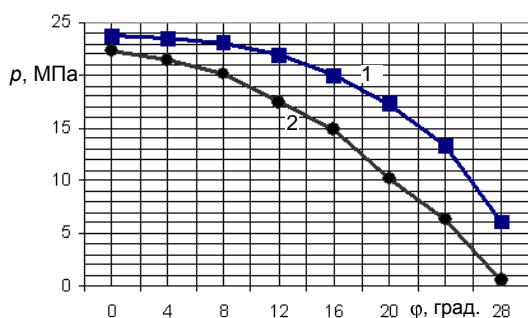


Рис. 2. Распределение контактного давления в области соприкосновения цилиндра, вложенного в цилиндрическую полость: 1 – аналитическое решение; 2 – решение в системе ANSYS

Таким образом, на основе численно-аналитического метода решения уравнения Прандтля построено решение задачи о внутреннем контакте цилиндрических тел.

ВЫВОДЫ

1. Сравнение результатов, полученных на основе построения приближенного решения (1) и с использованием конечно-элементного моделирования, показывает, что результаты близки. В то же время использование систем компьютерной математики (Mathematica, Maple, MathCad и др.) для решения такого рода задач значительно проще и не требует изучения таких громоздких систем, как ANSYS, и дает результаты, точность которых не хуже, чем при решении их с помощью данного конечно-элементного пакета.

2. Оценки погрешности приближенного аналитического метода позволяют контролировать не только точность аналитических, но и численных результатов, в том числе полученных на основе конечно-элементного анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков, А. Г. Теория упругости и пластичности / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Тарлаковский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 416 с.
2. Кравчук, А. С. Механика контактного взаимодействия тел с круговыми границами / А. С. Кравчук, А. В. Чигарев. – Минск: Технопринт, 2000. – 196 с.
3. Каландия, А. И. Математические методы двумерной теории упругости / А. И. Каландия. – М.: Наука, 1973. – 304 с.
4. Prandtl, L. // Nach. Kgl. Ges. WissMath. Phys. – 1918. – P. 451–470.
5. Голубев, В. В. Лекции по теории крыла / В. В. Голубев. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. – 480 с.
6. Габдулхаев, Б. Г. Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода / Б. Г. Габдулхаев. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1994. – 288 с.
7. Штаерман, И. Я. Контактная задача теории упругости / И. Я. Штаерман. – Л.: Гостехиздат, 1949. – 270 с.

Поступила 02.09.2013