

даваемой производственной среды, стагнация в развитии типов объектов, и, как следствие, падение общественного интереса к этой области деятельности.

3. Происходят видимая поляризация, разделение промышленной архитектуры на уникальные, совершенные во всех отношениях, в том числе и с художественной точки зрения, объекты и объекты рядовые, достаточно безликие и, действительно, только утилитарные. Такое положение – одно из свидетельств кризисного процесса, закономерно сопровождающего развитие любого объекта, в данном случае промышленную архитектуру.

4. Современный этап является периодом трансформации, изменения традиционных подходов. Что лежит в основе будущих трансформаций, как будет развиваться промышленная

архитектура, в том числе ее художественные аспекты, – на эти вопросы еще предстоит ответить.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jones E. Industrial architecture in Britain: 1750–1939. – New York, N. Y.: Facts on File, 1985. – 239 p.
2. Maude R. The functional tradition in early industrial buildings. – London: Architectural Press, 1958. – 200 p.
3. Giles C. Yorkshire textile mills: the buildings of the Yorkshire textile industry, 1770–1930. – London: HMSO, 1992. – 274 p.
4. Pevsner N. A history of building types. – London: Thames and Hudson, 1976. – 352 p.
5. Kostof S. A History of architecture. – NY, Oxford: Oxford University Press, 1995. – P. 599.
6. Bradley V. The Works: the industrial architecture of the United States. – New York, Oxford: Oxford University Press, 1999. – 347 p.
7. Труды IV съезда русских зодчих. – СПб., 1911. – С. 1–6.

УДК 624.72

## ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ БАЛКИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Канд. техн. наук, доц. ГЕНФУД С.

Лаборатория механики и структур при университете им. 8 мая 1945 г. (Галма, Алжир)

Решение динамических контактных задач имеет важное значение в проектировании современных конструкций. В настоящей статье рассматривается задача динамического расчета балок на упругом основании, поскольку в строительстве широко применяются конструкции в виде балок и плит, расположенных на грунтовом основании. Задачи об определении собственных частот и форм колебаний и реакции балки, находящейся на упругом основании типа Буссинеска, на динамическую нагрузку решаются подходом, который базируется на способе Жемочкина [1]. Пренебрегаем инерцией основания, затуханием, а также трением между балкой и основанием. Ранее автором была решена подобная задача для основания Винклера [2].

Пусть балка с погонной массой  $m$  и изгибной жесткостью  $EI$  находится на основании Буссинеска [3] (рис. 1), характеризуемом модулем упругости  $E_0$  и коэффициентом Пуассона  $\nu_0$ .

Балку разобьем на равные участки длиной  $c$  и в центре каждого участка поставим жесткую связь, через которую осуществляется контакт балки с основанием. Принимаем, что каждая

масса участка балки помещена в центр участка (рис. 2).

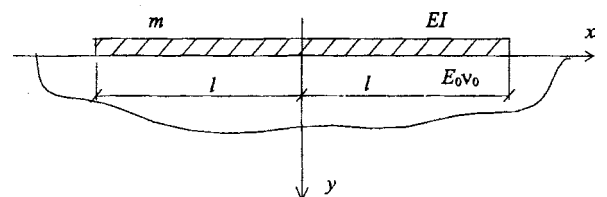


Рис. 1. Балка на основании Буссинеска

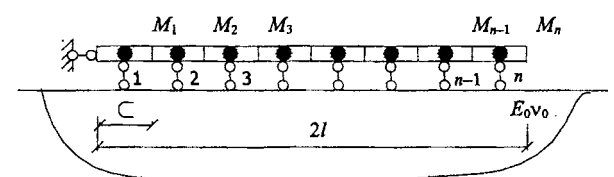


Рис. 2. Балка разделена на участки

Основная система способа Б. Н. Жемочкина изображена на рис. 3. Нужно иметь в виду, что силы инерции колеблющихся масс приложены к балке, а усилия в связях – к балке и упругому основанию.

