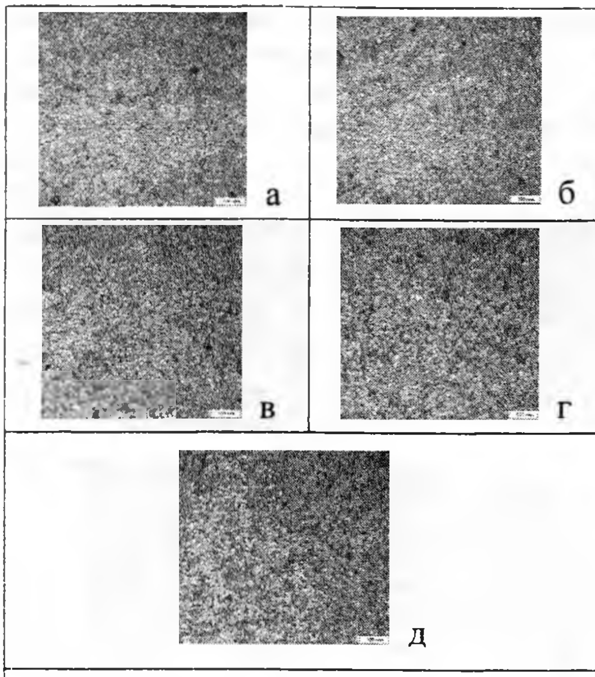

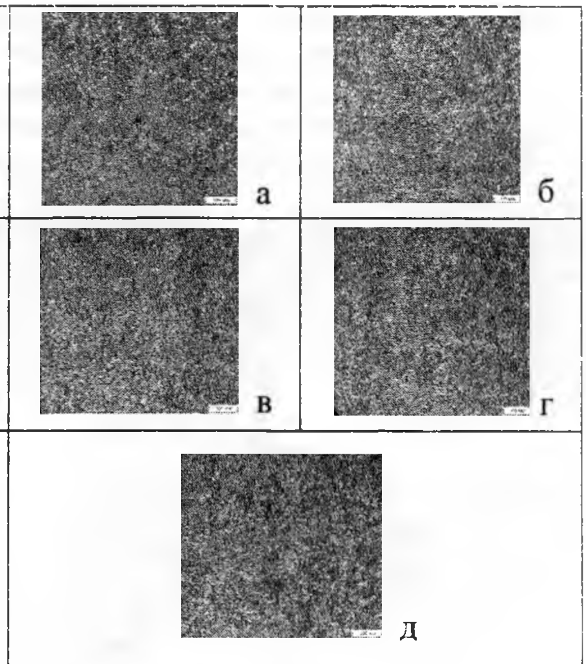

Рисунок 7 -Микроструктура образца (Ø32мм) в поперечном сечении, x100: а – участок у края поверхности, б – участок № 1, в – участок № 2, г – участок № 3; д-участок №4	Рисунок 8 Микроструктура образца (Ø32мм) в продольном сечении, x100: а – участок у края поверхности, б – участок № 1, в – участок № 2, г – участок № 3; д-участок №4

УДК 539.3

Неумержицкая Е.Ю.

МЕТОД РАСЧЕТА ТЕПЛОВЫХ РЕЖИМОВ ОХЛАЖДЕНИЯ ОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИН

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Основным условием закалки является интенсивный отвод тепла от охлаждаемого объекта. Плотность теплового потока q (Вт/м^2), характеризующая количество теплоты, проходящее в единицу времени через единицу площади изотермической поверхности, является количественной характеристикой метода закалки. Поскольку экспериментальное определение величины q сопряжено с большими трудностями, то определяют скорость охлаждения, которая пропорциональна плотности теплового потока. Согласно основному закону теплопроводности плотность теплового потока пропорциональна градиенту температуры $q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n}$,

где λ (Вт/(м ·К)) – коэффициент теплопроводности; ∂t/∂n – производная температуры по нормали n к изотермической поверхности (или температурный градиент); знак «минус» указывает, что векторы $\bar{q}$ и grad t лежат на одной прямой и направлены в противоположные стороны. Самой большой плотностью теплового потока будет та, которая рассчитана вдоль нормали к изотермическим поверхностям.

