

го движения колесных машин с нелинейным управляющим воздействием, обеспечивающим более высокую сходимость расчетных значений с экспериментальными данными и значительно повышающим адекватность математической модели.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ванцевич В.В., Высоцкий М.С., Гилелес Л.Х. Мобильные транспортные машины: Взаимодействие со средой функционирования. – Мн.: Беларуская навука, 1998. – 303 с.
2. Брянский Ю.А. Управляемость большегрузных автомобилей. – М.: Машиностроение, 1983. – 176 с.
3. Смирнов Г.А. Теория движения колесных машин. – 2-е изд., переработ. и доп. – М.: Машиностроение, 1990. – 352 с.
4. Фаробин Я.Е. Теория поворота транспортных машин. – М.: Машиностроение, 1970. – 176 с.
5. Атаманов Ю.Е., Гуськов В.В., Масюк С.К. Тракторы. Ч. VII: Лаб. практикум для студентов вузов / Под общ. ред. В.В. Гуськова. – Мн.: Выш. школа, 1979. – 128 с.
6. Шалягин В.Н. Транспортные и транспортно-технологические средства повышенной проходимости. – М.: Агропромиздат, 1986. – 254 с.
7. Control of Vehicle Dynamics // Automotive Engineering. – 1995. – May. – P. 87-93.
8. Антонов Д.А. Теория устойчивости движения многоосных автомобилей. – М.: Машиностроение, 1978. – 216 с.
9. Эллис Д.Р. Управляемость автомобиля / Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1975. – 216 с.
10. Ванцевич В.В., Высоцкий М.С., Дубовик Д.А. Управление динамикой криволинейного движения колесных машин // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-техн. навук. – 2001. – №3. – С. 123–128.

УДК 621.833.06

Лустенков М.Е.

## РАЗРАБОТКА ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЛАНЕТАРНОЙ ШАРИКОВОЙ ПЕРЕДАЧИ НА ОСНОВЕ СТРУКТУРНО-МАТРИЧНОГО МЕТОДА

Белорусско-Российский университет  
Могилев, Беларусь

**Введение.** Передача движения и нагрузки посредством тел качения используется во многих механизмах и устройствах, например в подшипниках и направляющих качения, а также в механических передачах, некоторые типы из которых (шариковинтовые) изготавливаются серийно. Планетарные передачи с телами качения известны не так широко, однако имеют ряд преимуществ, позволяющих эффективно использовать их для решения некоторых инженерных задач. Одна из разновидностей такого рода передач – эллипсная шариковая передача (ЭШП) может применяться для создания компактных редуцирующих узлов с низкой себестоимостью изготовления, легко встраиваемых в различные устройства, средства малой механизации [1]. Редукторы аналогичного типа нашли применение для создания устройств работающих при бурении нефтяных и газовых скважин [2].

**Принцип работы ЭШП** основан на взаимодействии профильных рабочих поверхностей трех соосных цилиндрических деталей

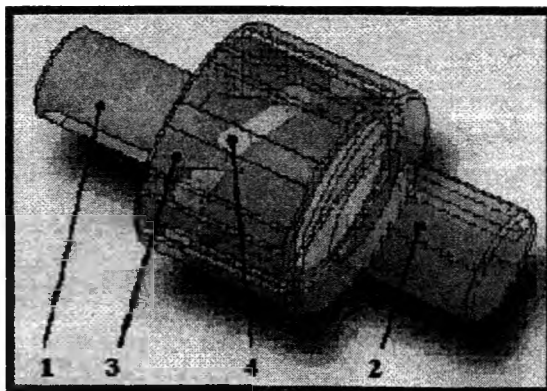


Рисунок 1 - Секция ЭШП в сборе (3D-модель)

- 1– ведущий вал (внутренний кулачок),
- 2– ведомый вал с пазами,
- 3– многопериодный кулачок,
- 4– система тел качения

посредством промежуточных тел – шариков (рис.1). Модель передачи представляет собой пересечение в пространстве двух периодических кривых (синусоид), замкнутых на цилиндре с радиусом образующей окружности R. Одна из кривых – однопериодная (эллипс,  $Z_1=1$ ), другая многопериодная, с числом периодов  $Z_3$ .

