$$b_{k+1} = (1 - tb'_k + t^2 d_{k1} + \ldots + t^r d_{k\,r-1})[b_k,\, 1 + \\ + tb'_k + t^2 c_{k\,1} + \ldots + t^r c_{k\,r-1}] = \\ = t[b_k,\, b'_k] + t^2 x_{k+1\,1} + \ldots + t^{2r} x_{k+1\,2r-1} \in B_{k+1}.$$

Поскольку это соотношение верно при любых $t \in F$, то повторяя процедуру, описанную выше, т. е. переходя к системе вида (5), получим $[b_k, b'_k] \in B_{k+1}$, и так как b_k и b'_k независимы, то

$$[B_k,\, B_k] = B_k^{(2)} \subset B_{k+1}\,. \tag{9}$$

Так как (9) верно для любых натуральных $k > 1$, то с учетом (1), (7), (8) получим

$$<0>=<G_0^{(n+1)}> \supseteq B_{n+1} \supseteq B_n^{(2)} \supseteq B_{n-1}^{(3)} \supseteq \\ \supseteq \ldots \supseteq B_2^{(n)} \supseteq (A^{(2)})^{(n)} = A^{(n+1)},$$

что доказывает теорему.

С л е д с т в и е. *Если char $F \neq 2$, то разрешимая класса n присоединенная группа A^* нильалгебры A над бесконечным полем F имеет нильпотентный нормальный делитель H такой, что факторгруппа A^*/H разрешима класса не выше 8.*

Доказательство. Из теоремы следует разрешимость алгебры A. Поэтому осталось применить результаты [1, 2].

Отметим, что ограничение на характеристику поля вызвано аналогичным ограничением в [2] и не ясно, является ли оно существенным для нильалгебр. Весьма вероятным кажется предположение, что нильалгебра над полем характеристики 2, разрешимая как алгебра Ли, имеет разрешимую присоединенную группу. Для нильалгебр экспоненты 4 это доказано в [3].

ВЫВОД

Нильалгебра над бесконечным полем с разрешимой присоединенной группой разрешима как алгебра Ли того же класса.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Залесский А. Е., Смирнов М. Б.** Ассоциативные кольца, удовлетворяющие тождеству лиевой разрешимости // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1982. – № 2. – С. 15–20.

2. **Смирнов М. Б.** О группе единиц ассоциативного кольца, удовлетворяющего тождеству лиевой разрешимости // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1983. – № 5. – С. 20–23.

3. **Смирнов М. Б.** Присоединенные группы нильалгебр экспоненты 4 над полем характеристики 2 // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1988. – № 5. – С. 8–13.

4. **Jennings S. A.** Radical Rings with Nilpotent Associated Groups // Trans. Royal Soc. Can., 1955. – V. XLIX, ser. III. – P. 31–38.

УДК 517.9

ПОТОЧЕЧНАЯ СХОДИМОСТЬ ОБРАТНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ ДИНИ*

ДУБРОВИНА О. В.

Белорусский национальный технический университет

Существование обратного вейвлет-преобразования в смысле сходимости в пространстве $L_2(R)$ установлена различными способами [1, с. 287]. Что касается поточечной сходимости, то в большинстве монографий и статей, посвященных интегральным вейвлет-преобразованиям, приводятся, как правило, доказательства, полученные при дополнительных условиях на базовый вейвлет ψ [1–3]. Установленное ниже утверждение является аналогом соответ-

* Работа выполнена при частичной поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь.

ствующего классического результата для интегрального преобразования Фурье [1, с. 116] и дается в естественных предположениях на функцию x.

