МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Инженерная математика»

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебно-методическое пособие
для студентов специальностей
1-38 01 01 «Механические и электромеханические приборы и аппараты», 1-38 01 02 «Оптико-электронные и лазерные приборы и системы», 1-38 02 01 «Информационно-измерительная техника»

В 2 частях

Часть 1

Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию в области приборостроения

Под редакцией *М. А. Князева*

Минск
БНТУ
2020

УДК 519.21(075.8)
ББК 22.171я7
Т33

Составители:
*М. А. Гундина, Н. А. Кондратьева, И. В. Прусова,
Н. К. Прихач, Л. В. Бокуть*

Рецензенты:
декан механико-математического факультета Белорусского
государственного университета *Д. Г. Медведев*;
доцент кафедры механики и конструирования Белорусского
государственного технологического университета,
канд. физ.-мат. наук, доцент *Я. Г. Грода*

Т33 **Теория** вероятностей и математическая статистика: учебно-методическое пособие для студентов специальностей 1-38 01 01 «Механические и электромеханические приборы и аппараты», 1-38 01 02 «Оптико-электронные и лазерные приборы и системы», 1-38 02 01 «Информационно-измерительная техника» / сост. М. А. Гундина [и др.]; под ред. М. А. Князева. – Минск: БНТУ, 2020. – Ч. 1. – 54 с.
ISBN 978-985-583-372-8.

Издание содержит материалы для организации системы непрерывного освоения знаний по дисциплине «Математика» по разделу «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов технических специальностей. Задания для самостоятельного обучения разработаны с учетом рекомендации кафедры «Инженерная математика» приборостроительного факультета Белорусского национального технического университета и согласуются с требованиями к уровню подготовки, определенному базовым стандартом по математике.

УДК 519.21(075.8)
ББК 22.171я7

ISBN 978-985-583-372-8 (Ч. 1)
ISBN 978-985-583-373-5

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие предназначено для проведения лекционных и практических занятий со студентами технических специальностей приборостроительного, спортивно-технического и механико-технологического факультетов Белорусского национального технического университета по дисциплине «Математика»; включает основные теоретические вопросы, которые необходимо усвоить студентам из раздела «Теория вероятностей» в течение первого года обучения для дальнейшего успешного усвоения материала по другим дисциплинам и написания курсовых проектов с привлечением компьютерных возможностей и математических расчетов, использующих вероятностные модели. Темы, которые охватывает данное пособие, соответствуют учебной программе.

Авторы ставили цель повысить уровень усвоения учебного материала, самостоятельности студента при подготовке к экзаменам, обеспечить реализацию основных принципов дидактики: доступности и системности учебного процесса. Тщательный подбор задач позволяет осуществить первичное закрепление материала, а также систематизировать знания обучающихся и сформировать навыки решения задач по исследованию вероятностей событий, навыки анализа случайных величин, нахождения их числовых характеристик.

1. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теория вероятностей изучает закономерности, возникающие в случайных испытаниях, позволяет раскрыть объективные закономерности, присущие исследуемым явлениям. Считается, что началом развития теории вероятностей послужила переписка ученых Паскаля и Ферма (1654 г.). Однако и до этого многих исследователей интересовали прикладные вопросы, относящиеся к азартным играм, теоретико-вероятностные задачи (Кардано, Галилей). Актуальными во все времена являлись задачи демографического характера, вопросы страхования (Граунт, Ван Худде, Ван де Витт).

Факты устойчивости частот случайных событий в задачах обработки демографических данных были известны еще в Древнем Китае и Древнем Риме.

С течением времени объект изучения теории вероятностей менялся. Вначале основной интерес вызывало исследование вероятностей случайных событий. После широкого распространения дифференциального и интегрального исчисления большой интерес вызывало исследование случайных величин и их числовых характеристик.

Теория вероятностей тесно связана с прикладными исследованиями различной природы. Она применима как в задачах экономики и производства, так и задачах лингвистики и истории. Сегодня без применения понятия доверительного интервала, корреляции, уровня значимости, нормального закона распределения случайной величины, проверки гипотез и значимости коэффициентов модели сложно представить обширное исследование в педагогике, физике, механике и других науках.

В основе квантовой механики лежат принципы теории вероятностей. В случае радиоактивного распада нет закона природы, позволяющего определить время деления ядра. В этой ситуации существуют только законы, согласно которым можно говорить о вероятности распада ядра за определенный промежуток времени.

Во многих областях человеческой деятельности существуют ситуации, когда определенные явления могут повторяться большое число раз в одинаковых условиях: подбрасывание монеты, кости, выброс из колоды карт, выбор изделия из партии и т. д.

Заметим, что представляется возможным предсказать исход последующего эксперимента по результатам предыдущих, как бы ни было велико число проведенных испытаний. Относительная частота определенных исходов по мере роста числа испытаний стабилизируется, приближаясь к определенному числу.

Рассмотрим эксперимент по подбрасыванию монеты. Его результат представлен в табл. 1.

Таблица 1

Результаты эксперимента по подбрасыванию монеты

n \ N	10^2	10^4	10^6
1	41	4985	499 558
2	48	5004	499 995
3	44	5085	500 144

Примечание. N – номер испытания, n – количество подбрасываний, в таблице указывается количество выпадений герба.

Наблюдалась стабилизация частот:

$$p = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}.$$

Обнаруженные закономерности, распространенные на испытания с произвольным числом исходов, позволяют построить простейшую математическую модель случайного эксперимента.

Под *опытом*, или *экспериментом* (испытанием) понимают осуществление конкретного комплекса условий. Опыт называется *случайным*, если результат нельзя точно предсказать до его осуществления. Например, если опыт заключается в подбрасывании кубика, то результат его – определенное количество очков – нельзя предсказать заранее. Точно также при стрельбе по мишени нельзя заранее предсказать, будет ли точное попадание в цель или промах.

В этом случае построение математической модели эксперимента начинается с описания множества Ω всевозможных исходов, которые могут произойти в результате каждого испытания.

Пространство Ω называют *пространством элементарных исходов*, элемент этого пространства $\omega \in \Omega$ называется *элементарным исходом* (элементарным событием). Заметим, что при таком определении пространства элементарных исходов любое подмножество $A \subset \Omega$ будет являться событием.

Событие называется *достоверным*, если оно обязательно произойдет в условиях данного опыта. Например, выбор одной детали, удовлетворяющей стандарту, из партии n деталей, удовлетворяющих стандарту, есть событие достоверное. Поскольку достоверное событие является совокупностью всех элементарных событий из пространства Ω, то оно совпадает с ним и также обозначается – Ω.

Невозможным называется такое событие, которое в условиях данного опыта не может произойти. Невозможное событие в пространстве не имеет точек в Ω и обозначается $\varnothing$. Например, невозможно поразить одну и ту же мишень три раза при двух выстрелах.

Если ограничиться рассмотрением пространства элементарных исходов, состоящих из не более чем счетного числа элементов, то построение вероятностной модели состоит в задании распределения вероятностей на пространстве Ω, в соответствии с которым каждому элементарному исходу $\omega \in \Omega$ ставится в соответствие некоторое число $P(\omega)$, которое называется *вероятностью* элементарного события ω. Данное число удовлетворяет условиям:

$$0 \le P(\omega) \le 1,$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1.$$

Различают *элементарные* и *составные* события. События, которые невозможно представить через разложение на простые события, называются *элементарными*. Все остальные события называются *составными*.

Например, пусть событие состоит в том, что сумма очков, выпавших при подбрасывании двух игральных костей, равна шести. Это событие состоит из пяти возможных элементарных событий – выпадение на гранях костей следующих пар цифр: (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1) соответственно.

Вероятность любого составного события A может быть найдена следующим образом:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega).$$

Число $P(A)$ интерпретируется как относительная частота появления события A в статистическом эксперименте.

События называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого в условиях одного и того же опыта.

Два или несколько событий называются *равновозможными*, если нет оснований утверждать, что одно из них имеет большую вероятность появиться по сравнению с другими событиями. Например, извлечение туза, валета, короля или дамы из колоды карт являются равновозможными событиями.

Событие $\overline{A}$, которое обязательно произойдет, если не произойдет событие A, называется *противоположным* событию A. Например, выигрыш и проигрыш в лотерее – это противоположные события.

В задаче дана вероятность $P(A)$, чтобы найти вероятность противоположного события, можно воспользоваться следующей формулой:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}),$$

где $P(\overline{A})$ – вероятность противоположного события.

Говорят, что несколько событий в условиях данного опыта образуют *полную группу событий*, если в результате опыта обязательно произойдет хотя бы одно из них. Например, события «извлечение белого шара», «извлечение красного шара», «извлечение голубого шара» образуют полную группу событий в опыте извлечения одного шара из урны, в которой находятся белые, красные и голубые шары.

Примеры

1. Подбрасывается монета и фиксируется сторона, которая обращена к наблюдателю после падения. Определить пространство элементарных исходов.

Решение. Пусть событие Г = {выпал герб}, Р = {выпала решка}. Тогда пространство элементарных исходов примет вид: $\Omega = \{Г, Р\}$.

2. Подбрасывается игральный кубик и определяется число выпавших очков. Описать пространство элементарных исходов. Найти событие, состоящее в том, что выпало четное число очков.

Решение. Пространство элементарных исходов принимает вид: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, в состав события входят все элементарные исходы, благоприятствующие наступлению события: $A = \{2, 4, 6\}$.

3. Подбрасываются два игральных кубика. Описать событие, состоящее в том, что сумма очков, выпавших на этих двух кубиках, больше 10.

Решение. Пространство элементарных исходов: $\Omega = \{(1,1), (1,2), ..., (6,6)\}$. Событие примет вид: $A = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, что выбранный студент окажется членом профсоюза; событие B – в том, что он занимается спортом, а событие C – в том, что он не имеет хронических заболеваний. Описать событие ABC.

2. Монета подбрасывается три раза подряд. Построить пространство элементарных исходов. Описать событие, состоящее в том, что выпало не менее двух гербов.

3. Пусть A, B и C — некоторые события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из A, B и C:

а) произошло только A;

б) произошли A и B, а C нет;

в) все три события произошли.

4. Подброшены три монеты. Найти вероятности событий:

а) A = {выпало ровно две решки};

б) B = {выпало не больше двух решек}.

5. В 17-й корпус БНТУ на первый этаж вошли 5 студентов. Известно, что каждый из них с равной вероятностью может выйти на любом из этажей (со второго по девятый). Найти вероятность того, что:

а) пятеро студентов выйдут на пятом этаже;

б) пятеро студентов выйдут одновременно.

6. Подбрасывают четыре игральных кубика. Найти вероятность того, что на них выпадет одинаковое число очков.

Ответы

1	2	3	4	5	6
{студент – член профсоюза, занимается спортом, не имеет хронических заболеваний}	{{ГГР}, {РГГ}, {ГРГ}, {ГГГ}}	$A\overline{B}\overline{C}$, $AB\overline{C}$, ABC	0,375, 0,875	1/32768, 1/4096	1/216

2. ПОНЯТИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Пусть Ω – пространство элементарных исходов. Подмножество Ω называется *событием* $A \subset \Omega$, если статистический эксперимент закончился каким либо элементарным исходом $\omega \in A$.

Пусть A и B обозначают события выпадения при подбрасывании игрального кубика соответственно нечетного числа очков и числа очков, кратного трем.

Тогда $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{3, 6\}$, значит, $A \cup B = \{1, 3, 5, 6\}$.

Булевой алгеброй называют такой класс $\tilde{A}$ подмножеств Ω, для которого выполняются следующие условия:

1) $\Omega \in \tilde{A}$;

2) $A \in \tilde{A} \Rightarrow \overline{A} \in \tilde{A}$;

3) $A, B \in \tilde{A} \Rightarrow A \cup B \in \tilde{A}$.

Вероятностью P на булевой алгебре $\tilde{A}$ подмножеств Ω называется отображение $\tilde{A}$ в отрезок [0; 1], обладающее следующими свойствами:

1) $P(\Omega) = 1$;

2) если события $A_1, A_2, ..., A_n$ несовместны, то $P(\sum_1^n A_i) = \sum_1^n P(A_i)$;

3) если $\{A_n, n \geq 1\}$ – монотонно убывающая последовательность элементов из $\tilde{A}$ и $\bigcap_1^\infty A_n = \varnothing$, то $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} P(A_n) = 0$. Это может быть записано, как $A_n \downarrow \varnothing$.

Замечание. Вероятность P на $\tilde{A}$ обладает свойствами:

1) $P(\varnothing) = 0;$

2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A);$

3) если $A \subset B,$ то $P(A) \leq P(B),$ $P(B / A) = P(B) - P(A);$

4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B);$

5) $P(\bigcup\limits_{1}^{n} A_i) \leq \sum\limits_{1}^{n} P(A_i);$

6) если $A_n \downarrow A$ или $A_n \uparrow A,$ то $\operatorname*{Lim}\limits_{n \to \infty} P(A_n) = P(A);$

7) если $\{A_n, n \geq 1\}$ – бесконечная последовательность несовместных событий, то $P(\sum\limits_{1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{1}^{\infty} P(A_i);$

8) $P(\bigcup\limits_{1}^{\infty} A_i) \leq \sum\limits_{1}^{\infty} P(A_i).$

Пара (Ω, $\tilde{A}$), состоящая из пространства элементарных исходов Ω и булевой σ-алгебры $\tilde{A}$ его подмножеств, называется *измеримым пространством*. Только элементы $\tilde{A}$ являются событиями на этом пространстве.

Тройка (Ω, $\tilde{A}$, P), где P – вероятность на σ-алгебре $\tilde{A},$ называется *вероятностным пространством*.

3. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Комбинаторика – раздел математики, изучающий комбинации конечных множеств элементов различной природы.

Пусть все элементы рассматриваемых множеств различны. Будем изучать комбинации этих элементов, различающихся количеством и (или) порядком.

Рассмотрим конечное число n объектов произвольной природы, которые назовем *элементами*. Из них по некоторому правилу можно образовать группы. Подсчетом числа таких возможных групп и занимается комбинаторика.

Вначале будем исследовать такие множества, в которых каждый элемент входит не более одного раза, этот случай называется соединения *без повторений*.

Перестановкой из n элементов называется конечное множество элементов, в котором установлен порядок. Так, например, из букв a, b, c можно составить следующие перестановки:

$$(a, b, c), (b, a, c), (a, c, b), (c, a, b), (c, b, a), (b, c, a).$$

Число возможных перестановок из n элементов равно:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!.$$

Множество, для которого указан порядок расположения элементов, называется *упорядоченным*. Упорядоченные конечные подмножества некоторого множества называются *размещениями*.

Число всех возможных *размещений*, содержащих по m элементов из множества, содержащего n элементов $(m \le n)$, определяется по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Всякое конечное подмножество, состоящее из m элементов данного множества n элементов, называется *сочетанием m элементов из n*, если каждое подмножество из m элементов отличается друг от друга хотя бы одним элементом.

Число всех возможных сочетаний обозначается:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}.$$

Примеры

1. В группе 10 юношей и 7 девушек. Случайным образом отбирается команда, состоящая из 5 студентов. Найти вероятность того, что среди них окажется только 4 девушки.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что из случайно отобранных студентов окажутся 4 девушки. Общее число исходов будет равно количеству способов, которыми из 17 студентов можно отобрать по 5 студентов $n = C_{17}^5$. Благоприятствовать событию A будут те исходы, в которых будет 4 девушки и 1 юноша $m = C_7^4 \cdot C_{10}^1$. Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_7^4 \cdot C_{10}^1}{C_{17}^5} = \frac{175}{3094} = 0,057.$$

2. Сколько существует способов для выбора команды участников субботника, если известно, что в команде должно быть 5 человек, а в студенческой группе 25 человек?

Решение. Поскольку порядок следования элементов в подгруппе не имеет значения, значит, речь идет о количестве сочетаний:

$$C_{25}^5 = \frac{25!}{20! \cdot 5!} = \frac{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 53130.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. В соревнованиях участвует 10 шахматистов из города Минска. Сколько существует вариантов распределения мест между ними?
2. Сколько вариантов групп по 6 человек можно составить из 12 человек?
3. Сколько существует способов расставить 5 поездов на 8 запасных путях, если на один путь можно поставить только один поезд?
4. Сколько способов существует для распределения первой, второй и третьей премии на конкурсе, в котором принимает участие 20 человек?
5. Саша на день рождение позвала 5 подружек. Сколько существует способов рассадить всех девочек за праздничный стол?

Ответы

1	**2**	**3**	**4**	**5**
3628800	924	6720	6840	720

В теории вероятностей выделяют класс задач, которые интерпретируются в рамках «урновой схемы»:

Пусть в эксперименте рассматривается N шаров, среди которых M – количество черных, $N–M$ – количество белых шаров. Из урны отбирается n шаров. Какова вероятность, что выборка содержит только k черных шаров?

Нахождение вероятности в рамках данной схемы осуществляется по формуле

$$P(A)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Примеры

1. Автомат с 30 шариками, содержит красные и зеленые шарики в пропорции 2 : 1. В случае победы автомат выдает случайным образом два шарика. Какова вероятность, что это окажутся зеленые?

Решение. Поскольку в эксперименте есть два ярко выделенных признака, по которым объект можно отнести либо к первому типу (красный шарик), либо ко второму (зеленый шарик), речь идет о гипергеометрическом распределении. $M = 1k$ (количество зеленых), $N–M = 2k$ (количество красных). Тогда общее количество $N = 30 = 3k$, выбирают $n = 2$ шарика, $k = 2$ (среди тех, которые выбрали, оба оказались зелеными).

По формуле гипергеометрического распределения найдем вероятность соответствующего события

$$P(A)=\frac{C_{10}^2\cdot C_{20}^0}{C_{30}^2}=\frac{\frac{10!}{2!\cdot 8!}\cdot\frac{20!}{0!\cdot 20!}}{\frac{30!}{2!\cdot 28!}}=\frac{45\cdot 1}{435}=0{,}103.$$

2. На складе обоев 10 трубок первой партии и 7 трубок второй. Продавец случайным образом выбирает 3 трубки, какова вероятность, что все окажутся одной партии?

