

## СОПРЯЖЕННОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СИЛОВОЙ СИСТЕМЫ РОЛИК/КОЛЬЦО В УСЛОВИЯХ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ИЗГИБА

Белорусский государственный университет,  
Минск, Беларусь

В ряде механических систем, называемых в трибофатике силовыми [1], имеет место как поверхностное деформирование и повреждение в локальной области контакта двух элементов системы, так и объемное деформирование и повреждение системы от действующей неконтактной нагрузки.

В работе [2] предложена общая классификация контактных задач применительно к силовым системам машин. В таблице 1 воспроизводится та ее часть, которая относится к контактным задачам для тел вращения. Согласно работе [3], тип контакта В соответствует простейшей механической модели для системы колесо/рельс. Данная модель предназначена для комплексных износоусталостных испытаний на машинах серии СИ [1]. Здесь ролик (элемент 2) имитирует колесо, а кольцо (элемент 1) – рельс. Далее эту модель будем называть системой ролик/кольцо.

Принципиальная особенность системы ролик/кольцо (таблица 1, тип В) по сравнению с соответствующей традиционной контактной задачей (таблица 1, тип А) для системы ролик/ролик состоит в том, в зоне взаимодействия кольца с роликом напряженное состояние обусловлено как полем контактных напряжений, так и полем напряжений вследствие изгиба. Будем называть напряженное состояние в зоне взаимодействия кольца с роликом сопряженным напряженным состоянием для того, чтобы подчеркнуть его особенность.

Таблица 1 – Схемы подвижного контакта

Элемент 1: $R_{11} > 0$ $R_{12} > 0$		
Элемент 2: $R_{21} > 0$ $R_{22} > 0$		
Тип контакта	A	B

**Основные положения.** При исследовании сопряженного напряженного состояния рассматриваемой системы будем исходить из следующих основных положений.

1. Приложенная к силовой системе ролик/кольцо нагрузка  $F_N$ , вызывает в системе как локальные контактные деформации, так и объемное деформирование (изгиб) кольца – они возбуждаются одновременно и в единой области.

2. В силу того, что в области контакта взаимодействующие тела (ролик и кольцо) ограничены поверхностями второго порядка, считается применимой теория Герца. Таким образом, в общем случае площадка контакта  $S(x, y)$  имеет форму эллипса, а усилия  $p(x, y)$  на площадке контакта распределены по эллиптическому закону [4, 5].

3. Размеры и площадь эллипса контакта в исследуемой системе дополнительно формируются за счет изменения главной кривизны кольца вследствие его изгиба.

4. Связь между напряжениями и деформациями в области контакта линейная.

5. Изгибные напряжения в кольце рассчитываются в соответствии с теорией изгиба плоского кривого бруса [6].

В [2, 7] был предложен сравнительно простой метод описания нагруженности системы ролик/кольцо. В основу метода положена гипотеза о том, что нагрузка  $F_N$  может быть разделена на контактную  $F_c$  и изгибную  $F_b$  составляющие:

$$F_N = F_c + F_b. \quad (1)$$

Способ определения величин  $F_c$  и  $F_b$  основан на следующем феноменологическом подходе. Под действием внешней сосредоточенной нагрузки  $F_N$ , передаваемой от ролика к кольцу, в последнем, вследствие упругого деформирования, возникает внутренний изгибающий момент  $M_b$ , который является, по существу, «моментом противодействия» внешней нагрузке со стороны кольца. Условие равновесия, следовательно, будет

$$F_N = F_c + \varphi(M_b), \quad (2)$$

где  $F_c$  – некомпенсированная моментом  $M_b$  часть приложенной нагрузки  $F_N$ , т. е. ее контактная составляющая, а функция

