

## О МЕТОДЕ РАСЧЕТА НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК

Канд. техн. наук ЯКУБОВСКИЙ А. Ч., канд. техн. наук, доц. ЯКУБОВСКИЙ Ч. А.

Белорусский национальный технический университет

Неразрезными, или многопролетными, называются статически неопределимые балки, которые перекрывают несколько пролетов (два и более) и не имеют промежуточных шарниров. Неразрезные балки составляют важный класс статически неопределимых стержневых систем и часто встречаются как в строительстве, так и в других отраслях современной техники.

Наиболее широко применяемым на практике общим методом расчета статически неопределимых систем является метод сил. Он подробно освещается в учебной литературе по сопротивлению материалов [1–4]. Однако в настоящее время в технических вузах республики метод сил используется лишь для расчета статически неопределимых рамных конструкций, в то время как расчет неразрезных балок производится с использованием так называемых уравнений трех моментов. Наконец, расчет статически неопределимых стержневых систем, работающих на растяжение–сжатие, выполняется с применением метода совместности перемещений. Этот метод трудоемок и неэффективен, так как изображение системы в деформированном состоянии вызывает значительные трудности, связанные с необходимостью соблюдения условия неразрывности деформаций, а составление требуемых геометрических соотношений статически неопределимых систем два и более раз является весьма непростой задачей, требующей большого объема вычислений.

Применение метода расчета неразрезных балок с использованием уравнений трех моментов также имеет ряд существенных недостатков и является лишь искусственным преобразованием метода сил [5]. Обоснована и возможность применения метода сил для расчета любых статически неопределимых систем (стержневых, рамных, балочных, пространственных), что значительно упростило бы изложение учебного материала.

Однако опыт показывает, что использование единого метода (метода сил) для расчета статически неопределимых систем вызывает неприятие со стороны многих преподавателей (в том числе доцентов и профессоров) кафедр «Сопротивление материалов» технических вузов Республики Беларусь.

Нами предлагается расчет неразрезной балки при силовом воздействии двумя методами – методом сил и методом с использованием уравнений трех моментов. Сопоставление этих методов расчета позволит оценить достоинства каждого из них и сделать окончательные выводы.

*Пример.* Подобрать двутавровое сечение неразрезной балки, находящейся под внешним силовым воздействием.

**Расчет методом сил** (рис. 1).

1. Устанавливаем степень статической неопределимости балки (рис. 1а). Известна формула для определения лишних связей в статически неопределимых стержневых системах:  $L = C_0 + 2Ш - 3Д$ . Здесь  $C_0$  – число опорных связей;  $Ш$  – количество промежуточных шарниров;  $Д$  – число дисков. Для неразрезных балок (при  $Ш = 0$  и  $Д = 1$ ) она преобразуется в более простую

$$L = C_0 - 3. \quad (1)$$

В нашем случае  $C_0 = 6$ . Тогда  $L = 6 - 3 = 3$ . Следовательно, балка три раза статически неопределима.

2. Выбираем основную систему. Для этого устанавливаем шарниры в сечениях над промежуточными опорами и в защемлении (рис. 1б). В качестве неизвестных принимаем опорные изгибающие моменты  $X_1, X_2, X_3$ .

3. Составляем канонические уравнения метода сил. Для трижды статически неопределимой балки с учетом того, что  $\delta_{13} = \delta_{31} = 0$ , матрица системы канонических уравнений приобретает трехдиагональную структуру:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + 0 + \Delta_{1F} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2F} = 0; \quad (2)$$

$$0 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0.$$

Такая структура уравнений сохраняется при любом числе пролетов.

4. Строим единичные (рис. 1в) и грузовые (рис. 1г) эпюры изгибающих моментов, рассматривая каждый пролет балки как отдельную простую двухопорную балку, последний пролет рассматривается вместе с консолью.