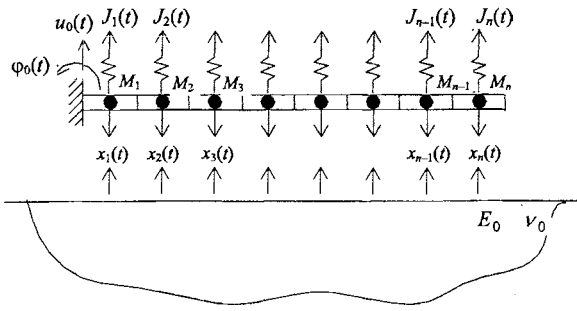


Рис. 3. Способ дискретизации балки на основании Буссинеска

Составляем канонические уравнения способа Б. Н. Жемочкина для свободных колебаний балки без учета сил сопротивления:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (v_{1i} + y_{1i}) X_i(t) - \sum_{i=1}^n y_{1i} J_i(t) + \frac{c}{2} \varphi_0(t) + u_0(t) = 0; \\ \sum_{i=1}^n (v_{2i} + y_{2i}) X_i(t) - \sum_{i=1}^n y_{2i} J_i(t) + 3 \frac{c}{2} \varphi_0(t) + u_0(t) = 0; \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n (v_{ni} + y_{ni}) X_i(t) - \sum_{i=1}^n y_{ni} J_i(t) + \frac{2n-1}{2} \varphi_0(t) + u_0(t) = 0; \\ \sum_{i=1}^n [X_i(t) - J_i(t)] \frac{2i-1}{2} c = I_y \ddot{\varphi}_0(t); \\ \sum_{i=1}^n [X_i(t) - J_i(t)] = M \ddot{u}_0(t), \end{cases} \quad (1)$$

где  $v_{ik}$  – осадка основания в точке  $i$  от силы  $X_k=1$ , приложенной в точке  $k$  основания;  $\varphi_0, u_0$  – угол поворота и линейное перемещение балки в защемлении;  $y_{ik}$  – прогиб балки в точке  $i$  от силы  $X_k=1$ , приложенной в точке  $k$  балки. Определяется по формуле Максвелла – Мора для стержневых систем [4] в основной системе;  $M$  и  $I_y$  – масса всей балки и ее момент инерции.

При свободных гармонических колебаниях следует принять:

$$\begin{aligned} X_k(t) &= X_k e^{i\omega t}; & \varphi_0(t) &= \varphi_0 e^{i\omega t}; \\ u_0(t) &= u_0 e^{i\omega t}; & J_k(t) &= J_k e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (2)$$

Поэтому в установившемся режиме свободных колебаний без учета сил сопротивления

система (1) с учетом (2) после сокращений будет иметь вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (v_{ki} + y_{ki}) X_i - \sum_{i=1}^n y_{ki} J_i + \frac{2k-1}{2} c \varphi_0 + u_0 = 0, & k=1, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^n [X_i - J_i] \frac{2i-1}{2} c = I_y \ddot{\varphi}_0; \\ \sum_{i=1}^n [X_i - J_i] = M \ddot{u}_0. \end{cases} \quad (3)$$

Для основания Буссинеска [5]

$$v_{ki} = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} F_{ki}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} F_{ki} &= \frac{y-d}{\Delta_y} \ln \frac{x-b + \sqrt{(x-b)^2 + (y-d)^2}}{x-a + \sqrt{(x-a)^2 + (y-d)^2}} + \\ &+ \frac{y-c}{\Delta_y} \ln \frac{x-a + \sqrt{(x-a)^2 + (y-c)^2}}{x-b + \sqrt{(x-b)^2 + (y-c)^2}} + \\ &+ \frac{x-b}{\Delta_y} \ln \frac{y-d + \sqrt{(x-b)^2 + (y-d)^2}}{y-c + \sqrt{(x-b)^2 + (y-c)^2}} + \\ &+ \frac{x-a}{\Delta_y} \ln \frac{y-c + \sqrt{(x-a)^2 + (y-c)^2}}{y-d + \sqrt{(x-a)^2 + (y-d)^2}}. \end{aligned}$$