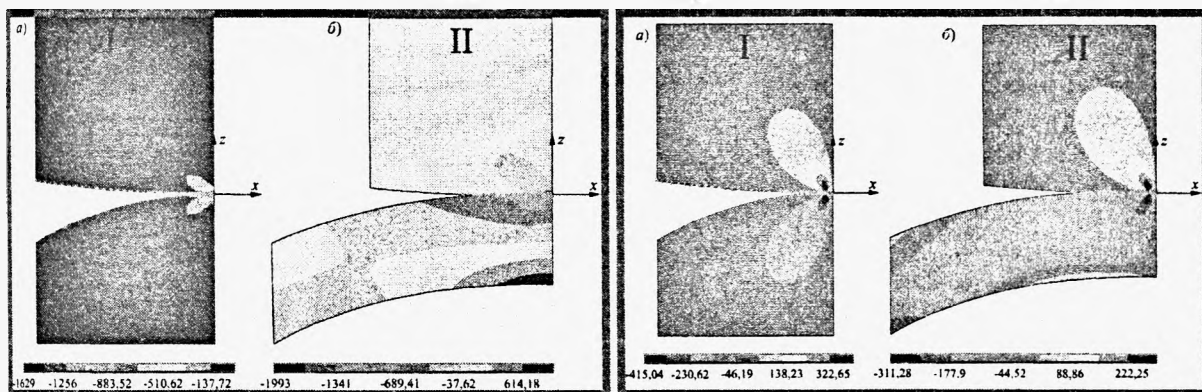
$$\varphi(M_b) = F_b, \quad (3)$$

представляется как некоторая эквивалентная изгибная (поперечная) нагрузка, которая и обеспечивает условие равновесия (2) или (1).

Соотношение между составляющими  $F_c$  и  $F_b$  приложенной нагрузки  $F_N$  в общем случае зависит от объемной жесткости кольца  $EI_z/l$  ( $E$  – модуль упругости материала кольца,  $I_z$  – момент инерции сечения,  $l$  – длина дуги кольца от точки приложения контактной нагрузки до ближайшей опоры) или, с точностью до постоянной  $k$ , от соотношения определяющих размеров кольца  $h/l$ , где  $h$  – толщина кольца. Постоянная  $k$ , следовательно, отражает, главным образом, влияние жесткости материала на формирование составляющих  $F_c$  и  $F_b$ .

а) Распределение напряжений  $\sigma_{xx}$

б) Распределение напряжений  $\sigma_{xz}$



в) Распределение напряжений  $\sigma_{zz}$

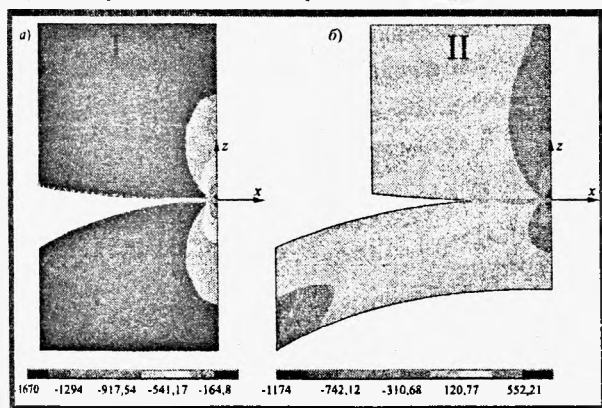


Рисунок 1 – Распределение напряжений при решении плоской задачи:

I – контактная пара,  
II – силовая система

Принимается, что разделение составляющих  $F_c$  и  $F_b$  описывается экспоненциальной функцией

$$F_c = F_N \left( 1 - \exp\left(-\frac{h}{lk}\right) \right), F_b = F_N \exp\left(-\frac{h}{lk}\right), \quad (4)$$

с сохранением условия (1). Функция (4) считается справедливой в интервале

$$0 \leq \frac{h}{lk} \leq \infty. \quad (5)$$

Когда  $l \rightarrow \infty$ , то случай  $h/lk = 0$  означает, что кольцо трансформируется в брус бесконечной длины, для которого  $F_N = F_b$ , а  $F_c = 0$ . Когда же  $l \rightarrow 0$ , то случай  $h/lk = \infty$  означает, что кольцо стягивается в ролик (или полукольцо – в половину ролика), для которого  $F_N = F_c$ , а  $F_b = 0$ .