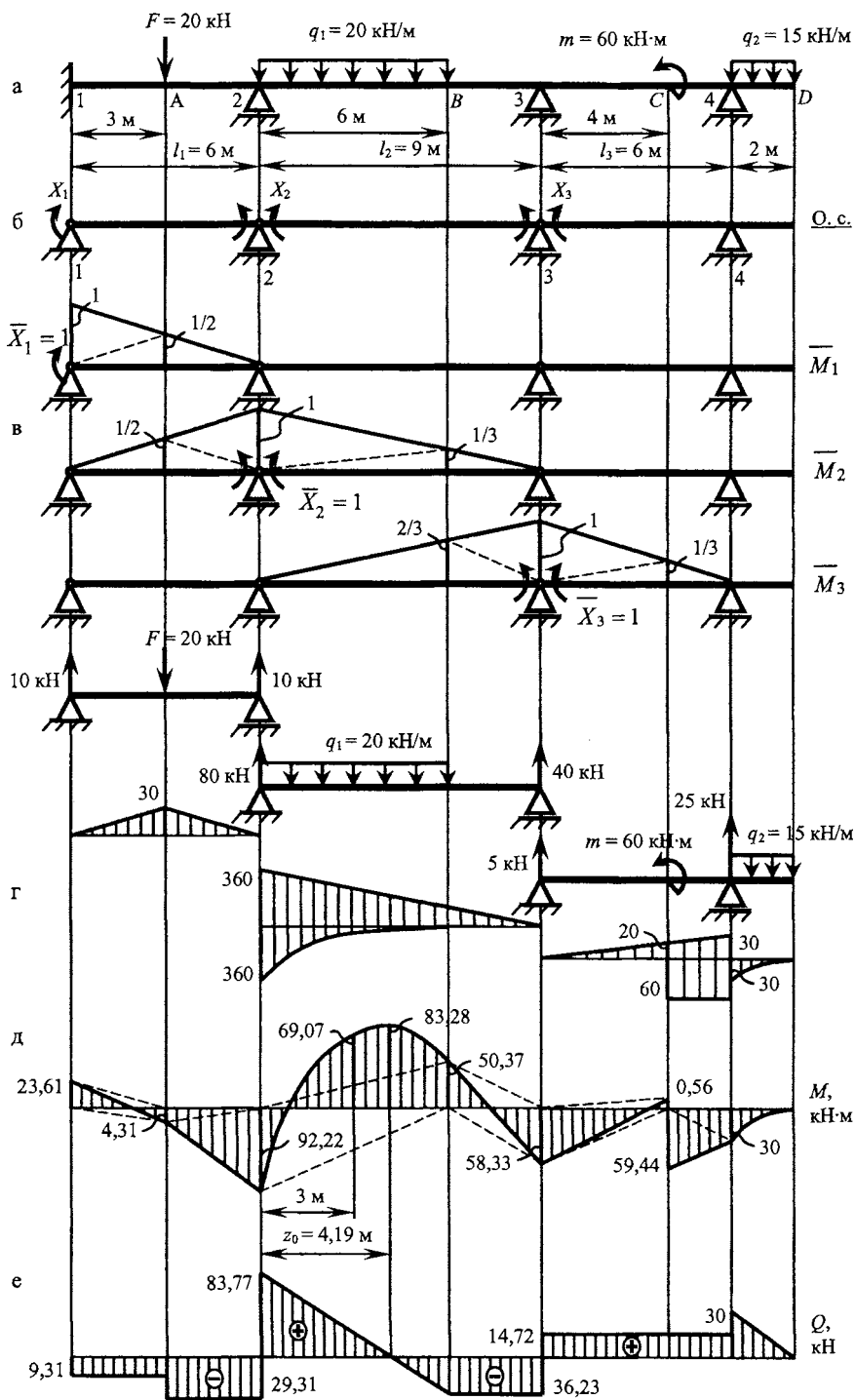


Рис. 1

5. Находим коэффициенты и свободные члены канонических уравнений (2) по интегральной формуле Максвелла – Мора, заменяя интегрирование «перемножением» эпюр по правилу А. Н. Верещагина:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_1}{EJ} dz = \frac{1}{EJ} (\overline{M}_1 \overline{M}_1) =$$

$$= \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{2}{EJ};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ}; \quad \delta_{22} = \frac{5}{EJ};$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{1,5}{EJ}; \quad \delta_{33} = \frac{5}{EJ};$$

$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{M_F \overline{M}_1}{EJ} dz = \frac{45}{EJ}; \quad \Delta_{2F} = \frac{525}{EJ}; \quad \Delta_{3F} = \frac{430}{EJ}.$$

6. Подставляя найденные величины в систему уравнений (2) и решая ее, находим:

$$X_1 = 23,61 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad X_2 = -92,22 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$X_3 = -58,33 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