Здесь  $\Delta_x, \Delta_y$  – длина и ширина прямоугольного участка ( $\Delta_x = c, \Delta_y = b$ );  $b$  – ширина балки;

$$J_i = -M_i \frac{d^2 y_i(t)}{dt^2} = -M_i \frac{d^2 v_i(t)}{dt^2} = M_i \omega^2 v_i;$$

$$v_i = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} \sum_{k=1}^n X_k F_{ik}.$$

Система (3) с учетом (4) примет вид:

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} & \dots & \kappa_{1n} & l_1 \lambda & \lambda \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \kappa_{n1} & \dots & \kappa_{nn} & l_n \lambda & \lambda \\ \kappa_{n+1,1} & \dots & \kappa_{n+1,n} & 33I c^2 m \omega^2 / 2 & 0 \\ \kappa_{n+2,1} & \dots & \kappa_{n+2,n} & 0 & 2I m \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \\ \varphi_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$\lambda = \frac{\pi E_0 \Delta x}{1 - \nu_0^2}$ ;  $\kappa_{ij}$  – выражение, вследствие гомогенности не приводится;  $l_i$  – плечи масс до точки защемления (рис. 4) в основной системе.

Рассмотрим частный случай: балка конечной жесткости  $EI$  на основании Буссинеска (рис. 1). Разобьем ее на 10 участков  $c = l/5$  и в центре каждого участка сгруппируем массы, а также поставим вертикальные связи (рис. 4). Для определения частот собственных колебаний составим определитель матрицы системы (5) и приравняем его к нулю.

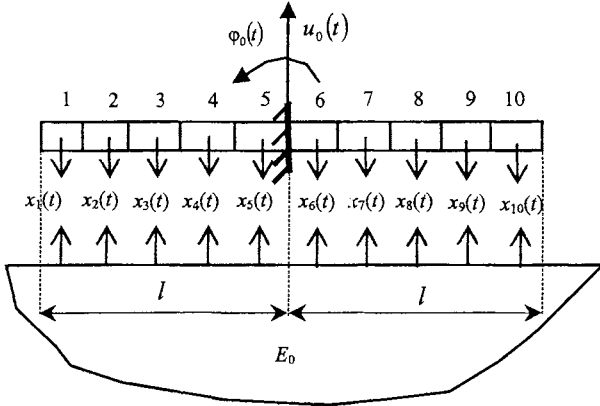


Рис. 4. Балка на основании Буссинеска разделена на 10 участков

Согласно [4], значения  $y_{ik}$  определяются перемножением эпюр моментов. После вычислений найдем:

$$y_{ik} = 0, \text{ если } i > 5 \text{ и } k < 6; \\ \text{или если } i < 6 \text{ и } k > 5;$$

$$y_{11} = y_{1010} = \frac{243c^3}{8EI}; y_{22} = y_{99} = \frac{343c^3}{24EI};$$

$$y_{33} = y_{88} = \frac{125c^3}{24EI}; y_{44} = y_{77} = \frac{9c^3}{8EI};$$

$$y_{55} = y_{66} = \frac{c^3}{24EI}; y_{12} = y_{910} = \frac{245c^3}{12EI};$$

$$y_{13} = y_{810} = \frac{275c^3}{24EI}; y_{14} = y_{710} = \frac{9c^3}{2EI};$$

$$y_{15} = y_{610} = \frac{13c^3}{24EI}; y_{23} = y_{89} = \frac{25c^3}{3EI};$$

$$y_{24} = y_{79} = \frac{27c^3}{8EI}; y_{25} = y_{69} = \frac{5c^3}{12EI};$$

$$y_{34} = y_{78} = \frac{9c^3}{4EI}; y_{35} = y_{68} = \frac{7c^3}{24EI};$$

$$y_{45} = y_{67} = \frac{c^3}{6EI}.$$

Подставляем:

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_5 = M_6 = M_7 = \\ = M_8 = M_9 = M_{10} = \frac{ml}{5}; c = \frac{l}{5}.$$

