Доклады Академии наук БССР

1988 Том XXXII № 12

УДК 535.36 : 539.125.523

Н. Н. РОГОВЦОВ

АСИМПТОТИКА ПОВЕРХНОСТНОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ОДНОРОДНОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ СРЕДЫ

(Представлено академиком АН БССР Ф. И. Федоровым)

В статье найдена асимптотика для поверхностной функции Грина [1] уравнения переноса для того случая, когда точка «наблюдения» находится на большой оптической глубине однородной полубесконечной неконсервативно рассеивающей среды, облучаемой «бесконечно узким» мононаправленным пучком внешнего излучения. При этом в отличие от [2, 3] при выводе указанного асимптотического выражения не будут накладываться ограничения на положения точки «наблюдения» и места «падения» пучка излучения на границу среды.

На основе полученной в работе асимптотики поверхностной функции Грина нетрудно выписать в явном виде асимптотические соотношения для характеристик полей излучения на большой оптической глубине полубесконечной среды при освещении ее произвольным внешним излучением. Заметим, что асимптотические выражения для интенсивности излучения и функции источников на большой оптической глубине полубесконечного слоя, облучаемого «бесконечно широким» мононаправленным пучком излучения, создающим на его границе освещенность, не зависящую от положения на ней, были получены еще в классических работах В. А. Амбарцумяна [4] и В. В. Соболева [5, 6].

Известно [1], что для отыскания поверхностной функции Грина достаточно найти «объемную» функцию Грина, которую для случая однородной полубесконечной среды $\bar{V}_{(0,\infty)}$, ограниченной плоскостью $\bar{S}$, обозначим через $\tilde{G}_{(0,\infty)}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\Omega}^*)$ ($\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\tau}^*$ — оптические радиусы-векторы, задающие соответственно положения точки «наблюдения» и источника; $\boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}^*$ — единичные векторы, определяющие направления распространения и испускания излучения; величина $\tilde{G}_{(0,\infty)}(\ldots)$ соответствует «источнику» вида $\delta(\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}^*)\,\delta(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{\Omega}^*)$). Получим асимптотическое выражение для $\tilde{G}_{(0,\infty)}(\ldots)$ при $\tau_0 \to \infty$ (τ_0 — оптическая глубина, на которой находится точечный мононаправленный «источник» $\delta(\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}^*)\,\delta(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{\Omega}^*)$). Будем при этом дополнительно предполагать, что точка «наблюдения» лежит на $\bar{S}$ (для краткости этот факт будем обозначать как $\boldsymbol{\tau}\in\bar{S}$). Обозначим через β величину угла между внутренней нормалью к $\bar{S}$ и вектором $(-\mathbf{R}) = \boldsymbol{\tau}^* - \boldsymbol{\tau}$, причем β должно удовлетворять условиям $0 \leqslant \beta < \pi/2$. При получении асимптотического выражения для $\tilde{G}_{(0,\infty)}(\ldots)$ используем такое соотношение инвариантности:

$$\tilde{G}_{(0,\infty)}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\Omega}^*) = \tilde{G}_{\infty}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\Omega}^*) +$$
$$+ \frac{1}{|(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\Omega})|} \iint_{\bar{S}} d\bar{S}'' \int_{\bar{\Omega}_-} (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\Omega}'')\,\tilde{G}_{\infty}(\boldsymbol{\tau}'', \boldsymbol{\Omega}'', \boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\Omega}^*) \times$$

$$\tilde{G}_{\bar{S}}(\boldsymbol{\tau}'', -\boldsymbol{\Omega}'', \boldsymbol{\tau}, \quad -\boldsymbol{\Omega}, \bar{V}_{(0,\infty)})\,d\boldsymbol{\Omega}'', \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\tau} \in \bar{S}, \ (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\Omega}) > 0,$$

которое представляет собой частный случай выражения (12) из [7]. В выражении (1) величины имеют следующий смысл: $\tilde{G}_{\infty}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\Omega}^*)$ — «объемная» функция Грина уравнения переноса для случая бесконечной однородной среды $\bar{V}_{\infty}$, оптические параметры которой идентичны реализующимся в $\bar{V}_{(0,\infty)}$; $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к $\bar{S}$; Ω_{-} — полусфера, определяемая условием $(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\Omega}) < 0$; $\tilde{G}_{\bar{S}}(\boldsymbol{\tau}'', -\boldsymbol{\Omega}'', \boldsymbol{\tau}, -\boldsymbol{\Omega}, \bar{V}_{(0,\infty)})$ — поверхностная функция Грина уравнения переноса для случая $\bar{V}_{(0,\infty)}$ (в (1) вектор $\boldsymbol{\tau}''$ задает точки на $\bar{S}$, т. е. $\boldsymbol{\tau}'' \in \bar{S}$).