Теорема. *Пусть* $\psi \in L_2(R)$ *– базовый вейвлет, удовлетворяющий условию согласованности:*

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(f)|^2}{|f|} df < \infty. \qquad (1)$$

Тогда для любой функции $x \in L_2(R)$ *выполняется включение*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (W_\psi x)(a,b)\psi_{a,b}(t)\frac{dadb}{a^2} \in L_2(R) \qquad (2)$$

и справедлива формула обращения в смысле сходимости в пространстве $L_2(R)$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (W_\psi x)(a,b)\psi_{a,b}(t)\frac{dadb}{a^2}. \qquad (3)$$

Более того, если функция $x \in L_2(R)$ *удовлетворяет в некоторой точке* $t_0 \in R$ *условию Дини, т. е. при некотором* $\delta > 0$ *интеграл*

$$\int_0^\delta \frac{|x(t_0+h) - x(t_0)|}{h} dh < \infty \qquad (4)$$

конечен, то обратное интегральное вейвлет-преобразование сходится в точке t_0 *и имеет место равенство*

$$x(t_0) = \frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (W_\psi x)(a,b)\psi_{a,b}(t_0)\frac{dadb}{a^2}, \qquad (5)$$

где

$$\psi_{a,b}(t) := \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \qquad (6)$$

$$(W_\psi x)(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{\psi_{a,b}(t)}dt. \qquad (7)$$

Доказательство.

По определению

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (W_\psi x)(a,b)\psi_{a,b}(t)\frac{dadb}{a^2} =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ A,B \to +\infty}} \int_{\varepsilon<|a|<A}\int_{|b|<B} (W_\psi x)(a,b)\psi_{a,b}(t)\frac{dadb}{a^2}.$$

Обозначим

$$S(\varepsilon, A, B) = \int_{\varepsilon<|a|<A}\int_{|b|<B} (W_\psi x)(a,b)\psi_{a,b}(t)\frac{dadb}{a^2}.$$

Интеграл $S(\varepsilon, A, B)$ сходится абсолютно для любых фиксированных $0 < A < B$ и $\varepsilon > 0$, так как каждый множитель подынтегрального выражения принадлежит пространству $L_2\left(R^2, \frac{dadb}{a^2}\right)$. Заметим, что для любой функции $x \in L_2(R)$ верно равенство

$$\|x - S(\varepsilon, A, B)x\|_{L_2} = \sup_{\|y\|_{L_2}=1} |\langle x - S(\varepsilon, A, B)x, y\rangle|,$$

где $\langle x, y\rangle$ – скалярное произведение функций x и y, определяемое формулой

$$\langle x, y\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{y(t)}dt.$$

По теореме Фубини [2, с. 317] имеем

$$\langle S(\varepsilon, A, B)x, y\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{y(t)}\left(\int_{\varepsilon<|a|<A}\int_{|b|<B} (W_\psi x)(a,b)\psi_{a,b}(t)\frac{dadb}{a^2}\right)dt =$$

$$= \int_{\varepsilon<|a|<A}\int_{|b|<B} (W_\psi x)(a,b)\overline{(W_\psi y)(a,b)}\frac{dadb}{a^2}.$$

Отсюда и из аналога равенства Парсеваля [3, с. 59]

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (W_\psi x)(a,b)\overline{(W_\psi y)(a,b)}\frac{dadb}{a^2} \qquad (8)$$

следует, что скалярное произведение $\langle S(\varepsilon, A, B)x, y\rangle$ ограничено относительно $\varepsilon > 0$, $0 < A < B$ для любых фиксированных $x, y \in L_2(R)$. Таким образом, установлено включение (2).

В соответствии с равенством (8) и неравенством Коши – Буняковского – Шварца [4, с. 143]

$$|\langle x - S(\varepsilon, A, B)x, y\rangle| =$$

$$= \left| \iint_{\{\varepsilon<|a|<A, |b|<B\}} (W_\psi x)(a,b)\overline{(W_\psi y)(a,b)} \frac{da db}{a^2} \right| \le$$

$$\le \left(\iint_{\{\varepsilon<|a|<A, |b|<B\}^C} |(W_\psi x)(a,b)|^2 \frac{da db}{a^2} \right)^{1/2} \|y\|_{L_2},$$

где

$$\{\varepsilon < |a| < A, |b| < B\}^C =$$

$$= \{(a,b) \in R^2 : (a,b) \notin \{\varepsilon < |a| < A, |b| < B\}\}.$$

При $\varepsilon \to 0$ и $A, B \to +\infty$ область интегрирования стремится к пустому множеству, таким образом, интеграл стремится к нулю, а следовательно, $\|x - S(\varepsilon, A, B)x\|_{L_2} \to 0$.

Таким образом, интеграл в формуле (3) определяет обратное вейвлет-преобразование.

Для завершения доказательства установим равенство (5) в точках, в которых выполнено локальное условие Дини (4). Для доказательства формулы (5) заметим, что так же, как и в случае преобразования Фурье, необходимо прежде всего представить постоянную величину $x(t_0)$ в виде интегрального выражения, похожего на стоящее в правой части выражение (5). Поскольку из условия согласованности вытекает, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0, \qquad (9)$$

непосредственное применение преобразования, стоящего в правой части (5), к постоянной величине $x(t_0)$ дает нулевой результат. Следовательно, такой подход не подходит.

В теории интегрального вейвлет-преобразования известно [1, с. 285], что экспоненциальная функция инвариантна относительно преобразования (7) и, следовательно, имеет место формула обращения для $x(t) = x_\xi(t) = e^{2\pi i \xi t}$, т. е. для любого фиксированного значения параметра $\xi \in R$ выполняется равенство

$$e^{2\pi i \xi t_0} = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (W_\psi x_\xi)(a,b) \psi_{a,b}(t_0) \frac{da db}{a^2}, \qquad (10)$$

где интегралы понимаются, как и ранее, в смысле главного значения.

Умножая последнее равенство на постоянную $x(t_0)$ и перенося экспоненциальный множитель в правую часть, имеем

$$x(t_0) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (W_\psi x(t_0) x_\xi)(a,b) \psi_{a,b}(t_0) e^{-2\pi i \xi t_0} \frac{da db}{a^2}. \qquad (11)$$

Не ограничивая общности, можно считать далее, что базовый вейвлет ψ является вещественно-значной функцией. Таким образом, утверждение теоремы совпадает с утверждением о равенстве следующих интегралов (их существование установлено, например, в [1, с. 287] и является простым следствием неравенства Коши – Буняковского – Шварца):

$$\frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \psi_{a,b}(\tau) \psi_{a,b}(t_0) \frac{da}{a^2} db d\tau \qquad (12)$$

и

$$\frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_0) e^{2\pi i \xi(\tau - t_0)} \psi_{a,b}(\tau) \psi_{a,b}(t_0) \frac{da}{a^2} db d\tau. \qquad (13)$$

Так как существование интегралов в (12), (13) установлено, к каждому из них можно применить теорему Фубини и считать внутренними интегралами, например, интегралы по переменной b (которые являются в обоих случаях одинаковыми). Рассмотрим эти интегралы

$$I(\tau, a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{a,b}(\tau) \psi_{a,b}(t_0) db =$$
$$= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{\tau - b}{a}\right) \overline{\psi\left(\frac{t_0 - b}{a}\right)} db. \qquad (14)$$

Поскольку $\psi \in L_2(R)$, при фиксированных значениях $a \ne 0$, $\tau \in R$, $t_0 \in R$ к интегралу $\delta > 0$ можно применить равенство Парсеваля, т. е.

$$I(\cdot, a) = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}\left(\frac{\tau - \cdot}{a}\right)(\theta) \overline{\hat{\psi}\left(\frac{t_0 - \cdot}{a}\right)(\theta)} d\theta, \qquad (15)$$

где ψ – преобразование Фурье ψ, определенное равенством

$$\hat{\psi}(\theta)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(s)e^{-2\pi is\theta}ds, \qquad (16)$$

для которого интегралы также понимаются в смысле главного значения.

Вычислив выражения для преобразования Фурье в (15), имеем:

$$\hat{\psi}\left(\frac{\tau-\cdot}{a}\right)(\theta)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi\left(\frac{\tau-b}{a}\right)e^{-2\pi ib\theta}db=\begin{bmatrix}\tau-b=ua\\ db=-adu\end{bmatrix}=$$

$$=\operatorname{sign} a\cdot a\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(u)e^{-2\pi i\tau\theta}e^{2\pi iua\theta}du=$$

$$=\operatorname{sign} a\cdot ae^{-2\pi i\tau t}\hat{\psi}(-a\theta);$$

$$\overline{\hat{\psi}\left(\frac{t_0-\cdot}{a}\right)}(\theta)=\overline{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi\left(\frac{t_0-b}{a}\right)e^{-2\pi ib\theta}db}=\begin{bmatrix}t_0-b=ua\\ db=-adu\end{bmatrix}=$$

$$=\operatorname{sign}a\cdot a\overline{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(u)e^{-2\pi it_0\theta}e^{2\pi iua\theta}du}=$$

$$=\operatorname{sign} a\cdot ae^{-2\pi it_0\theta}\hat{\psi}(-a\theta),$$

Следовательно,

$$I(\tau,a)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}a^2e^{2\pi i\theta(t_0-\tau)}\frac{|\hat{\psi}(-a\theta)|^2}{|a|}d\theta. \qquad (17)$$

Тогда, применив формулу Фубини к интегралу

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}I(\tau,a)\frac{da}{a^2}, \qquad (18)$$

имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{da}{a^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}a^2e^{2\pi i\theta(t_0-\tau)}\frac{|\psi(-a\theta)|^2}{|a|}d\theta=$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ A,B\to+\infty}}\int\limits_{|\theta|<B}e^{2\pi i\theta(t_0-\tau)}d\theta\int\limits_{\varepsilon<|a|<A}\frac{|\psi(-a\theta)|^2}{|a|}da=$$

$$=\begin{bmatrix}-a\theta=v\\ da=-\dfrac{dv}{\theta}\end{bmatrix}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi i\theta(t_0-\tau)}\operatorname{sign}\theta d\theta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\psi(v)|^2}{|v|}dv=$$

$$=C_\psi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi i\theta(t_0-\tau)}\operatorname{sign}\theta d\theta.$$

Заметим, что в интегральном представлении (11) правая часть не зависит от выбора значений параметра $\xi\in R$. Следовательно, в этом представлении (и всюду далее) можно считать ξ фиксированным и равным любому заданному числу, отличному от нуля. Кроме того, интегралы по переменной θ следует понимать в смысле главного значения по Коши. Другими словами, сравнение интегралов (12), (13) сводится к сравнению пределов:

$$\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x(t_0+h)dh\int\limits_{-A}^{A}e^{2\pi i\theta h}\operatorname{sign}\theta d\theta; \qquad (12')$$

$$\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x(t_0)e^{2\pi i\xi h}dh\int\limits_{-A}^{A}e^{2\pi i\theta h}\operatorname{sign}\theta d\theta, \qquad (13')$$

где $h=\tau-t_0$.

Внутренние интегралы в (12′), (13′) равны

$$\int\limits_{-A}^{A}e^{2\pi i\theta h}\operatorname{sign}\theta d\theta=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{h}[2-2\cos 2\pi Ah]=$$

$$=\frac{2}{\pi ih}\sin^2\pi Ah.$$

Рассмотрим разность повторных интегралов в (12′), (13′):

$$J=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(t_0+h)-x(t_0)e^{2\pi i\xi h}}{h}\frac{2}{\pi i}\sin^2\pi Ahdh=$$

$$=\int\limits_{|h|<\delta}\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}\frac{2}{\pi i}\sin^2\pi Ahdh+$$

$$+\int\limits_{|h|<\delta}\frac{[-2\pi i\xi\alpha(h)]\cdot 2}{\pi i}\sin^2\pi Ahdh+$$

$$+\int\limits_{|h|>\delta}\frac{x(t_0+h)-x(t_0)e^{2\pi i\xi h}}{h}\frac{2}{\pi i}\sin^2\pi Ahdh=J_1+J_2+J_3,$$

