

# МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Пособие для студентов специальностей

1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»;

1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана  
воздушного бассейна»; 1-70 04 03 «Водоснабжение,  
водоотведение и охрана водных ресурсов»;

1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением  
по образованию в области строительства и архитектуры*

УДК 534(075.8)

ББК 22.213я7

M55

**С о с т а в и т е л и:**

*А. К. Есман, Н. П. Юркевич, Г. К. Савчук, П. Г. Кужир,  
А. И. Бибик, Г. Л. Зыков, В. А. Потачиц, В. Е. Журавкевич,  
С. В. Попко, И. А. Климович*

**Р е ц е н з е н т ы:**

кафедра общей физики Белорусского государственного университета;  
ведущий научный сотрудник лаборатории  
информационно-измерительных систем ИНУ «Институт прикладных фи-  
зических проблем им А. Н. Севченко» Белгосуниверситета,  
канд. техн. наук *И. А. Чернобай*

M55     **Механические** колебания : пособие для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»; 1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна»; 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов»; 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены» / сост. А. К. Есман [и др.]. – Минск: БНТУ, 2020. – 50 с.

ISBN 978-985-583-369-8.

В пособии представлены материалы для проведения лабораторного практикума по изучению гармонических колебаний. Подробно рассмотрены основные характеристики свободных и затухающих механических колебаний. Изложена теория по сложению гармонических колебаний одного направления и взаимно перпендикулярных колебаний. Представлена методика анализа результата сложения колебаний при помощи компьютерного моделирования. Описана методика определения момента инерции и параметров затухающих колебаний физического маятника.

УДК 534(075.8)

ББК 22.213я7

ISBN 978-985-583-369-8

© Белорусский национальный  
технический университет, 2020

## СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа № 6 ИЗУЧЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СВОБОДНЫХ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ.....	4
Лабораторная работа № D1 ИЗУЧЕНИЕ СЛОЖЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ .....	32
1. Гармонические колебания .....	32
1.1. Характеристики гармонических колебаний .....	32
1.2. Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний.....	36
2. Сложение гармонических колебаний .....	39
2.1. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты .....	39
2.2. Сложение гармонических колебаний одного направления с мало отличающимися частотами.....	40
2.3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.....	43
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	50

## Лабораторная работа № 6

### ИЗУЧЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СВОБОДНЫХ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ

**Цель работы:** изучить свободные незатухающие и свободно затухающие гармонические колебания; экспериментально определить периоды колебаний физического маятника для двух значений силы сопротивления (двух положений демпфера); вычислить моменты инерции физического маятника и основные параметры его затухающих колебаний для этих значений.

**Приборы:** кронштейн с линейкой, физический маятник, секундомер.

#### Общие сведения о колебаниях. Классификация колебаний

**Колебания** – это повторяющиеся во времени изменения состояния системы. Понятие колебаний охватывает широкий круг явлений.

**Колебания механических систем или механические колебания** – это механическое движение тела или системы тел, которое обладает повторяемостью во времени и происходит в окрестности положения равновесия. **Положением равновесия** называется такое положение системы, в котором она может оставаться сколь угодно долго (будучи помещена в это положение в состоянии равновесия).

С колебательными движениями мы встречаемся повсюду. Речь людей связана с колебаниями голосовых связок. Музыка, способная вызывать различные эмоции (переживания, радость, восторг), физически обусловлена колебаниями воздуха, струн, пластин и других упругих тел. Маятник настенных часов и детские качели совершают периодические качания около положения равновесия (рис. 1). Фундамент быстроходной турбины колеблется в такт с оборотами главного вала. Железнодорожный вагон при проходе через стыки рельсов качается на рессорах и т. д.

С колебаниями мы встречаемся в живом организме. Биение сердца, сокращение желудка и других органов имеют периодический характер. Пример значений собственных частот колебаний некоторых частей тела человека: глаза – 40–100 Гц; сердце – 4–6 Гц; позвоночник – 4–6 Гц; желудок – 2–3 Гц; кишечник – 2–4 Гц; почки – 6–8 Гц.

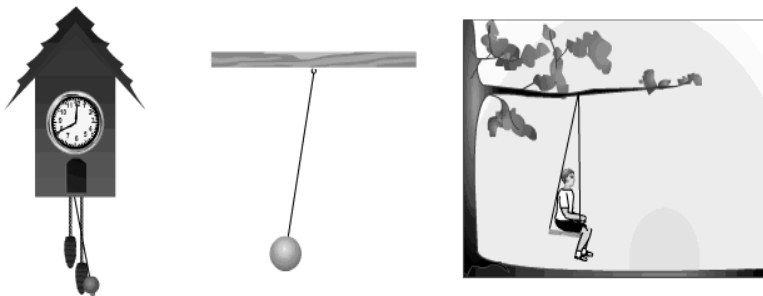


Рис. 1. Примеры колебательного движения

Колебания имеют первостепенное значение в самолетостроении, электротехнике, технике автоматического регулирования. На их использовании основана вся радиотехника и техническая акустика и т. д. Трудно назвать такую отрасль техники, где колебания не играли бы существенной роли.

Строителям и конструкторам необходимо учитывать всевозможные колебания при проектировании различных сооружений и машин.

В одних случаях механические колебания вредны и опасны. В других случаях используются для решения различных технических задач (в машиностроении, в строительном деле) (рис. 2).

На рис. 2 изображен небоскреб «Тайбэй 101» высотой 507,77 м, находящийся в городе Тайбэе на острове Тайвань. В этом городе примерно раз в 10 лет происходят землетрясения, и он стоит на пути продвижения огромного числа тайфунов. В конструкции небоскреба для защиты от землетрясений используется висящий шар (маятник). Огромный маятник подвешен на шестнадцати стальных тросах между 87-м и 91-м

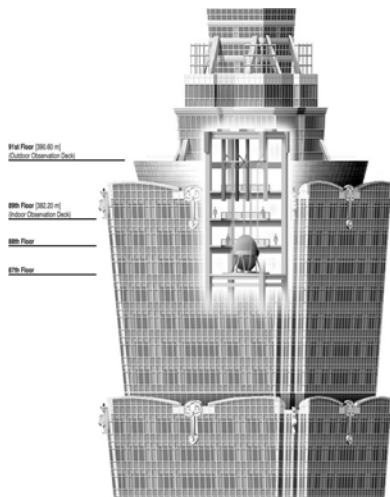


Рис. 2. Пример использования колебательного движения в строительстве

этажами. Шар выполнен из отдельных стальных пластин (41 шт.) Движения этого гигантского маятника сдерживают 8 демпферов и масляные амортизаторы.

**Демпфер** – это устройство для гашения или предотвращения колебаний, возникающих в машинах, системах или сооружениях при их работе.

Демпферы совместно с масляными амортизаторами поглощают и рассеивают энергию колебаний, что не позволяет зданию слишком сильно раскачиваться, соответственно оставаться устойчивым независимо от внешних условий.

Колебательное движение широко используется в научных исследованиях [1, 2].

В современной физике выделился специальный раздел – физика колебаний. В нем колебания различной природы рассматриваются с единой точки зрения.

В общем случае **колебательным движением** называется процесс, при котором система, многократно отклоняясь от своего состояния равновесия, каждый раз вновь возвращается к нему (см. рис. 1).

В природе существуют **периодические и непериодические** колебания. **Периодическим** называется процесс, при котором через одинаковые промежутки времени повторяется одно и то же состояние системы. Промежуток времени  $T$ , в течение которого процесс полностью повторяется, называется **периодом** колебаний.

Любая система, колебания которой изучаются, может быть охарактеризована некоторой физической величиной  $f(x, y, z, t)$ , зависящей от координат и времени. Графическое изображение функции  $f(x, y, z, t)$  дает наглядное представление о протекании колебательного процесса во времени.

В случае механических систем движущимися объектами являются точечные массы или физически малые элементы объема материальной среды (жидкости, газа, твердого тела и т. д.). При описании колебаний таких систем функция  $f(x, y, z, t)$  может описывать смещение (линейное или угловое), скорость, ускорение, деформацию, кинетическую или потенциальную энергию, давление.

В физике выделяют колебания двух видов: **механические и электромагнитные**, так как они чрезвычайно актуальны для жизнедеятельности человека. Механические колебания плотности воздуха воспринимаются как звук, а быстрые электромагнитные коле-

бания – как свет. С помощью звука и света люди получают основную часть информации об окружающем мире.

В зависимости от физической природы колебания можно разделить на:

- механические (звук, вибрация, колебания маятников, моста, корабля на волне, струны и т. д.);

- электромагнитные (свет, радиоволны, тепловые и т. д.);

- смешанного типа – электромеханические (в дуговых сталеплавильных электропечах, колебания мембраны телефона, пьезокварцевого или магнитострикционного излучателя ультразвука и т. д.);

- химические (колебания концентрации реагирующих веществ при периодических химических реакциях);

- термодинамические (тепловые автоколебания, встречающиеся в акустике, а также в некоторых типах реактивных двигателей).

В зависимости от характера воздействия на колебательную систему колебания делятся на: свободные, вынужденные, автоколебания, параметрические.

**Свободные** (или собственные) – это колебания, совершающиеся в системе без внешних воздействий на нее после того, как система выведена из состояния равновесия. В реальных условиях свободные колебания **всегда затухающие**. Такие колебания происходят на частотах, обусловленных исключительно конструктивными особенностями системы – **собственных частотах**, и продолжаются в течение некоторого характерного времени – **времени затухания**. Простейшими примерами свободных колебаний являются колебания груза, прикрепленного к пружине, или груза, подвешенного на тонкой нерастяжимой нити.

**Вынужденные** – колебания, протекающие в системе под влиянием внешнего периодического воздействия. Внешняя сила совершает положительную работу и обеспечивает приток энергии к колебательной системе, и не дает колебаниям затухнуть, несмотря на действия сил трения. При вынужденных колебаниях может возникнуть **явление резонанса** – резкое возрастание амплитуды колебаний при совпадении собственной частоты колеблющейся системы с некоторой частотой внешнего воздействия, называемой резонансной частотой.

**Автоколебания** – колебания, при которых система может сама регулировать поступление энергии от постоянного источника, рас-

ходующейся на совершение колебаний (механические часы, паровые машины, двигатели внутреннего сгорания, струны смычковых инструментов, воздушные столбы в трубах духовых инструментов, голосовые связки при разговоре или пении и т. д.). Автоколебательные системы имеют три основных элемента – колебательная система, источник энергии и устройство обратной связи. Характерным отличием автоколебаний от вынужденных колебаний является то, что их амплитуда определяется свойствами самой системы, а не начальными условиями.

**Параметрические** – колебания, возникающие при периодическом изменении какого-либо физического параметра колебательной системы (например, массы, упругости, емкости, индуктивности). При параметрических колебаниях внешние силы не действуют непосредственно на систему, но параметры системы не стабильны и изменяются с течением времени. Примером параметрических колебаний может служить маятник переменной длины, а также генератор переменного тока, работающий по принципу периодического изменения индуктивности или емкости электрического контура.

### Признаки колебательного движения. Механические гармонические колебания и их характеристики

Рассмотрим груз массой  $m$ , прикрепленный к одному концу пружины, который движется без трения по горизонтальной поверхности (рис. 3).

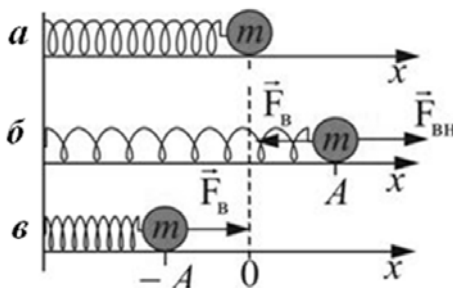


Рис. 3. Движение груза, прикрепленного к пружине, по горизонтальной поверхности



При определенной длине пружины сила со стороны пружины на груз не действует. В этом случае пружина находится в положении равновесия ( $x = 0$ ) (рис. 3, а). Если сдвинуть груз вправо, растягивая пружину (рис. 3, б), или влево (рис. 3, в), сжимая ее, то пружина действует на груз с силой  $F_{\text{в}}$ , которая стремится вернуть его в положение равновесия; такую силу называют **возвращающей** [3]. Для рассматриваемой системы сила  $F_{\text{в}}$  прямо пропорциональна расстоянию  $x$ , на которое сжимается или растягивается пружина:

$$F_{\text{г}} = kx, \quad \vec{F}_{\text{в}} = -k\vec{x}, \quad (1)$$

где  $k$  – жесткость пружины.

Формулы (1) справедливы до тех пор, пока пружина не сжимается настолько, что ее витки приходят в соприкосновение или не растягиваются сверх предела упругости. По направлению возвращающая сила всегда противоположна направлению перемещения  $x$ . Для того чтобы растянуть пружину на длину  $x$ , к ней надо приложить внешнюю силу  $F_{\text{вн}}$ , равную по величине возвращающей силе, но противоположную ей по направлению  $\vec{F}_{\text{вн}} = k\vec{x}$ .

Что же произойдет, если пружину растянуть на длину  $x = A$ , как показано на рис. 3, б, и затем отпустить? Пружина действует на груз с силой, которая стремится вернуть ее в положение равновесия. Но поскольку эта сила сообщает грузу ускорение, он приходит в положение равновесия со значительной скоростью. В положении равновесия сила, действующая на груз, уменьшается до нуля, а скорость его в этой точке максимальна. Когда груз, пройдя положение равновесия, движется влево, сила со стороны пружины замедляет его в точке  $x = -A$  (рис. 3, в). Груз на мгновение останавливается, а затем начинает двигаться в противоположную сторону, пока не придет в точку  $x = A$ , откуда он начал движение. Далее весь процесс повторяется.

Из приведенного примера следуют три признака колебательного движения:

- 1) **повторяемость** (периодичность) – движение по одной и той же траектории туда и обратно;
- 2) **ограниченность** пределами крайних положений;
- 3) **действие силы**, описываемой функцией  $\vec{F} = -k\vec{x}$ .

Для математического описания колебаний естественно использовать периодические функции. Таких функций много, но две из них – синус и косинус – являются самыми важными. Они тесно связаны с широким кругом физических явлений. Поскольку функции синус и косинус получаются друг из друга сдвигом аргумента на  $\pi/2$ , то можно ограничиться только одной из них.

Любая колебательная система, в которой возвращающая сила прямо пропорциональна смещению, взятому с противоположным знаком, совершает гармонические колебания.

Свободные колебания происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как она была выведена из положения равновесия. Простейшим свободным периодическим механическим колебанием является **гармоническое колебательное движение** материальной точки (тела).

**Материальная точка** – это тело, обладающее массой, размерами которого в данной задаче можно пренебречь, то есть размеры тела много меньше расстояния, с которого рассматривается это тело.

Таким образом, колебательное движение называется гармоническим, если смещение из положения равновесия  $x$  изменяется в зависимости от времени  $t$  по закону синуса или косинуса (рис. 4) и описывается уравнениями:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2)$$

или

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (3)$$

где  $x$  – величина смещения от положения равновесия в момент времени  $t$ ;

$A$  – амплитуда колебаний или максимальное смещение из положения равновесия;

$\omega_0$  – круговая (циклическая) частота;

$(\omega_0 t + \varphi_0)$  – фаза колебаний в момент времени  $t$ ;

$\varphi_0$  – начальная фаза колебаний или фаза в момент времени  $t = 0$ .

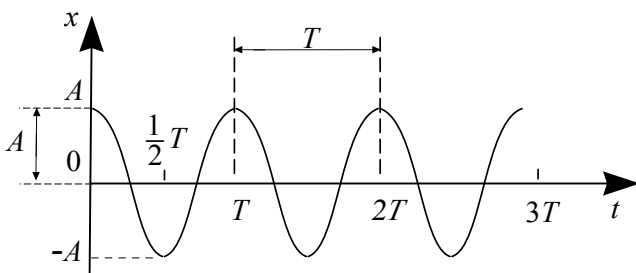


Рис. 4. График гармонического колебания

Расстояние  $x$  от положения равновесия до точки, в которой находится колеблющееся тело в произвольный момент времени  $t$ , называют **смещением**.

Выражение  $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ , стоящее под знаком синуса или косинуса, называется **фазой колебания**. Фаза – это аргумент периодически изменяющейся функции, то есть угол, изменяющийся с течением времени. При  $t = 0$  фаза колебания называется начальной фазой колебания ( $\varphi = \varphi_0$ ). Фаза измеряется в радианах и определяет значение колеблющейся величины в данный момент времени.

Гармонические колебания происходят под действием квазиупругих сил. **Квазиупругие силы** – это силы, имеющие такую же закономерность, как и сила упругости.

Через время, равное периоду  $T$  (см. рис. 4), фаза колебания получает приращение  $2\pi$  и колебательный процесс повторяется:

$$\omega_0(t + T) + \varphi_0 = (\omega_0 t + \varphi_0) + 2\pi,$$

откуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Число полных колебаний, совершаемых за единицу времени, называется **частотой колебаний**  $\nu$ , для которой вытекают соотношения

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad \omega_0 = 2\pi\nu.$$

Так как значения синуса и косинуса изменяются в пределах от +1 до -1, то  $x$  принимает значения от  $+A$  до  $-A$  (см. рис. 4).

*Частота и период гармонических колебаний не зависят от амплитуды.* Изменяя амплитуду колебаний груза на пружине, мы не изменяем частоту колебаний этой системы.

Рассмотрение гармонических колебаний важно по двум причинам:

1) колебания, встречающиеся в природе и технике, часто имеют характер, близкий к характеру гармонических колебаний;

2) различные периодические процессы можно представить как сложение нескольких гармонических колебаний.

### **Скорость и ускорение при гармоническом колебании**

**Скорость  $v$**  гармонического колебания есть первая производная от смещения  $x$  по времени  $t$ .

Пусть  $x$  описывается уравнением (2), тогда

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right). \quad (4)$$

Сравнивая выражение (2) для смещения  $x$  с выражением (4) для скорости  $v$ , видим, что скорость сдвинута по фазе относительно смещения на  $\pi/2$  (рис. 5). Так как максимальное значение косинуса равно 1, максимальное значение скорости равно

$$v_{\max} = A\omega_0.$$

**Ускорение  $a$**  гармонического колебания есть первая производная от скорости  $v$  по времени  $t$ :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = +A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi). \quad (5)$$

Ускорение сдвинuto по фазе относительно смещения на угол  $\pi$  (рис. 5).

На рис. 5 представлены графики зависимости  $x$ ,  $v_x$  и  $a_x$  от времени  $t$ . Для удобства изображения начальная фаза принята равной нулю  $\varphi_0 = 0$ , то есть

$$x = A \sin(\omega_0 t).$$

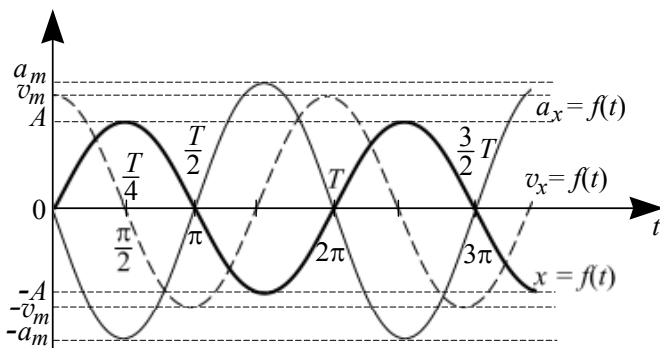


Рис. 5. Зависимости смещения  $x$ , проекции скорости  $v_x$  и проекции ускорения  $a_x$  гармонического колебания от времени  $t$

Связь ускорения и смещения можно получить, если в формуле (5) множитель  $x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$  заменить на  $x$ , получим

$$a = -\omega_0^2 x.$$

Сила, действующая на колеблющуюся материальную точку массой  $m$ , по II закону Ньютона равна

$$F = ma = -mA\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -m\omega_0^2 x,$$

$$F_{\max} = -m\omega_0^2 A,$$

$$ma = -m\omega_0^2 x.$$

Из полученных выражений следует, что сила, действующая на колеблющуюся материальную точку, пропорциональна смещению материальной точки и противоположна ему по направлению, поэтому является квазиупругой силой.

Так как ускорение

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2},$$

то

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x,$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (6)$$

Полученное выражение (6) называют **дифференциальным уравнением гармонических колебаний**. С точки зрения математики это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Решением полученного уравнения являются функции (2) или (3), которые описывают зависимость величины смещения колеблющегося тела или материальной точки от времени.

### **Гармонический осциллятор. Пружинный, математический и физический маятники**

В природе часто встречается периодическая зависимость от времени различных физических величин. Периодически изменяются со временем температура и освещенность при вращении Земли, периодическое движение совершают маятник часов и колеблющийся грузик на пружине.

**Линейным гармоническим осциллятором** (от англ. *oscillation* – колебание) называется система, колеблющаяся с собственной частотой  $\omega_0$  под действием упругой или квазиупругой силы вдоль некоторого направления.

Примерами механических гармонических осцилляторов являются пружинный, математический и физический (при малых амплитудах колебаний) маятники.

**Пружинный маятник** – это механическая система, состоящая из тела массой  $m$  и абсолютно упругой пружины жесткостью  $k$ , которая совершает гармонические колебания под действием силы упругости (рис. 6, а).

Рассмотрим малые колебания пружинного маятника вблизи положения равновесия под действием упругой силы. В состоянии равновесия тела и пружины  $mg = kx_0$  (рис. 6, б). При смещении тела вниз на расстояние  $x$  от положения равновесия возникает упругая сила  $\vec{F} = -k(\vec{x}_0 + \vec{x})$ , направленная вверх.

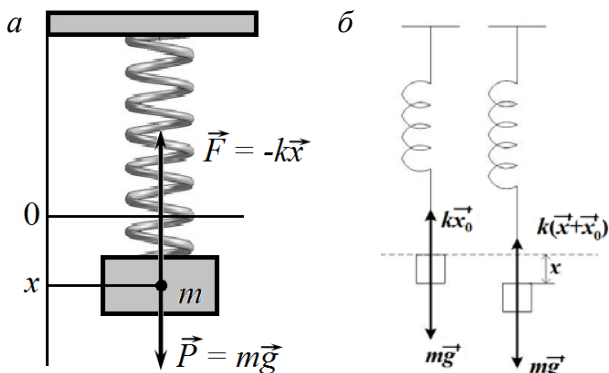


Рис. 6. а) пружинный маятник;  
б) к выводу уравнения колебаний пружинного маятника

Используя второй закон Ньютона

$$ma = mg - k(x + x_0)$$

и равенство

$$mg = kx_0,$$

получим уравнение колебаний пружинного маятника в виде

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = 0.$$

**Собственной частотой колебаний пружинного маятника** является величина

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

а зависимость смещения  $x$  от времени определяется выражением (2) или (3).

**Математический маятник** – осциллятор, представляющий собой механическую систему, состоящую из материальной точки массой  $m$ , находящейся на невесомой нерастяжимой нити или на невесомом стержне в однородном поле сил тяготения и совершающей колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести  $m\vec{g}$ , где  $\vec{g}$  – ускорение свободного падения (рис. 7).

Вычислим период колебаний математического маятника – материальной точки массой  $m$ , которая подвешена на невесомой нити длиной  $\ell$  (см. рис. 7).

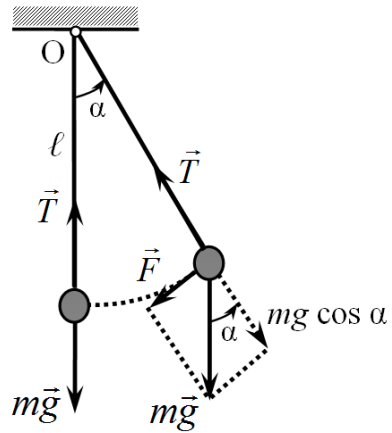


Рис. 7. Математический маятник

При свободном движении маятника в поле силы тяжести остается постоянной полная энергия маятника – сумма кинетической и потенциальной энергий  $E = E_k + E_p$ . Поэтому, при бесконечно малом перемещении маятника вдоль траектории изменение полной энергии должно быть равно нулю.

Изменение потенциальной энергии маятника  $dE_p$  при его перемещении на бесконечно малое расстояние  $dr$  можно вычислить как работу силы тяжести на бесконечно малом пути  $dr$ . При этом работу совершает лишь составляющая силы тяжести  $F = mgsin\alpha$  вдоль направления движения. Составляющая силы тяжести  $mg\cos\alpha$ , перпендикулярная к направлению движения, работу не совершает, так как она перпендикулярна вектору перемещения.



Таким образом,

$$dE_{\text{п}} = mg \sin \alpha dr.$$

Изменение полной энергии маятника:

$$dE = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) + mg \sin \alpha dr = 0. \quad (7)$$

Произведя дифференцирование

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = mv dv$$

и разделив уравнение (7) сначала на  $dt$

$$mv \frac{dv}{dt} + mg \sin \alpha \frac{dr}{dt} = 0,$$

а затем на величину

$$mv = \frac{m dr}{dt},$$

получим уравнение движения маятника в виде:

$$\frac{dv}{dt} + g \sin \alpha = 0.$$

Перейдем к переменной  $\alpha$ , пользуясь соотношением  $dr = \ell d\alpha$ , получаем

$$v = \frac{dr}{dt} = \ell \frac{d\alpha}{dt}$$

или

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin \alpha = 0. \quad (8)$$

Введем обозначение

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

Полученное для угла отклонения  $\alpha$  уравнение (8) довольно сложное. Его можно упростить в случае малых колебаний, когда величина угла колебаний маятника, измеряемая в радианах, мала по сравнению с единицей,  $\alpha \ll 1$ . В этом случае можно заменить  $\sin \alpha \approx \alpha$ . Уравнение (8) принимает вид:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha = 0. \quad (9)$$

Решением уравнения (9) является функция (в чем можно убедиться при прямой подстановке)

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где  $\alpha_0$  – максимальный угол отклонения маятника, являющийся амплитудой колебаний;

$\omega_0$  – собственная частота колебаний математического маятника;

$\varphi_0$  – начальная фаза колебания.

**Период колебаний и собственная частота колебаний** математического маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

Таким образом, период собственных колебаний математического маятника *не зависит ни от амплитуды колебаний маятника, ни от величины массы колеблющегося тела, а зависит только от длины маятника и ускорения свободного падения.*

**Физический маятник** – это абсолютно твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через его центр масс  $C$  (рис. 8). Горизонтальная ось проходит через точку  $O$ .

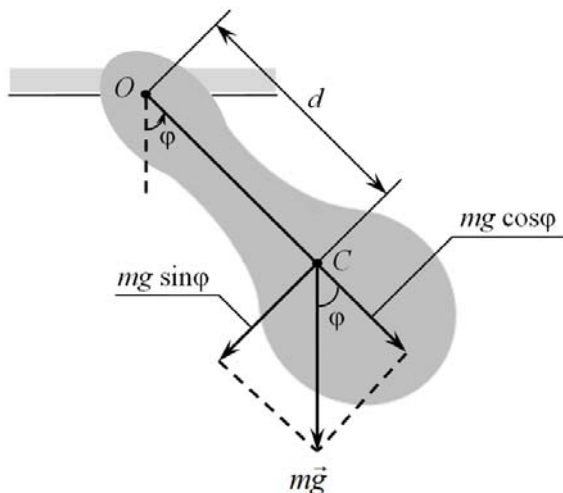


Рис. 8. Физический маятник

Если маятник отклонить от положения равновесия на малый угол  $\varphi$  и отпустить, он будет совершать колебания. Согласно основному уравнению динамики вращательного движения твердого тела

$$M = J\varepsilon = J \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

где  $J$  – момент инерции физического маятника относительно неподвижной горизонтальной оси вращения, проходящей через точку  $O$ ;

$M$  – момент силы, возвращающей физический маятник в положение равновесия;

$\varepsilon$  – угловое ускорение физического маятника.

Момент силы относительно оси вращения создается составляющей силы тяжести

$$P_{\tau} = -P \sin \varphi = -mg \sin \varphi,$$

и равен

$$M = P_{\tau} \cdot d,$$

где  $d$  – это расстояние от центра масс маятника до оси вращения или плечо силы  $P_{\tau}$  относительно горизонтальной оси ( $d = OC$ ).

Момент составляющей силы тяжести  $P \cos \varphi = mg \cos \varphi$  относительно оси вращения равен нулю, так как линия действия данной составляющей силы пересекает ось вращения, следовательно, плечо равно нулю.

В результате получаем уравнение

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mgd \sin \varphi,$$

которое представляет собой дифференциальное уравнение свободных колебаний для произвольных углов отклонения. При малых углах, когда  $\sin \varphi \approx \varphi$ ,

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -dmgd \varphi.$$

Принимая  $\frac{mgd}{J} = \omega_0^2$ , получим **дифференциальное уравнение колебания физического маятника** при малых углах

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0.$$

Его решения имеют вид

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \alpha_0) \text{ или } \varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha_0).$$

Таким образом, при малых отклонениях от положения равновесия физический маятник совершает *гармонические колебания с собственной циклической частотой*  $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J}}$  и *периодом*  $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}$ .

Из формулы для периода физического маятника можно вычислить момент инерции физического маятника

$$J = \frac{T^2}{4\pi^2} mgd,$$

где  $m$  – масса физического маятника;

$d$  – расстояние от точки подвеса до центра тяжести;

$g$  – ускорение свободного падения.

Величину  $\frac{J}{md}$  называют **приведенной длиной физического маятника**. Приведенная длина физического маятника численно равна длине такого математического маятника, период которого равен периоду данного физического маятника.

Точка маятника, лежащая на прямой, соединяющей точку подвеса и центр масс на расстоянии, равном приведенной длине, называется **центром качания маятника**.

Все рассмотренные выше примеры имеют общее свойство – во всех случаях движение может быть описано с помощью одной периодически изменяющейся со временем величины. В случае математического и физического маятников такой величиной является угол отклонения, в случае пружинного маятника – величина смещения. *В механике о таких движениях говорят как о движениях с одной степенью свободы или одномерных движениях.*

**Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний и его решение. Коэффициент затухания, декремент затухания, логарифмический декремент затухания, добротность**

В рассмотренных выше примерах гармонических колебаний единственной силой, действующей на материальную точку (тело), была квазиупругая сила  $F$ , а силы сопротивления, которые присутствуют в любой реальной системе, не учитывались. Поэтому рас-

смотренные ранее колебания можно назвать **идеальными незатухающими** гармоническими колебаниями.

Наличие в реальной колебательной системе силы сопротивления среды приводит к уменьшению энергии системы. Если убыль энергии не пополнять за счет работы внешних сил, колебания будут затухать. **Затухающими** называются колебания с уменьшающейся во времени амплитудой. Затухание колебаний в механических системах вызывается в основном трением, сопротивлением среды и возбуждением в ней волн.

Рассмотрим свободные затухающие колебания. Будем полагать, что силы сопротивления  $F_c$  пропорциональны скорости  $v$  и противоположно ей направлены. Такими силами, например, являются силы вязкого трения при достаточно малых скоростях движения тела. При небольших скоростях сила сопротивления

$$F_c = -rv = -r \frac{dx}{dt},$$

где  $r$  – коэффициент сопротивления среды.

**Физический смысл коэффициента сопротивления** среды – это физическая величина, численно равная силе сопротивления, действующей на тело, которое движется в среде со скоростью 1 м/с.

Используя второй закон Ньютона при наличии сил сопротивления, получим дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$ma = F + F_c,$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0.$$

Обозначим  $\frac{r}{m} = 2\beta$ ,  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ .

Тогда дифференциальное уравнение примет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (10)$$

где  $\omega_0$  – собственная частота колебаний системы, то есть частота свободных колебаний при  $r = 0$ ;

$\beta$  – коэффициент затухания, определяет скорость убывания амплитуды.

Полученное дифференциальное уравнение (10) является уравнением затухающих колебаний.

Решение уравнения (10) можно получить, исходя из следующих соображений. Во-первых, наличие квазиупругих сил свидетельствует о том, что в системе, выведенной из состояния равновесия, должны возникать колебания. Во-вторых, наличие сил сопротивления движению приводит к уменьшению энергии колебательной системы, а, следовательно, амплитуда колебаний  $A(t)$  с течением времени должна уменьшаться. Кроме того, сопротивление среды, тормозя движение тела, оказывает влияние на быстроту колебаний, то есть циклическая частота колебаний может зависеть от сопротивления среды. Исходя из изложенного выше, решение дифференциального уравнения затухающих колебаний будем искать в виде:

$$x = A(t) \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (11)$$

где  $\omega$  – частота затухающих колебаний.

Если выражение (11) для  $x$  действительно является решением уравнения затухающих колебаний, то после его подстановки в уравнение мы должны получить тождество. Для этого, дифференцируя выражение (11), получим формулы для скорости  $v$  и ускорения  $a$

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{dA}{dt} \sin(\omega t + \varphi_0), \\ a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{dA}{dt} \omega \cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{d^2A}{dt^2} \sin(\omega t + \varphi_0) + \\ &\quad + \frac{dA}{dt} \omega \cos(\omega t + \varphi_0) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) + 2 \frac{dA}{dt} \omega \cos(\omega t + \varphi_0) + \\ &\quad + \frac{d^2A}{dt^2} \sin(\omega t + \varphi_0). \end{aligned}$$

Подставим  $x$ ,  $v$  и  $a$  в дифференциальное уравнение затухающих колебаний (10). Получим

$$\left( \frac{d^2 A}{dt^2} - A\omega^2 + 2\beta \frac{dA}{dt} + \omega_0^2 A \right) \sin(\omega t + \varphi_0) + \left( 2 \frac{dA}{dt} \omega + 2\beta \omega A \right) \cos(\omega t + \varphi_0) = 0.$$

Последнее равенство будет выполняться только в том случае, если выражения, стоящие в скобках перед функциями синуса и косинуса, одновременно будут равны нулю. Исходя из этого, получаем систему из двух уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A}{dt^2} - A\omega^2 + 2\beta \frac{dA}{dt} + \omega_0^2 A &= 0, \\ 2 \frac{dA}{dt} \omega + 2\beta \omega A &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Решим второе уравнение системы (12)

$$2 \frac{dA}{dt} \omega + 2\beta \omega A = 0.$$

Разделим последнее уравнение на  $2\omega$

$$\frac{dA}{dt} + \beta A = 0.$$

Затем разделим переменные

$$\frac{dA}{A} = -\beta dt$$

и проинтегрируем

$$\ln A - \ln A_0 = -\beta t, \quad \ln \frac{A}{A_0} = -\beta t$$

или

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}, \tag{13}$$

где  $A_0$  – амплитуда колебаний в начальный момент времени.



Таким образом, амплитуда затухающих колебаний (13) со временем убывает по экспоненциальному закону (рис. 9).

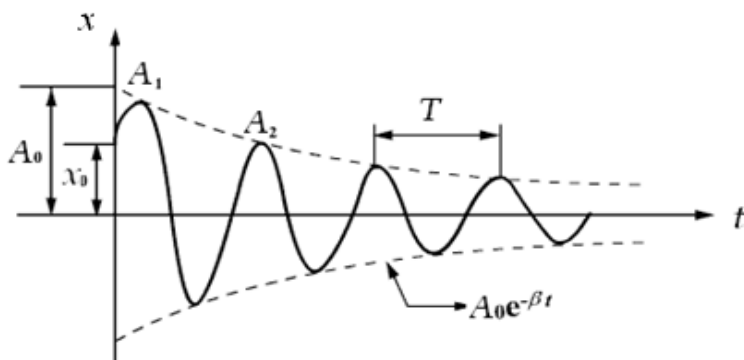


Рис. 9. Зависимость смещения и амплитуды затухающих колебаний от времени

Скорость затухания колебаний характеризуется величиной которую называют **коэффициентом затухания**:

$$\beta = \frac{r}{2m},$$

Найдем время  $\tau$ , в течение которого амплитуда уменьшается в  $e$  раз.

$$\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e,$$

$$e^{\beta\tau} = e,$$

$$\beta\tau = 1, \quad \beta = \frac{1}{\tau}.$$

Следовательно, коэффициент затухания обратен по величине такому промежутку времени, за который амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз.

С учетом выражения для амплитуды колебания смещение колеблющегося тела, совершающего затухающие колебания, запишется как

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Подставив формулу (13) в первое уравнение системы (12), имеем

$$A_0 e^{-\beta t} (\omega_0^2 - \omega^2 - \beta^2) = 0,$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2 - \beta^2) = 0.$$

Тогда частота и период затухающих колебаний соответственно равны

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2},$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

При очень малом сопротивлении среды ( $\beta^2 \ll \omega_0^2$ ) период колебаний практически равен  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ . С ростом  $\beta$  период колебаний

увеличивается и при  $\beta > \omega_0$  решение дифференциального уравнения (10) показывает, что колебания не совершаются, а происходит монотонное движение системы к положению равновесия. Такое движение называют **апериодическим**.

Для характеристики скорости затухания колебаний используют еще два параметра: **декремент затухания  $D$**  и **логарифмический декремент  $\lambda$** .

*Декремент затухания показывает во сколько раз уменьшается амплитуда колебаний за время одного периода  $T$*

$$D = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}.$$

Натуральный логарифм от декремента затухания есть *логарифмический декремент затухания*  $\lambda$ .

$$\lambda = \ln D = \ln e^{\beta T} = \beta T.$$

Так как  $\beta = \frac{1}{\tau}$ , то

$$\lambda = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{\tau/T} = \frac{1}{N_e},$$

где  $N_e$  – число полных колебаний за время  $\tau$ .

*Следовательно, логарифмический декремент затухания обратен по величине числу полных колебаний, совершаемых за время, в течение которого амплитуда уменьшается в  $e$  раз.*

Для характеристики колебательной системы часто используется также величина

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e,$$

которая называется **добротностью колебательной системы**. Как видно из ее определения, добротность пропорциональна числу колебаний  $N_e$ , совершаемых системой за то время  $\tau$ , за которое амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз.

## Порядок выполнения работы

### I. Ознакомление с описанием физического маятника.

Физический маятник состоит из стального стержня, жестко закрепленного одним концом на опорной призме, установленной на горизонтальной площадке кронштейна. Кронштейн крепится на вертикальных стойках, укрепленных на опорной плите. На другом конце стержня находится *демпфер, выполненный в виде пластинки*, положение плоскости которого можно изменять с помощью винта, позволяя таким образом изменять сопротивление движению маятника.

**Зарисуйте схему установки.**

## II. Определение момента инерции физического маятника для двух положений демпфера: горизонтального и вертикального.

1. Поставьте демпфер в горизонтальное положение.
2. Отклоните маятник от положения равновесия на **100 делений**.
3. Одновременно отпустите маятник и включите секундомер.
4. Насчитав  $N = 10$  **полных колебаний**, выключите секундомер.
5. Проведите измерения времени  $\tau$  3 раза, когда демпфер расположен в плоскости колебаний маятника.
6. Рассчитайте период колебаний

$$T = \frac{\tau}{N},$$

где  $\tau$  – время, за которое маятник совершает  $N$  колебаний.

7. Рассчитайте момент инерции физического маятника по формуле

$$I = \frac{mgd T^2}{4\pi^2}.$$

Масса маятника

$$(m \pm \Delta m) = (1,755 \pm 0,001) \text{ кг.}$$

Расстояние маятника от центра тяжести до оси вращения

$$(d \pm \Delta d) = (0,472 \pm 0,001) \text{ м.}$$

8. Рассчитайте относительную  $\varepsilon = \frac{\Delta I}{I}$  и абсолютную  $\Delta I$  погрешности для момента инерции по формулам:

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta T}{T} + 2 \frac{\Delta \pi}{\pi},$$

$$\Delta I = I \cdot \varepsilon_i,$$

где  $g = 9,8 \pm 0,1 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения и его абсолютная погрешность;

$$\pi = 3,14 \pm 0,01.$$

Относительную погрешность для периода вычислите по формуле

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{0,001}{T_{\text{ср}}}$$

9. Полученные значения погрешностей момента инерции *округлите* и занесите в табл. 1. Затем округлите значение момента инерции для горизонтального положения демпфера и результат запишите в табл. 1.

10. Поставьте *демпфер перпендикулярно плоскости колебаний* маятника и повторите пункты 2–9.

11. Полученные значения момента инерции и его погрешностей для вертикального положения демпфера занесите в табл. 1.

Таблица 1

Положение демпфера	№ опыта	$\tau$ , с	$T$ , с	$T_{\text{ср}}$ , с	$\frac{\Delta T}{T}$	$I$ , кг·м <sup>2</sup>	$\frac{\Delta I}{I}$	$\Delta I$ , кг·м <sup>2</sup>	$(I \pm \Delta I)$ , кг·м <sup>2</sup>
горизонтальное	1								
	2								
	3								
вертикальное	1								
	2								
	3								

### III. Определение логарифмического декремента затухания, коэффициента затухания и коэффициента сопротивления среды.

1. Измерьте число полных колебаний маятника  $N$ , за время которых амплитуда колебаний уменьшится от  $A_0$  до  $A_t$  (от 100 до 53 делений) для *горизонтального расположения демпфера*.

2. Отклоните маятник от положения равновесия до амплитуды  $A_0$  (на 100 делений).

3. Отпустив маятник, сосчитайте число полных колебаний маятника до момента, когда амплитуда колебаний станет равной  $A_t = 53$  деления. Результаты измерений занесите в табл. 2.

4. Произведите измерения числа полных колебаний маятника для *вертикального положения демпфера* (демпфер расположен перпендикулярно плоскости колебаний маятника). Результаты измерений занесите в табл. 2.

Таблица 2

Положение демпфера	№ опыта	$A_0$ , дел.	$A_t$ , дел.	$N$	$\Delta N$	$\lambda$	$\Delta\lambda$	$\beta$ , $\text{с}^{-1}$	$\Delta\beta$ , $\text{с}^{-1}$	$r$ , $\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^{-1}$	$\Delta r$ , $\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^{-1}$
горизонтальное	1	100	53		1						
вертикальное	2	100	53		1						

**Внимание:** значения периодов колебаний и моментов инерции маятника для двух положений демпфера взять из табл. 1.

5. Рассчитайте по полученным данным для каждого положения демпфера:

а) коэффициент затухания  $\beta$  по формуле

$$\beta = \frac{1}{NT} \ln \frac{A_0}{A_t},$$

и его относительную и абсолютную погрешности

$$\varepsilon_\beta = \frac{\Delta\beta}{\beta} = \frac{\Delta N}{N} + \frac{\Delta A_0}{A_0} \cdot \frac{1}{\ln \frac{A_0}{A_t}} + \frac{\Delta A_t}{A_t} \cdot \frac{1}{\ln \frac{A_0}{A_t}} + \frac{\Delta T}{T},$$

$$\Delta\beta = \beta \cdot \varepsilon_\beta.$$

б) логарифмический декремент затухания  $\lambda$  по формуле

$$\lambda = \beta T,$$

его относительную и абсолютную погрешности

$$\varepsilon_\lambda = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\beta}{\beta} + \frac{\Delta T}{T},$$

$$\Delta\lambda = \lambda \cdot \varepsilon_\lambda.$$

в) рассчитайте коэффициент сопротивления среды  $r$

$$r = 2\beta I,$$

и его относительную и абсолютную погрешности

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta \beta}{\beta} + \frac{\Delta l}{l}, \quad \Delta r = r \cdot \varepsilon_r.$$

6. Полученные значения физических величин и их погрешностей *округлите* и занесите в табл. 2.

#### **IV. Сделайте выводы.**

### **Контрольные вопросы**

1. Что называется колебательным движением?
2. Как классифицируются колебания в зависимости от физической природы?
3. Назовите признаки колебательного движения.
4. Какие колебания называются свободными, какие затухающими?
5. Запишите уравнение гармонических колебаний и дайте определения амплитуды, фазы, частоты, периода, циклической частоты и смещения.
6. Получите формулы для скорости и ускорения при гармонических колебаниях.
7. Какая сила называется квазиупругой?
8. Получите дифференциальное уравнение гармонических колебаний.
9. Что такое гармонический осциллятор?
10. Дайте определение математического, пружинного и физического маятников. Запишите для них выражения для собственных частот и периодов колебаний.
11. Запишите второй закон Ньютона для затухающих колебаний в данной лабораторной работе и получите из него дифференциальное уравнение затухающих колебаний.
12. Чему равна амплитуда затухающих колебаний?
13. Каков физический смысл коэффициента затухания, декремента затухания и логарифмического коэффициента затухания?
14. Как вычисляется момент инерции физического маятника?

## ИЗУЧЕНИЕ СЛОЖЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

**Цель работы:** изучить теоретический материал по сложению гармонических колебаний, промоделировать на ЭВМ сложение одинаково направленных и взаимно перпендикулярных гармонических колебаний.

**Приборы:** компьютер.

### 1. Гармонические колебания

#### 1.1. Характеристики гармонических колебаний

**Колебаниями** называются движения или процессы, обладающие той или иной повторяемостью во времени. Таким свойством повторяемости обладают, например, качания маятника часов, колебания струны, напряжение между обкладками конденсатора в контуре радиоприемника и т.п.

Колебания широко распространены в природе и технике. Во многих случаях они играют отрицательную роль. Колебания моста, возникающие из-за толчков, сообщаемых ему колесами поезда при прохождении через стыки рельсов, колебания (вибрации) корпуса корабля, вызванные вращением гребного винта, вибрации крыльев самолета – все эти процессы могут привести к катастрофическим последствиям. В этих случаях задача состоит в том, чтобы предотвратить возникновение колебаний или воспрепятствовать тому, чтобы колебания привели к опасным последствиям.

В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему различают свободные (или собственные) колебания, вынужденные колебания, автоколебания.

**Свободными** или **собственными** называются такие колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как ей был сообщен толчок или она была выведена из положения равновесия. Примером могут служить колебания шарика, подвешенного на нити.

**Вынужденными** называются такие колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней пе-



риодически изменяющейся силы. Примером служат колебания моста, возникающие при прохождении по нему людей, шагающих в ногу.

**Автоколебания**, как и вынужденные колебания, сопровождаются воздействием на колеблющуюся систему внешней силы, однако моменты времени, когда осуществляются эти взаимодействия, задаются самой колеблющейся системой – система сама управляет внешним воздействием. Примером автоколебательной системы являются часы, в которых маятник получает толчки за счет энергии поднятой гири или закрученной пружины, причем эти толчки происходят в моменты прохождения маятника через среднее положение.

Простейшими являются гармонические колебания, то есть такие колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса. Этот вид колебаний особенно важен по двум причинам. Во-первых, колебания в природе и технике часто имеют характер очень близкий к гармоническим колебаниям. Во-вторых, периодические процессы с другой зависимостью от времени могут быть представлены как наложение нескольких гармонических колебаний.

Гармонические колебания описываются следующими формулами:

$$x = A\sin(\omega t + \alpha) \quad \text{или} \quad x = A\cos(\omega t + \alpha), \quad (14)$$

где  $x$  – величина, характеризующая отклонения колеблющейся системы от положения равновесия;

$A$  – величина максимального отклонения от положения равновесия, которая называется амплитудой колебаний;

$\omega$  – циклическая частота колебаний;

$t$  – текущее время;

$\alpha$  – начальная фаза колебаний.

Колебания совершаются около среднего положения (положения равновесия), соответствующего  $x = 0$ .

Величина  $(\omega t + \alpha)$ , стоящая под знаком синуса или косинуса, называется **фазой колебаний**. Постоянная величина  $\alpha$  представляет собой значение фазы в момент времени  $t = 0$  и называется **начальной фазой** колебаний. С изменением начала отсчета времени изменяется и  $\alpha$ . Следовательно, значение начальной фазы определяется выбором начала отсчета времени.

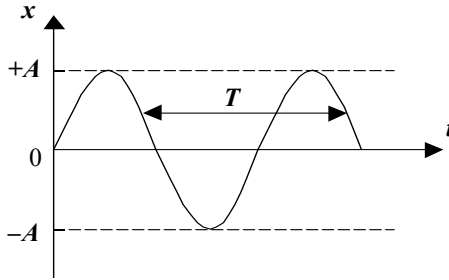


Рис. 10. График гармонического колебания:  
 $T$  – период,  $A$  – амплитуда колебания

Поскольку синус и косинус – периодические функции с периодом  $2\pi$ , различные состояния системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через такой промежуток времени  $T$ , за который фаза колебаний получает приращение, равное  $2\pi$ . Этот промежуток времени  $T$  называется **периодом колебаний**. Он может быть определен из условия  $[\omega(t + T) + \alpha] = (\omega t + \alpha) + 2\pi$ , откуда

$$T = 2\pi / \omega. \quad (15)$$

Число колебаний в единицу времени называется **частотой колебаний**  $\nu$ . Очевидно, что частота  $\nu$  связана с периодом колебаний  $T$  соотношением

$$\nu = 1/T.$$

За единицу частоты принимается частота такого колебания, период которого равен 1 с. Эту единицу называют герцем (Гц). Частота в  $10^3$  Гц называется килогерцем (кГц), в  $10^6$  Гц – мегагерцем (МГц).

Из формулы (15) следует, что

$$\omega = 2\pi/T.$$

Таким образом,  $\omega$  равна числу колебаний за  $2\pi$  секунд. Величину  $\omega$  называют **круговой** или **циклической частотой**. Она связана с частотой соотношением

$$\omega = 2\pi\nu.$$

Рассмотрение многих вопросов колебательного движения значительно облегчается и становится наглядным, если изображать колебания графически в виде векторов на плоскости (рис. 11). Полученная таким образом схема называется **векторной диаграммой**.

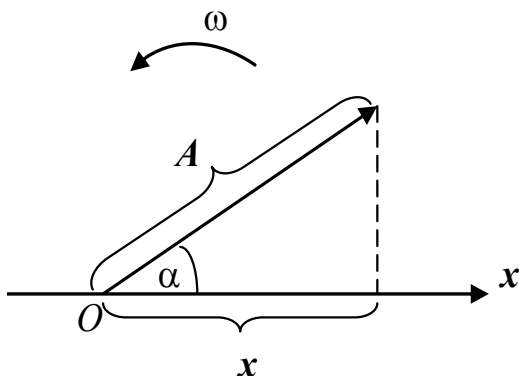


Рис. 11. Векторная диаграмма гармонического колебания с амплитудой  $A$  и начальной фазой  $\alpha$

Возьмем ось, вдоль которой будем откладывать колеблющуюся величину  $x$  (рис. 11). Из взятой на оси точки  $O$  отложим вектор длины  $A$ , образующий с осью угол  $\alpha$ . Если привести этот вектор во вращение с угловой скоростью  $\omega$ , то проекция конца вектора будет перемещаться по оси  $x$  в пределах от  $-A$  до  $+A$ , причем координата этой проекции будет изменяться со временем по закону

$$x = A \cos(\omega t + \alpha)$$

Следовательно, проекция конца вектора на ось  $Ox$  будет совершать гармонические колебания с амплитудой, равной длине вектора  $\vec{A}$  с круговой частотой  $\omega$ , равной угловой скорости вращения вектора, и с начальной фазой  $\alpha$ , равной углу, образуемому вектором с осью  $Ox$  в начальный момент времени.

Таким образом, гармоническое колебание может быть задано с помощью вращающегося вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а начальное направление образует с осью  $Ox$  угол, равный начальной фазе колебаний.

## 1.2. Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний

Пусть на материальную точку массой  $m$  действует квазиупругая сила  $F = -kx$ , то есть сила  $F$  пропорциональна смещению точки  $x$  из положения равновесия. Такую систему можно представить в виде небольшого груза массой  $m$ , подвешенного на упругой пружине жесткостью  $k$ . Если материальную точку вывести из состояния равновесия, то

$$ma = -kx, \quad (16)$$

где ускорение  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ .

Поэтому уравнение (16) представим в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad (17)$$

где  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

Прямой подстановкой можно убедиться, что любая функция вида (14) является решением уравнения (17), которое называется **дифференциальным уравнением свободных гармонических колебаний с циклической частотой  $\omega$** .

Заметим, что система, совершающая гармонические колебания, называется гармоническим осциллятором.

Определим скорость и ускорение материальной точки, совершающей гармонические колебания по закону  $x = A \cos(\omega t + \alpha)$ :

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \alpha), \quad (18)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x. \quad (19)$$

Исходя из этих уравнений, найдем кинематическую и потенциальную энергию гармонического осциллятора. Кинетическая энергия с учетом (18) равна:

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \sin^2(\omega t + \alpha)$$

или

$$K = \frac{mA^2\omega^2}{2} [1 - \cos 2(\omega t + \alpha)]. \quad (20)$$

Потенциальная энергия:

$$\Pi = -\int_0^x F dx.$$

В связи с тем, что сила  $F = ma$ , то с учетом формулы (19)  $F = -m\omega^2 x$ . Тогда:

$$\Pi = \int_0^x m\omega^2 x dx = m\omega^2 \frac{x^2}{2},$$

или, подставляя  $x$ , получим:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{m\omega^2 A^2}{2} \cos^2(\omega t + \alpha), \\ \Pi &= \frac{m\omega^2 A^2}{2} (1 + \cos 2(\omega t + \alpha)). \end{aligned} \quad (21)$$

Полная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания, с учетом выражений (20), (21) примет вид:

$$E = K + \Pi = \frac{m\omega^2 A^2}{2}. \quad (22)$$

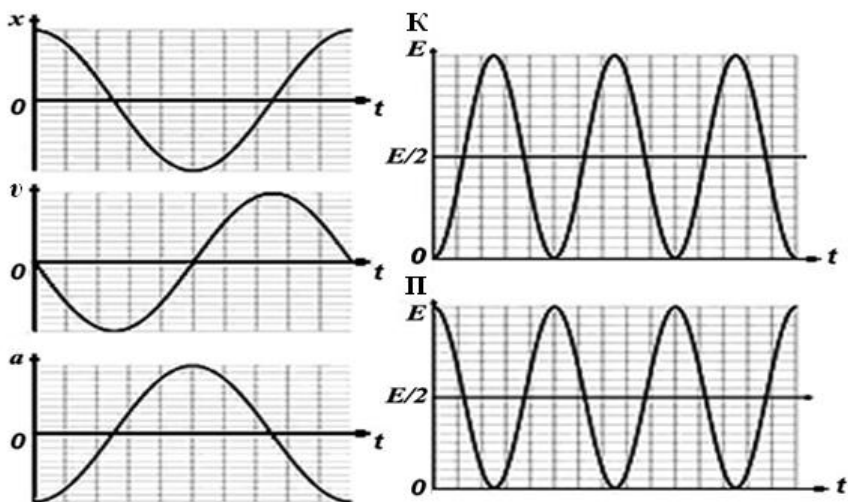


Рис. 12. Зависимость смещения  $x$ , скорости  $v$ , ускорения  $a$ , кинетической  $K$  и потенциальной  $\Pi$  энергий от времени материальной точки, совершающей гармоническое колебание

Таким образом, полная энергия, описываемая выражением (22), остается постоянной. Так как упругая сила консервативна, то при гармонических колебаниях выполняется закон сохранения механической энергии.

Как видно из представленных на рис. 12 зависимостей, фаза скорости материальной точки, совершающей гармонические колебания, отличается от фазы координаты на  $\pi/2$ , а фаза ускорения от фазы координаты – на  $\pi$ . Кинетическая и потенциальная энергии изменяются с частотой, которая в два раза превышает частоту гармонического колебания.

## 2. Сложение гармонических колебаний

### 2.1. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Результирующее колебание  $x$  будет суммой колебаний  $x_1$  и  $x_2$ , которые определяются функциями

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + a_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + a_2). \quad (23)$$

Представим оба колебания с помощью вращающихся векторов  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  (рис. 13). Построим по правилам сложения векторов результирующий вектор  $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ . Из рис. 13 видно, что проекция этого вектора на ось  $Ox$  равна сумме проекций складываемых векторов:

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + a). \quad (24)$$

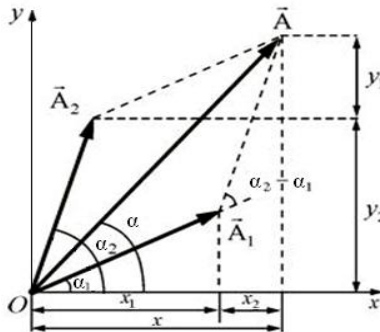


Рис. 13. Векторное сложение двух гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты

Следовательно, результирующее колебание может быть представлено с помощью вращающегося вектора  $\vec{A}$ . Этот вектор вращается с той же угловой скоростью  $\omega$ , как и векторы  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$ , так что сумма  $x_1$  и  $x_2$  является гармоническим колебанием с частотой  $\omega$ , амплитудой  $A$  и начальной фазой  $a$ .

