УДК 624.04

К ТЕОРИИ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛОК ИЗ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО МАТЕРИАЛА

Докт. техн. наук, проф. ***БОСАКОВ С. В.,*** *инж.* ***ЩЕТЬКО Н. С.***

Белорусский национальный технический университет,
Белорусский научно-исследовательский институт строительства

Проектные организации Республики Беларусь несколько лет назад перешли на отечественные нормы проектирования бетонных и железобетонных конструкций, в которых заложены нелинейные зависимости между напряжениями и деформациями для решения статических задач расчета конструкций [1]. В настоящей статье делается попытка исследования влияния нелинейно упругих законов деформирования материала на свободные колебания балок. Эта область исследования, несомненно, представляет большой интерес, так как расчеты на сейсмику, пульсацию ветра и влияние машин с динамическими нагрузками прямо связаны с определением частот и форм собственных колебаний конструкций [2].

1. Рассмотрим консольную балку с одной степенью свободы (рис. 1).

Предположим, что материал двутаврового сечения балки подчиняется закону

$$\sigma(\varepsilon)=E\varepsilon-\frac{4}{27}\frac{E^3}{\sigma^2}\varepsilon^3, \qquad (1)$$

где σ, E – предел прочности и начальный модуль упругости материала балки.

Зададимся законом свободных колебаний балки в виде

$$Z(x,t)=A(t)\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right). \qquad (2)$$

Считая справедливой гипотезу плоских сечений, находим

$$\varepsilon=\frac{z}{R}=A(t)\frac{\pi^2 z}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}, \qquad (3)$$

где $\frac{1}{R}$ – кривизна балки.

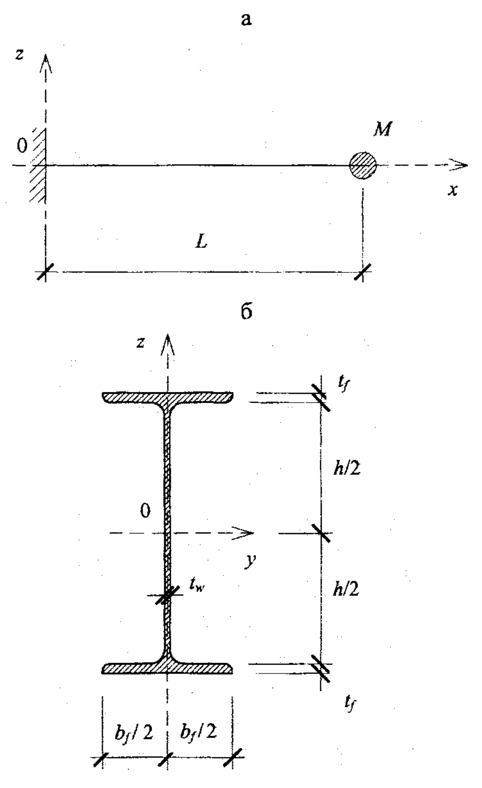

Рис. 1. а – консольная балка с сосредоточенной массой; б – ее поперечное сечение

Энергия изгиба при принятом законе деформирования (1) получится в виде [3]

$$U=\int_0^L dx\iint_\Omega\left(E\frac{\varepsilon^2}{2}-\frac{1}{27}\frac{E^3}{\sigma^2}\varepsilon^4\right)d\Omega=$$

$$=\frac{E\pi^4}{768L^3}\left(6b_f h^2 t_f+8b_f t_f^3+h_w^3\right)A^2(t)- \qquad (4)$$

$$-\frac{E^3\pi^8}{1474560L^7\sigma^2}\left[2t_f\left(5h^4t_f+40h^2t_f^3+16t_f^5\right)+h^5t_w\right],$$

где Ω – площадь двутаврового сечения.

Согласно теореме Кастилиано $\frac{\partial U}{\partial A}$ даст нелинейную силу упругости балки в точке приложения массы [4], и поэтому на основании принципа Даламбера [5] для двутавра 30Б2 и $L = 3$ м; $\sigma = 4 \cdot 10^8$ Па; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $M = 500$ кг получаем нелинейное дифференциальное уравнение

$$500\frac{d^2A(t)}{dt^2} + 1{,}57559 \cdot 10^6 A(t) - 6{,}08857 \cdot 10^7 A^3(t) = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) известно под названием уравнения Дюффинга с мягкой нелинейностью [5] и допускает точное решение. Действительно, обозначим $\frac{dA(t)}{dt} = v$, тогда $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dA}\frac{dA}{dt} = v\frac{dv}{dA}$ и

$$v\frac{dv}{dA} = -\frac{1}{500} \cdot \left(1{,}57559 \cdot 10^6 A - 6{,}08857 \cdot 10^7 A^3\right) =$$
$$= -(3151{,}18A - 121771A^3).$$

Или

$$vdv = -(3151{,}18A - 121771A^3)dA.$$

Откуда после интегрирования получаем

$$\frac{v^2}{2} = H - \frac{3151{,}18}{2}A^2 + \frac{121771}{4}A^4, \tag{6}$$

где H – постоянная интегрирования.

Если обе части (6) умножить на величину массы M, то произведение MH будет давать полную энергию колеблющейся системы, состоящей из кинетической энергии массы $\frac{Mv^2}{2}$ и потенциальной энергии изгиба балки U. Очевидно, в процессе свободных колебаний балки ее полная энергия остается постоянной.

Используя начальные условия:

$$A(t)\big|_{t=0} = A_0; \quad \left.\frac{dA(t)}{dt}\right|_{t=0} = v_0,$$

находим выражение для полной энергии

$$MH = M\frac{v_0^2}{2} + \frac{3151{,}18}{2}A_0^2 - \frac{121771}{4}A_0^4. \tag{7}$$

Так как из (6) следует

$$v = \sqrt{2H - 3151{,}18A^2 + \frac{121771}{2}A^4} =$$
$$= \sqrt{\frac{2MH}{M} - 3151{,}18A^2 + \frac{121771}{2}A^4} = \frac{dA}{dt},$$

получаем

$$t = \int_{A_0}^{A} \frac{dA}{\sqrt{\frac{2MH}{M} - 3151{,}18A^2 + \frac{121771}{2}A^4}}. \tag{8}$$

Для периода T собственных колебаний рассматриваемой балки из (8) находим

$$T = 4\int_{A_0}^{0} \frac{dA}{\sqrt{\frac{2MH}{M} - 3151{,}18A^2 + \frac{121771}{2}A^4}}, \tag{9}$$

откуда видны зависимость периода колебаний от начальных условий и негармоничность периодических колебаний балки, так как (9) выражается через полные эллиптические интегралы [6].

На рис. 2 приведены графики колебаний для линейного и нелинейного вариантов при $A_0 = 0{,}03$ м и $v_0 = 0$, построенные с помощью пакета «Mathematika».

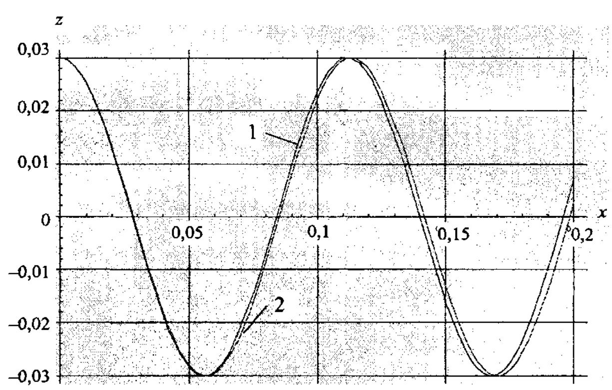

Рис. 2. Графики колебаний консольной балки с одной степенью свободы при: 1 – линейном; 2 – нелинейном законах деформирования

2. Рассмотрим прежнюю консольную балку, но прямоугольного поперечного сечения размером bh, материал который подчиняется закону деформирования

$$\sigma(\varepsilon) = R_b\left[\pm 1 \mp \exp\left(\frac{E_b}{R_b}|\varepsilon|\right)\right], \tag{10}$$

где R_b, E_b – прочность и начальный модуль упругости материала балки.