где $\alpha(h)=O(1)$ при $h\to0$ (т. е. $e^{2\pi i\xi h}$ представлена по формуле Тейлора). Для любых фиксированных $\delta>0$, $A>0$ при малых h функция $\varphi(h,A)=\dfrac{x(t_0+h)-x(t_0)e^{2\pi i\xi h}}{h}\dfrac{2}{\pi i}\sin^2\pi Ah$ является абсолютно интегрируемой на $(-\infty,\delta]\cup[\delta,+\infty)$

абсолютно интегрируемой на $(-\infty,\delta]\cup[\delta,+\infty)$ в силу неравенства Коши – Буняковского – Шварца.

$$J_3 = \int\limits_{|h|>\delta} \frac{x(t_0+h)}{h}\frac{2}{\pi i}\sin^2 \pi A h dh -$$

$$-\int\limits_{|h|>\delta} \frac{x(t_0)e^{2\pi i\xi h}}{h}\frac{2}{\pi i}\sin^2 \pi A h dh = J_{31}+J_{32};$$

$$J_{31} = \int\limits_{|h|>\delta} \frac{x(t_0+h)}{h}\frac{2}{\pi i}\sin^2 \pi A h dh \le$$

$$\le \left(\int\limits_{|h|>\delta} |x(t_0+h)|^2 dh\right)^{1/2} \left(\int\limits_{|h|>\delta} \frac{dh}{h^2}\right)^{1/2},$$

следовательно, $J_{31} \in L_2(R)$.

$$J_{32} = \int\limits_{|h|>\delta} \frac{x(t_0)e^{2\pi i\xi h}}{h}\frac{2}{\pi i}\sin^2 \pi A h dh =$$

$$= \frac{2}{\pi i}\int\limits_{|h|>\delta} \frac{x(t_0)}{h}\cos 2\pi i\xi h \sin^2 \pi A h dh +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_{|h|>\delta} \frac{x(t_0)}{h}\sin 2\pi i\xi h \sin^2 \pi A h dh;$$

$$\frac{2}{\pi i}\int\limits_{|h|>\delta} \frac{x(t_0)}{h}\cos 2\pi i\xi h \sin^2 \pi A h dh = 0,$$

так как подынтегральная функция является нечетной, а отрезок интегрирования – симметричным относительно начала координат.

Рассмотрим $\frac{2}{\pi}\int\limits_{\delta<|h|<B} \frac{x(t_0)\sin 2\pi i\xi h}{h}\sin^2 \pi A h dh$.

Зафиксируем $B>\delta$, тогда, в силу леммы Римана – Лебега [4, с. 424], этот интеграл стремится к нулю при $B\to+\infty$, а значит, равен нулю в смысле главного значения.

Отсюда $\lim\limits_{A\to+\infty} J_3 = 0$ по лемме Римана – Лебега. Аналогичные рассуждения имеют место для J_2, поскольку $\left|\frac{-2\pi i\xi\alpha(h)}{\pi i}2\sin\pi A h\right| \le C$, $|h|<\delta$.

Наконец, существование предела

$$\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{|h|<\delta} \frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}\frac{2}{\pi i}\sin^2 \pi A h dh = 0$$

также вытекает из леммы Римана – Лебега и условия Дини (4).

Теорема доказана.

ВЫВОД

Таким образом, установлена поточечная сходимость интегрального вейвлет-преобразования в случае произвольного вейвлета ψ при условии, что функция x удовлетворяет условию Дини.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Pinsky M.** Introduction to Fourier Analysis and Wavelets. – Brooks/Cole, Pasific Grove, CA, 2002. – 376 p.

2. **Чуи К.** Введение в вейвлеты. – М.: Мир, 2001. – 412 с.

3. **Добеши И.** Десять лекций по вейвлетам. – М.: Ижевск: РХД, 2001. – 463 с.

4. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 543 с.