

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ИНСТРУМЕНТА С АСИММЕТРИЧНЫМ ЦИКЛОМ КОЛЕБАНИЙ

*БНТУ, г. Минск, Республика Беларусь*

С целью дробления стружки в процессе точения рассмотрим использование дополнительных угловых колебаний инструмента с асимметричным циклом вокруг оси, расположенной в горизонтальной плоскости ниже опорной поверхности резца перпендикулярно оси вращения заготовки [1, 2]. В результате этих движений резцедержавки инструмент периодически врезается в заготовку в направлении подачи и отходит от нее, обеспечивая периодическое изменение толщины среза и перерезание сливной стружки на элементы. Упрощенная схема колебательной системы, которая содержит лишь силы, оказывающие наиболее значимое влияние на условия дробления стружки, представлена на рисунке 1.

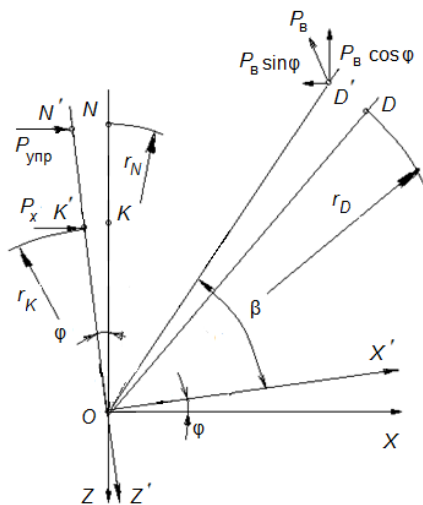


Рисунок 1 – Схема колебательной системы

На схеме приведены следующие обозначения:  $O$  – точка, лежащая на оси  $Y$  поворота резцедержавки,  $\varphi$  – угол поворота резцедержавки,  $K$  и  $K'$  – положение вершины резца до и после поворота резцедержавки на угол  $\varphi$ ,  $N$  и  $N'$  – положение точек приложения силы упругости пружин до и после поворота резцедержавки на угол  $\varphi$ ,  $D$  и  $D'$  – положение точки приложения возмущающей силы до и после поворота резцедержавки на угол  $\varphi$ ,  $P_x$  – составляющая силы резания,  $P_B$  – возмущающая сила,  $P_{\text{упр}}$  – сила упругости пружин,  $r_K$  – расстояние от оси  $Y$  до вершины резца  $K$ ,  $r_N$  – расстояние от оси  $Y$  до точки  $N$  приложения силы упругости пружины,  $r_D$  – расстояние от оси  $Y$  до точки  $D$  приложения возмущающей силы,  $\beta$  – угол между осью  $X$  и линией, проведенной из точки  $O$  через точку  $D$ .

Колебательное движение инструмента вокруг оси  $Y$  можно описать уравнением

$$J_y \ddot{\varphi} + M_{\text{тр}} + M_{\text{упр}} + M_x = M_B,$$

где  $J_y$  – момент инерции относительно оси  $Y$ ,  $M_{\text{тр}}$  – момент силы трения,  $M_{\text{упр}}$  – момент силы упругости,  $M_x$  – момент силы резания, равный  $P_x \cdot r_K$ ,  $M_B$  – момент возмущающей силы, равный  $P_B \cdot r_D \cdot \cos\beta$ .

Рассмотрим процесс трения, происходящий при подаче масла в зону контакта трущихся поверхностей, т.е. в вязкой среде. Сила трения в этом случае пропорциональна скорости движения. Следовательно, момент сил трения можно определить по формуле

$$M_{\text{тр}} = \alpha \cdot \dot{\varphi} r_{\text{тр}},$$

где  $\alpha$  – коэффициент пропорциональности,  $r_{\text{тр}}$  – плечо приложения сил трения.

Момент сил упругости определяется по формуле

$$M_{\text{упр}} = j \varphi r_N^2,$$

где  $j$  – коэффициент упругости пружины,  $r_N$  – плечо приложения силы упругости.

Таким образом, дифференциальное уравнение колебательного движения инструмента примет вид:

$$J_y \ddot{\phi} + \alpha \dot{\phi} r_{\text{тр}} + j \phi r_N^2 + P_x r_K = P_B r_D \cos \beta.$$

В связи с тем, что толщина среза в течение каждого цикла колебаний изменяется, сила резания  $P_x$  представляет собой периодическую функцию с периодом  $2\pi$ , при этом  $2\pi$  примем равным сумме частей периода, приходящихся на врезание  $x_1$  и отвода  $x_2$  от заготовки. При асимметричных колебаниях  $x_1 \neq x_2$ . Представленная в виде ряда Фурье сила  $P_x$  при точении с  $x_1 > x_2$  имеет вид

$$P_x(x) = \frac{P_x x_1}{2\pi} + \frac{P_x}{\pi x_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left( \left( \cos k \left( x_2 - \frac{x_1}{2} \right) - \cos \left( -k \frac{x_1}{2} \right) \right) \cos kx + \left( 3 \sin k \frac{x_1}{2} + \sin k \left( x_2 - \frac{x_1}{2} \right) \right) \sin kx \right).$$

Колебательные движения инструмента генерируются возмущающей силой  $P_B$ , величина которой также периодически изменяется:

$$P_B(x) = \frac{(P_B + P'_B) x_1}{4\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{P'_B x_1 - P_B x_2}{k^2 x_2 (x_1 - x_2)} \left[ \cos \left( k \left( x_2 - \frac{x_1}{2} \right) \right) - \cos \frac{kx_1}{2} \right] \cos(kx) + \left[ \frac{P_B}{k^2 (x_1 - x_2)} \left[ \frac{2x_1 - x_2}{x_2} \sin \frac{kx_1}{2} - \sin \left( k \left( x_2 - \frac{x_1}{2} \right) \right) \right] + \frac{P'_B}{k^2 x_2 (x_1 - x_2)} \left( x_1 \sin \left( k \left( x_2 - \frac{x_1}{2} \right) \right) + (x_1 - 2x_2) \sin \frac{kx_1}{2} \right) \right] \sin kx \right\}.$$

Сила  $P'_B$  соответствует моменту резания с максимальной толщиной среза.

Подставив значения  $P_x(x)$  и  $P_B(x)$  в дифференциальное уравнение и решив его относительно угла поворота инструмента  $\phi$  получим

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k(jr_N^2 - k^2 J_y)}{(jr_N^2 - k^2 J_y)^2 + (k\alpha r_{\text{тр}})^2} \sin 2k\pi f t + \frac{(P_B + P'_B)x_1 r_D \cos \beta - 2P_x x_1 r_K}{4\pi j r_N^2},$$

в котором для сокращения его записи принято:

$$n_k = \frac{P_B r_D \cos \beta}{\pi k^2 (x_1 - x_2)} \times \left( \frac{2x_1 - x_2}{x_2} \sin \frac{kx_1}{2} - \sin k \left( x_2 - \frac{x_1}{2} \right) \right) + \frac{P'_B r_D \cos \beta}{\pi k^2 x_2 (x_1 - x_2)} \times \\ \times \left( x_1 \sin k \left( x_2 - \frac{x_1}{2} \right) + (x_1 - 2x_2) \sin \frac{kx_1}{2} \right) - \frac{P_x r_K}{k^2 \pi x_2} \left( 3 \sin \frac{kx_1}{2} + \sin k \left( x_2 - \frac{x_1}{2} \right) \right).$$

Угловое колебательное движение вершины резца на небольшой угол ( $\varphi < 3-4^\circ$ ) можно представить как возвратно-поступательное. Поэтому умножив угол  $\varphi$  поворота резцедержателя на расстояние  $r_k$  от оси вращения до вершины резца, получим математическую модель возвратно-поступательного колебательного движения инструмента с размахом колебаний  $W$ , которая имеет вид:

$$W = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k(jr_N^2 - k^2 J_y) r_K}{(jr_N^2 - k^2 J_y)^2 + (k\alpha r_{\text{тр}})^2} \sin 2k\pi f t + \frac{(P_B + P'_B)x_1 r_D \cos \beta - 2P_x x_1 r_K}{4\pi j r_N^2} r_K,$$

где  $f$  – частота колебательных движений инструмента в секунду,  $t$  – время (с).

Аналогичным образом может быть получена математическая модель для колебательного движения инструмента с  $x_1 < x_2$ .

Математическая модель позволяет на этапе проектирования специального резцедержателя для стружкодробления к токарному станку установить взаимосвязь между его размерами, величиной возмущающей силы  $P_B$ , силой резания  $P_x$  и жесткостью пружин, а также определить соотношение между максимальной возмущающей силой  $P_B$  и соответствующей ей промежуточной силой  $P'_B$ , обеспечивающее требуемую траекторию движения инструмента с минимальной амплитудой колебаний при заданных параметрах колебаний инструмента (пе-

риоды врезания  $x_1$  и отвода  $x_2$ , частота колебаний  $f$ ), позволяющее спроектировать устройство, задающее эти колебания (например, кулачок).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Данильчик, С. С. Кинематика точения с наложением асимметричных колебаний инструмента / С. С. Данильчик, В. К. Шелег // Наука и техника. 2013. – №4. – С. 16–21.
2. Данильчик, С. С. Оптимальные параметры асимметричных колебаний инструмента для стружкодробления при точении вязких конструкционных сталей // С. С. Данильчик, В. К. Шелег // Наука и техника. Серия 1. Машиностроение. 2017. – № 5. – С. 376-382.