УДК 512.552

# О НИЛЬАЛГЕБРАХ НАД БЕСКОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ С РАЗРЕШИМОЙ ПРИСОЕДИНЕННОЙ ГРУППОЙ

*Канд. физ.-мат. наук, доц. СМИРНОВ М. Б.*

*Белорусский национальный технический университет*

В данной работе продолжается изучение взаимосвязей ассоциативных колец и их присоединенных групп [1–4]. В частности, исследуется задача о строении нильалгебр над бесконечным полем с разрешимой присоединенной группой. Для радикальных колец известен результат Дженнингса [4], который показал, что если присоединенная группа радикального кольца нильпотентна, то и само кольцо нильпотентно как кольцо Ли. В случае разрешимости присоединенной группы доказывается аналогичный результат для нильалгебр над бесконечным полем, а именно, если такая нильалгебра имеет разрешимую присоединенную группу, то она разрешима как алгебра Ли. Автору неизвестны примеры, чтобы это утверждение не имело места для нильалгебр над конечными полями.

Пусть $A$ – нильалгебра над бесконечным полем $F$ и $A^*$ – ее присоединенная группа. Для упрощения записи присоединим к алгебре $A$ формальную единицу 1 и будем писать $g = 1 + x \in A^*$, $x \in A$. Для $a, b \in A$ обозначим $[a, b] = ab - ba$ и $[a_1, a_2, \ldots, a_n] = [[\ldots[a_1, a_2], \ldots], a_n]$. Для любых подмножеств $X, Y \subset A$ через $<X>$ и $[X, Y]$ обозначаем $F$ – модули, порожденные всеми элементами $x$ и $[x, y]$, $x \in X$, $y \in Y$. Также полагаем, $X^{(1)} = X$, $X^{(k+1)} = [X^{(k)}, X^{(k)}]$ для $k \geq 1$. Для любой группы $G < A^*$ обозначаем $G^{(1)} = G$, $G^{(2)} = (G^{(1)}, G^{(1)})$ – ее коммутант и $G^{(k+1)} = (G^{(k)}, G^{(k)})$ для всех $k > 1$. Если $a_0, a_1 \in G$, $a_2 \in G^{(2)}$, ..., $a_n \in G^{(n)}$, то полагаем $B_1 = <G>$, $B_k$ – $F$ – модуль, порожденный всеми элементами вида $b_k = a_{k-1}^{-1}[b_{k-1}, a_{k-1}]$ при $k > 1$. $N$ обозначает множество натуральных чисел.

**Т е о р е м а.** *Пусть $A$ – нильалгебра над бесконечным полем $F$ и $G = A^*$ – ее присоединенная группа. Если группа $G$ разрешима класса $n$, то алгебра $A$ разрешима класса $n$ как алгебра Ли.*

**Доказательство.** По условию $G^{(n+1)} = 1$. Поэтому, если

$$a_0, a_1 \in G, a_2 \in G^{(2)}, \ldots, a_n \in G^{(n)},$$

то

$$g_{n+1} = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = 1. \tag{1}$$

Пусть $t \neq 0$ произвольный элемент поля $F$, $a_0^{-1} = 1 - tx \in G$, $x \in A$. Тогда существует $m \in N$ такое, что $x^m = 0$ и $a_0 = 1 + tx + t^2x^2 + \ldots + t^{m-1}x^{m-1}$. Поэтому

$$g_2 = (a_0, a_1) = a_0^{-1}a_1^{-1}a_0a_1 = (1 - tx)a_1^{-1}(1 + tx + t^2x^2 + \ldots + t^{m-1}x^{m-1})a_1 = 1 + ta_1^{-1}[x, a_1] + t^2c_{21} + t^3c_{22} + \ldots + t^mc_{2m-1} = 1 + tb_2 + t^2c_{21} + \ldots + t^mc_{2m-1} \in G^{(2)},$$

где $b_2 = a_1^{-1}[x, a_1]$ и $c_{2i} \in A$ – сумма членов с коэффициентом $t^{i+1}$. Аналогично,

$$g_2^{-1} = (a_1, a_0) = a_1^{-1}a_0^{-1}a_1a_0 = a_1^{-1}(1 - tx)a_1(1 + tx + t^2x^2 + \ldots + t^{m-1}x^{m-1}) = 1 - ta_1^{-1}[x, a_1] + t^2d_{21} + t^3d_{22} + \ldots + t^md_{2m-1} = 1 - tb_2 + t^2d_{21} + \ldots + t^md_{2m-1}.$$

Предположим, что для любого натурального $k > 2$ справедливо:

$$g_k = (a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}) = 1 + tb_k + t^2c_{k1} + \ldots + t^sc_{ks-1};$$

$$g_k^{-1} = 1 - tb_k + t^2 d_{k1} + \ldots + t^s d_{k\,s-1},$$

где $b_k = a_{k-1}^{-1}[b_{k-1}, a_{k-1}]$.