Задаваясь уравнением свободных колебаний в виде (2), после определения кривизны (3) вычислим энергию изгиба по формуле (4):

$$U = 2R_b\int_0^L dx\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy\int_0^{\frac{h}{2}}\left[\frac{R_b}{E_b}\exp\left(-\frac{E_bA\pi^2 z}{4R_bL^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{A\pi^2}{4L^2}z\cos\frac{\pi x}{2L}\right]dz = A\frac{\pi b h^2 R_b}{8L} +$$
$$+\frac{2L8bL^2R_b^3}{12\pi A\pi^2E_b^2}\left[6\pi\alpha I_0(\alpha) - \pi\alpha^3{}_1F_2\left(\frac{3}{2}; 2, \frac{5}{2}; \frac{\alpha^2}{4}\right) - \right. \tag{11}$$
$$\left. -2\alpha^2{}_2F_3\left(1,1;\ \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}; \frac{\alpha^2}{4}\right) - 6\pi L_1(\alpha)\right];$$

$$\alpha = \frac{E_b h\pi^2}{8R_bL^2}A,$$

где $I_0(\alpha)$ – функция Бесселя мнимого аргумента; ${}_pF_q(\alpha; \beta; \gamma; z)$ – гипергеометрические функции; $L_1(\alpha)$ – функция Струве [6].

Разлагая (11) в степенной ряд по безразмерному параметру α и дифференцируя по A для определения нелинейной силы упругости, получаем нелинейное дифференциальное уравнение для исходных данных железобетонной балки (L = 3 м; M = 500 кг; E_b = 3,31·10^{10} Па; R_b = 3,49·10^7 Па; b = 0,2 м; h = 0,4 м)

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 7961{,}088A - 131781A^2 + 1{,}61471\cdot 10^6A^3 -$$
$$- 1{,}58391\cdot 10^7A^4 + 1{,}29961\cdot 10^8A^5 - \ldots = 0. \tag{12}$$

Численное решение уравнения (12) получено на пакете «Mathematika» при удержании в степенном ряду пяти первых членов. На рис. 3 приведены графики колебаний консольной балки для линейного и нелинейного вариантов. Для нелинейного варианта видно смещение оси колебаний относительно центра прямоугольного сечения.

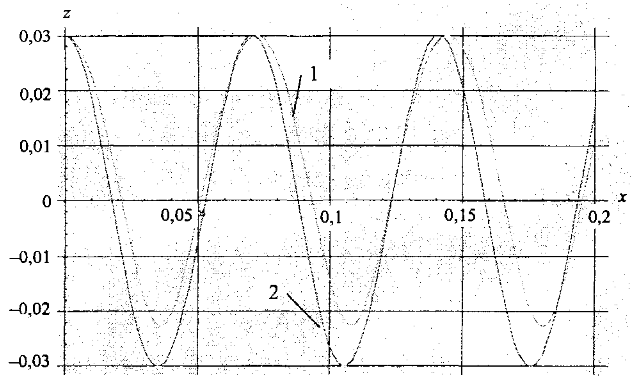

Рис. 3. Графики свободных колебаний железобетонной балки свободы при: 1 – нелинейном; 2 – линейном законах деформирования

3. Теперь изучим поведение консольной балки с двумя степенями свободы (рис. 4).

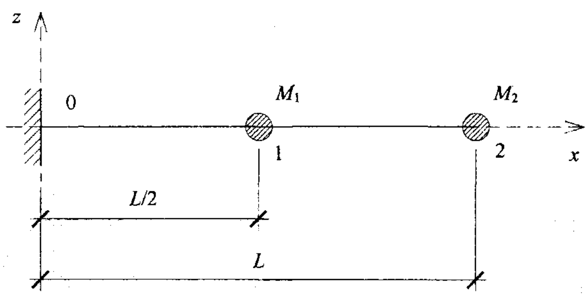

Рис. 4. Консольная балка с двумя степенями свободы

Зададимся законом колебаний в форме

$$z(x,t) = A_1(t)\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right) + A_3(t)\left(1-\cos\frac{3\pi x}{2L}\right). \tag{13}$$

Причем

$$z_1\left(\frac{L}{2}, t\right) = A_1(t)\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + A_3(t)\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$
$$z_2(L,t) = A_1(t) + A_3(t). \tag{14}$$

Откуда следует:

$$A_1(t) = -\sqrt{\frac{2}{2}}z_1\left(\frac{L}{2}, t\right) + \frac{1+\sqrt{2}}{2}z_2(L,t);$$
$$A_3(t) = -\sqrt{\frac{2}{2}}z_1\left(\frac{L}{2}, t\right) + \frac{2-\sqrt{2}}{2}z_2(L,t). \tag{15}$$

Законы движения колеблющихся масс можно записать в виде уравнений:

$$\begin{cases} M_1 \dfrac{d^2 z_1}{dt^2} + R_1 = 0; \\ M_2 \dfrac{d^2 z_2}{dt^2} + R_2 = 0, \end{cases} \qquad (16)$$

где R_1, R_2 – силы упругости балок в местах приложения масс на балке.

На основании (15) можно получить:

$$R_1 = \frac{\partial U}{\partial z_1} = \frac{\partial U}{\partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial z_1} + \frac{\partial U}{\partial A_3}\frac{\partial A_3}{\partial z_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial U}{\partial A_1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial U}{\partial A_3};$$

$$R_2 = \frac{\partial U}{\partial z_2} = \frac{\partial U}{\partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial z_2} + \frac{\partial U}{\partial A_3}\frac{\partial A_3}{\partial z_2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\frac{\partial U}{\partial A_1} + \frac{\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}}\frac{\partial U}{\partial A_3}, \qquad (17)$$

где U – энергия изгиба колеблющейся балки.

Выразим эту энергию в виде функции от A_1, A_3 приняв закон деформирования материала балки в виде (1). По формулам (17) для двутавра 30Б2 и L = 3 м, M_1 = 1500 кг, M_2 = 500 кг. Получим необходимые силы упругости:

$$R_1 = A_1(t)\left[1{,}575592\cdot 10^6 - 6{,}088566\cdot 10^7 A_1^2(t) - 5{,}479709\cdot 10^8 A_1(t)A_3(t) - 9{,}863476\cdot 10^9 A_3^2(t)\right];$$

$$R_2 = 1{,}276229\cdot 10^8 A_3(t) - 1{,}826569 A_3(t)\cdot 10^8 - 9{,}863476\cdot 10^9 A_1^2(t)A_3(t) - 3{,}994708\cdot 10^{11} A_3^3(t). \qquad (18)$$

Численное решение получено с помощью пакета «Mathematika». На рис. 5. приведены графики колебаний точек расположения масс при начальных условиях $A_1(0) = 0{,}001$ м; $A_3(0) = -0{,}01$ м; $A'(0) = A'_3(0) = 0$.