Решение. По вопросу задачи можно сделать вывод, что исходами, благоприятствующими наступлению события A = {все три трубки окажутся одной партии}, являются следующие: {три трубки первой партии}, {три трубки второй партии}. Тогда вероятность может быть найдена по следующей формуле:

$$P(A)=\frac{C_{10}^3\cdot C_7^0}{C_{17}^3}+\frac{C_{10}^0\cdot C_7^3}{C_{17}^3}=\frac{\frac{10!}{3!\cdot 7!}\cdot\frac{7!}{0!\cdot 7!}}{\frac{17!}{3!\cdot 14!}}+\frac{\frac{10!}{0!\cdot 10!}\cdot\frac{7!}{3!\cdot 4!}}{\frac{17!}{3!\cdot 14!}}=\frac{12+35}{680}=0,228.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Из колоды в 36 карт достают три карты. Какова вероятность, что среди них две дамы?
2. В ящике 10 красных, 4 синих и 2 зеленых пуговицы. Какова вероятность, что среди трех выбранных пуговиц будет одна синяя, одна зеленая и одна красная?
3. Выигрыш в лотерее «Спортлото 6 из 49». В лотерее рассматриваются 49 видов спорта, участник называет 6. Выигрыш определяется тем, сколько наименований он угадал из 6 других, которые были заранее выделены комиссией. Какова вероятность того, что участник угадает все 6 наименований.
4. Девочка Даша в класс принесла мешок конфет, в котором 10 конфет «Суфле», 15 «Мишки на севере». Какова вероятность, что 3 случайно выбранные конфеты окажутся с названием «Суфле»?

Ответы

1	2	3	4
0,0269	0,0086	0,00000007	0,052

4. ПРИМЕРЫ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Рассмотрим в таблице примеры вероятностных пространств.

Название	Содержание	Формула	Пример
Классическое вероятностное пространство	Число исходов конечно, они равновозможны $\Omega=\{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$, $\tilde{A}$ – множество всех подмножеств Ω, $P(\omega_i)=\frac{1}{n}$	$P(A)=\frac{m}{n}$, n – число элементарных исходов; m – число элементарных исходов, принадлежащих A	Однократное подбрасывание монеты. Нахождение вероятности выпадения герба

Конечное вероятностное пространство	Конечное число исходов, исходы не равновозможны $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$, $\tilde{A}$ – множество всех подмножеств Ω, $P(\omega_i) = p_i$, $p_i \geq 0$, $\sum p_i = 1$	$P(A) = \sum\limits_{i:\omega_i \in A} p_i$	Подбрасывается кубик. Вероятность выпадения числа, которое делится на 5
Дискретное вероятностное пространство	Число элементарных исходов не более чем счетно: $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n, ...\}$, $\tilde{A}$ – множество всех подмножеств Ω, $P(\omega_i) = p_i$, $p_i \geq 0$, $\sum p_i = 1$	$P(A) = \sum\limits_{i:\omega_i \in A} p_i$	Двое по очереди бросают одну монету, выигрывает тот, у кого раньше выпадет герб. Какова вероятность, что первый выиграет?
Геометрическое вероятностное пространство	$\Omega \subset R^n$, $\tilde{A}$ – некоторая σ-алгебра подмножеств	$P(A) = \dfrac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}$	Два человека договорились встретиться в течение определенного часа. Пришедший первым ждет другого только 10 минут, после чего уходит. Какова вероятность их встречи?

Задачи для самостоятельного решения

1. Студент пришел на зачет, зная из 30 вопросов только 24. Если он не знает ответа на поставленный вопрос, преподаватель задает ему еще один, дополнительный. Зачет ставится, если студент правильно отвечает хотя бы на один вопрос. Какова вероятность получения зачета?

2. Два лица A и B условились встретиться в определенном месте между двумя и тремя часами дня. Человек, пришедший первым, ждет другого в течение 15 минут, после чего уходит. Чему равна

вероятность их встречи, если каждый может прийти в любое время в течение указанного часа?

3. Найти $P(x+y \le 2)$, где x, y – любые числа [0; 4].

4. Найти $P(y \le \frac{1}{x})$, где x, y – любые числа [0,5; 2].

5. Четырехтомное сочинение расположено на полке в произвольном порядке. Какова вероятность, что номера томов идут в порядке возрастания?

Ответы

1	2	3	4	5
0,96	0,4375	0,125	(ln2 – ln0,5) / 2,25	1/24

5. РАЗБИЕНИЕ НА ГРУППЫ: ПЕРЕСТАНОВКИ, СОЧЕТАНИЯ И РАЗМЕЩЕНИЯ С ПОВТОРЕНИЯМИ

Пусть $k_1, k_2, ..., k_n$ – целые неотрицательные числа, причем $k_1 + k_2 + ... + k_n = n.$ Число способов, которыми можно представить множество Ω из n элементов в виде суммы m множеств $B_1, B_2, ..., B_m$, число элементов которых составляет соответственно $k_1, k_2, ..., k_m$, равно:

$$P_n(k_1, k_2, ..., k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_m!}.$$

Сочетаниями из m элементов по n элементов *с повторениями* называются группы, содержащие n элементов, причем каждый элемент принадлежит одному из m типов.

Число различных сочетаний из m элементов по n с повторениями:

$$f_m^n = C_{m+n-1}^n.$$

Отображение множества k первых натуральных чисел 1, 2, 3, …, k в данное множество $\{a_1, ..., a_n\}$ называется *размещением с повторением*, составленным из данных n элементов (количество типов) по k.

Примеры

1. Найдем число различных слов, которые можно получить, переставляя буквы в слове «Математика».

Решение: $P_n(3,2,2,1,1,1) = \dfrac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = 151\,200.$

2. Найти число способов, которыми можно выбрать три буквы из ВВВПППГГГЦЦЦ.

Решение: $f_4^3 = C_{3+4-1}^3 = 20.$

Задачи для самостоятельного решения

1. В урне 6 белых шаров, 11 черных. Одновременно наугад вынимают два шара. Найти вероятность, что оба: а) белые, б) разных цветов.

2. В команде работают 12 человек: 5 женщин, 7 мужчин. Сколько существует способов сформировать бригаду из 7 человек, чтобы в ней было 3 женщины?

3. В шахматном турнире участвует семь команд. Сколько вариантов распределения мест между ними возможно?

4. На первом курсе изучается 12 предметов. Сколько существует способов составления расписания на один день, если в учебный день разрешается проводить занятия только по четырем разным предметам?

5. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 без повторений составлены всевозможные пятизначные числа. Сколько среди этих чисел таких, которые начинаются с цифры 3?

6. Сколько способов существует выбрать по 3 рядовых из группы в 20 солдат?

7. Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что наудачу вытянутый билет, содержащий 2 вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов?

8. Один из мальчиков родился в марте, а другой в апреле. Найти вероятность того, что оба они родились в первой неделе месяца (учитывается, что в каждом месяце 5 неполных недель).

9. Из колоды в 52 карты наугад вынимают три. Найти вероятность, что среди них окажется две дамы.

10. Какова вероятность того, что случайно встреченный знакомый на улице окажется рожденным в первой неделе августа, учитывая, что в этом месяце пять неполных недель?

Ответы

1	2	3	4	5
0,1103; 0,4853	0,4419	5040	11880	24
6	**7**	**8**	**9**	**10**
1140	0,692	1 / 25	0,678	0,17

6. НЕЗАВИСИМОСТЬ СОБЫТИЙ. УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Зная распределение вероятностей, можно оптимизировать свое поведение при игре, производя ставки на те события из $\tilde{A}$, которые обладают наибольшей вероятностью.

Дальнейшая оптимизация такой игры обычно осуществляется за счет дополнительной информации, которой может располагать игрок, и учет ее осуществляется в терминах так называемой условной вероятности.

Рассмотрим два случайных события A и B. Пусть известно, что событие B наступило, но неизвестно, какое конкретно из элементарных событий ω, составляющих событие B, наступило. Что можно сказать в этом случае о вероятности наступления события A?

Пусть вероятность события B – положительная величина. *Условной вероятностью* события A при условии, что произошло событие B, называют число

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Теорема умножения. Пусть $P(A) > 0, P(B) > 0.$ Тогда

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B).$$

Теорема. $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}) > 0,$ тогда

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) =$$
$$= P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) ... P(A_n \mid A_1 \cap ... \cap A_{n-1}).$$

Задача. Студент знает 20 вопросов из 30. Экзаменатор задает три вопроса. Какова вероятность того, что студент ответит на все?

Два события называются *независимыми,* если вероятность появления одного из них не влияет на вероятность наступления другого. Говорят, что событие *A* *не зависит* от события *B*, если $P(A \mid B) = P(A)$, так как его вероятность не зависит от того, произошло ли событие *B* или нет. Независимость двух событий – свойство симметричное.

События *A* и *B* называются независимыми, если $P(A \cap B) = = P(A) \cdot P(B)$.

Случайные события $A_1, A_2, ..., A_n$ называются *попарно независимыми*, если для любых $i \neq j,\ i, j = 1, 2, ..., n$ $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$.