7. Строим эпюру изгибающих моментов для всей балки. Для вычисления изгибающих моментов в характерных сечениях балки используем формулу

$$M = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2 + \overline{M}_3 X_3 + M_F. \quad (3)$$

Вычисляем:

$$M_1 = 1 \cdot 23,61 = 23,61 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_A = \frac{1}{2} \cdot 23,61 + \frac{1}{2} (-92,22) + 30 = -4,31 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_2 = 1 \cdot (-92,22) = -92,22 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_B = \frac{1}{3} \cdot (-92,22) + \frac{2}{3} (-58,33) + 120 = 50,37 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_3 = 1 \cdot (-58,33) = -58,33 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4 = -30 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_D = 0;$$

$$M_C^{\text{лсб}} = \frac{1}{3} (-58,33) + 20 = 0,56 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_C^{\text{лсб}} = 0,56 - 60 + -59,44 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Изгибающий момент посередине участка с распределенной нагрузкой  $q_1$  составит

$$M_{l_2=3\text{м}} = \frac{1+\frac{1}{3}}{2} (-92,22) + \frac{\frac{2}{3}}{2} (-58,33) +$$

$$+ \left( \frac{360+120}{2} - 20 \cdot 3 \cdot 1,5 \right) = 69,07 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По расчетам строим эпюру  $M$  (рис. 1д).

8. Строим эпюру поперечных сил. Для этого используем дифференциальную зависимость Журавского при изгибе и формулу для определения поперечной силы на участке, где действует распределенная нагрузка:

$$Q = \frac{dM}{dz}; \quad Q = Q_0 + \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лев}}}{l}. \quad (4)$$

Здесь  $Q_0$  – поперечная сила в сечении от распределенной нагрузки. Знак поперечной силы при рассмотрении балки слева направо устанавливается по следующему правилу: на участках с возрастающим изгибающим моментом поперечная сила положительная и наоборот. Вычисляем:

$$Q_{1A} = -\frac{23,61+4,31}{3} = -9,31 \text{ кН};$$

$$Q_{A2} = -\frac{92,22-4,31}{3} = -29,3 \text{ кН};$$

$$Q_2 = \frac{q_1(l_2-3)}{2} + \frac{M_B - M_2}{l_2-3} = \frac{20 \cdot 6}{2} +$$

$$+ \frac{50,37 - (-92,22)}{6} = 83,77 \text{ кН};$$

$$Q_B = -\frac{q_1(l_2-2)}{2} + \frac{M_B - M_2}{l_2-3} =$$

$$= -\frac{20 \cdot 6}{2} + \frac{50,37 - (-92,22)}{6} = -36,23 \text{ кН};$$

$$Q_{B3} = -\frac{50,37+58,33}{3} = -36,23 \text{ кН};$$

$$Q_{3C} = \frac{58,33+0,56}{4} = 14,72 \text{ кН};$$

$$Q_{C4} = \frac{59,44 - 30}{2} = 14,72 \text{ кН};$$

$$Q_A = q_2 a = 15 \cdot 2 = 30 \text{ кН}; \quad Q_D = 0.$$

По расчетам строим эпюру  $Q$  (рис. 1е).

Вычисляем максимальный изгибающий момент на участке с распределенной нагрузкой  $q_1$ . По эпюре  $Q$  находим:

$$z_0 = \frac{Q_{\max}}{q_1} = \frac{83,77}{20} = 4,19 \text{ м};$$

$$M_{\max} = \frac{Q_{\max} z_0}{2} + M_2 = \frac{83,77 \cdot 4,19}{2} - 92,22 = 83,28 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

9. Проверяем правильность выполненных расчетов.

**Статическая проверка.** Из эпюры  $Q$  находим опорные реакции неразрезной балки по формуле

$$R_n = Q_{\text{прав}}^n - Q_{\text{лев}}^n, \quad (5)$$

где  $Q_{\text{прав}}^n$ ,  $Q_{\text{лев}}^n$  – поперечные силы, действующие справа и слева от  $n$ -й опоры.