Процесс преобразования капли расплавленного металла в пластинку очень сложный. Поэтому при построении математической модели, описывающей охлаждение уже образованной пластины, будем предполагать, что ее толщина намного меньше двух других размеров (длины и ширины), пластина является неограниченной по протяженности.

Теплоотвод происходит в окружающую среду, имеющую постоянную температуру $t_{ср}$. Коэффициенты теплоотдачи α_i (Вт/ (м^2 · К)), i = 1, 2 на поверхностях пластины являются постоянными величинами и в общем случае $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Температура пластины изменяется только по толщине, то есть в направлении оси x. Поэтому $\partial t/ \partial y = \partial t/ \partial z = 0$ и задача становится одномерной. Начальное распределение температуры описывается некоторой заданной функцией t (x, 0) = f(x). Отсчет температуры во времени будем вести от температуры окружающей среды. Разность между температурой t пластины и температурой среды $t_{ср}$ называется избыточной температурой $\theta = t - t_{ср}$.

При отсутствии внутренних источников теплоты в пластинке дифференциальное уравнение теплопроводности принимает форму уравнения Фурье

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

где a(м^2/с) – температуропроводность, является мерой теплоинерционных свойств тела. Металлы обладают малой тепловой инерционностью по сравнению с жидкостями и газами и, следовательно, большим коэффициентом температуропроводности.

Из (1) следует, что изменение температуры во времени $\partial\theta/ \partial\tau$ в пластине пропорционально a. Чем больше значение a, тем больше скорость изменения температуры и тем быстрее при прочих равных условиях будет происходить выравнивание температуры во всех точках тела.

Запишем начальные условия

$$\text{при } \tau = 0 \ \theta = \theta_o = t(x,0) - t_{ср} = f(x) - t_{ср} = F(x). \qquad (2)$$

При $\alpha_1 \neq \alpha_2$ условия охлаждения для обеих сторон пластины будут разными. Теплота с большей интенсивностью будет отводиться от той поверхности, для которой коэффициент теплоотдачи будет большим. В этом случае граничные условия запишем в виде при $\tau > 0$

$$\text{при } x = 0 \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\alpha_1 \theta}{\lambda}; \ \text{при } x = d \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\alpha_2 \theta}{\lambda}, \qquad (3)$$

где α_1 и α_2 – коэффициенты теплоотдачи соответственно на левой (x = 0) и правой (x = d) поверхностях пластины, d – толщина пластины.

Дифференциальное уравнение теплопроводности (1) совместно с условиями (2), (3) дает завершенную математическую формулировку задачи. Решение ее заключается в определении функции t = f (x, τ, a, α_1, α_2, θ_o, $t_{ср}$,d), которая удовлетворяла бы уравнению (1) и граничным условиям третьего рода (3).

Рассмотрим случай, когда одна из поверхностей пластины, например, левая (x = 0) теплоизолирована. Граничные условия в данном случае запишем в форме

$$\text{при } x = 0 \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \qquad (4)$$

$$\text{при } x = d \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\alpha_2 \theta}{\lambda}. \qquad (5)$$

Решение дифференциального уравнения (1) находится методом разделения переменных. Искомое решение запишем в виде

$$\theta = \theta(\tau, x) = \varphi(\tau)\,\psi(x). \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (1) получим $\varphi'(\tau)\,\psi(x) = a\,\psi''(x)\,\varphi(\tau)$. После разделения переменных имеем

$$\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = a\frac{\psi''(x)}{\psi(x)}, \qquad (7)$$

$$\text{или } \varphi'(\tau) + a k^2 \varphi(\tau) = 0, \qquad (8)$$

$$\psi''(x) + k^2 \psi(x) = 0, \qquad (9)$$

где постоянная k находится из граничных условий.