Случайные события $A_1, A_2, ..., A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если для любого подмножества индексов:

$\{i_1, i_2, ..., i_k\} \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ выполняется: $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$.

Пример Бернштейна. На плоскость бросают тетраэдр, три грани которого окрашены соответственно в красный, зеленый и синий цвета, а на четвертой есть все цвета. Рассмотреть вероятности событий: «выпала грань, которая содержит красный цвет», «выпала грань, которая содержит синий цвет», «выпала грань, которая содержит зеленый цвет». Будут ли эти события попарно независимыми и независимыми в совокупности?

Примеры

1. В тире девушке и юноше выдали по одному патрону для попадания в цель и получения плюшевого медведя. Вероятность того, что в цель попадет девушка, равна 0,01. Вероятность того, что попадет юноша, равна 0,95. Юноша стреляет первым и не попадает

в цель. Какова вероятность выиграть плюшевого медведя, если второй будет стрелять девушка?

Решение. Поскольку вначале юноша промахнулся, то необходимо учитывать вероятность этого промаха. Вероятность выигрыша плюшевого медведя

$$P(A) = (1 - 0{,}95) \cdot 0{,}01 = 0{,}0005.$$

2. В вазе стоит пять мимоз и четыре гвоздики. Случайным образом выбирается один цветок. После этого выбирается еще один. Какова вероятность того, что второй цветок – мимоза?

Решение. Первым выбранным цветком могла оказаться мимоза, после в вазе останется только 4 мимозы. Первой могла оказаться гвоздика, тогда останется 5 мимоз. Вероятность того, что второй выбранный цветок мимоза, вычисляется следующим образом:

$$P(A) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Подбрасывается кубик до первого появления шестерки. Какова вероятность, что для этого понадобится три попытки?

2. Вы останавливаете на улице трех человек и спрашиваете наугад у них, в какой день недели они родились. Какова вероятность того, что хотя бы двое родились в четверг?

3. Из букв резной азбуки составлено слово ВЕРОЯТНОСТЬ. Какова вероятность того, что перемешав буквы и укладывая в ряд по одной наудачу, будет получено слово ВЕРОЯТНОСТЬ?

4. Узел автомашины состоит из четырех деталей. Вероятности выхода этих деталей из строя соответственно равны: 0,04; 0,07; 0,05; 0,02. Узел выходит из строя, если выходит из строя хотя бы одна деталь. Найти вероятность того, что узел не выйдет из строя, если детали выходят из строя независимо друг от друга.

Ответы

1	**3**	**4**	**5**
0,116	0,055	$1{,}002 \cdot 10^{-7}$	0,83

7. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛЫ БАЙЕСА

Конечное или счетное число случайных событий $A_1, A_2, ..., A_n$ образует *полную группу событий* (разбиение) если:

1) $P(A_i) > 0,\ i = 1, 2...;$

2) $A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j;$

3) $\sum\limits_k A_k = \Omega.$

Формула полной вероятности. Пусть случайные события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу событий. Тогда для произвольного события B, рассматриваемого на том же вероятностном пространстве, выполняется следующее:

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \mid A_k) \cdot P(A_k).$$

Пусть до опыта об исследуемом случайном явлении имеются гипотезы $A_1, A_2, ..., A_n.$ После опыта известна информация о результатах этого явления, но не полная. Результаты наблюдений показывают, не какой конкретно элементарный исход $\omega \in \Omega$ произошел, а что наступило некоторое событие B.

Считая, что до опыта были известны (*априорные*) вероятности $P(A_1), P(A_2), ..., P(A_n)$ и условные вероятности $P(B \mid A_1), P(B \mid A_2), ...,$ $P(B \mid A_n),$ необходимо определить *апостериорные* вероятности $P(A_1 \mid B), P(A_2 \mid B), ..., P(A_n \mid B).$ Решение поставленной задачи дают формулы Байеса.

Формулы Байеса. Пусть случайные события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу событий. Пусть для произвольного события B: $P(B) > 0.$

Тогда для любых значений $k = 1, 2, ..., n$ имеет место формула

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B \mid A_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k) \cdot P(B \mid A_k)}.$$

Примеры

1. Студент выучил 20 билетов из 25 и идет отвечать вторым. Какова вероятность, что он вытянет «удачный билет»?

Решение. Рассмотрим следующие события:

$A_1 = \{\textit{первый студент выбрал удачный билет}\}, \quad A_2 = \overline{A}_1;$

$B = \{\textit{второй студент выбрал удачный билет}\}.$

Тогда $P(B) = P(B\,|\,A_1)P(A_1) + P(B\,|\,A_2)P(A_2) = 4/5.$

2. Соотношение грузовых автомобилей, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе, равно $2:3$. Вероятность того, что будет заправляться грузовая автомашина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,3. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовой автомобиль.

Решение. Пусть событие A – к бензоколонке подъехал для заправки автомобиль; H_1 – подъехала грузовая машина; H_2 – подъехала легковая. Тогда

$$P(H_1\,|\,A) = \frac{P(H_1)P(A\,|\,H_1)}{P(H_1)P(A\,|\,H_1) + P(H_2)P(A\,|\,H_2)};$$

$$P(H_1) = \frac{2}{5}, \quad P(A\,|\,H_1) = 0{,}1, \quad P(H_2) = \frac{3}{5}, \quad P(A\,|\,H_2) = 0{,}3;$$

$$P(H_1\,|\,A) = \frac{\frac{2}{5}\cdot 0{,}1}{\frac{2}{5}\cdot 0{,}1 + \frac{3}{5}\cdot 0{,}3} = \frac{0{,}04}{0{,}04 + 0{,}18} = \frac{0{,}04}{0{,}22} = 0{,}182.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Изделия некоторого производства удовлетворяют стандарту с вероятностью 0,96. Предлагается упрощенная система испытаний, дающая положительный результат с вероятностью 0,98 для изделий, удовлетворяющих стандарту, а для изделий, которые не удовлетворяют, с вероятностью 0,05. Какова вероятность того, что система даст положительный результат? Какова вероятность, что изделие

удовлетворяет стандарту, если известно, что система дала положительный результат?

2. Предположим, что 5 мужчин из 100 и 25 женщин из 10 000 являются дальтониками. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что это мужчина?

3. Лето может оказаться засушливым в 20 % случаев, влажным в 30 % и нормальным в остальных случаях. Вероятности вызревания урожая составляют 0,7; 0,6; 0,9 соответственно. А) Найти вероятность вызревания урожая в случайно выбранный год; б) Найти вероятность того, что лето было засушливым, если известно, что урожай вызрел.

4. В телевизионном ателье имеется четыре кинескопа. Вероятности того, что кинескоп выдержит гарантийный срок службы, соответственно равны 0,8; 0,85; 0,9; 0,95. Найти вероятность того, что взятый кинескоп выдержит гарантийный срок.

5. На базе посажены семена укропа и фасоли в одинаковых пропорциях. Всхожесть укропа равна 0,14, фасоли – 0,07. Растение проросло, какова вероятность, что взошел укроп?

Ответы

1	2	3	4	5
0,942; 0,496	0,952	0,1818	0,875	0,667

8. СХЕМА БЕРНУЛЛИ

Под *испытанием* следует понимать эксперимент со случайным исходом.

Пусть производится n независимых испытаний. Известно, что в каждом возможны два исхода: либо происходит событие A (успех), либо событие A не происходит (неудача). Данная схема называется *схемой Бернулли*. При том предполагается, что вероятность p успеха и $q = 1 - p$ неудачи не изменяются при переходе от испытания к испытанию.

$\Omega = \{(\omega_1, ..., \omega_n), \omega_i = 0,1\}$, $\tilde{A}$ – множество всех подмножеств Ω.

$$P_n(m) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Задача. Известно, что левши составляют 1 % от жителей Земли. Найти вероятность того, что среди 200 человек найдется хотя бы 3 левши.

Наивероятнейшее число появления события A в n независимых испытаниях m – число испытаний, при котором достигается максимальная вероятность в n независимых испытаниях:

$$np - q \le m \le np + p.$$

Примеры

1. Прибор состоит из четырех узлов. Вероятность безотказной работы в течение смены для каждого узла равна 0,85. Узлы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что в течение смены откажут ровно два узла.

Решение. Из условия задачи $n = 4$; $m = 2$; $p = 0{,}15$; $q = 0{,}85$. Используя формулу Бернулли, получим:

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^2 = 0{,}098.$$

2. Определить вероятность того, что в семье, имеющей пять детей, будет три девочки и два мальчика. Вероятности рождения мальчика и девочки предполагаются одинаковыми.

Решение. Из условия задачи $n = 5$, $m = 3$, $p = 0{,}5$, $q = 0{,}5$. Используя формулу Бернулли, получим:

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}3125.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть вероятность попадания в цель равна один из пяти. Производится 10 независимых выстрелов. Какова вероятность по меньшей мере двух попаданий в цель?

2. В цехе шесть моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент включено четыре мотора.

3. Вероятность того, что болезнь перейдет в тяжелую форму, равна 0,6. Проводится наблюдение за тремя больными. Какова вероятность того, что у двух из них болезнь перейдет в тяжелую форму.

4. Имеется 20 блоков одинаковых деталей. Вероятность того, что в одном взятом наудачу блоке детали окажутся стандартными, равна 0,75. Найти наивероятнейшее число блоков, в которых все детали стандартные.

5. В результате многолетних наблюдений установлено, что вероятность выпадения дождя 1 июня в данном городе равна 0,143. Определить наивероятнейшее число дождливых дней 1 июня в данном городе за 40 лет.

Ответы

1	2	3	4	5
0,624	0,246	0,432	15	5

9. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ В СХЕМЕ БЕРНУЛЛИ

Схема независимых испытаний служит вероятностной моделью многих реальных явлений, поэтому представляет значительный интерес задача подсчета вероятности $P_n(m)$. При больших значениях m и n есть трудности в получении численного значения этих вероятностей.

Естественным образом возникает задача нахождения асимптотических форм, позволяющих приближенно вычислять вероятности $P_n(m)$ для достаточно больших n и малых p.

Локальная предельная теорема Пуассона. Если $p_n \to 0$, $n \to \infty$, так что $p_n \cdot n \to a$, то

$$P(\mu_n = m) = C_n^m \cdot p_n^m \cdot (1 - p_n)^{n-m} \to \frac{a^m}{m!} e^{-a}.$$

Интегральная предельная теорема Пуассона. В схеме Бернулли для любого натурального числа n, любого $p \in (0;1)$ и любого числового множества B справедливо неравенство:

$$\left| P(\mu_n \in B) - \sum_{m \in B} \frac{a^m}{m!} e^{-a} \right| \le \frac{a^2}{n}, \quad a = np.$$

Теперь рассмотрим асимптотическую формулу для вероятности не близкой к нулю.

Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа. Если в схеме Бернулли $\sigma = \sqrt{npq} \to \infty$, то для любого положительного числа c, равномерно по всем x таких, что выполняется условие:

$$x \in \{x \in R \,/\, |x| \le c,\ x = \frac{m - np}{\sigma},\ m \in N \cup \{0\}\};$$

справедливо соотношение:

$$P(\{\frac{\mu_n - np}{\sigma} = x\}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 + o(1)),$$

где $o(1)$ – бесконечно малая величина при условии $\sigma \to \infty$.

Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа. При выполнении условий предыдущей теоремы равномерно $-\infty \le a < b \le \infty$ выполнено предельное соотношение:

$$P(a \le \frac{\mu_n - np}{\sigma} \le b) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x.$$

Заметим, что при использовании интегральной формулы Муавра-Лапласа формула обеспечивает достаточную точность уже при условии $npq \ge 10$.

По полученным теоремам составим таблицу.

Название	Содержание	Пример
Формула Бернулли	$P_n(m) = C_n^k p^k q^{n-k}$	В каждом из 5 опытов событие A может появится с вероятностью p = 0,4. Найти вероятность того, что событие A появится 3 раза

Локальная теорема Муавра-Лапласа	$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$; $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$; $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$	Найти вероятность того, что в 243 испытаниях событие A наступит ровно 70 раз, если вероятность появления этого события p = 0,25 в каждом испытании
Интегральная теорема Муавра-Лапласа	$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$; $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$; $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$	Фабрика выпускает 70 % продукции I сорта. Чему равна вероятность того, что в партии из 1000 изделий число изделий I сорта будет в диапазоне [652, 760]

Примеры

1. В каждом из 5 опытов событие A может появится с вероятностью p = 0,4. Найти вероятность того, что событие A появится 3 раза.

Решение. Применим формулу Бернулли:

$$P(3) = C_5^3 \cdot 0,4^3 \cdot (1-0,4)^2 = 0,23.$$

2. Найти вероятность того, что в 243 испытаниях событие A наступит ровно 70 раз, если вероятность появления этого события p = 0,25 в каждом испытании.

Решение. Применим локальную теорему Муавра-Лапласа:

$$x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 243 \cdot \frac{1}{4}}{\sqrt{243 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}} = 1,37;$$

$$\varphi(1,37) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1,37^2}{2}} = 0,156;$$

$$P_{243}(70) = \frac{1}{\sqrt{243 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}} \cdot 0{,}156 = 0{,}231.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Цех выпускает 60 % шоколадной продукции. Чему равна вероятность того, что в партии из 1000 изделий число изделий, содержащих шоколад, не будет превышать 650 упаковок?

2. Найти вероятность того, что при 300 подбрасываниях игрального кубика шестерки выпадут ровно 29 раз.

3. Вероятность выпуска бракованного микроскопа равна 0,17. Найти вероятность того, что в партии из 1000 изделий 160 бракованных.

4. В сводках опубликовано, что утром 31 декабря вероятность осадков составляет 35 %. Собраны сведения за 150 лет. Какова вероятность того, что осадки 31 декабря наблюдались 50 раз?

5. По статистике врачи разводятся в 29 % случаев. Выбрано для исследования 1000 женатых врачей, какова вероятность того, что разведутся не более 300 исследуемых врачей?

Ответы

1	2	3	4	5
0,998	0,0003	0,0236	0,0623	0,757

10. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

В азартных играх интерес играющих вызывает не наступление случайного исхода, а связанный с ним выигрыш или проигрыш, то есть определенная числовая величина, которая соответствует исходу. Примером случайной величины может быть число очков, выпавших при подбрасывании кубика, число бракованных изделий среди общего числа изделий.

Случайная величина ξ есть число, которое ставится в соответствие каждому возможному исходу эксперимента, то есть ее можно рассматривать как функцию $X(\omega)$ на пространстве элементарных событий Ω.

Пусть $(\Omega, \tilde{A}, P)$ – произвольное вероятностное пространство. Случайной величиной называется функция $X: \Omega \to R$ такая, что для любого $C \in R$ выполняется следующее: $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le c\} \in \tilde{A}$.

Определим функцию распределения случайной величины, которая несет всю информацию, заложенную в случайной величине.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F_X(x): R \to [0, 1]$, такая, что для любого действительного x выполняется:

$$F_X(x) = P\{\omega \in \Omega: X(\omega) < x\}.$$

Любая функция распределения обладает следующими свойствами:

1) $x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \le F_X(x_2)$;

2) существуют пределы $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} F_X(x) = 1$;

3) функция непрерывна слева, то есть $F_X(x_0 - 0) = F_X(x_0)$;

4) $\forall x_0 : F_X(x_0 + 0) - F_X(x_0) = P(X = x_0)$;

5) $\forall X : P(a \le X < b) = F_X(b) - F_X(a)$.

11. КЛАССИФИКАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Дискретная случайная величина – это случайная величина, которая принимает не более чем счетное число значений.

Пусть ее значения $x_1, x_2, ..., x_k$ такие, что $P(X = x_k) = p_k > 0$, $k = 1, 2, ...$ Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n(\infty)} p_k = 1.$

Совокупность значений x_k и соответствующих вероятностей p_k называется *распределением дискретной случайной величины*.

Закон распределения такой величины может быть представлен в виде таблицы.

X	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2		p_n	

Примеры дискретных случайных величин

Название	Содержание	Пример
Случайная величина Бернулли	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline X & 0 & 1 \\ \hline P & P & 1-p \\ \hline\end{array}$ $0 < p < 1$	Результат эксперимента по подбрасыванию монеты
Биномиальная случайная величина	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline X & 0 & 1 & \dots & n \\ \hline P & P_n(0) & P_n(1) & & P_n(n) \\ \hline\end{array}$ $P_n(m) = C_n^k p^k q^{n-k}$	Число успехов в n испытаниях схемы Бернулли
Случайна величина Пуассона	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline X & 0 & 1 & \dots & n \\ \hline P & P_n(0) & P_n(1) & & P_n(n) \\ \hline\end{array}$ $P(X = k) = \dfrac{a^k}{k!} e^{-a};$ $a > 0,\ a = np,\ \ n \to \infty;$ $p \to 0$	Закон редких событий: число вызовов, поступивших на телефонную станцию; число распавшихся нестабильных частиц
Геометрическая случайная величина	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline X & 1 & \dots & n \\ \hline P & P_n(1) & & P_n(n) \\ \hline\end{array}$ $P(X = k) = p \cdot (1 - p)^{k-1},$ $0 < p < 1$	Производятся независимые испытания, причем в каждом есть только два варианта исхода. Тогда эта случайная величина соответствует числу испытаний до появления успешного исхода
Гипергеометрическая случайная величина	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline X & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline P & P_1 & P_2 & & P_n \\ \hline\end{array}$ $P(X = k) = \dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$	Число бракованных изделий
Равномерная случайная величина	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline X & 1 & 2 & \dots & N \\ \hline p & 1/n & 1/n & & 1/n \\ \hline\end{array}$	Число очков на кубике
Логарифмическая случайная величина	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline X & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline P & P_1 & P_2 & & P_n \\ \hline\end{array}$ $P(X = k) = -\dfrac{p^k}{k \cdot \ln(1 - p)},$ $0 < p < 1$	Распределение по размерам астероидов в Солнечной системе

Закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки $M_1(x_1, p_1)$, $M_2(x_2, p_2), \ldots,$ $M_n(x_n, p_n)$, где x_i – возможные значения X, p_i – соответствующие вероятности; и соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют многоугольником распределения (полигоном).