Правомерность гипотезы (1) была подтверждена, в первом приближении, конечно-элементным моделированием и сравнительным анализом пары трения и силовой системы (рисунок 1) [7]. Рассмотрены как двумерная (первоначальный контакт по линии), так и трехмерная (первоначальный контакт в точке) задачи. Для расчета приняты:  $F_N = 500$  Н, радиус ролика  $R_{12} = 50$  мм, радиус кольца  $R_{21} = 15$  мм, толщина кольца  $h = 2,5$  мм. Результаты расчетов приведены на рисунке 1 и в таблицах 2 и 3. Из приведенных данных следует, что давление в центре площадки контакта ( $p_0$ ) в силовой системе, вследствие «расхода» части  $R_2$  на изгиб кольца, до 30 % меньше, чем в контактной паре.

Полное перемещение ( $w_1$ ) силовой системы за счет изгиба кольца до 300 % больше, чем в контактной паре; смещение ( $z_0$ ) точки контакта в силовой системе превышает такое в паре трения до 7,5 раз. В результате контактное сближение тел в силовой системе  $\delta = w_1 - w_2$ ,  $w_2$  – перемещение нижней точки кольца, лежащей на оси  $z$ ) до 60 % меньше, чем в контактной паре. Указанные характеристики уменьшаются при переходе от двумерной к трехмерной задаче, вследствие существенного роста жесткости кольца за счет увеличения его ширины.

Таблица 2 – Результаты расчетов для двумерной задачи

Параметры	Контактная пара	Силовая система (толщина кольца $h = 2,5$ мм)	Соотношение параметров для контактной пары и силовой системы, %
$p_0, \text{Н/мм}^2$	-1670,3	-1173,6	29,7
$w_1, \text{мм}$	$2,417 \cdot 10^{-2}$	$9,138 \cdot 10^{-2}$	-278,1
$w_2, \text{мм}$	0	$8,221 \cdot 10^{-2}$	–
$\delta = w_1 - w_2$	$2,417 \cdot 10^{-2}$	$0,917 \cdot 10^{-2}$	62,1
$z_0, \text{мкм}$	11,9	83,4	-600,8

Таблица 3 – Результаты расчетов для трехмерной задачи

Параметры	Контактная пара	Силовая система (толщина кольца $h = 2,5$ мм)	Соотношение параметров для контактной пары и силовой системы, %
$p_0, \text{Н/мм}^2$	-3815,2	-3716,2	2,6
$w_1, \text{мм}$	$1,211 \cdot 10^{-2}$	$3,168 \cdot 10^{-2}$	-161,6
$w_2, \text{мм}$	0	$2,026 \cdot 10^{-2}$	–
$\delta = w_1 - w_2$	$1,211 \cdot 10^{-2}$	$1,142 \cdot 10^{-2}$	5,7
$z_0, \text{мкм}$	6,1	25,6	-319,7

Таким образом, результаты конечноэлементного расчета демонстрируют существенное влияние изгиба кольца на напряженное состояние в области контакта в результате действия единой, приложенной к системе силы  $F_N$ .

Следует, однако, отметить, что проведенный средствами специализированного расчетного пакета конечноэлементный анализ напряженного состояния силовой системы ролик кольцо рядом недостатков [7,8]. Так, погрешность расчета по сравнению с аналитическими данными превышает 10 %; при необходимости анализа для новых исходных данных всякий

раз задача решается заново и сполна; решение задач динамического изменения напряженного состояния сильно затруднено необходимостью выполнения большого объема вычислений.

**Общий анализ напряженного состояния.** Сопряженное напряженное состояние в любой точке  $M(x, y, z)$  силовой системы ролик/кольцо будем определять из общего соотношения [7, 9, 10]

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(\tau)} + \sigma_{ij}^{(b)}, \quad i, j = x, y, z, \quad (6)$$

где  $\sigma_{ij}^{(n)}$ ,  $\sigma_{ij}^{(\tau)}$ ,  $\sigma_{ij}^{(b)}$  – напряжения, вызванные соответственно нормальной контактной, касательной контактной и неконтактной нагрузками.

При исследовании напряженного состояния в зоне контакта в точной постановке обычно ограничиваются нахождением компонент напряжений в точках оси  $z$  и в некоторых точках поверхности контакта [4, 5]. Определение всех компонент напряжения в любой точке полупространства в точной постановке затруднительно в силу большой сложности интегрируемых функций.

Напряжения  $\sigma_{ij}^{(n)}$  в формуле (6) можно представить в следующем виде:

$$\sigma_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \sigma_{ij}^{(hs)} & \text{при } z < 0, \\ \sigma_{ij}^{(surf)} & \text{при } z = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Расчет напряжений  $\sigma_{ij}^{(hs)}$  в любой точке  $M(x, y, z)$  при  $z < 0$  полупространства при действии на поверхность нормальных усилий  $p(x, y)$  проводится численными методами с использованием решения задачи Буссинеска  $\sigma_{ij}^{(B)}$  о действии сосредоточенной нормальной силы на полупространство [7, 8]:

$$\sigma_{ij}^{(hs)}(x, y, z) = \iint_{S(\xi, \eta)} p(\xi, \eta) \sigma_{ij}^{(B)}(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta. \quad (8)$$

Необходимо учесть, что в точке приложения единичной нагрузки напряжения  $\sigma_{ij}^{(B)}$  не определены. Это приводит к тому, что для точек  $z = 0$  поверхности полупространства расчет в соответствии с (8) не сходится.

Для расчета напряжений в любой точке  $M(x, y, 0)$  поверхности полупространства при действии нормально распределенных усилий  $p(x, y)$  проводится в соответствии со следующей общей формулой [7, 9]:

$$\sigma_{ij}^{(surf)}(x, y, 0) = \sigma_{ij}^{(S)}(x, y), \quad (9)$$

где  $\sigma_{ij}^{(S)}(x, y)$  – напряжения на поверхности полупространства, вызванные действием давления, распределенного по области  $S(x, y)$ .

Расчет напряженного состояния  $\sigma_{ij}^{(\tau)}$ , вызванного действием силы трения, которая моделируется распределением касательных усилий  $q(x, y)$ , также выполняется численными методами с использованием решения задачи Черрути для действия сосредоточенной касательной силы на полупространство  $\sigma_{ij}^{(C)}$  [7, 9]:

$$\sigma_{ij}^{(\tau)}(x, y, z) = \iint_{S(\xi, \eta)} q(\xi, \eta) \sigma_{ij}^{(C)}(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta. \quad (10)$$

Напряжения от внеконтактных нагрузок будем определять, применяя теорию, подходящую для конкретной геометрии и граничных условий взаимодействующих тел [6, 10]:

$$\sigma_{ij}^{(b)} = \sigma_{ij}^{(M)} + \sigma_{ij}^{(N)} + \sigma_{ij}^{(Q)}, \quad (11)$$

где индексы  $M$ ,  $N$  и  $Q$  соответствуют внутренним моменту, продольному и поперечному усилиям.

Сопряженное напряженное состояние, определяемое выражением (6), с учетом (7)-(11) описывается моделью Сосновского – Журавкова – Щербакова [7]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(\tau)} + \sigma_{ij}^{(b)} = \left[ \sigma_{ij}^{(hs)} \underset{z}{\vee} \sigma_{ij}^{(surf)} \right] + \sigma_{ij}^{(\tau)} + \sigma_{ij}^{(b)} = \\ &= \left[ \iint_{S(\xi, \eta)} p(\xi, \eta) \sigma_{ij}^{(B)}(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta \underset{z}{\vee} \sigma_{ij}^{(S)}(x, y) \right] + \\ &+ \iint_{S(\xi, \eta)} q(\xi, \eta) \sigma_{ij}^{(C)}(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta + \sigma_{ij}^{(M)}(x, y, z) + \sigma_{ij}^{(N)}(x, y, z) + \sigma_{ij}^{(O)}(x, y, z). \end{aligned} \quad (12)$$

Приведем численный пример реализации (12).

Рассмотрим область кольца, непосредственно примыкающую к точке первоначально-го контакта, при  $\varphi = 5\pi / 12$ .