Соотношение (1) указывает только на общую связь, существующую между $\tilde{G}_{(0,\infty)}(\cdots)$, $\tilde{G}_{\infty}(\cdots)$ и $\tilde{G}_{\bar{S}}(\cdots)$. Как отмечалось в [3, 8], при отыскании асимптотик различных характеристик полей излучения с помощью общих соотношений инвариантности [7, 9] необходимо принять во внимание какую-либо дополнительную содержательную информацию. Так же, как в [3, 8], в качестве таковой используем асимптотическую формулу для $\tilde{G}_{\infty}(\cdots)$ при $|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}^*| \to \infty$, найденную в работах [10, 11] различными способами. Для наших целей ее удобно представить в следующей форме [3]:

$$\tilde{G}_{\infty}(\boldsymbol{\tau}'', \boldsymbol{\Omega}'', \boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\Omega}^*) = \frac{k\exp(-k|\boldsymbol{\tau}'' - \boldsymbol{\tau}^*|)}{2\pi^2 M|\boldsymbol{\tau}'' - \boldsymbol{\tau}^*|} \times$$

$$\times i\left(\left(\boldsymbol{\Omega}''\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}'' - \boldsymbol{\tau}^*}{|\boldsymbol{\tau}'' - \boldsymbol{\tau}^*|}\right)\right) i\left(\left(\boldsymbol{\Omega}^*\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}'' - \boldsymbol{\tau}^*}{|\boldsymbol{\tau}'' - \boldsymbol{\tau}^*|}\right)\right) + \eta_1, \tag{2}$$

$$\eta_1 = q_1 + q_2, \ q_2 = o(|\boldsymbol{\tau}'' - \boldsymbol{\tau}^*|^{-1}\exp(-k|\boldsymbol{\tau}'' - \boldsymbol{\tau}^*|)),$$

$$|\boldsymbol{\tau}'' - \boldsymbol{\tau}^*| \to \infty, \ (0 < \Lambda < 1).$$

Здесь k — наименьший неотрицательный корень характеристического уравнения; Λ — альбедо однократного рассеяния; $i(\ldots)$ — глубинное тело яркости (предполагаем, что данная функция нормирована условием $\int_{-1}^{1} i(\mu')\,d\mu' = (2/\Lambda)$ [6]); $M = 2\int_{-1}^{1}\mu' i^2(\mu')\,d\mu'$; q_1 — обобщенная функция, описывающая прямое и первые кратности рассеянного излучения, q_2 — ограниченная функция.

Кроме (2), при получении асимптотики функции $\tilde{G}_{(0,\infty)}(\ldots)$ нам понадобятся следующие легко выводимые асимптотические выражения:

$$i\left(\left(\boldsymbol{\Omega}''\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}'' - \boldsymbol{\tau}^*}{|\boldsymbol{\tau}'' - \boldsymbol{\tau}^*|}\right)\right) = i\left(\left(\boldsymbol{\Omega}''\cdot\frac{\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}^*}{|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}^*|}\right)\right) + o(1), \tag{3}$$

$$i\left(\left(\boldsymbol{\Omega}^*\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}'' - \boldsymbol{\tau}^*}{|\boldsymbol{\tau}'' - \boldsymbol{\tau}^*|}\right)\right) = i\left(\left(\boldsymbol{\Omega}^*\cdot\frac{\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}^*}{|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}^*|}\right)\right) + o(1),$$

$$|\boldsymbol{\tau}'' - \boldsymbol{\tau}^*| = (\tau_0/\cos\beta)(1 + o(1)), \ \tau_0 \to \infty, \ \boldsymbol{\tau}'' \in \bar{S}_1,$$

где $\bar{S}_1$ — область в виде круга, лежащего на $\bar{S}$, радиус τ_1 которого удовлетворяет условиям $(\tau_1/\tau_0) = o(1)$ при $\tau_0 \to \infty$, $\tau_1 \to \infty$ (центр круга $\bar{S}_1$ совпадает с точкой, задаваемой $\boldsymbol{\tau}$). При доказательстве справедливости соотношений (3) сделано физически оправданное допущение о непрерывности $i(\mu')$ на отрезке $[-1, 1]$.