Примеры

1. Найти функцию распределения случайной величины, которая представлена таблицей:

X	0	1
P	0,5	0,5

Решение. Запишем функцию распределения в виде сложной функции:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0]; \\ 0,5 & x \in (0,1]; \\ 1 & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

2. Два шахматиста Вася и Коля делают по одному ходу. Вероятность удачного хода Васи равна 0,7, а Коли – 0,76. Найти ряд распределения суммарного числа удачных ходов шахматистами.

Решение

X	0	1	2
P	$0,3 \cdot 0,24$	$0,3 \cdot 0,76 + 0,7 \cdot 0,24$	$0,7 \cdot 0,76$

Задачи для самостоятельного решения

1. Орудие выпускает по цели три снаряда. Событие A – попадание снаряда в цель, $P(A)$ = 0,8. Найти для случайной величины X (количество попаданий) ряд распределения.

2. Найти функцию распределения для случайной величины X

X	–1	1
P	1/2	1/2

3. Вероятность сдачи экзамена первым студентом равна 0,6, а вторым – 0,9. Составить ряд распределения случайной величины X – числа студентов, успешно сдавших экзамен, если известно, что экзамен пересдавать нельзя.

4. Найти функцию распределения для случайной величины X.

X	–1	0	1
P	3/16	5/16	1/2

5. Два стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,5, а для второго 0,8. Найти и построить функцию распределения случайной величины X (число попаданий в мишень).

Ответы

<table>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td><table><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>P</td><td>0,008</td><td>0,096</td><td>0,384</td><td>0,512</td></tr></table></td><td>$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,-1]\\ 0,5 & x\in(-1,1]\\ 1 & x\in(1,\infty)\end{cases}$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>5</td></tr>
<tr><td><table><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>P</td><td>0,04</td><td>0,42</td><td>0,54</td></tr></table></td><td>$F_X(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0\\ 0,1;\ x\in(0,1]\\ 0,6;\ x\in(1,2]\\ 1,\ x>2\end{cases}$</td></tr>
</table>

12. КЛАССИФИКАЦИЯ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Если случайная величина X принимает любые значения из некоторых интервалов или отрезков числовой оси, то она называется непрерывной случайной величиной. Примерами такой величины являются дальность полета снаряда, время безотказной работ прибора.

Плотностью распределения вероятностей случайной величины X в точке x $p(x)$ называется предел:

$$p(x) = \operatorname*{Lim}_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Теорема. Для того чтобы случайная величина X была абсолютно непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы:

$$\forall x \in R : F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(t)\mathrm{d}t.$$

Распределение случайной величины ξ называется непрерывным, а сама случайная величина – абсолютно непрерывной случайной величиной, если

$$\forall B \in \tilde{B}(R) : P_X(B) = \int_B p_X(x)\mathrm{d}x,$$

где $\tilde{B}$ – минимальная σ-алгебра.

Свойства плотности распределения:

$$1)\ \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)\mathrm{d}x = 1,\quad 2)\ p_X(x) \geq 0,\quad 3)\ F'_X(x) = p_X(x),$$

$$4)\ P(a < X < b) = \int_a^b p_X(x)\mathrm{d}x.$$

Примеры абсолютно непрерывных случайных величин.

Название	Содержание	Пример
Нормальная случайная величина (Случайная величина Гаусса)	$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}$, $P(\alpha \le X \le \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma})$	Ошибка выборки, связь между признаками, скорость роста растений, колебания курса акций
Экспоненциальная случайная величина	$p_X(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, \ x \ge 0 \end{cases}, \quad \lambda > 0$	Распад атомов. Длительность работы оборудования
Равномерная случайная величина	$p_X(x) = \begin{cases} 0, \ x \notin [a, b] \\ \frac{1}{b-a}, \ x \in [a, b] \end{cases}$	Время ожидания пассажирского транспорта

Примеры

1. Дана функция распределения случайной величины. Найти ее плотность распределения.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - e^{-4x}, & x > 0. \end{cases}$$

Решение. Плотность распределения определим из его свойства $p(x) = F'(x)$.

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 4e^{-4x}, & x > 0. \end{cases}$$

13. НЕКОТОРЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Название и содержание	Пример
1. Биномиальный закон $$p_m = P\left(X = m\right) = C_n^m p^m \left(1 - p\right)^{n-m}$$ Число успехов с вероятностью p в схеме Бернулли проведения n независимых опытов	Наличие синей глины указывает на возможность алмазного месторождения $P(A) = 0{,}4$. Синяя глина обнаружена в трех районах. Построить ряд распределения количества алмазных месторождений
2. Распределение Пуассона $$p_m = P\left(X = m\right) = \frac{a^m e^{-a}}{m!}$$ Число успехов с вероятностью p в схеме Бернулли проведения $n >> 1$, независимых опытов	В ящике находится $n = 100$ деталей. Вероятность достать бракованное изделие $p = 0{,}01$. Мы вынимаем изделие, определяем, бракованное оно или нет, и кладем его обратно. Получилось, что из 100 изделий, которые мы перебрали, два оказались бракованными. Какова вероятность этого?
3. Геометрическое распределение $$p_m = P\left(X = m\right) = \left(1 - p\right)^{m-1} p$$ Число опытов в схеме Бернулли, проведенных до первого успеха, с вероятностью успеха p в единичном случае	1. Пусть игральная кость вбрасывается до выпадения первой шестерки. Найти вероятность того, что нам понадобится не больше трех подбрасываний. 2. Вероятность поражения цели равна 0,6. Производится стрельба по мишени до первого попадания. Определить вероятность того, что для поражения цели потребуется не более двух патронов
4. Гипергеометрическое распределение $$p_m = P\left(X = m\right) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$ В урне N шаров, M – белых, N–M – черных. Вынимается n шаров. Найти вероятность того, что среди извлеченных шаров ровно m белых	В группе из 21 студента 5 девочек. Наудачу из этой группы отбирается 2 студента. Составить закон распределения случайной величины X – число девушек из отобранных студентов

5. Равномерный закон распределения $$p(x)=\begin{cases}1/(b-a),\ x\in[a,b]\\0,\ x\notin[a,b]\end{cases}$$ Время ожидания пассажирского транспорта, курсирующего с определенным интервалом	Автобус ходит регулярно с интервалом 10 минут. Пассажир приходит на остановку в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше двух минут?
6. Показательный закон распределения $$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x},\ x\ge 0\\0,\ x<0\end{cases}$$ $$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x},\ x\ge 0\\0,\ x<0\end{cases}$$ Длительность работы прибора до первого отказа	Время работы радиолампы имеет показательное распределение. Найти вероятность того, что лампа проработает не менее 800 часов, если среднее время работы радиолампы 400 часов

Примеры

1. Автобусы некоторого маршрута ходят строго по расписанию. Интервал движения 5 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 минут.

Решение. Случайная величина X – время прихода пассажира на остановку, распределена равномерно на [0; 5]. Плотность распределения вероятностей имеет вид

$$p(x)=\begin{cases}0, \quad x\notin[0,5],\\1/5,\ x\in[0,5].\end{cases}$$

Пассажир будет ожидать автобус менее 3 минут, если он подойдет к остановке в интервале времени от 2 до 5 минут после отправления автобуса.

$$P(2\le x\le 5)=\int_2^5\frac{1}{5}\mathrm{d}x=\left.\frac{x}{5}\right|_2^5=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}.$$

2. Телефонная станция обслуживает 400 абонентов. Вероятность того, что в течение часа абонент позвонит на станцию, равна 0,01 и постоянна для всех абонентов. Найти вероятность того, что на станцию в течение часа позвонят не более двух абонентов.

Решение. Дискретная случайная величина распределена *по закону Пуассона*. Воспользуемся формулой Пуассона:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np.$$

По условию задачи $n = 400$, $p = 0{,}01$, $m \le 2$, $\lambda = 4$.

$$P_{400}(m \le 2) = P_{400}(0) + P_{400}(1) + P_{400}(2) = \frac{4^0}{0!}e^{-4} + \frac{4^1}{1!}e^{-4} + \frac{4^2}{2!}e^{-4} =$$

$$= e^{-4}(1 + 4 + 8) = \frac{13}{e^4} = \frac{13}{54{,}576} = 0{,}238.$$

14. ОСНОВНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

	Дискретная случайная величина	Абсолютно непрерывная случайна величина
Математическое ожидание	$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$	$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\mathrm{d}x$

Свойства математического ожидания:

1) математическое ожидание числа появлений события A в одном испытании равно вероятности p наступления этого испытания;

2) $M(C) = C$, $C = \mathrm{const}$;

3) $M(CX) = C\,M(X)$;

4) $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$;

5) $M(XY) = M(X)\,M(Y)$;

6) $M(X - M(X)) = 0$.

Заметим, что математическое ожидание случайной величины ξ можно трактовать как вероятностное среднее этой величины.

Для любой случайной величины X случайная величина $X^0 = X - M(X)$ называется центрированной случайной величиной или отклонением.

Пусть случайная величина X определена на вероятностном пространстве $(\Omega, \tilde{A}, P)$. Для $m \in R$ величина $M(X^m)$, если она определена, называется моментом m-го порядка случайной величины X.