Синусоиды имеют одинаковые амплитуды A, средние линии кривых совпадают, точки их пересечения (центры тел качения) располагаются равномерно по окружности с равным полярным угловым шагом относительно оси цилиндра. При вращении одной кривой относительно неподвижной другой (скольжении вдоль оси абсцисс на плоской развертке) точки пересечения будут двигаться согласовано. Их абсолютное движение по неподвижной синусоиде можно разложить на два движения: относительное вдоль оси ординат и переносное вдоль оси абсцисс. Если рассмотреть точки пересечения первой группы [2], характеризующие пересечение разноименных ветвей кривых, (восходящих ветвей одной кривой и нисходящих другой, и наоборот), то вдоль оси абсцисс расстояние между ними в процессе движения не будет изменяться, что позволяет ввести в конструкцию передачи звено (вал с пазами), позволяющее воспринимать результирующее движение.

На базе ЭШП возможно изготовление многоступенчатых высокоскоростных передач путем последовательного соединения секций. На рис.2 приведен общий вид мотор-редуктора с двухступенчатой передачей.

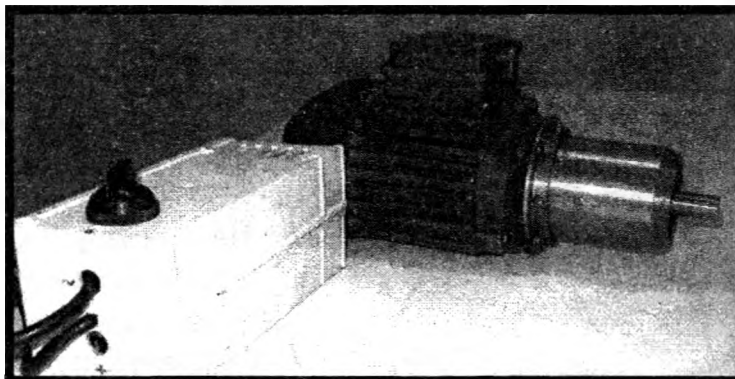


Рисунок 2- Планетарный шариковый мотор-редуктор с блоком управления

Блок управления служит для реверса мотор-редуктора. В кон-

струкции использовался асинхронный электродвигатель типа 4AA5682У3 мощностью 250Вт и частотой вращения 2760 об/мин. Редуцирующая часть имеет передаточное отношение, равное 72 (у первой ступени – 8, у второй ступени – 9), наружный диаметр корпуса редуктора равен 70 мм.

**Исследование динамики передачи.** При анализе передачи вводится индексация параметров звеньев, согласно обозначению, приведенному на рис.1. Направление сигналов соответствует первой кинематической схеме (аналог схемы 2К-Н для зубчатых передач, при которой звено 3 остановлено, звено 1 – ведущее, а звено 2 – ведомое). Кинетическая энергия ЭШП для 1-ой кинематической схемы:

$$T = T_1 + T_2 + \sum_{i=1}^n T_{4i}, \quad (1)$$

где  $T_1$  – кинетическая энергия внутреннего кулачка;  $T_2$  – кинетическая энергия вала с пазами;  $T_{4i}$  – кинетическая энергия i-го тела качения; n – количество тел качения в передаче.

Принимая угол поворота ведущего вала  $\phi_1$  в качестве обобщенной координаты, получим:

$$T_1 = \frac{J_1 \dot{\phi}_1^2}{2}; \quad T_2 = \frac{J_2 \dot{\phi}_1^2}{2u^2}; \quad T_4 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{m_4 v_{c4i}^2}{2} + \frac{J_4 \dot{\phi}_{4i}^2}{2} \right), \quad (2)$$

где  $J_1, J_2, J_4$  – моменты инерции тел 1, 2 и 4 соответственно;  $\phi_1$  и  $\dot{\phi}_1$  – угол поворота ведущего звена (внутреннего кулачка) и его угловая скорость соответственно;  $m_4$  – масса шарика;  $v_{c4i}$  – скорость центра масс i-го шарика,  $\dot{\phi}_{4i}$  – угловая скорость вращения i-го шарика вокруг оси проходящей через центр масс.