Если представить поверхностный интеграл в (1) в виде суммы интегралов по $\bar{S}_1$ и $(\bar{S}\times\bar{S}_1)$, то с помощью формул (2), (3) и целого ряда достаточно элементарных преобразований и оценок можно показать, что имеет место выражение

$$\tilde{G}_{(0,\,\infty)}(\boldsymbol{\tau},\ \boldsymbol{\Omega},\ \boldsymbol{\tau}^*,\ \boldsymbol{\Omega}^*) = \frac{k}{2\pi^2 MR}\, i\left(\left(\boldsymbol{\Omega}^*\cdot\frac{\mathbf{R}}{R}\right)\right)\times$$

$$\times\left\{i\left(\left(\boldsymbol{\Omega}\cdot\frac{\mathbf{R}}{R}\right)\right)\exp(-kR) + (|\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\Omega}|)^{-1}\int\limits_{\Omega_-}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\Omega}'')\, i\left(\left(\boldsymbol{\Omega}''\cdot\frac{\mathbf{R}}{R}\right)\right)\times\right.$$

$$\left. d\Omega''\iint\limits_{\bar{S}}\exp(-k|\boldsymbol{\tau}''-\boldsymbol{\tau}^*|)\,\tilde{G}_{\bar{S}}(\boldsymbol{\tau}'',\ -\boldsymbol{\Omega}'',\ \boldsymbol{\tau},\ -\boldsymbol{\Omega},\ \bar{V}_{(0,\,\infty)})\,d\bar{S}''\right\} + \Delta_1, \qquad (4)$$

$$\boldsymbol{\tau}\in\bar{S},\ (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\Omega})>0,\quad (0<\Lambda<1),\ R=|\mathbf{R}|,$$

где Δ_1 допускает представление $\Delta_1 = q_1^* + q_3$, $q_3 = o(R^{-1}\exp(-kR))$ при $\tau_0\to\infty$ (q_1^* совпадает с q_1 при $\boldsymbol{\tau}''=\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\Omega}''=\boldsymbol{\Omega}$). Следующий существенный шаг, который необходимо сделать при отыскании искомой асимптотики, состоит в получении асимптотического выражения для поверхностного интеграла в (4) при $\tau_0\to\infty$. Введем в рассмотрение прямоугольную декартову систему координат $OXYZ$, которая расположена следующим образом: плоскость OXY совпадает с $\bar{S}$, а точка O — с точкой «наблюдения»; направление оси OZ совпадает с направлением внутренней нормали к $\bar{S}$; ось OY лежит в плоскости, перпендикулярной $\bar{S}$ и проходящей через источник и точку «наблюдения», причем вектор $\boldsymbol{\tau}^*$ (он задает положение источника) должен иметь компоненты $(0,\ \tau_0\operatorname{tg}\beta,\ \tau_0)$. С учетом сказанного можно показать, что справедливо соотношение

$$\lim_{\tau_0\to\infty}\iint\limits_{\bar{S}}\exp\left\{k\left(\frac{\tau_0}{\cos\beta}-|\boldsymbol{\tau}''-\boldsymbol{\tau}^*|\right)\right\}\tilde{G}_{\bar{S}}(\boldsymbol{\tau}'',-\boldsymbol{\Omega}'',\boldsymbol{\tau},-\boldsymbol{\Omega},\ \bar{V}_{(0,\,\infty)})\,d\bar{S}'' =$$

$$= \iint\limits_{\bar{S}}\exp(ky''\sin\beta)\,\tilde{G}_{\bar{S}}(\boldsymbol{\tau}'',-\boldsymbol{\Omega}'',\boldsymbol{\tau},-\boldsymbol{\Omega},\bar{V}_{(0,\,\infty)})\,d\bar{S}''; \qquad (5)$$

$$\boldsymbol{\tau}=(0,\ 0,\ 0),\ \boldsymbol{\tau}''=(x'',\ y'',\ 0),\ (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\Omega})>0,\ (\tau_0/\cos\beta)=R,\ (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\Omega}'')<0,$$
$$(0<\Lambda<1).$$