Величина $M(|X^m|)$ называется абсолютным моментом m-го порядка случайной величины ξ. Моменты случайной величины $X - M(X)$ называются центральными моментами случайной величины X. Центральные моменты четного порядка случайной величины X характеризуют степень разброса значений относительно ее среднего значения.

Дисперсией случайной величины X называется число $D(X) = M(X - M(X))^2$, число $\sigma_X = \sqrt{D(X)}$ называется среднеквадратическим отклонением случайной величины X.

	Дискретная случайная величина	Абсолютно непрерывная случайна величина
Дисперсия	$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i$	$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 p(x)\mathrm{d}x$

Свойства дисперсии случайной величины:

1) $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$;

2) $D(C) = 0$, $C = \text{const}$;

3) $D(CX) = C^2 D(X)$;

4) $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, X и Y – независимые случайные величины;

5) $D(X + C) = D(X)$;

6) $D(XY) = M(X^2)M(Y^2) - (M(X))^2(M(Y))^2$.

Формулы вычисления математического ожидания и дисперсии для некоторых случайных величин

<table>
<tr><th>Название и содержание</th><th>Математическое ожидание</th><th>Дисперсия</th></tr>
<tr><td>Случайная величина Бернулли
<table>
<tr><td>ξ</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>P</td><td>P</td><td>$1-p$</td></tr>
</table></td><td>$M\zeta = 1 - p$</td><td>$D\xi = p(1-p)$</td></tr>
<tr><td>Биномиальная случайная величина
$P_n(m) = C_n^k p^k q^{n-k}$</td><td>$M\xi = np$</td><td>$D\xi = np(1-p)$</td></tr>
<tr><td>Геометрическая случайная величина
$P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}$</td><td>$M\xi = \frac{1-p}{p}$</td><td>$D\xi = \frac{1-p}{p^2}$</td></tr>
<tr><td>Случайная величина Пуассона
$P(\xi = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$</td><td>$M\xi = a$</td><td>$D\xi = a$</td></tr>
<tr><td>Равномерная случайная величина
$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \notin [a,b] \\ \frac{1}{b-a}, x \in [a,b] \end{cases}$</td><td>$M\xi = \frac{a+b}{2}$</td><td>$D\xi = \frac{(a-b)^2}{12}$</td></tr>
<tr><td>Показательная случайная величина
$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, x \ge 0 \end{cases}$</td><td>$M\xi = \frac{1}{\lambda}$</td><td>$D\xi = \frac{2}{\lambda^2}$</td></tr>
<tr><td>Нормальная случайная величина
$p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}$</td><td>$M\xi = a$</td><td>$D\xi = \sigma^2$</td></tr>
</table>

Ковариацией случайной величины ξ и η называется число:

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = M((\xi - M\xi)\cdot(\eta - M\eta)).$$

Если математическое ожидание случайной величины X является характеристикой ее положения, средним значением, около которого группируются значения случайной величины, то дисперсия и среднеквадратическое отклонение являются характеристиками рассеяния случайной величины около математического ожидания.

Примеры

1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины *X*.

X	0	1	2	3
P	0,1	0,1	0,3	0,5

Решение.

$$M(X) = 0\cdot 0{,}1 + 1\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}3 + 3\cdot 0{,}5 = 0{,}1 + 0{,}6 + 1{,}5 = 2{,}2.$$

$$D(X) = (0-2{,}2)^2\cdot 0{,}1 + (1-2{,}2)^2\cdot 0{,}1 + (2-2{,}2)^2\cdot 0{,}3 + (3-2{,}2)^2\cdot 0{,}5 = 0{,}96.$$

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = 0{,}98.$$

2. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение непрерывной случайной величины *X*, заданной плотностью распределения:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \quad x > 1, \\ 3x^2, & 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Решение.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 3x^3\,\mathrm{d}x = \left.\frac{3x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{3}{4},$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{48-45}{80} = \frac{3}{80},$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{3}{80}} = 0{,}194.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти функции распределения случайных величин X и Y, плотности которых заданы: $p_X(x)=\begin{cases} c_1 e^{-x}, x \ge 0 \\ 0, x<0 \end{cases}$, $p_Y(x)=\begin{cases} c_2 / x^2, x \ge 1 \\ 0, x<1 \end{cases}$.

2. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины X.

X	–1	0	1	2
P	0,2	0,1	0,3	0,4

3. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины X.

X	–2	–1	0	1	2
P	1/8	1/4	3/16	1/16	3/8

4. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины X:

$$p_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, x \ge 0 \\ 0, x<0. \end{cases}$$

5. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины X:

$$p_X(x)=\begin{cases} 0, x \le 0, x > \pi \\ \dfrac{1}{2}\sin x, x \in \left(0, \pi\right]. \end{cases}$$

Ответы

1	2	3
$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ -c_1(e^{-x}-1), & x\ge 0.\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ -c_2\left(\dfrac{1}{x}-1\right), & x\ge 1.\end{cases}$	$M(X)=0{,}9$ $D(X)=1{,}29$ $\sigma(X)=1{,}136$	$M(X)=\dfrac{5}{16}$ $D(X)=\dfrac{567}{256}$ $\sigma(X)=1{,}488$
4	**5**	
$M(X)=D(X)=\sigma(X)=1$	$M(X)=\pi/2$ $D(X)=\pi^2/4-2$ $\sigma(X)=\dfrac{1}{2}\sqrt{\pi^2-8}$	

15. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a, \sigma>0,$ если ее плотность распределения имеет вид:

$$p_\xi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}},\quad x\in R.$$

То, что случайная величина X имеет нормальное распределение, обозначается следующим образом:

$$X\sim N(a,\sigma).$$

Функция распределения: $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p(t)\mathrm{d}t$ примет вид:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{\sigma^2}}\mathrm{d}t.$$

Если выполняются условия: $a=0,\ \sigma=1,$ то нормальное распределение с такими параметрами называется стандартным.

Если $X \sim N(a, \sigma)$, то $M_0 = M_e = a, A = 0, E = 0.$

Свойства нормальной случайной величины:

1) $p(x) > 0, \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$, график функции расположен выше оси Ox;

2) ось Ox служит асимптотой графика функции $p(x)$, так как $\lim\limits_{x \to \pm\infty} p(x) = 0;$

3) функция $p(x)$ имеет один максимум при $x = a$, равный $p(a) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}};$

4) график функции $p(x)$ симметричен относительно прямой $x = a$;

5) точки $M_1(a - \sigma, \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-1/2}), M_2(a + \sigma, \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-1/2})$ являются точками перегиба графика функции $p(x)$.

Вероятность попадания случайной величины $X \sim N(a, \sigma)$ на заданный участок (a, b):

$$P(a < X < b) = \int_a^b p(x)\mathrm{d}x.$$

Случайная величина $X \sim N(a, \sigma)$ принимает свое значения в промежутке $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$ с вероятностью 0,9973.

Вероятность отклонения нормально распределенной случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине определяется по формуле:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Вероятность отклонения относительной частоты $\varpi = \dfrac{m}{n}$ от вероятности наступления события p в серии из n независимых испытаний выражается формулой

$$P(|\varpi - p| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Примеры

1. Суточное потребление электроэнергии исправной печью является случайной величиной, распределенной по нормальному закону со средним 1000 кВт и среднеквадратичным отклонением 50. Если суточное потребление превысит 1100 кВт, то по инструкции печь отключают и ремонтируют. Найти вероятность ремонта печи.

Решение. Случайная величина X есть суточное потребление электроэнергии печью. $M(X) = 1000$, $\sigma(X) = 50.$ Найдем вероятность попадания случайной величины X в интервал (0; 1100). Для этого воспользуемся формулой:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right);$$

$$P\left(\left|0 < X < 1100\right|\right) = \Phi\left(\frac{1100 - 0}{50}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 1000}{50}\right) =$$

$$= 2\Phi(2) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

Тогда вероятность ремонта печи равна 1 – 0,9544 = 0,0456.

2. Рост мальчиков возрастной группы 15 лет есть нормально распределенная случайная величина X с параметрами α = 161 см и σ = 4 см. Какую долю костюмов для мальчиков, имеющих рост от 152 до 158 см, нужно предусмотреть в объеме производства для данной возрастной группы.

Решение. $M(X)$ = 161, $\sigma(X) = 4.$ Найдем вероятность попадания случайной величины X в интервал (152; 158). Для этого воспользуемся формулой:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right);$$

$$P(152 < X < 158) = \Phi\left(\frac{158 - 161}{4}\right) - \Phi\left(\frac{152 - 161}{4}\right) = 0{,}214.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения вероятностей с параметрами $a = 0,\ \sigma = 2.$ Определить 1) $P(-2 < X < 3),$ 2) $P(|X| < 0{,}1).$

2. Известно, что случайная величина $X \sim N(3, 2).$ Найти $P(-3 < X < 5).$

3. Нормальное распределение случайной величины X задано плотностью распределения вероятностей $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}.$ Найти вероятность попадания в интервал (1; 3).

4. Ошибка взвешивания – случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 0, и среднеквадратическим отклонением, равным 2 грамма. Найти вероятность того, что взвешивание проведено с ошибкой, не превышающей по модулю 4 грамма.