В матрице системы (5) имеем:

$$D(11, 11) = \frac{33}{2} mlc^2 \omega^2 \text{ и } D(12, 12) = 2ml\omega^2, \text{ так как:}$$

$$I_y \ddot{\varphi}_0 = -2 \left[ M_1 \left( -\frac{9c}{2} \right)^2 + M_2 \left( -\frac{7c}{2} \right)^2 + M_3 \left( -\frac{5c}{2} \right)^2 + \right. \\ \left. + M_4 \left( -\frac{3c}{2} \right)^2 + M_5 \left( -\frac{c}{2} \right)^2 \right] \varphi_0 \omega^2 e^{i\omega t} = -\frac{33}{2} mlc^2 \omega^2 \varphi_0 e^{i\omega t};$$

$$M \ddot{u}_0 = -10 \frac{ml}{5} \omega^2 u_0 e^{i\omega t} = -2ml\omega^2 u_0 e^{i\omega t}.$$

Выражение  $F_{ik}$  задано следующими значениями для  $b/c = 0,5$ :

$$F_{11} = 4,812; F_{12} = 1,081; F_{13} = 0,509;$$

$$F_{14} = 0,336; F_{15} = 0,251; F_{16} = 0,200;$$

$$F_{17} = 0,167; F_{18} = 0,143; F_{19} = 0,125;$$

$$F_{110} = 0,111.$$

Для остальных  $F_{ik}$ ,  $i = 2, \dots, 10$  и  $k = 1, \dots, 10$  имеем: если  $|i - k| = 0$ , то  $F_{ik} = F_{11}$ ; если  $|i - k| = 1$ , то  $F_{ik} = F_{12}$ ; если  $|i - k| = 2$ , то  $F_{ik} = F_{13}$ ; если  $|i - k| = 3$ , то  $F_{ik} = F_{14}$ ; если  $|i - k| = 4$ , то  $F_{ik} = F_{15}$ ; если  $|i - k| = 5$ , то  $F_{ik} = F_{16}$ ; если  $|i - k| = 6$ , то  $F_{ik} = F_{17}$ ; если  $|i - k| = 7$ , то  $F_{ik} = F_{18}$ ; если  $|i - k| = 8$ , то  $F_{ik} = F_{19}$ ; если  $|i - k| = 9$ , то  $F_{ik} = F_{110}$ .

После вычислений на пакете «Mathematica» получаем спектр частот (Гц) для:  $l = 2$  м;  $m = 0,15$  Т;  $b = 0,2$  м;  $EI = 945$  Т м<sup>2</sup>;  $E_0 = 7000 \frac{T}{m^2}$ ;

$v_0 = 1/3$ ;  $\omega_1 = 66,86$ ;  $\omega_2 = 83,12$ ;  $\omega_3 = 178,97$ ;  
 $\omega_4 = 183,30$ ;  $\omega_5 = 492,25$ ;  $\omega_6 = 516,53$ ;  
 $\omega_7 = 1304,00$ ;  $\omega_8 = 1337,48$ ;  $\omega_9 = 2511,58$ ;  
 $\omega_{10} = 2543,14$ ;  $\omega_{11} = 4399,98$ ;  $\omega_{12} = 4613,13$ .

$$v_i = \frac{1 - v_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} \sum_{k=1}^n X_k F_{ik}$$

Процедура определения форм собственных колебаний с помощью пакета «Mathematica» дала формы, представленные на рис. 5.

Далее рассмотрим задачу о реакции балки на динамическую нагрузку. Для проверки эффективности предлагаемого подхода нами изучено три случая:

1. На балку действует одна динамическая нагрузка в точках 3 и 8 (рис. 4), изменяющаяся по закону:

Теперь рассмотрим вопрос о формах собственных колебаний. Согласно [6], чтобы определить форму собственных колебаний, соответствующую каждой частоте, принимаем какое-нибудь значение неизвестного в системе (5) равным единице, исключаем соответствующее уравнение и решаем систему  $n + 1$  уравнений с  $n + 1$  неизвестных. Потом форма (прогибы) балки определяется формулой

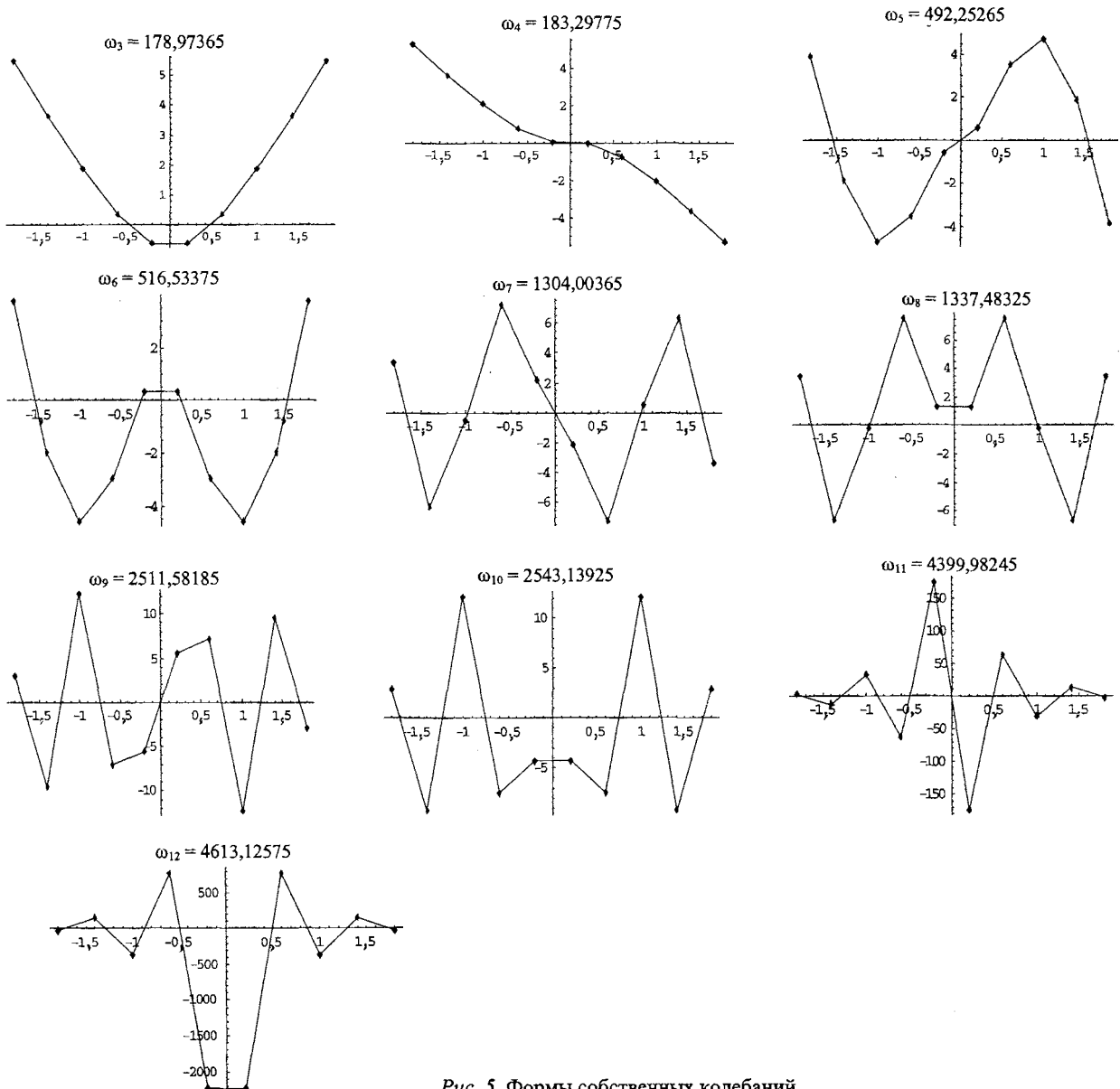


Рис. 5. Формы собственных колебаний

$$F = F_0 \cos(2\pi ft), \quad (6)$$

где  $F_0$  – амплитуда;  $f$  – частота возбуждения, Гц;  $t$  – время, с.

На основе решения системы уравнений (5) со свободными членами получаем реакцию балки (зависимость перемещений от времени при действии динамической нагрузки) при  $F_0 = 1$  кН;  $f = 200$  Гц;  $t \in [0,001; 0,1]$  с. Полученные результаты позволяют показать форму балки в каждый момент возбуждения (рис. 6).

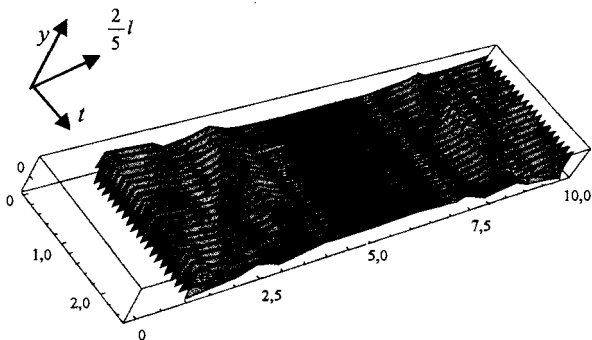


Рис. 6. Форма балки при действии динамической нагрузки

Необходимо отметить, что на основе знания перемещений балки можно определить частоту динамической нагрузки с использованием преобразования Фурье и программы MATLAB (рис. 7).

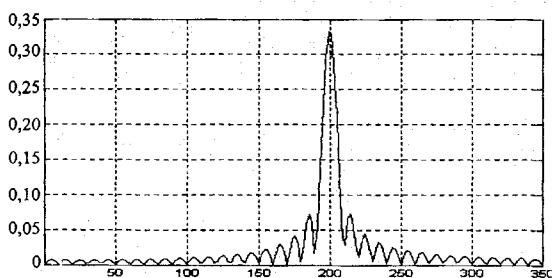


Рис. 7. Локализация частоты динамической нагрузки

2. Действие на балку двух динамических нагрузок в точках 2 и 7 (рис. 4) с разными частотами

$$\begin{cases} F_1 = F_0 \cos(2\pi f_1 t); \\ F_2 = F_0 \cos(2\pi f_2 t). \end{cases} \quad (7)$$

Также на основе системы уравнений (5) получаем реакцию балки на эти нагрузки с дан-

ными:  $F_0 = 1$  кН;  $f_1 = 40$  Гц;  $f_2 = 120$  Гц;  $t \in [0,001; 0,1]$  с. Добавим, что в этом случае при определении перемещений балки в матрице системы (5)  $\omega$  принимает форму:  $\omega = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = 126,49$  Гц. Рис. 8 показывает перемещения балки в точке 5 при действии двух динамических нагрузок.

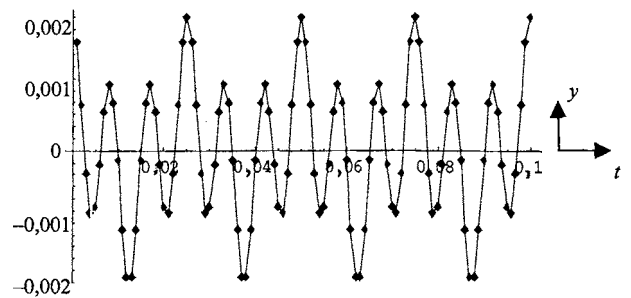


Рис. 8. Перемещения балки в точке 5

3. Действие на балку одной динамической нагрузки, которая движется вдоль балки и изменяется по закону

$$F = F_0 \cos(2\pi ft). \quad (8)$$

Рис. 9 показывает влияние скорости динамической нагрузки на реакцию балки. Перемещения балки уменьшаются при увеличении скорости нагрузки.