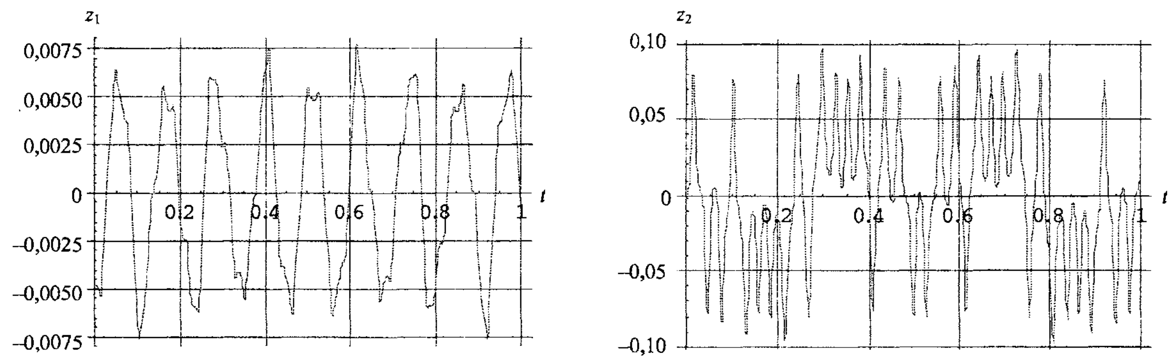

Рис. 5. Графики колебаний точек расположения масс на консольной балке

4. Рассмотрим свободные колебания шарнирно опертой железобетонной балки прямоугольного поперечного сечения с бесконечным числом степеней свободы (рис. 6).

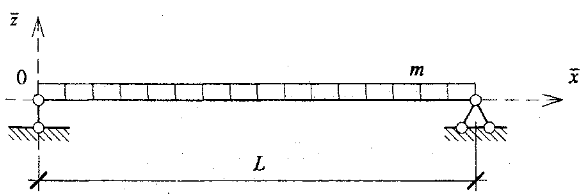

Рис. 6. Шарнирно опертая балка с бесконечно большим числом степеней свободы

Дифференциальное уравнение ее свободных колебаний запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2}\left[B(\bar{x},\bar{t})\frac{d^2\bar{z}}{d\bar{x}^2}\right] + m\frac{d^2\bar{z}}{dt^2} = 0, \qquad (19)$$

где $B(\bar{x},\bar{t})$ – изгибная жесткость сечения балки.

Для фиксированного момента времени $\bar{t}$ прямоугольного сечения балки и при условии (1):

$$B = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(\bar{z})\bar{z}^2 d\bar{z} = B_0\left[1 - \frac{h^2}{15}\left(\frac{d^2\bar{z}}{d\bar{x}^2}\right)^2\right]; \qquad (20)$$

$$B_0 = \frac{Ebh^3}{12}.$$

Поэтому уравнение свободных колебаний (19) принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2}\left\{B_0\left[1 - \frac{h^2}{15}\left(\frac{E}{\sigma}\frac{d^2\bar{z}}{d\bar{x}^2}\right)^2\right]\frac{d^2\bar{z}}{d\bar{x}^2}\right\} + m\frac{d^2\bar{z}}{dt^2} = 0. \qquad (21)$$

Согласно [5] уравнение (21) приведем к безразмерной форме. Обозначим:

$$\bar{x} = xL; \quad \omega_0\bar{t} = t; \quad \bar{z} = hz;$$
$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} = \omega_0 \frac{\partial}{\partial t}; \quad \frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial x}. \tag{22}$$

После подстановки (22) в (21) получаем уравнение свободных колебаний в безразмерном виде

$$\omega_0^2 \frac{mL^4}{B_0}\frac{\partial^2 z}{dt^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\left[1 - \frac{h^4}{15L^4}\frac{E^2}{\sigma^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right\} = 0. \tag{23}$$

Численное решение уравнения (23) получено с помощью пакета «Mathematika». На рис. 7, 8 показаны первые две формы собственных колебаний для начальных условий:

$$\bar{\bar{z}}_1(\bar{x},\ 0) = 0{,}01\sin\frac{\pi\bar{x}}{L};$$
$$\frac{\partial\bar{z}_1(\bar{x},\ 0)}{\partial\bar{t}} = 0;$$
$$u\bar{z}_2(\bar{x},\ 0) = 0{,}001\sin\frac{2\pi\bar{x}}{L};$$
$$\frac{\partial\bar{z}_2(\bar{x},\ 0)}{\partial\bar{t}} = 0$$

при b = 0,3 м; h = 0,5 м; $E = 3{,}31\cdot10^{10}$ Па; $\sigma = 2{,}23\cdot10^7$ Па; m = 1000 кг/м; L = 6 м.

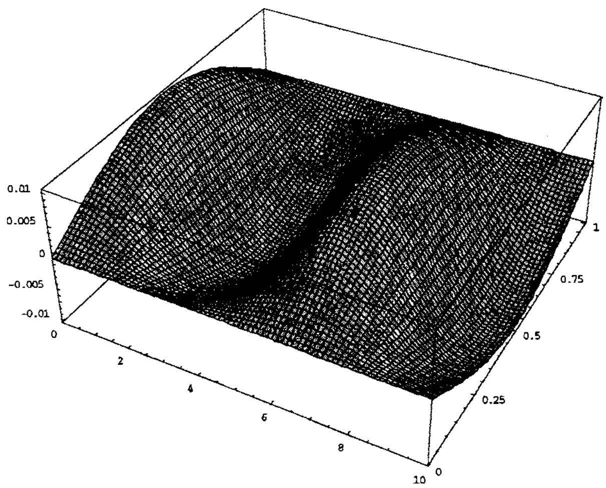

Рис. 7. Первая симметричная форма колебаний шарнирно опертой балки T = 0,0775 с

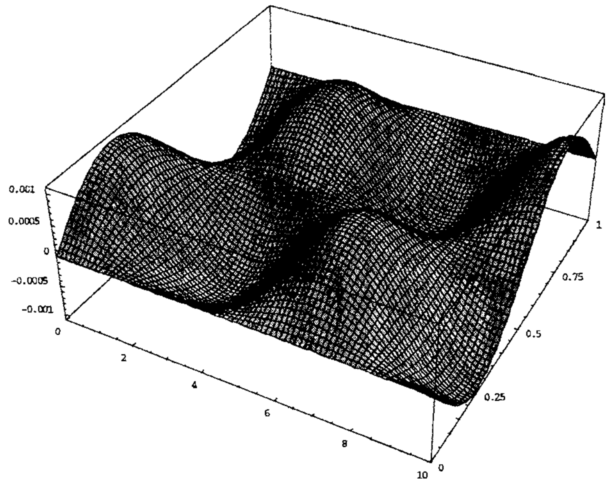

Рис. 8. Первая антисимметричная форма колебаний шарнирно опертой балки T = 0,00199 с

ВЫВОДЫ

1. Учет нелинейной связи между деформациями и напряжениями при свободных колебаниях балок значительно усложняет задачу определения частот и форм свободных колебаний балок.

2. Различные зависимости $\sigma - \varepsilon$ по-разному влияют на характер частоты и формы свободных колебаний балок.

3. Перед учеными Беларуси в области строительства стоят актуальные и сложные задачи по приведению в соответствие статических и динамических расчетов, заложенных в нормативных документах.

ЛИТЕРАТУРА

1. **СНБ 5.03.01–02.** Бетонные и железобетонные конструкции. – Мн., 2003. – 139 с.

2. **СНиП 2.01.07–85.** Нагрузки и воздействия. – М., 1986. – 34 с.

3. **Босаков С. В.** Метод Ритца в примерах и задачах по строительной механике и теории упругости. – Мн., 2000. – 144 с.

4. **Ржаницын А. Р.** Строительная механика. – М.: Высш. шк., 1991. – 438 с.

5. **Найфэ А.** Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 455 с.

6. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды: Дополнительные главы. – М.: Наука, 1986. – 799 с.