5. Уровень воды в реке – случайная величина со средним значением 2,5 м и стандартным отклонением 0,2 м. Оценить вероятность того, что в наудачу выбранный день уровень воды окажется в пределах от 2 м 20 см до 2 м 80 см.

Ответы

1	**2**	**3**	**4**	**5**
0,775; 0,04	0,84	0,157	0,954	0,866

16. НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЕВА

Необходимо рассмотреть условия, при выполнении которых совокупное действие очень многих случайных причин приводит к результату, почти не зависящему от случая, так как позволяет предвидеть ход явлений. Эти условия и указываются в теоремах, носящих общее название *закона больших чисел*. К ним относятся теоремы Чебышева и Бернулли. Теорема Чебышева является наиболее общим законом больших чисел, теорема Бернулли – простейшим.

Неравенство Чебышева. Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше чем $1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$:

$$P(|X-MX|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Теорема Чебышева. Если последовательность попарно независимых случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$ имеет конечное математическое ожидание и дисперсии этих величин равномерно ограничены (не превышают постоянного числа C), то среднее арифметическое случайной величины сходится по вероятности к среднему арифметическому их математического ожидания, то есть если ε – любое положительное число, то

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

В этом случае среднее арифметическое достаточно большого числа независимых случайных величин (дисперсии которых равномерно ограничены) утрачивает характер случайной величины.

Если проводится серия измерений какой-либо физической величины, причем:

1) результат каждого измерения не зависит от результатов остальных (измерения попарно независимы);

2) измерения производятся без систематических ошибок (имеют одно и то же математическое ожидание);

3) обеспечена определенная точность измерений (дисперсии их ограничены),

то при достаточно большом числе измерений их среднее арифметическое окажется сколь угодно близким к истинному значению измеряемой величины.

Теорема Бернулли. Если в каждом из независимых опытов вероятность появления события A постоянна, то при достаточно большом числе испытаний вероятность того, что модуль отклонения относительной частоты появлений A в n опытах от p будет сколь угодно малым, как угодно близка к 1.

Закон больших чисел не исследует вид предельного закона распределения суммы случайных величин. Этот вопрос рассмотрен в группе теорем, называемых *центральной предельной теоремой*. Они утверждают, что закон распределения суммы случайных величин, каждая из которых может иметь различные распределения, приближается к нормальному распределению при достаточно большом числе слагаемых. Этим объясняется важность нормального закона для практических приложений.

Центральная предельная теорема. Если $X_1, X_2, ..., X_n$ – независимые случайные величины с одинаковым законом распределения, математическим ожиданием a и дисперсией σ^2, то при неограниченном увеличении n закон распределения суммы $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ неограниченно приближается к нормальному распределению.

Проверочный тест по разделу «Теория вероятностей»

Условие задачи	Варианты ответов
1. В лифт 7-этажного корпуса общежития на первом этаже вошли 2 студента. Каждый из них с одинаковой вероятностью выйдет на любом из этажей общежития, начиная со второго. Найти вероятность того, что все студенты выйдут на четвертом этаже	1) 1/49 2) 1/36 3) 1/64 4) 1/7 5) 2/7
2. Издание трудов студенческой конференции состоит из 4 томов. Книги расположены на полке в произвольном порядке. Какова вероятность, что номера томов идут подряд по возрастанию?	1) 1/4 2) 3/4 3) 1/2 4) 0 5) 1/24
3. В группе выступающих на мероприятии «Весна БНТУ» 5 девушек и 6 юношей. Из группы случайным образом выделены 3 выступающих. Найти вероятность того, что все выбранные окажутся девушками	1) 2/33 2) 5/6 3) 3/11 4) 5/11 5) 3/5
4. Найти вероятность $P(y \geq x^2)$, где x, y – числа из отрезка [0, 1]	1) 1 2) 0 3) 1/3 4) 2/3 5) 1/2
5. Студент знает 7 вопросов из 20 по дисциплине «Математика». Преподаватель задает три вопроса. Какова вероятность, что студент ответит хотя бы на 2 вопроса?	1) 7/20 2) 0,7 3) 1/20 4) 0,27 5) 1/2
6. Во время производственной практики студенты первого курса изготавливают детали на трех автоматических станках. Известно, что 10 % деталей производится первым станком, 25 % – вторым, остальные третьим. Вероятность изготовления детали, отвечающей стандарту, на первом станке равна 0,7; на втором – 0,988, на третьем 0,99. Изготовленные в течение дня на трех станках не рассортированные детали оцениваются преподавателем. Определить вероятность того, что взятая наугад деталь не соответствует стандарту	1) 0,682 2) 0,683 3) 0,6 4) 0,654 5) 0,632

7. В студенческой группе 10 % посещают тренажерный зал. Найти вероятность того, что среди наугад выбранных 8 студентов окажется 3 посещающих тренажерный зал	1) 0,33 2) 0,3 3) 0,1 4) 0,134 5) 0,033
8. Пусть случайная величина X – равномерно распределена на отрезке [0, 10]. Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (2, 7)	1) 1/10 2) 2/7 3) 2/3 4) 1/7 5) 0,5
9. Вероятность того, что купленный товар со скидкой равна 0,62. Составить ряд распределения для числа товаров со скидкой из общего числа двух купленных товаров. Найти математическое ожидание рассмотренной случайной величины	1) 0,55 2) 0,558 3) 0,855 4) 0,8 5) 0,876
10. Ошибка взвешивания – случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 0, и среднеквадратическим отклонением, равным 1 грамм. Найти вероятность того, что взвешивание проведено с ошибкой, не превышающей по модулю 0,2 грамма	1) 0,4578 2) 0,1543 3) 0,1566 4) 0,1586 5) 0,1598

Ответы к тесту по теории вероятностей

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	2	5	1	4	4	2	5	5	3	4

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Конспект лекций по математике для студентов инженерно-технических специальностей: в 4 ч. [Электронный ресурс] / И. Г. Латышева [и др.]. – Электрон. текст. дан. – БНТУ, 2007. – Режим доступа: http://rep.bntu.by/handle/ data/1214.

2. Математика. Специальные разделы. Элементы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления. Теория вероятностей. Элементы математической статистики [Электронный ресурс] / Н. А. Кондратьева [и др.]. – Электрон. текст. дан. – БНТУ, 2014. – Режим доступа: http://rep.bntu.by/handle/data/9383.

3. Электронный учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Математика» для студентов экономических специальностей второго курса обучения заочного отделения ПСФ: в 2 ч. [Электронный ресурс] / Н. А. Кондратьева [и др.]. – Минск : БНТУ, 2014. – БНТУ/ЭУМК-ПСФ85-168. – Ч. 1. – Режим доступа: http://rep.bntu.by/handle/data/26446.

4. Семенов, В. Теория вероятностей и математическая статистика. Стандарт третьего поколения / В. Семенов. – СПб. : Питер, 2013. – 192 с.

5. Просветов, Г. Теория вероятностей и математическая статистика. Задачи и решения / Г. Просветов. – М. : Альфа-Плюс, 2009. – 272 с.

6. Золотаревская, Д. Теория вероятностей. Задачи с решениями / Д. Золотаревская. – М. : Либроком, 2016. – 170 с.

7. Спирин, П. Теория вероятностей и математическая статистика / П. Спирин, М. Спирина. – СПб. : Academia, 2013. – 352 с.

8. Рябушко, А. Индивидуальные задания по высшей математике: в 4 ч. / А. Рябушко. – Минск : Вышэйшая школа, 2013. – Ч. 4: Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика. – 336 с.

9. Бричкова, Е. Теория вероятностей. Примеры и задачи / Е. Бричкова, А. Гусак. – Минск : ТетраСистем, 2013. – 288 с.

10. Микулик, Н. А. Теория вероятностей и математическая статистика / Н. А. Микулик, А. В. Метельский. – Минск : Пион, 2002.

11. Фигурин, В. В. Теория вероятностей и математическая статистика / В. В. Фигурин. – Минск : Новое знание, 2000.

12. Гайшун, Л. Н. Теория вероятностей / Л. Н. Гайшун, Г. К. Игнатьева, О. А. Велько. – Минск : МПУ, 2002.
13. Математика для инженеров: учебник: в 2 т. / С. А. Минюк [и др.]. – Минск : Элайда, 2006. – Т. 2.
14. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – Изд. 4-е, доп. – М. : Высшая школа, 1972. – 368 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Значения функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0734	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	2,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,6,	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	1,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Учебное издание

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебно-методическое пособие
для студентов специальностей
1-38 01 01 «Механические и электромеханические приборы
и аппараты», 1-38 01 02 «Оптико-электронные и лазерные приборы
и системы», 1-38 02 01 «Информационно-измерительная техника»

В 2 частях

Часть 1

Составители:
ГУНДИНА Мария Анатольевна
КОНДРАТЬЕВА Наталья Анатольевна
ПРУСОВА Ирина Васильевна и др.

Редактор *В. И. Акулёнок*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 17.02.2020. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 3,20. Уч.-изд. л. 2,5. Тираж 100. Заказ 205.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет. Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.