Тогда

$$g_{k+1} = g_k^{-1} a_k^{-1} g_k a_k = (1 - tb_k + t^2 d_{k1} + \ldots + t^s d_{k\,s-1}) a_k^{-1} \times$$
$$\times (1 + tb_k + t^2 c_{k1} + \ldots + t^s c_{k\,s-1}) a_k = 1 + t(a_k^{-1} b_k a_k - b_k) +$$
$$+ t^2 c_{k+1\,1} + \ldots + t^{2s} c_{k+1\,2s-1} = 1 + tb_{k+1} +$$
$$+ t^2 c_{k+1\,1} + \ldots + t^{2s} c_{k+1\,2s-1},$$

где $b_{k+1} = a_k^{-1}[b_k, a_k]$.

Аналогично находим

$$g_{k+1}^{-1} = a_k^{-1} g_k^{-1} a_k g_k = 1 - tb_{k+1} + t^2 d_{k+1\,1} + \ldots + t^{2s} d_{k+1\,2s-1}.$$

Таким образом по индукции мы имеем для любого $k \in N$:

$$g_{k+1}(t) = 1 + tb_{k+1} + t^2 c_{k+1\,1} + \ldots + t^s c_{k+1\,s-1} \in G^{(k+1)}; \quad (2)$$

$$g_{k+1}^{-1}(t) = 1 - tb_{k+1} + t^2 d_{k+1\,1} + \ldots + t^s d_{k+1\,s-1} \in G^{(k+1)}; \quad (3)$$

$$b_{k+1} = a_k^{-1}[b_k, a_k] \quad (4)$$

и $s = 2^k m$ зависит только от $a_0$ и $k$. Под $b_1$ подразумеваем любой элемент $x \in A$.

Поскольку соотношение (2) верно для любого $t \in F$, а поле $F$ бесконечно, то, подставляя последовательно элементы $t_1, t_2, \ldots, t_s \in F$, $t_i \neq t_j$ при $i \neq j$ вместо $t$, получим систему линейных уравнений от $s$ неизвестных $x_1 = b_{k+1}$, $x_2 = c_{k+1\,1}, \ldots, x_s = c_{k+1\,s-1}$ следующего вида:

$$\begin{cases} x_1 + t_1 x_2 + t_1^2 x_3 + \ldots + t_1^{s-1} x_s = t_1^{-1}(g_{k+1}(t_1) - 1) \in \langle G_0^{(k+1)} \rangle; \\ x_1 + t_2 x_2 + t_2^2 x_3 + \ldots + t_2^{s-1} x_s \in \langle G_0^{(k+1)} \rangle; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + t_s x_2 + t_s^2 x_3 + \ldots + t_s^{s-1} x_s \in \langle G_0^{(k+1)} \rangle. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $\langle G_0^{(k+1)} \rangle$ обозначает подалгебру, порожденную элементами вида

$$g_{k+1} - 1 = g_k^{-1} a_k^{-1} [g_k, a_k]$$

(т. е. порожденную коммутаторами $k$+1-го порядка группы $G$ без формальной единицы 1). Так как при различных $t_i$ определитель системы (5) отличен от нуля, система имеет единственное решение вида $x_i \in \langle G_0^{(k+1)} \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, s$ и, в частности:

$$x_1 = b_{k+1} = a_k^{-1}[b_k, a_k] \in \langle G_0^{(k+1)} \rangle. \quad (6)$$

Отметим, что при $k = n$ ввиду (1) получаем $\langle G_0^{(n+1)} \rangle = \langle 0 \rangle$, система (5) – однородная и $x_1 = b_{n+1} = a_n^{-1}[b_n, a_n] = 0$. Для любого натурального $l > 1$ обозначим через $B_l$ подалгебру, порожденную всеми элементами вида

$$b_l = a_{l-1}^{-1}[b_{l-1}, a_{l-1}],\ B_1 = \langle G \rangle.$$

Тогда из (6) сразу получаем

$$B_l \subset \langle G_0^{(l)} \rangle. \quad (7)$$

Поскольку для любых $x \in A$ и $a_1 \in G$ $[x, a_1] = a_1^{-1}[a_1 x, a_1] \in B_2$, то

$$[A, G] = [A, A] = A^{(2)} \subset B_2. \quad (8)$$

Так как в (6)

$$b_{k+1} = a_k^{-1}[a_{k-1}^{-1}[\ldots[a_2^{-1}[a_1^{-1}[x, a_1], a_2], \ldots], a_{k-1}], a_k],$$

то $b_k$ не зависит от $a_k$.