Поскольку в [1] исследован случай, когда $\alpha_1 = \alpha_2 \equiv \alpha$, то воспользуемся необходимыми полученными результатами. Общие решения однородных дифференциальных уравнений (8) и (9) имеют вид

$$\varphi(\tau) = C_1 e^{-ak^2\tau}, \tag{10}$$

$$\Psi(x) = C_2 \sin kx + C_3 \cos kx,$$

где C_1, C_2, C_3 – постоянные интегрирования.

Подставляя (10) в (6) получим

$$\theta = (C_2 \sin kx + C_3 \cos kx) C_1 e^{-ak^2\tau}. \tag{11}$$

Для определения производных постоянных интегрирования C_i воспользуемся начальным и граничными условиями.

На теплоизолированной поверхности пластины при x = 0, имеем

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=0} = \left. k(C_2 \cos kx - C_3 \sin kx) C_1 e^{-ak^2\tau}\right|_{x=0} = 0, \text{ откуда } C_2 = 0.$$

Обозначим $C_1 C_3 = A$. Удовлетворяя граничному условию (5), получим

$$-kAe^{-ak^2\tau} \sin kd = -\frac{\alpha_2}{\lambda} Ae^{-ak^2\tau} \cdot \cos kd,$$

$$\text{или } ctgkd = \frac{kd}{\alpha_2 d/\lambda}.$$

Здесь $\alpha_2 \cdot d/\lambda = Bi$ – число Био. Безразмерное число Bi является важнейшей характеристикой процесса теплопроводности. Оно представляет собой отношение внутреннего термического сопротивления теплопроводности к внешнему термическому сопротивлению теплоотдачи $Bi = \frac{d/\lambda}{1/\alpha_2}$. Обозначим $kd = \mu$, тогда

$$ctg\mu = \frac{\mu}{Bi}. \tag{12}$$

Из тригонометрического уравнения (12) следует, что для каждого числа Bi существует множество решений μ_n, n = 1, 2, 3,... Решение уравнения (12) удобно находить графическим способом. Обозначив $ctg\mu = y_1$, $\mu/Bi = y_2$ и изобразив котангенсоиду y_1 и прямую y_2, найдем точки $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n\ldots$ пересечения их графиков. Очевидно, что $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \ldots < \mu_n < \ldots$

Если $Bi \to \infty$ (практически $Bi > 100$), а это соответствует случаю, когда $\alpha \to \infty$ (то есть при заданных физических параметрах и толщине пластины имеет место интенсивный отвод тепла от поверхности), то прямая $y_2 = \mu / Bi$ совпадает с осью абсцисс и корнями уравнения (12) будут значения $\mu_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}, n = 1, 2, 3\ldots$

Если $Bi \to 0$ (практически $Bi < 0{,}1$), а это условие выполняется при малой толщине пластины, больших значениях коэффициента теплопроводности λ и малых значениях коэффициента теплоотдачи α_2, то прямая $y_2 = \mu/Bi$ совпадает с осью ординат и корнями уравнения (12) будут $\mu_n = (n-1)\pi$, n = 1, 2, 3,...

При малых значениях μ функцию tg μ можно заменить ее аргументом и уравнение (12) преобразуется к виду $1/\mu = \mu/Bi$. Тогда $\mu = \sqrt{Bi} = \sqrt{\alpha_2 d/\lambda}$.

Каждому найденному значению μ_i соответствует решение $\theta_i = A_i \cos(\mu_i \frac{x}{d}) e^{-\mu_i^2 \frac{a\tau}{d^2}}$, описывающее частное распределение температуры. Совокупность таких решений дает общее решение исходного дифференциального уравнения, которое представляется в виде бесконечного ряда

$$\theta=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(\mu_n\frac{x}{d})e^{-\mu_n^2\frac{a\tau}{d^2}}. \qquad (13)$$

Подчиняя (13) начальному условию, получим выражение для определения температурного поля при охлаждении однородной пластины

$$\theta=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\mu_n}{d(\mu_n+\cos\mu_n\sin\mu_n)}\left[\int_0^d F(x)\cos(\mu_n\frac{x}{d})dx\right]\cos(\mu_n\frac{x}{d})e^{-\frac{\mu_n^2 a\tau}{d^2}}. \qquad (14)$$

Отличие (14) от аналогичного выражения [1] при $\alpha_1=\alpha_2$ заключается в наличии коэффициента 2 и других пределов интегрирования.

В дальнейшем положим, что в начальный момент времени $\tau=0$ температура в пластине распределена равномерно, то есть $F(x,0)=\theta_o=\mathrm{const}$. Тогда $\int_0^d F(x)\cos(\mu_n\frac{x}{d})dx=\frac{\theta_o d}{\mu_n}\sin\mu_n$, и формула (14) совпадает с аналогичным выражением [1]

$$\theta=2\theta_o\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\mu_n}{\mu_n+\cos\mu_n\sin\mu_n}\cos(\mu_n\frac{x}{d})e^{-\frac{\mu_n^2 a\tau}{d^2}}. \qquad (15)$$

Анализ распределения температуры в пластине удобно вести, если уравнению (15) придать безразмерную форму

$$\frac{\theta}{\theta_o}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin\mu_n}{\mu_n+\cos\mu_n\sin\mu_n}\cos(\mu_n\frac{x}{d})e^{-\frac{\mu_n^2 a\tau}{d^2}}. \qquad (16)$$

Безразмерные величины, фигурирующие в (16), имеют следующий смысл: $\theta/\theta_o=T'$ – безразмерная температура; $x/d=X$ – безразмерная координата; $a\tau/d^2=F_o$ – число Фурье, представляет безразмерное время.

С учетом введенных обозначений уравнение (16) запишем в форме

$$T'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin\mu_n}{\mu_n+\cos\mu_n\sin\mu_n}\cos(\mu_n X)\exp(-\mu_n^2F_o). \qquad (17)$$

Поскольку $\mu_1<\mu_2<\mu_3<\ldots<\mu_n<\ldots$, то чем больше μ_i, тем меньше значение последующего ряда по сравнению с предыдущим. К тому же члены ряда, как следует из (17), быстро убывают при возрастании n и увеличении числа Фурье. Численные расчеты показали, что при $F_0\geq 0{,}3$ ряд является быстросходящимся и для расчета температуры достаточно ограничиться лишь первым его членом

$$T'=\frac{2\sin\mu_1}{\mu_1+\sin\mu_1\cos\mu_1}\cos(\mu_1 X)\exp(-\mu_1^2F_o). \qquad (18)$$

Из изложенного материала следует, что характер охлаждения пластины определяется величиной критерия Био. Поэтому при исследовании распределения температурного поля по толщине пластины целесообразно рассмотреть три случая ее охлаждения: а) $Bi\to\infty$; б) $Bi\to 0$; в) $0<Bi<\infty$.

Рассмотрим случай а). Как было отмечено ранее $Bi\to\infty$, когда при заданных геометрических и физических параметрах пластины наблюдается мощный отвод тепла от ее поверхности. В этом случае коэффициент теплоотдачи на поверхности пластины $\alpha_2\to\infty$ и процесс охлаждения определяется ее геометрическими и физическими параметрами. Для исследуемого случая $\mu_n=(2n-1)\frac{\pi}{2}, n=1,2,3\ldots$ При данных значениях μ_n коэффициент $2\sin\mu_n/(\mu_n+\sin\mu_n\cos\mu_n)$ равен $4(-1)^{n+1}/[\pi(2n-1)]$ и ряд (17) преобразуется к виду

$$T'=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}e^{-\pi^2F_o(n-0,5)^2}\cdot\cos\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}X\right]. \qquad (19)$$

Из (19) следует, что при очень большой интенсивности отвода теплоты от поверхности пластины на ее теплоизолированной поверхности (x = 0) изменение температуры определяется по формуле (19) и экспоненциально зависит от числа Фурье.

При $F_o \geq 0,3$ ряд (19) является быстросходящимся. Ограничившись его первым членом, получим $\theta_{X=0} = \frac{4}{\pi} e^{-\frac{\pi^2 F_o}{4}}$, ошибка при расчетах температуры не будет превышать 1 %.

На боковой поверхности пластины X = 1 температура T ' = 0.

В случае Bi → 0 все коэффициенты $2 \sin \mu_n / (\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n)$ членов ряда (17) при n = 2, 3,... равны нулю. При n = 1 $\mu_1 = 0$ и $\left| \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \right|_{\mu_1 \to 0} = 1$.

Кроме того, $1/\mu_1 = \mu_1/Bi$, и уравнение (17) запишем в виде

$$T' = \cos(\sqrt{Bi} X) \exp(-Bi F_o). \tag{20}$$

Кроме того, $1/\mu_1 = \mu_1/Bi$, и уравнение (17) запишем в виде

$$T' = \cos(\sqrt{Bi} X) \exp(-Bi F_o). \quad (20)$$

На поверхностях пластины температуру определим по формулам

$$\text{при } X = 0 \quad T' = e^{-Bi F_o}; \tag{21}$$

$$\text{при } X = 1 \quad T' = e^{-Bi F_o} \cdot \cos\sqrt{Bi}. \tag{22}$$

При Bi → 0, $\cos\sqrt{Bi} \to 1$ и из (21), (22) следует, что на поверхностях пластины температура практически принимает одно и то же значение $T' = e^{-Bi\,Fo}$, то есть распределение температуры по толщине пластины можно считать однородным.

Таким образом, при Bi → 0 процесс охлаждения пластины определяется интенсивностью теплоотдачи с ее поверхности или внешним термическим сопротивлением. Выравнивание температуры по толщине происходит намного быстрее, чем отвод тепла с поверхности.

В случае, когда $0,1 \leq Bi < 100$, процесс охлаждения пластины определяется отношением внутреннего термического сопротивления тела d/λ к внешнему термическому сопротивлению теплоотдачи $1/\alpha$. Рассмотрим охлаждение алюминиевой фольги, у которой с одной поверхности теплоотвод осуществляется в медную подложку, $\alpha_2 = 1 \cdot 10^5$ Вт/ (м$^2 \cdot$ К); другая боковая поверхность теплоизолирована $\alpha_1 = 0$. В такой трактовке можно рассматривать охлаждение алюминиевой пластины, когда с одной ее поверхности теплоотвод происходит в медную подложку ($\alpha_2 = 6 \cdot 10^5$ Вт/ (м$^2 \cdot$ К)), а другая поверхность находится в контакте с воздухом $\alpha_1 = 1 \cdot 10^3$ Вт/(м$^2 \cdot$ К)). Поскольку коэффициент теплоотдачи $\alpha_1 \lll \alpha_2$, то в первом приближении поверхность контакта алюминий-воздух можно считать теплоизолированной.

Выше было отмечено, что характер охлаждения определяется величиной критерия Био. Рассчитаем безразмерное число Bi, принимая толщину фольги d = 50 мкм, $\alpha_2 = 6 \cdot 10^5$ Вт/ (м$^2 \cdot$ К), $\lambda = 100$ Вт/ (м $\cdot$ К), Bi = 0,3. Из расчета следует, что $0,1 \leq Bi < 100$.

Не представляет особого труда, варьируя параметрами α, λ и d, рассчитать величину критерия Био, и тем самым определить характер охлаждения пластины.

В случае, когда теплота передается с поверхности пластины с разной теплоотдачей, должен существовать максимум температуры внутри пластины. Изотермическая поверхность, соответствующая максимальной температуре, разделяет пластину на два слоя. Максимальное значение температуры соответствует условию $d\theta/dx = 0$. Пусть α_1 и α_2 коэффициенты теплоотдачи на левой и правой поверхностях пластины. Не нарушая общности, предположим, что $\alpha_2 > \alpha_1$; толщина пластины равна d. Поскольку λ, α_1, α_2 имеют постоянные значения, то есть рассматриваемые материалы являются однородными, примем, что изотермическая поверхность с максимальной температурой расположена на расстоянии d_1 от левой поверхности пластины. На ней расположим систему координат. Тогда $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{d_1}{d - d_1}$; из данного равенства находим $d_1 = \dfrac{\alpha_1 d}{\alpha_1 + \alpha_2}$ и $d_2 = \dfrac{\alpha_2 d}{\alpha_1 + \alpha_2}$. Начальное и граничные условия при $\alpha_1 \neq \alpha_2$ запишем в виде: начальные условия при $\tau = 0$ $\theta = \theta_0 = f(x) - t_{ср} = F(x)$; граничные условия при $x = \dfrac{\alpha_2 d}{\alpha_1 + \alpha_2}$ $\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = -\dfrac{\alpha_2}{\lambda}\theta$; при x = 0 $\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = 0$; при $x = -\dfrac{\alpha_1 d}{\alpha_1 + \alpha_2}$ $\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = \dfrac{\alpha_1}{\lambda}\theta$. Для нахождения распределения температуры по толщине пластины необходимо рассмотреть два слоя, на которые разбита пластина изотермической поверхностью. Для правого слоя пластины при x = 0 $\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = 0$; при $x = \dfrac{\alpha_2 d}{\alpha_1 + \alpha_2}$ $\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = -\dfrac{\alpha_2}{\lambda}\theta$. Для левого слоя пластины при x = 0 $\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = 0$; при $x = -\dfrac{\alpha_1 d}{\alpha_1 + \alpha_2}$ $\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = \dfrac{\alpha_1}{\lambda}\theta$. Метод решения данных граничных задач изложен выше.

ЛИТЕРАТУРА

1.Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача.- М.: Энергия, 1975.- 488 с.

УДК 539.376

Стеликов Н.Е.

КИНЕТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ КРУЧЕНИИ

Белорусская государственная сельскохозяйственная академия
Горки, Беларусь

В работе [1] изложены основы кинетической теории ползучести твердых тел при осевом растяжении, где предполагается равномерное распределение напряжений на макроуровне нормальных сечений с соответствующим перераспределением на межатомные связи. В настоящей работе ставится задача по привязке теории к сдвигу, когда на макроуровне касательные напряжения имеют треугольную эпюру распределения.

С позиций кинетической концепции прочности, связывающей процессы, происходящие на микроуровне нагруженных тел с силами межатомного взаимодействия, ползучесть при растяжении и кручении является следствием этих процессов, т.е. имеет одну природу и должна подчиняться одним закономерностям. Запишем в соответствии с [1] уравнение ползучести для деформации ε, которая при кручении рассматривается и как угол закручивания:

$$t = \tau_0 \left(ln\,\frac{\delta}{\varepsilon} \right) exp\,\frac{U_0 - \gamma\delta\,\sigma_0 / \varepsilon}{kT}, \tag{1}$$

где t – время, необходимое на изменение величины деформации от 0 до ε;

τ_0 – период колебаний атомов ($\approx 10^{-13}$ с);

δ – предельная величина деформации (угла закручивания), при которой тело теряет сплошность;

U_0 – энергия активации ползучести;

γ – структурно-чувствительный коэффициент с размерностью объема;

σ_0 – величина начального касательного напряжения;