Скорость центра масс шарика определится [3]:

$$v_{c4i} = \frac{\dot{\varphi}_1}{u} \sqrt{R^2 + A^2 Z_3^2 \cos^2 \left( Z_3 \frac{\varphi_1}{u} \right)}. \quad (3)$$

Угловые скорости  $\dot{\varphi}_4$  в первом приближении можно рассматривать как линейные функции угловой скорости входного вала, т.е.  $\dot{\varphi}_4 = k \dot{\varphi}_1$ , где  $k$  – коэффициент пропорциональности, и принять у всех тел качения равными. Тогда кинетическая энергия передачи:

$$T = \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} \left( J_1 + \frac{J_2}{u^2} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{m_4}{u^2} \left( R^2 + A^2 Z_3^2 \cos^2 \left( Z_3 \left( \frac{\varphi_1}{u} + \frac{2\pi}{n} i \right) \right) \right) + k^2 n J_4 \right). \quad (4)$$

В выражении (4) присутствует функция суммы квадратов косинусов. Для упрощения этого выражения и дальнейших расчетов выполним преобразования сумм некоторых тригонометрических функций.

$$\int_0^{2\pi R} \sin(ax + b) dx = (-\cos(2a\pi R + b) + \cos b) / a =$$

$$= -(\cos(2a\pi R) \cdot \cos b - \sin(2a\pi R) \cdot \sin b + \cos b) / a = (-\cos b + \cos b) / a = 0,$$

причем  $a$  – целое число (в рассматриваемой модели  $a=Z_3$ ).

$$\int_0^{2\pi R} \cos(ax + b) dx = 0. \quad (7)$$

Последнее равенство следует из того, что интеграл в последнем преобразовании выражения (7) равен нулю согласно выражению (6).

Аналогично доказывается равенство

$$\int_0^{2\pi R} \cos^2(ax + b) dx = \pi R. \quad (8)$$

Выражения (7) и (8) характеризуют суммарную площадь, ограниченную функциями  $\sin^2(ax + b)$ ,  $\cos^2(ax + b)$  и осью абсцисс. Чтобы найти сумму ординат точек равномерно распределенных вдоль оси абсцисс необходимо разделить это выражение на длину интервала.

Таким образом

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sin^2(ax + b) = \int_0^{2\pi R} \sin^2(ax + b) dx \cdot \frac{n}{l} = \frac{\pi R n}{l};$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \cos^2(ax + b) = \int_0^{2\pi R} \cos^2(ax + b) dx \cdot \frac{n}{l} = \frac{\pi R n}{l}, \quad (9)$$

где  $l$  – общая длина вдоль оси абсцисс, на которой вычисляется интеграл;  $n$  – количество интервалов.

Применительно к выражению (4), получим

$$\sum_{i=0}^{n-1} \cos^2 \left( Z_3 \frac{\varphi_1}{u} + \frac{2\pi}{n} i \right) = \frac{\pi R n}{2\pi R} = \frac{n}{2}. \quad (10)$$

Выполним преобразования, предусмотренные уравнениями Лагранжа II рода.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) + \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_{\varphi_1} = M_1 - M_2 / u - M_{\text{тр}}, \quad (11)$$

где  $Q_{\varphi_1}$  – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате  $\varphi_1$ ;  $M_{\text{тр}}$  – момент сил трения в передаче.

После преобразования с учетом формул (9), выражение (4) примет вид:

$$T = \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} \left( J_1 + \frac{J_2}{u^2} + n \left( \frac{m_4 R^2}{u^2} + \frac{m_4 A^2 Z_3^2}{2u^2} + k^2 J_4 \right) \right) = 0,5 \dot{\varphi}_1^2 J_{\text{п}}, \quad (12)$$

где  $J_{\Pi}$  – постоянный инерционный коэффициент, равный выражению в скобках в первой части формулы (13).

Таким образом, математически доказано, что несмотря на сложный характер взаимных перемещений тел качения относительно друг друга и неподвижной системы отсчета, всю эту систему можно рассматривать как единое тело, совершающее вращательное движение.

**Разработка математической модели передачи.** Далее рассматривается система с четырьмя степенями свободы, состоящая из четырех сосредоточенных масс (рис.3).

Сосредоточенные массы  $J_1, J_2, J_3$  и  $J_4$  отражают инерционные свойства объекта, фазовыми переменными типа потока являются угловые скорости, а типа потенциала – вращающие моменты. Матрицы инцидентий и трансформаторных элементов приведены в таблице 1.

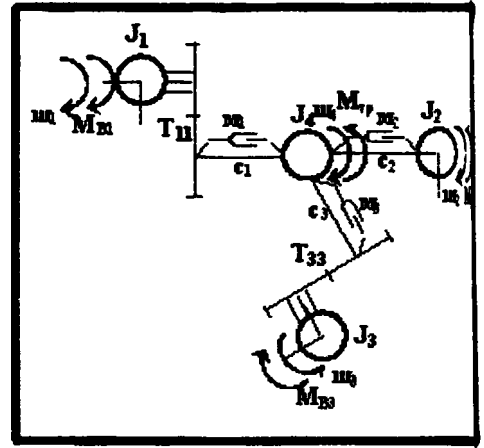


Рисунок 3 - Динамическая модель планетарной шариковой передачи

Таблица 1 Матрицы инцидентий и трансформаторных элементов динамической модели

Узлы	Ветви									
	Источники потенциалов				Упругие и диссипативные			Трансформаторные элементы		
	$M_{B1}$	$M_{B2}$	$M_{B3}$	$M_{Tp}$	$c_1$ ( $\mu_1$ )	$c_2$ ( $\mu_2$ )	$c_3$ ( $\mu_3$ )	$c_1$ ( $\mu_1$ )	$c_2$ ( $\mu_2$ )	$c_3$ ( $\mu_3$ )
1	$L_i$	0	0	0	$-L_i$	0	0	1	0	0
2	0	$L_i$	0	0	0	$-L_i$	0	0	0	0
3	0	0	$L_i$	0	0	0	$-L_i$	0	0	1
4	0	0	0	-1	$L_i$	$L_i$	$L_i$	0	0	0
Подматрицы	$A_B$				$A_y$ ( $A_D$ )			$T_y$ ( $T_D$ )		

Движение системы с учетом малых колебаний будет описываться системой следующих уравнений, полученных на основе структурно-матричного метода [4].

$$d\omega_1 / dt = (M_{B1} - (M_{y1} + M_{D1}) / u_{12}) / J_1; \quad (13)$$

$$d\omega_2 / dt = (-M_{B2} + M_{y2} + M_{D2}) / J_2; \quad (14)$$

$$d\omega_4 / dt = (-M_{B4} + M_{y1} + M_{D1} - M_{y2} - M_{y3} - M_{D2} - M_{D3}) / J_1; \quad (15)$$

$$dM_{y1} / dt = c_1(\omega_1 / u_{12} - \omega_2); \quad (16)$$

$$dM_{y2} / dt = c_2(-\omega_2 + \omega_4); \quad (17)$$

$$dM_{y3} / dt = c_3(-\omega_3 u_{32} - \omega_4); \quad (18)$$

где  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  – угловые скорости входного, выходного звеньев и системы тел качения соответственно;  $M_{B1}, M_{B2}, M_{B3}$  – моменты, приложенные к основным звеньям передачи;  $M_{y1}$  и  $M_{D1}$  – потенциалы упругих и диссипативных элементов соответственно;  $u_{12}$  – передаточное число, определяемое при заторможенном 3-ем звене и передаче движения от входного звена 1 к выходному звену 2;  $u_{32}$  – передаточное число, определяемое при заторможенном звене 1 и передаче движения от входного звена 3 к выходному звену 2.