Вычисляем:

$$R_1 = -9,31 \text{ кН}; \quad R_2 = 83,77 - (-29,31) = 113,08 \text{ кН};$$

$$R_3 = 14,72 - (-36,23) = 50,95 \text{ кН};$$

$$R_4 = 30 - 14,72 = 15,28 \text{ кН}.$$

Проверяем равновесие всей балки:

$$\sum y = 0; \quad \sum R_n + \sum F = 0;$$

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - F - q_1(l_2 - 3) - q_2 a = 0;$$

$$-9,31 + 113,08 + 50,95 + 15,28 - 20 - 20 \cdot 6 - 15 \cdot 2 = 0;$$

$$-179,31 + 179,31 = 0.$$

Кинематическая (деформационная) проверка заключается в проверке равенства нулю угла поворота сечения в закреплении  $\theta_1 = 0$ , а также взаимного угла поворота сечений над промежуточными опорами (например,  $\theta_2 = 0$ ). Проверяем последнее условие

$$\theta_2 = \sum \int \frac{M \bar{M}_2}{EJ} dz = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{3 \cdot 23,61}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \right.$$

$$\begin{aligned} & - \frac{3 \cdot 4,31}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3 \cdot 4,31}{2} \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) - \\ & - \frac{3 \cdot 92,22}{2} \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{20 \cdot 6^2}{8} \cdot \frac{1 + 1/3}{2} + \\ & + \frac{6 \cdot 50,37}{2} \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) - \frac{6 \cdot 92,22}{2} \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) + \\ & \left. + \frac{3 \cdot 50,37}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{3 \cdot 58,33}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right] = \\ & = \frac{1}{EJ} (34664 - 34664) = 0. \end{aligned}$$

10. Подбираем двутавровое сечение балки. Для этого из условия прочности при изгибе находим требуемый момент сопротивления сечения при допустимом напряжении  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$

$$W_x \geq \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} = \frac{92,22 \cdot 10^6}{160} = 576,35 \cdot 10^3 \text{ мм}^3 = 576,35^3 \text{ см}^3.$$

По таблице сортамента выбираем двутавр № 33, у которого  $W_x = 597 \text{ см}^3$ .

**Расчет с использованием уравнений трех моментов (рис. 2).**

1. Устанавливаем степень статической неопределимости балки (рис. 2а)

$$n = C_0 - 3 = 6 - 3 = 3.$$

2. Выбираем основную систему (рис. 2б). Как и в методе сил, в сечениях над опорами устанавливаются шарниры. Однако в отличие от метода сил выбор основной системы в данном случае осуществляется с выполнением дополнительных, во многом искусственных, требований, а именно:

а) если балка имеет жесткое защемление, то оно отбрасывается, а вместо него вводится нулевой (фиктивный) пролет, длина которого  $l_0 = 0$ ;

б) если балка имеет консоли, то они отбрасываются, а нагрузка, действующая на них, приводится к ближайшей опоре.

Наличие этих требований является существенным недостатком метода.

3. Записываем систему уравнений трех моментов, каждое из которых записывается для двух соседних пролетов и трех опор (отсюда и их название):