Зададим локальную систему координат  $xuz$  с началом отсчета в точке первоначального контакта ролика и кольца. Ось  $z$  направим по внешней нормали, а ось  $x$  – по касательной к поверхности кольца в направлении действия силы трения. Ось  $y$  направим перпендикулярно плоскости  $xz$ . Тогда в силу соотношения  $k_{11} + k_{22} > k_{12} + k_{21}$  большая полуось эллипса контакта будет сонаправлена с осью  $x$ .

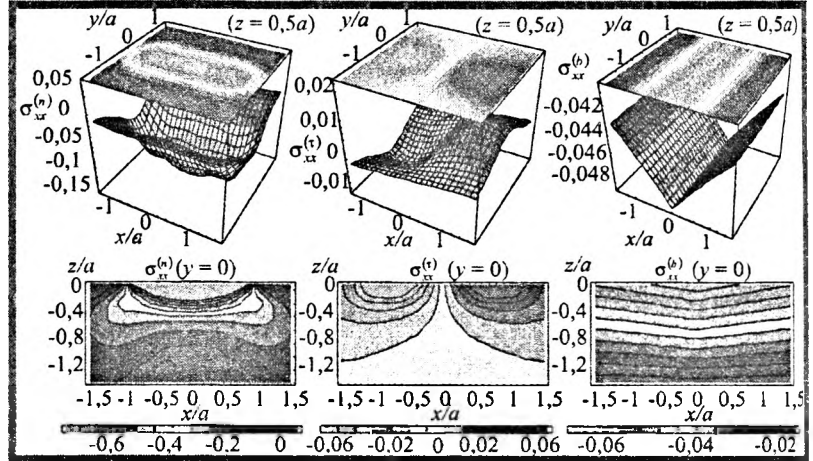


Рисунок 2 – Распределение напряжений  $\sigma_{xx}^{(n)}$ ,  $\sigma_{xx}^{(\tau)}$ ,

$\sigma_{xx}^{(b)}$ , отнесенных к  $p_0 = 3,511 \cdot 10^9$  Па, в кольце при  $F_b = 47$  Н,  $a = 4,867 \cdot 10^{-4}$  м,  $b/a = 0,574$

В соответствии с формулой (1) при  $k = 0,1$  и одновременном действии в системе сил  $F_c = 953$  Н и  $F_b = 47$  Н получим распределения соответствующих напряжений (рисунок 2 и 3). Поскольку величины напряжений  $\sigma_{xz}^{(b)}$ ,  $\sigma_{zz}^{(b)}$  в трехмерной области контакта ролика и кольца очень малы, то изменение напряженного состояния в данной области кольца по сравнению с чисто контактным напряженным состоянием происходит в основном за счет напряжений  $\sigma_{xx}^{(b)}$  (см. рисунок 2). А величина компоненты тензора напряжений

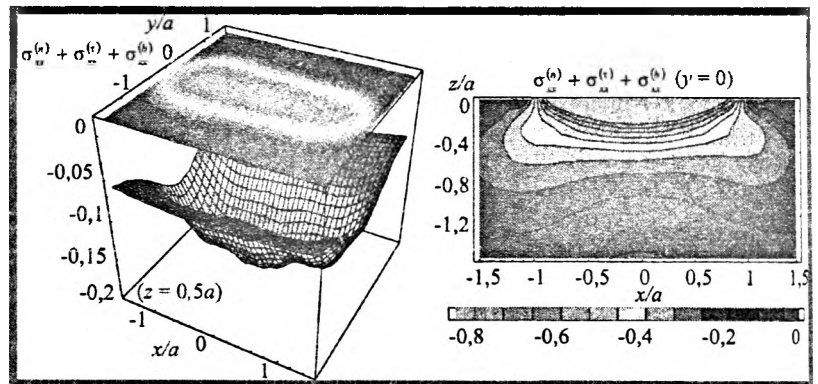


Рисунок 3 – Распределение напряжений

$\sigma_{xx}^{(n)} + \sigma_{xx}^{(\tau)} + \sigma_{xx}^{(b)}$ , отнесенных к  $p_0 = 3,511 \cdot 10^9$  Па, в кольце при  $F_b = 47$  Н,  $a = 4,867 \cdot 10^{-4}$  м,  $b/a = 0,574$

$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{(n)} + \sigma_{xx}^{(\tau)} + \sigma_{xx}^{(b)}$  в кольце в наибольшей степени определяется сжимающими напряжениями  $\sigma_{xx}^{(n)}$  (рисунок 3). Однако уже на глубине  $z = 0,5a$  заметно влияние напряжений  $\sigma_{xx}^{(\tau)}$  разного знака (от контактной нагрузки) и сжимающих  $\sigma_{xx}^{(b)}$  напряжений (вследствие изгиба).

Таким образом, установлено отличие сопряженного напряженного состояния системы ролик/кольцо (12) как от контактного напряженного состояния, так и напряженного состояния, рассчитанного в соответствии с теорией изгиба. Анализ показывает, что это различие, в зависимости от условий нагружения, может достигать 1,5–2 раз [7]. Это означает, что неучет сопряженного напряженного состояния при проектировании конкретной силовой системы может привести к неверной оценке ее работоспособности.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сосновский Л. А. Основы трибофатики: – Гомель: БелГУТ, 2003. – Т.1. – 246 с.; Т.2. – 234 с. 2 Сосновский Л. А., Щербаков С. С. О классификации контактных задач применительно к силовым системам машин / Современные методы проектирования машин. Сборник научных трудов. Вып. 2. В 7-ми т. / Под общ. ред. П. А. Витязя. – Мн.: УП "Технопринт", 2004. – Т.4. – С. 48–58. 3 Тюрин С. А. и др. Новые способы испытаний применительно к системе колесо/рельс // Вестник БелГУТа. – 2004. – С. 54–64. 4 Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с. 5 Пономарев С. Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. – М.: Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, 1958. – Т.1. – С. 387–486. 6 Тимошенко С. П., Гудьер Д. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с. 7 Сосновский Л. А. Механика износоусталостного повреждения: – Гомель: БелГУТ, 2007. – 434 с. 8. Журавков М. А., Захарик А. М., Босяков С.М., Щербаков С.С. Компьютерный анализ напряженно-деформированного состояния в зоне эллиптической площадки контакта тел при качении применительно к модели зубчатых зацеплений.// Трение и износ, 2006. -№1. –С.12-16. 9 Журавков М. А., Щербаков С.С. Исследование опасных объемов при решении контактной задачи для системы «ролик/кольцо» / Тр. 5-го Международного симпозиума по трибофатике (ISTF 2005), 3–7 октября 2005 г., Иркутск (Россия) / отв. ред. А. П. Хоменко. – Иркутск: Иркутский государственный университет путей сообщения, 2005. –Т. 1. – С. 375–390. 10 Сосновский Л. А., Сенько В. И., Щербаков С. С., Залесский Н. А., Исследование напряженного состояния простейшей модели системы колесо/рельс // Вестник БелГУТА, 2005. – № 2. – С. 18–41.

УДК 539.3

Щербаков С. С.

## ОПАСНЫЕ ОБЪЕМЫ КАК МЕРЫ ПОВРЕЖДЕННОСТИ

*Белорусский государственный университет  
Минск, Беларусь*

Оценка поврежденности силовой системы [1] в общем случае основывается на статистической модели деформируемого твердого тела с опасным объемом [2].

Согласно этой модели при объемном деформировании опасным называется объем  $V_p$ , в котором с некоторой вероятностью  $P$  возможно появление циклических напряжений  $\sigma$  превышающих нижнюю границу  $\sigma_{-1lim}$  рассеяния пределов выносливости  $\sigma_{-1}$ . Соответственно при контактном деформировании опасным называется объем, в котором с некоторой вероятностью  $P$  возможно появление нормальных контактных напряжений, превышающих нижнюю границу  $P_{fmin}$  рассеяния пределов выносливости  $P_f = P_{0lim}$ , где  $P_{0lim} = \sigma_{zz}^{(max)}$  – давление в центре контакта при предельной контактной нагрузке. Аналогичным образом определяется нижняя граница рассеяния пределов выносливости для касательных напряжений.