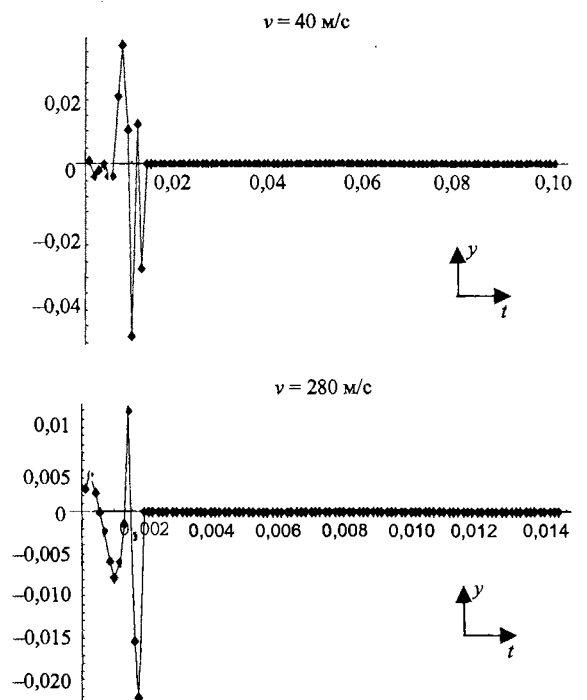


Рис. 9. Влияние скорости нагрузки на реакцию балки

## ВЫВОДЫ

Предлагаемый подход на основе способа Б. Н. Жемочкина позволяет рассчитывать балку на упругом основании с распределительными свойствами при действии любого типа внешних динамических нагрузок.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Жемочкин Б. Н., Синицын А. П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. – М.: Стройиздат, 1962. – 240 с.

2. Динамический расчет балки, лежащей на основании Винклера / С. В. Босаков, С. Генфуд, Н. Уелаа, М. Ш. Джамаа // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 2005. – № 1. – С. 52–58.

3. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л. А. Галина. – М.: Наука, 1976. – 496 с.

4. Справочник проектировщика. – М.: Стройиздат, 1972. – Т. 1. – 599 с.

5. Босаков С. В. Статический расчет плит на упругом основании. – Мн.: БНТУ, 2002. – 127 с.

6. Киселев В. А. Строительная механика: Спец. курс. «Динамика и устойчивость сооружений». – М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.

УДК 626.823.92

## СОПРЯЖЕНИЕ БЪЕФОВ ЗА НЕПОДТОПЛЕННОЙ ДВУХЪЯРУСНОЙ ВОДОСЛИВНОЙ ПЛОТИНОЙ

*Инж. КОРЕВИЦКИЙ Г. А.*

*Белорусский национальный технический университет*

Двухъярусные плотины обладают преимуществами перед плотинами одноярусной конструкции: улучшаются условия пропуска паводка, сброса льда, а также уменьшаются размеры и вес затворов, расход строительных материалов. Применение двухъярусных сооружений создает предпосылки для снижения объемов строительных работ за счет сокращения длины водосбросного фронта гидроузла, кроме того, донные отверстия могут быть использованы для промыва наносов, увеличения полезных пропусков, опорожнения водохранилища. Двухъярусные плотины эксплуатируются как у нас в стране, так и за рубежом. Благодаря своим преимуществам они, несомненно, получат широкое распространение.

В настоящее время проектируется двухъярусная плотина в составе гидроузла Гродненской ГЭС, однако методика гидравлических расчетов двухъярусных водосливных плотин

разработана недостаточно. Указаний к их расчетам в нормативной литературе нет [1]. Имеющиеся аналитические зависимости громоздки и сложны, поэтому сопряжения бьефов за двухъярусными водосбросами – актуальны. Теоретическая актуальность обусловливается необходимостью познания физической сущности процесса истечения через двухъярусный водосброс. Злободневность с практической точки зрения определяется потребностями проектных организаций в уточнении методики расчета подобных сооружений.

Исследования выявили многие особенности в работе двухъярусных водосливов [2–6, 8–10, 11, 13]. Так, фактический расход при совместной работе верхнего и нижнего ярусов водослива на 5–20 % превышает расход, рассчитанный как сумма фактических расходов независимо работающих донного и поверхностного отверстий. Причины этих особенностей иссле-