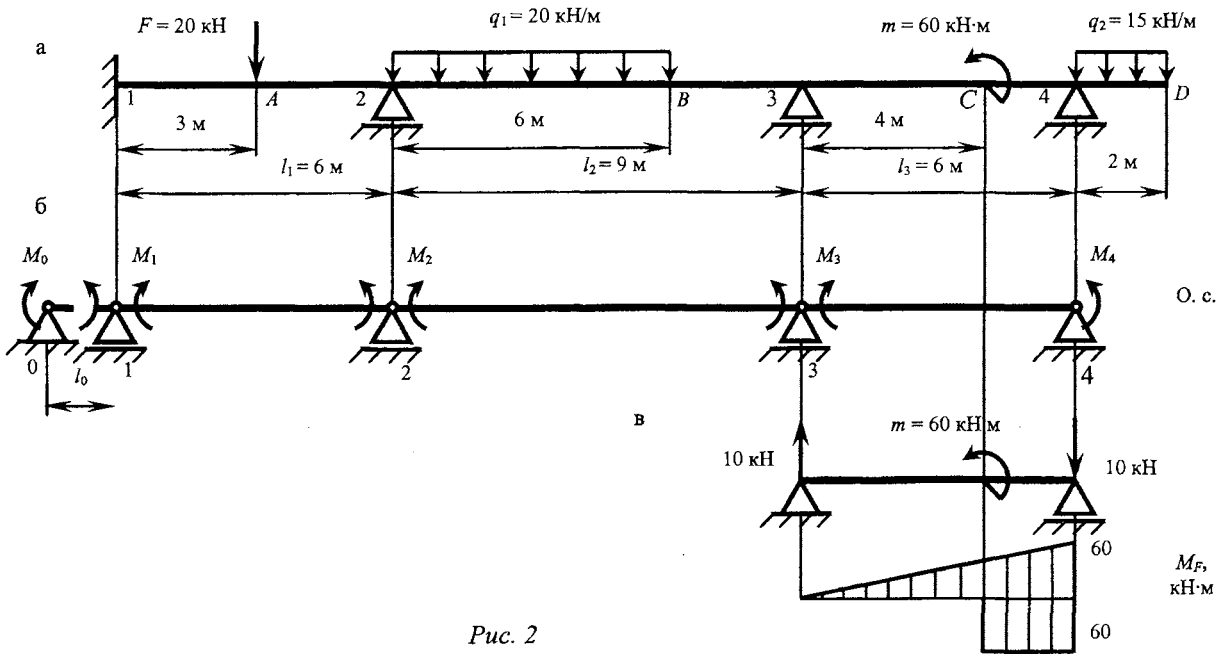


Рис. 2

$$M_0 l_0 + 2M_1(l_0 + l_1) + M_2 l_1 = -6 \cdot \left( \frac{\omega_0 a_0}{l_0} + \frac{\omega_1 b_1}{l_1} \right);$$

$$M_1 l_1 + 2M_2(l_1 + l_2) + M_3 l_2 = -6 \cdot \left( \frac{\omega_1 a_1}{l_1} + \frac{\omega_2 b_2}{l_2} \right); \quad (6)$$

$$M_2 l_2 + 2M_3(l_2 + l_3) + M_4 l_3 = -6 \cdot \left( \frac{\omega_2 a_2}{l_2} + \frac{\omega_3 b_3}{l_3} \right),$$

где  $\omega_i$  – площадь грузовой эпюры изгибающих моментов в  $i$ -м пролете;  $a_i$  – расстояние от центра тяжести эпюры до крайней левой опоры;  $b_i$  – то же правой опоры.

Здесь имеем:

$$l_0 = 0; \quad \omega_0 = 0; \quad a_0 = 0;$$

$$M_4 = -\frac{q_2 a^2}{2} = -\frac{15 \cdot 2^2}{2} = -30 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

4. Строим грузовые эпюры изгибающих моментов от действия внешней нагрузки в каждом пролете в отдельности (рис. 1г). Последний пролет рассматривается без консоли (рис. 2в).

5. Вычисляем правые части уравнений трех моментов (6):

$$\frac{\omega_0 a_0}{l_0} = 0; \quad \frac{\omega_1 a_1}{l_1} = 45 \text{ кН}\cdot\text{м}^2; \quad \frac{\omega_2 a_2}{l_2} = 420 \text{ кН}\cdot\text{м}^2;$$

$$\frac{\omega_1 b_1}{l_1} = 45 \text{ кН}\cdot\text{м}^2; \quad \frac{\omega_2 b_2}{l_2} = 480 \text{ кН}\cdot\text{м}^2;$$

$$\frac{\omega_3 b_3}{l_3} = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}^2.$$

6. Подставляя числовые значения найденных величин в систему уравнений (6) и решая ее, получим:

$$M_1 = 23,61 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_2 = -92,22 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_3 = -58,33 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

7. Так как при расчете балки с использованием уравнений трех моментов не записывались канонические уравнения метода сил и не строились единичные эпюры изгибающих моментов, не имеется возможности построить окончательные эпюры  $M$  и  $Q$  для всей балки сразу наиболее простым способом с применением аналитической формулы (3). Конечно, при этом методе расчета можно также построить эпюру изгибающих моментов для всей балки путем построения эпюры опорных моментов и ее графического сложения с грузовыми эпюрами. Однако такой способ построения не нашел применения из-за его сложности. Поэтому на практике поступают следующим образом. Строят эпюры  $Q$  и  $M$  от действия заданной внешней нагрузки и найденных опорных моментов, рассматривая каждый пролет в отдельности. А затем путем их совмещения получают окончательные эпюры для неразрезной балки. Такой способ является также трудоемким, требующим значительных дополнительных расчетов и построений.