При этом моменты диссипативных элементов и момент внешних воздействий  $M_{B3}$ :

$$M_{D1} = \mu_1(\omega_1 / u_{12} - \omega_2); \quad M_{D2} = \mu_2(-\omega_2 + \omega_4); \quad M_{D3} = \mu_3(-\omega_3 u_{32} - \omega_4);$$

$$M_{B3} = (M_{y3} + M_{D3}) \mu_{32}, \quad (19)$$

где  $c_j$  – жесткости упругих элементов;  $\mu_k$  – коэффициенты диссипации.

Передаточные числа  $u_{12}$  и  $u_{32}$  определяются исходя из известной формулы Виллиса для планетарных передач. В правой части этой формулы роль чисел зубьев выполняют числа периодов на кулачках передачи:  $Z_1=1$  (однопериодная синусоида – эллипс) и  $Z_3$ .

Для решения системы шести дифференциальных уравнений (13)-(18) необходимо задание начальных условий:  $\omega_{10}$ ,  $\omega_{20}$ ,  $\omega_{40}$ ,  $M_{y10}$ ,  $M_{y20}$ ,  $M_{y30}$  и времени интегрирования. И если начальные угловые скорости можно принять равными нулю:  $\omega_{10}=0$ ,  $\omega_{20}=0$ ,  $\omega_{40}=0$ , то моменты находятся во взаимосвязи и их значение необходимо находить из условий статического равновесия системы:

$$M_{y10} = M_{B1}, \quad M_{y20} = M_{B1}u_{12}, \quad M_{y3} = M_{B1}u_{13}. \quad (20)$$

Особо следует рассматривать вопрос об определении коэффициентов жесткости упругих элементов и коэффициентов диссипации. Коэффициенты  $c_1$  и  $\mu_1$  характеризуют упругие и диссипативные свойства контакта внутреннего кулачка и тел качения, коэффициенты  $c_2$  и  $\mu_2$  характеризуют упругие и диссипативные свойства контакта пазов вала с пазами и тел качения, а коэффициенты  $c_3$  и  $\mu_3$  характеризуют упругие и диссипативные свойства контакта рабочих поверхностей наружного кулачка и тел качения, и все они являются, по сути, приведенными коэффициентами. Так как соединение элементов во всех случаях последовательное, то возможно воспользоваться следующим выражением:

$$c_i(\mu_i) = \sum_{j=1}^i c_{ij}(\mu_{ij}) \quad (21)$$

где  $i$  – номер звена, контактирующего с системой тел качения;  $j$  – номер тела качения,  $j = 1 \dots t$ . В программе динамического анализа MSC ADAMS® 2003, например, по умолчанию устанавливаются следующие параметры контакта стальных деталей:  $c=10$  Н/мм,  $\mu=10$  Нс/мм.

**Выводы.** Система тел качения в планетарной шариковой передаче в любой момент времени может рассматриваться как единое тело, совершающее вращательное движение и имеющее постоянный осевой и полярный (относительно центра масс) момент инерции.

Разработана математическая модель передачи, позволяющая анализировать переходные процессы при работе редуцирующих узлов. Данная математическая модель может быть применена не только для планетарных шариковых передач, но и для планетарных передач других типов, в том числе и зубчатых. Методика динамического анализа автоматизирована с помощью ЭВМ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лустенков М.Е. Шариковые планетарные передачи для средств малой механизации // Вестник машиностроения. – 2004. - №6. – С.15-17.
2. Игнатищев Р.М. Синусошариковые редукторы.- Мн.: Выш. шк., 1983. - 107 с.: ил.
3. Лустенков М.Е. Планетарные шариковые передачи цилиндрического типа: монография / М.Е. Лустенков, Д.М. Макаревич. – Могилев: Бел.-Рос. ун-т, 2005. – 123 с.: ил.
4. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем: Учебник для вузов. – Мн.: ДизайнПРО, 2004. – 640 с.: ил.

*Бурейко В.В.*

## ИЗМЕНЕНИЕ УСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ ТИТАНА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

*Белорусский национальный технический университет  
Минск, Беларусь*

Во время пластического деформирования процесс упрочнения и динамического старения металла, в основном связан с блокированием дислокаций примесными атомами или их атмосферами. Имеется предположение, что в местах максимальных сдвигов или других зонах