Из рис. 13 вытекает, что длину вектора  $\vec{A}$  можно определить по теореме косинусов:

$$\begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)) = \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1). \end{aligned} \quad (25)$$

Начальная фаза результирующего колебания, как следует из рис. 13, может быть найдена:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_{1x} + A_{2x}}{A_{1y} + A_{2y}} = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2} \quad (26)$$

где  $A_{1x}$ ,  $A_{2x}$ ,  $A_{1y}$ ,  $A_{2y}$  – проекции векторов  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  на оси  $Ox$  и  $Oy$  соответственно.

Исследуем выражение (25) для амплитуды. Если разность фаз колебаний  $(\alpha_2 - \alpha_1)$  равна  $+\pi$  или  $-\pi$ , то есть колебания находятся в противофазе, то амплитуда результирующего колебания равна  $|A_1 - A_2|$ . Если  $(\alpha_2 - \alpha_1) = 0$  или  $2\pi$ , то амплитуда результирующего колебания равна  $A_1 + A_2$ .

Если частоты колебаний  $x_1$  и  $x_2$  неодинаковы, векторы  $A_1$  и  $A_2$  будут вращаться с различной скоростью. В этом случае результирующий вектор  $A$  вращается с непостоянной скоростью, а его модуль изменяется в пределах от  $|A_1 - A_2|$  до  $A_1 + A_2$ . Следовательно, результирующее колебание не будет гармоническим.

## **2.2. Сложение гармонических колебаний одного направления с мало отличающимися частотами**

Пусть тело участвует в двух сонаправленных гармонических колебаниях, описываемых уравнениями

$$\begin{cases} x_1 = A \cos \omega t \\ x_2 = A \cos(\omega + \Delta\omega)t \end{cases}, \quad \Delta\omega \ll \omega.$$



Первое колебание совершается с частотой  $\omega$ , второе – с частотой  $(\omega + \Delta\omega)$ . Здесь для простоты рассмотрены колебания с одинаковой амплитудой и с нулевыми значениями начальных фаз. Полученные выводы останутся качественно верными и в общем случае, когда амплитуды колебаний различны и начальные фазы отличны от нуля. В данном случае удобнее проводить суммирование колебаний аналитически

$$x_1 + x_2 = A \cos \omega t + A \cos (\omega + \Delta\omega)t = 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \cos \omega t. \quad (27)$$

При получении выражения (27) использована формула суммы косинусов:

$$\cos \omega t + \cos (\omega + \Delta\omega)t = 2 \cos \frac{\omega t + (\omega + \Delta\omega)t}{2} \cos \frac{\omega t - (\omega + \Delta\omega)t}{2}.$$

Учитывая, что  $\Delta\omega \ll \omega$ , получим:

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \cos \omega t. \quad (28)$$

Очевидно, что описываемое уравнением (28) колебание не является гармоническим. Обозначим амплитуду этих колебаний через

$$A(t) = 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t.$$

В результате получаем колебания с периодически изменяющейся амплитудой

$$x = A(t) \cos \omega t. \quad (29)$$

Такие колебания называются **биениями**. **Периодом биений** называют величину  $T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ . Период биений равен промежутку времени, за который амплитуда биений изменяется от максимального до минимального значения и обратно (рис. 14).

Первый множитель в формуле (28) изменяется гораздо медленнее, чем второй. Ввиду условия  $\Delta\omega \ll \omega$ , время, за которое  $\cos\omega t$  совершает несколько полных колебаний, первый множитель почти не изменяется. Это дает основание рассматривать процесс как гармоническое колебание частоты  $\omega$ , амплитуда которого изменяется по некоторому периодическому закону. Выражением этого закона не может быть множитель  $A(t)$ , так как он изменяется в пределах от  $-2A$  до  $+2A$ , в то же время как амплитуда по определению – положительная величина.

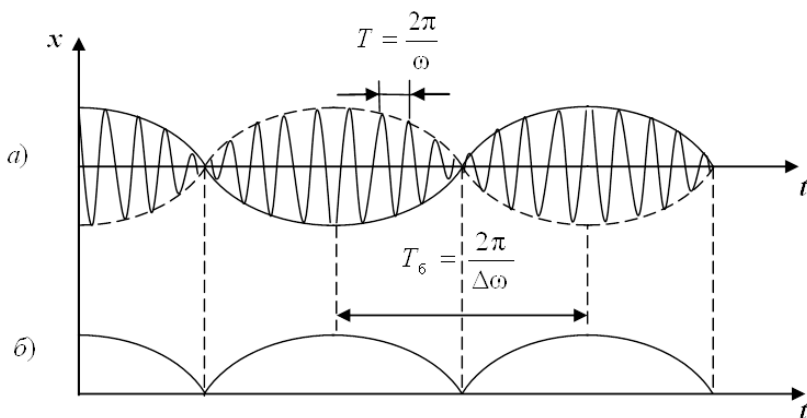


Рис. 14. График биений:  
 а) график функции; б) график амплитуды

Эффект биений используют для сравнения частот двух источников сигналов с целью подстройки частоты одного источника под частоту другого. В процессе подстройки частоту регулируемого источника изменяют таким образом, чтобы период биений увеличивался, до тех пор, пока биения не исчезнут, это будет означать, что частоты совпадают.

Настройка музыкального инструмента по камертону, другому инструменту или электронному тюнеру тоже основана на биениях. В первом и втором случаях музыкант (настройщик) улавливает колебания громкости суммарного звука (от инструмента и камертона или эталонного инструмента) непосредственно ухом. В третьем случае сравнение частот происходит с помощью электроники. Если

частота инструмента незначительно отличается от частоты камертона, то слышно, что звук пульсирует – это и есть биения.

Эффект биений используется в электронике для вычитания частот сигналов. Например, в супергетеродинных радиоприемниках биения между частотами гетеродина и принимаемого сигнала преобразуются в промежуточную частоту, сигнал которой далее усиливается.

### 2.3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Рассмотрим результат сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей  $x$  и  $y$ . Для простоты начало отсчета выберем так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю:

$$x = A \cos \omega t, \quad (30)$$

$$y = B \cos(\omega t + \alpha), \quad (31)$$

где  $\alpha$  – разность фаз складываемых колебаний;

$A$  и  $B$  – амплитуды складываемых колебаний.

Из формулы (30) получим:

$$\cos \omega t = \frac{x}{A},$$

а из уравнения (31)

$$\cos(\omega t + \alpha) = \frac{y}{B} = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha.$$

Заменяя во втором уравнении  $\cos \omega t$  на  $\frac{x}{A}$ , а  $\sin \omega t$  на  $\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}$ ,

получаем уравнение эллипса, оси которого ориентированы произвольным образом относительно координатных осей:

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \alpha + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \alpha. \quad (32)$$

Таким образом, траектория результирующего колебания в этом случае имеет форму эллипса. Такие колебания называют *эллиптически поляризованными* (рис. 15, в).

Ориентация эллипса и размеры его осей зависят от амплитуды складываемых колебаний и разности фаз  $\alpha$ .

Рассмотрим некоторые частные случаи, если  $\alpha = 2m\frac{\pi}{2}$ , то эллипс вырождается в отрезок прямой:

$$y = \pm \frac{B}{A}x,$$

где знак «+» соответствует нулю и четным значениям  $m = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$ , а знак «-» нечетным  $m = \pm 1, \pm 3, \dots$

Такие колебания называют *линейно поляризованными* (рис. 15, а и 15, б).

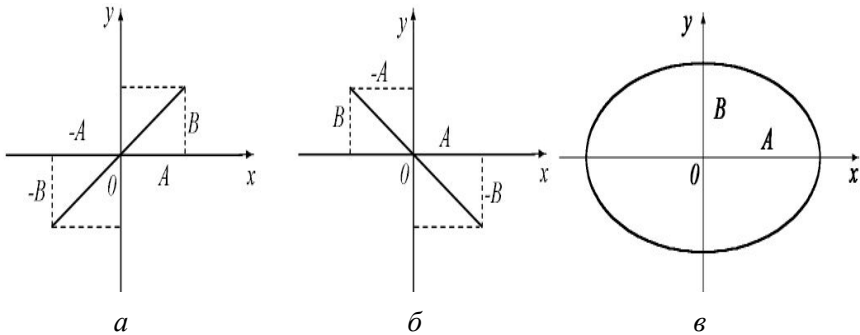


Рис. 15. Колебания имеют вид:  
а) и б) линейно поляризованные колебания;  
в) эллиптически поляризованные

Если  $\alpha = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$ , ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), то уравнение примет вид:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \quad (33)$$

Выражение (33) – это уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат, если  $A = B$ , то эллипс вырождается в окружность. Такие колебания называются *циркулярно поляризованными* или *поляризованными по кругу*.

Если частоты складываемых взаимно перпендикулярных колебаний различны, то замкнутая траектория результирующего колебания довольно сложна.

Замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей одновременно два взаимно перпендикулярных колебания, называются **фигурами Лиссажу**. Форма этих кривых зависит от соотношения амплитуд, частот и разности фаз складываемых колебаний. Это обстоятельство используется в измерительной технике для исследования соотношений частот и разности фаз складываемых колебаний. Например, если частоты складываемых колебаний  $\omega_x$  и  $\omega_y$  относятся как два целых числа  $n$  и  $m$ :

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{n}{m},$$

то для определения соотношения  $\frac{\omega_x}{\omega_y}$  используется следующее пра-

вило. Проводят через данную фигуру две произвольные взаимно перпендикулярные прямые  $EC$  и  $DP$ , параллельные осям  $Ox$  и  $Oy$  (рис. 16). Подсчитывают число точек пересечения фигуры и прямой  $DP$ . Это число равно величине  $n$ . Аналогично число пересечений фигуры и прямой  $EC$  равно величине  $m$ . В случае, когда прямая проходит через точку пересечения ветвей фигуры, при подсчете ее считают дважды.