Обозначим через μ_1, μ косинусы углов между векторами $(-\boldsymbol{\Omega}'')$, $(-\boldsymbol{\Omega})$ и осью OZ, а через φ_1, φ — соответствующие азимуты этих векторов. С учетом этих обозначений и определения $\tilde{G}_{\bar{S}}(\ldots)$ [1] нетрудно убедиться в том, что величина в правой части (5) равна $\hat{I}(0,\ \mu_1,\ \varphi_1,\ \mu,\ \varphi)$ при $\mu_1<0$, где функция $\hat{I}(\ldots)$ представляет собой решение задачи

$$\mu_1\frac{\partial\hat{I}(z,\ \mu_1,\ \varphi_1,\ \mu,\ \varphi)}{\partial z} = -(1-k\sin\beta\sin\varphi_1\sqrt{1-\mu_1^2})\hat{I}(z,\ \mu_1,\ \varphi_1,\ \mu,\ \varphi)+$$

$$+\frac{\Lambda}{4\pi}\int\limits_{\Omega}x(\mu_0)\,\hat{I}(z,\ \mu_1',\ \varphi_1',\ \mu,\ \varphi)\,d\Omega', \qquad (6)$$

$$\hat{I}(0,\ \mu_1,\ \varphi_1,\ \mu,\ \varphi)|_{\mu_1>0} = \delta(\mu_1-\mu)\,\delta(\varphi_1-\varphi),\ \mu>0,\ z\geqslant 0,$$

где $x(\mu_0)$ — индикатриса рассеяния. Принимая во внимание (5), (6), из (4) получаем искомую асимптотику для функции $\tilde{G}_{(0,\,\infty)}(\ldots)$:

$$\tilde{G}_{(0,\,\infty)}(\boldsymbol{\tau},\ \boldsymbol{\Omega},\ \boldsymbol{\tau}^*,\ \boldsymbol{\Omega}^*) = \frac{k\exp(-kR)}{2\pi^2 MR}\, i\left(\left(\boldsymbol{\Omega}^*\cdot\frac{\mathbf{R}}{R}\right)\right)\left\{i\left(\left(\boldsymbol{\Omega}\cdot\frac{\mathbf{R}}{R}\right)\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\mu}\int\limits_0^1\mu''d\mu''\int\limits_0^{2\pi} i(\sqrt{1-(\mu'')^2}\sin\varphi''\sin\beta-\mu''\cos\beta)\,\hat{I}(0,\ -\mu'',\ \varphi'',\ \mu,\ \varphi)\,d\varphi''\right\}+$$

$$+\Delta_2,\ \tau_0\to\infty,\ \mu>0,\ \boldsymbol{\tau}\in\bar{S},\ (0<\Lambda<1), \tag{7}$$

причем Δ_2 допускает такую же асимптотическую оценку, как и Δ_1. Согласно принципу взаимности [1], имеет место равенство $\tilde{G}_{\bar{S}}(\boldsymbol{\tau}^*,\ -\boldsymbol{\Omega}^*,\ \boldsymbol{\tau},\ -\boldsymbol{\Omega}) = \mu\tilde{G}_{(0,\ \infty)}(\boldsymbol{\tau},\ \boldsymbol{\Omega},\ \boldsymbol{\tau}^*,\ \boldsymbol{\Omega}^*)$. Следовательно, умножив (7) на μ, получим асимптотику для поверхностной функции Грина (теперь положение точки «наблюдения» будет определяться $\boldsymbol{\tau}^*$, а место «падения» пучка внешнего излучения $\boldsymbol{\tau}$).

Summary

An asymptotic expression is found for Green surface function of the radiative transfer equation for a homogeneous semi-infinite medium.

Литература

1. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М., 1972. 2. Романова Л. М. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1968. Т. 4, № 3. С. 311—320. 3. Роговцов Н. Н. // Докл. АН БССР. 1988. Т. 32, № 5. С. 413—416. 4. Амбарцумян В. А. // Научные труды. Ереван, 1960. Т. 1. 5. Соболев В. В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М., 1956. 6. Соболев В. В. Рассеяние света в атмосферах планет. М., 1972. 7. Роговцов Н. Н. // ЖПС. 1981. Т. 35, № 6. С. 1044—1050. 8. Роговцов Н. Н. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1988. № 2. С. 101—106. 9. Роговцов Н. Н. // Докл. АН БССР. 1981. Т. 25, № 5. С. 420—423. 10. Фано У., Спенсер Л., Бергер М. Перенос гамма-излучения. М., 1963. 11. Долин Л. С. // Оптика моря. М., 1983. С. 118—122.

Белорусский политехнический институт

Поступило 11.04.88