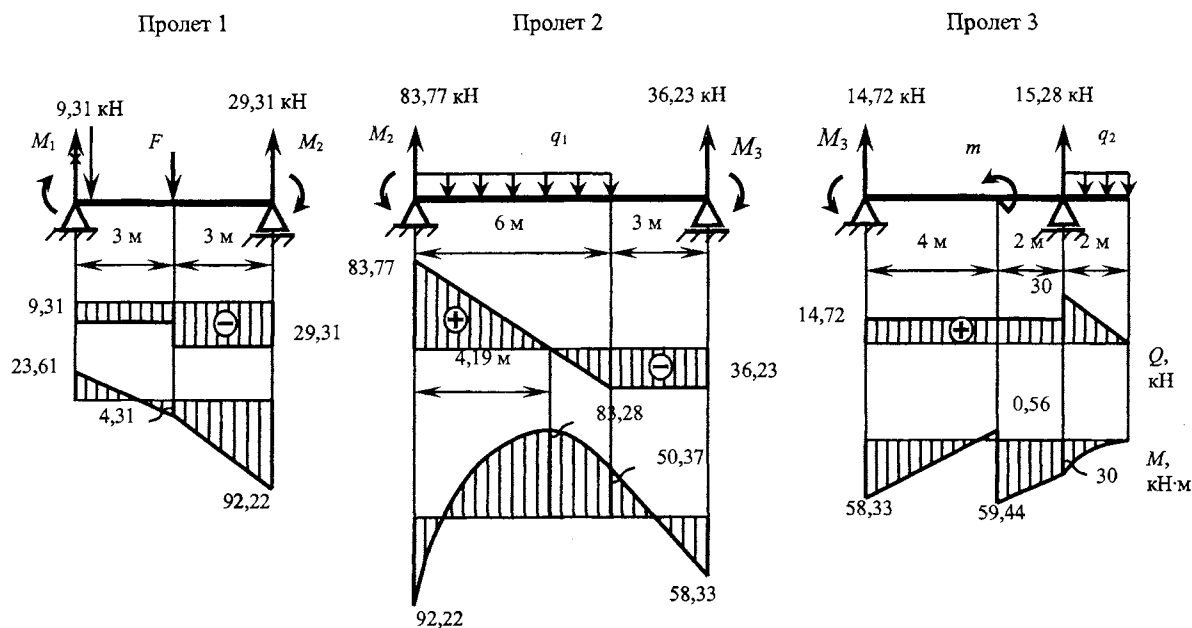


Рис. 3

Опуская весьма громоздкие вычисления, связанные с нахождением опорных реакций и выполнением необходимых расчетов для построения эпюр  $Q$  и  $M$  для каждого пролета, приводим лишь окончательный вид этих эпюр (рис. 3).

8. Строим эпюры  $Q$  и  $M$  для всей балки путем совмещения на общей базе соответствующих эпюр (рис. 1е, д).

9. Проверку правильности расчетов выполним так же, как в предыдущем методе расчета. Однако для кинематической проверки необходимо построить единичные эпюры изгибающих моментов (рис. 1в) и каждую из них перемножить по правилу Верещагина с окончательной эпюрой изгибающих моментов неразрезной балки.

10. Подбор двутаврового сечения балки выполняется, как в предыдущем методе расчета.

## ВЫВОД

Расчет неразрезных балок с использованием уравнений трех моментов является неэффективным, громоздким и устаревшим методом. Поэтому целесообразно при расчете любых статически неопределимых стержневых систем, в том числе и неразрезных балок, применять единый метод расчета – метод сил.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
2. Дарков А. В., Широ Г. С. Сопротивление материалов. – М.: Высш. шк., 1989. – 624 с.
3. Горшков Н. Г., Трошин В. Н., Шалашилин В. И. Сопротивление материалов: Учеб. пособие. – М.: Физматлит, 2002. – 544 с.
4. Старовойтов Э. И. Сопротивление материалов. – Гомель: БелГУТ, 2004. – 376 с.
5. Якубовский А. Ч., Якубовский Ч. А. Общий метод расчета статически неопределимых систем // Машиностроение. – 2005. – Вып. 21.