По виду фигур можно определить неизвестную частоту по известной или определить отношение частот складываемых колебаний. Поэтому анализ фигур Лиссажу – широко используемый метод исследования соотношений частот и разности фаз складываемых колебаний, а также формы колебаний.

На рис. 17 представлены фигуры Лиссажу для различных соотношений частот (указаны слева) и разностей фаз (указаны сверху) складываемых колебаний.

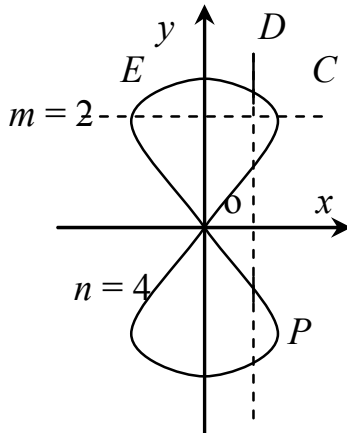


Рис. 16. К определению соотношения частот складываемых колебаний

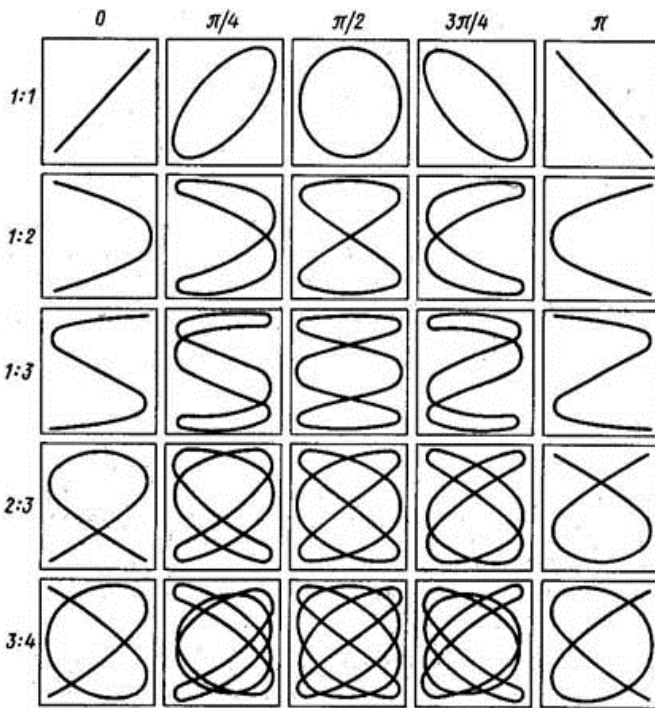


Рис. 17. Фигуры Лиссажу

## Порядок выполнения лабораторной работы D1.

*Задание 1. Промоделировать на ПК сложение одинаково направленных колебаний с одинаковыми частотами.*

1. Промоделируйте сложение двух одинаково направленных колебаний  $x_i = \cos(\omega t + \alpha_i)$  для значений разности фаз  $\Delta\alpha = k \frac{\pi}{4}$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots, 19, 20$ . Введите  $k$ , нажмите «Построить». Определите из графика амплитуду результирующего колебания  $x = x_1 + x_2 = A_{\text{рез}} \cos(\omega t + \alpha)$  (график красного цвета).

2. Определяемые из графиков значения  $A_{\text{рез}}$  округлите с точностью до сотых и внесите в табл. 1.

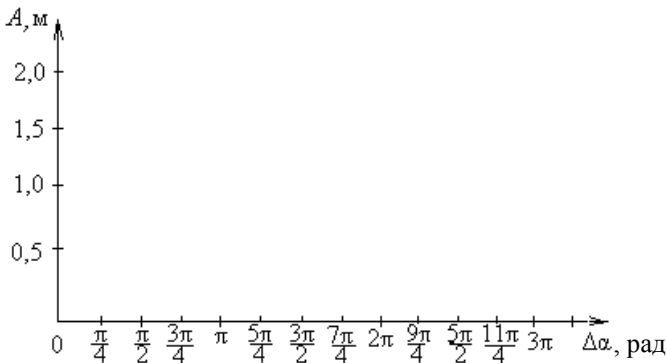
Таблица 1

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Delta\alpha$ , рад.	0	$\pi/4$	$2\pi/4$	$3\pi/4$	$\pi$	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	$2\pi$	$9\pi/4$
$A$ , м										

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$5\pi/2$	$11\pi/4$	$3\pi$	$13\pi/4$	$7\pi/2$	$15\pi/4$	$4\pi$	$17\pi/4$	$9\pi/2$	$19\pi/4$	$5\pi$

3. По результатам табл. 1 постройте график зависимости  $A_{\text{рез}}$  от  $\Delta\alpha$ . Проанализируйте полученную зависимость  $A_{\text{рез}}(\Delta\alpha)$ .

4. Сделайте выводы.



*Задание 2. Промоделировать сложение двух одинаково направленных гармонических колебаний с мало различающимися частотами (биения).*

1. Промоделируйте сложение двух одинаково направленных колебаний с мало различающимися частотами  $\omega_1 = 100 \text{ с}^{-1}$  и  $\omega_2 = (100 + \Delta\omega) \text{ с}^{-1}$  (биения):

$x_1 = 5\cos 100t$  и  $x_2 = 5\cos(100 + \Delta\omega)t$  при значениях  $\Delta\omega$ :

а)  $\Delta\omega_1 = 1 \text{ с}^{-1}$ ;

б)  $\Delta\omega_2 = 2 \text{ с}^{-1}$ ;

в)  $\Delta\omega_3 = 3 \text{ с}^{-1}$ .

По графикам биений определите значения периодов биений  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  для заданных значений  $\Delta\omega$ .

2. Сделайте выводы о зависимости периода биений от разности частот  $\Delta\omega$ .

*Задание 3. Промоделировать сложение взаимно перпендикулярных колебаний.*

1. Промоделируйте на компьютере сложение двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний:

$$x = \cos(\omega_x t + \alpha_1) \text{ (м)} \text{ и } y = \cos(\omega_y t + \alpha_2), \text{ м}$$

для различных значений отношений частот  $\frac{\omega_x}{\omega_y}$  и различных значений

разности начальных фаз  $\Delta\alpha = (\alpha_2 - \alpha_1)$  в соответствии с табл. 2.

2. Зарисуйте в табл. 2 полученные на экране компьютера фигуры Лиссажу.

3. По полученным фигурам определите отношение  $n/m$  и сопоставьте их с отношениями частот  $\frac{\omega_x}{\omega_y}$ .



Таблица 2

$\frac{\omega_x}{\omega_y}$ \diagdown $\Delta\alpha,$ град.	$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$	$n/m$
$\frac{1}{1}$						
$\frac{1}{2}$						
$\frac{1}{3}$						
$\frac{2}{3}$						

4. Сделайте выводы о зависимости вида фигур Лиссажу от соотношений  $\frac{\omega_x}{\omega_y}$  и разности начальных фаз  $\Delta\alpha$ .

### Контрольные вопросы

1. Какие колебания называют гармоническими?
2. Дайте определение следующих величин: амплитуда, период, частота, круговая (циклическая) частота, фаза, начальная фаза колебаний.
3. На основании результатов моделирования сформулируйте условия, при которых при сложении двух колебаний одного направления и одинаковой частоты амплитуда результирующего колебания имеет максимальные и минимальные значения.
4. Какие колебания называются биениями?
5. Что называется периодом биений и от чего он зависит?
6. Для каких целей может быть использован метод биений?
7. Что называется фигурами Лиссажу?
8. Для чего могут использоваться фигуры Лиссажу в измерительной технике?

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Акимов, А. И. Особенности ИК спектров сегнетокерамики на основе ЦТС, обработанной высоким давлением холодного прессования / А. И. Акимов, Г. К. Савчук, А. Л. Карпей // Журнал прикладной спектроскопии, 2000. – Т. 67. – № 6. – С. 711–715.
2. Акимов, А. И. Колебания кристаллической решетки твердых растворов цирконата-титаната свинца / А. И. Акимов, Г. К. Савчук, Т. М. Акимова // Журнал прикладной спектроскопии, 2003. – Т. 70. – № 4. – С. 444–447.
3. Сборник задач по общему курсу физики. В 2 ч. / П. Г. Кужир, Н. П. Юркевич, Г. К. Савчук; кол. авт. БНТУ. – 3-е изд. – Минск: БНТУ, 2014. Ч. 1: Механика. Статистическая физика и термодинамика. – 219 с.
4. Детлаф, А. А. Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М.: Академия, 2008. – 720 с.
5. Савельев, И. В. Курс общей физики: в 3 т. / И. В. Савельев. – М.: Лань, 2018. – Т. 1. – 436 с.
6. Сивухин, Д. В. Общий курс физики: в 5 т. / Д. В. Сивухин. – М.: Физматлит, 2005. – Т. 1. – 560 с.
7. Матвеев, А. Н. Курс общей физики: в 5 Ч. / А. Н. Матвеев. – М.: ОНИКС 21 век, 2003. – Т. 1. – 432 с.
8. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М.: Академия, 2006. – 560 с.

Учебное издание

## **МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ**

Пособие для студентов специальностей  
1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»;  
1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана  
воздушного бассейна»; 1-70 04 03 «Водоснабжение,  
водоотведение и охрана водных ресурсов»;  
1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»

Составители:

**ЕСМАН** Александр Константинович  
**ЮРКЕВИЧ** Наталья Петровна  
**САВЧУК** Галина Казимировна  
**КУЖИР** Павел Григорьевич и др.

Редактор *В. И. Акуленок*

Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 28.02.2020. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 2,96. Уч.-изд. л. 2,32. Тираж 200. Заказ 179.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя  
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.