Пусть в (6) $a_k = (h_0, h_1, h_2, \ldots, h_{k-1}) \in G^{(k)}$, где $h_0, h_1 \in G$, $h_2 \in G^{(2)}, \ldots, h_{k-1} \in G^{(k-1)}$ – независимые элементы. Тогда, полагая $h_0^{-1} = 1 - ty$, где $y \in A$, $t \in F$, имеем $h_0 = 1 + ty + t^2 y^2 + \ldots + t^{l-1} y^{l-1}$ для некоторого $l \in N$ и ввиду (2)–(4) получаем:

$$a_k(t) = 1 + tb_k' + t^2 c_{k1} + \ldots + t^r c_{k\,r-1};$$

$$a_k^{-1}(t) = 1 - tb_k' + t^2 d_{k1} + \ldots + t^r d_{k\,r-1};$$

$$b_k' = h_{k-1}^{-1}[b_{k-1}, h_{k-1}].$$

Подставляя $a_k(t)$ и $a_k^{-1}(t)$ в (6), получаем

$$b_{k+1}=(1-tb'_k+t^2d_{k1}+\ldots+t^rd_{k\,r-1})[b_k,\,1+$$
$$+tb'_k+t^2c_{k\,1}+\ldots+t^rc_{k\,r-1}]=$$
$$=t[b_k,\,b'_k]+t^2x_{k+1\,1}+\ldots+t^{2r}x_{k+1\,2r-1}\in B_{k+1}.$$

Поскольку это соотношение верно при любых $t\in F$, то повторяя процедуру, описанную выше, т. е. переходя к системе вида (5), получим $[b_k, b'_k]\in B_{k+1}$, и так как $b_k$ и $b'_k$ независимы, то

$$[B_k,\,B_k]=B_k^{(2)}\subset B_{k+1}\,. \qquad (9)$$

Так как (9) верно для любых натуральных $k>1$, то с учетом (1), (7), (8) получим

$$<0>=<G_0^{(n+1)}>\supseteq B_{n+1}\supseteq B_n^{(2)}\supseteq B_{n-1}^{(3)}\supseteq$$
$$\supseteq\ldots\supseteq B_2^{(n)}\supseteq(A^{(2)})^{(n)}=A^{(n+1)},$$

что доказывает теорему.

**Следствие.** *Если char $F\neq 2$, то разрешимая класса n присоединенная группа $A^*$ нильалгебры A над бесконечным полем F имеет нильпотентный нормальный делитель H такой, что факторгруппа $A^*/H$ разрешима класса не выше 8.*

**Доказательство.** Из теоремы следует разрешимость алгебры $A$. Поэтому осталось применить результаты [1, 2].

Отметим, что ограничение на характеристику поля вызвано аналогичным ограничением в [2] и не ясно, является ли оно существенным для нильалгебр. Весьма вероятным кажется предположение, что нильалгебра над полем характеристики 2, разрешимая как алгебра Ли, имеет разрешимую присоединенную группу. Для нильалгебр экспоненты 4 это доказано в [3].

## ВЫВОД

Нильалгебра над бесконечным полем с разрешимой присоединенной группой разрешима как алгебра Ли того же класса.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Залесский А. Е., Смирнов М. Б.** Ассоциативные кольца, удовлетворяющие тождеству лиевой разрешимости // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. – 1982. – № 2. – С. 15–20.
2. **Смирнов М. Б.** О группе единиц ассоциативного кольца, удовлетворяющего тождеству лиевой разрешимости // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. – 1983. – № 5. – С. 20–23.
3. **Смирнов М. Б.** Присоединенные группы нильалгебр экспоненты 4 над полем характеристики 2 // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. – 1988. – № 5. – С. 8–13.
4. **Jennings S. A.** Radical Rings with Nilpotent Associated Groups // Trans. Royal Soc. Can., 1955. – V. XLIX, ser. III. – P. 31–38.


УДК 517.9

# ПОТОЧЕЧНАЯ СХОДИМОСТЬ ОБРАТНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ ДИНИ*

*ДУБРОВИНА О. В.*

*Белорусский национальный технический университет*

Существование обратного вейвлет-преобразования в смысле сходимости в пространстве $L_2(R)$ установлена различными способами [1, с. 287]. Что касается поточечной сходимости, то в большинстве монографий и статей, посвященных интегральным вейвлет-преобразованиям, приводятся, как правило, доказательства, полученные при дополнительных условиях на базовый вейвлет $\psi$ [1–3]. Установленное ниже утверждение является аналогом соответ-

* Работа выполнена при частичной поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь.