УДК 536.62.50

УПРАВЛЕНИЕ ТЕПЛОТЕХНОЛОГИЧЕСКИМ ПРОЦЕССОМ С УЧЕТОМ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

Канд. техн. наук, доц. ВОРОНОВА Н. П.

Белорусский национальный технический университет

Бурное развитие науки и техники приводит к тому, что технологические процессы описываются математическими моделями не только обыкновенными дифференциальными уравнениями (системами с сосредоточенными параметрами [1]), но и уравнениями в частных производных (системами с распределенными параметрами [2]). Системы автоматического управления объектами с сосредоточенными параметрам, и особенно линейными объектами, уже относительно хорошо изучены.

Однако в большинстве технических приложений суть объектов управления такова, что описание их небольшим конечным набором сосредоточенных переменных не адекватно ни существу процесса, ни той цели управления, которая поставлена применительно к объекту.

Разработка теории и техники автоматического управления для объектов с распределенными параметрами в общем обусловливается тем, что [3]:

- состояние объекта описывается функциями нескольких независимых переменных;
- движение объекта описывается дифференциальными уравнениями с частными производными, интегро-дифференциальными уравнениями в частных и полных производных;
- управляющие воздействия на объект могут носить самый разнообразный характер. Они могут описываться функциями одной независимой переменной и многих переменных;
- на управляющие воздействия и функции состояния объекта могут накладываться дополнительные ограничения типа равенств и неравенств;
- техническая реализация управляющих систем связана с большими трудностями и проблемами новой технологии.

На основании сказанного можно сделать вывод о важности проблемы оптимальности, управляемости и наблюдаемости. Ряд работ посвящен важной задаче экономичного нагрева в различных технологических процессах [4–6]. Разработок, посвященных анализу процессов управления теплотехническими процессами с учетом термонапряжений, недостаточно.

В [7] рассматривается нагрев конструкции и исследуются термические напряжения, которые в ней возникают. При нагреве термически массивных тел возникают внутренние температурные напряжения, которые могут ограничивать скорость нагрева, особенно в начальной низкотемпературной стадии. Процесс нагрева должен проводиться таким образом, чтобы термонапряжения не превышали максимально допустимые значения с точки зрения появления различных микродефектов, а также возможности разрушения тела. В частности, при решении задач оптимального по быстродействию нагрева термически массивных тел необходимо учитывать не только управляющее воздействие, т. е. температуру греющей среды, но и ограничения на фазовые координаты (термонапряжения). Решение задачи оптимального по быстродействию нагрева термически массивного тела с учетом ограничений на термонапряжения гораздо сложнее, чем без учета этих ограничений [2].

Применяя метод, позволяющий ограничения на фазовые координаты заменить ограничениями на управляющее воздействие, упрощается выбор допустимой скорости нагрева, в частности при решении задач оптимального управления.

Рассмотрим теплотехнический процесс, описываемый системой:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(l,\varphi)}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial^2 u(l,\varphi)}{\partial l^2}; \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{l=1} = b\left[Q(\varphi) - u(1,\varphi)\right]; \\ -\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{l=-1} = b\left[Q(\varphi) - u(-1,\varphi)\right]; \quad u(l;0) = \nu; \\ -(1-\chi) \le Q(\varphi) \le 1+\chi, \end{cases} \tag{1}$$

где $\varphi = \dfrac{at}{s^2}$ – безразмерное время; $l = \dfrac{x}{s}$ – безразмерная толщина $(-1 \le l \le 1)$; $b = \dfrac{\alpha s}{\lambda}$ – критерий Био; ν – безразмерная начальная диффузия; χ – безразмерная температура (критерий несимметричности нагрева, $|\chi| < 1$); $u(l,\varphi)$ – температура; $Q(\varphi)$ – температура греющей среды.

Система (1) описывает процесс нагрева пластины толщиной $2s$, для которой a, λ, α – соответственно коэффициенты температуропроводности, теплопроводности материала пластины и теплообмена.

Распределение температурных напряжений в пластине согласно [7] приводит к максимальным растягивающим σ_{max} и сжимающим σ_{min} напряжениям в виде

$$\sigma_{\max\min} = \frac{\beta E}{1-\Theta}\frac{s}{3}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=s} f(\mu),$$

где $f(\mu)$ – функция от коэффициента несимметричности нагрева, $\mu = \dfrac{s+c}{2s}$, $c = \text{const}$, которая при нагреве постоянным тепловым потоком в регулярном режиме дает параболическое распределение температуры по толщине пластины

$$u(x,t) = c(t) + c_1(x+c)^2,$$

где $c(t)$ – линейная функция времени; $c_1 = \text{const}$; β – коэффициент линейного расширения; E – модуль упругости.

Для пластины функция $f(\mu)$ определяется следующим образом [2]:

$$f(\mu) = \begin{cases} \left.\begin{array}{l} 3(\mu-1) + \dfrac{1}{\mu}, \ \mu < 1; \\ 3 - \dfrac{2}{\mu}, \ \mu \ge 1; \end{array}\right\} - \text{для } \sigma_{\max}; \\ \left.\begin{array}{l} 3 - \dfrac{2}{\mu}, \ \mu < 0{,}5; \\ \dfrac{1}{\mu} - 3, \ \mu \ge 0{,}5. \end{array}\right\} - \text{для } \sigma_{\min}. \end{cases}$$

Если при нагреве наиболее опасны растягивающие напряжения, то введем ограничение

$$\sigma_{\max} \le \sigma^*_{\max},$$

где $\sigma^*_{\max}$ – предельно допустимое растягивающее напряжение.

На основании этого ограничения можно определить максимально допустимое значение теплового потока и, в свою очередь, по граничному условию задачи (1) – ограничение на температуру греющей среды

$$Q(t) = u(s,t) + \frac{c_m}{\alpha s\, f(\mu)}, \tag{2}$$

где $c_m = \dfrac{3\lambda(1-\theta)\sigma^*_{\max}}{\beta E}$ – коэффициент, зависящий только от материала нагреваемого тела.

В регулярном режиме нагрева можно через внешний теплообмен судить о температурных напряжениях в пластине.

Практическое применение формулы (2) позволяет при ограничении на температуру греющей среды

$$Q(\mu) \le A = \text{const} \tag{3}$$

в начальной стали нагрева, когда растягивающие термонапряжения не достигли максимально допустимой величины, ограничиться только ими. Начиная с момента времени t_1, когда $\sigma_{\max}(t_1) \le \sigma^*_{\max}$, необходимо, кроме ограничения (3), учитывать и ограничение (2). Момент времени t_1 определяется из условия

$$u(s,t_1) = u_0 + \Delta u_{\max},$$

где $\Delta u_{\max}$ – максимально допустимый перепад температур по толщине пластины с точки зрения допустимых термонапряжений. Величину $\Delta u_{\max}$ можно найти по формуле

$$\sigma^*_{\max} = \frac{\beta E}{1-\Theta}\frac{\Delta u_{\max}}{3}\frac{f(\mu)}{\mu^2}.$$

Если $\min u(x,t) \ge \delta$; $-s \le x \le s$, где δ – температура, при которой материал имеет достаточную пластичность для погашения термонапряжений, то можно учитывать только ограничения (3).

Момент времени t_2, когда ограничение (3) теряет силу, может быть определен по выражению

$$u(s,t_2) = \delta + \Delta u_{\max}.$$

Следовательно, для выполнения ограничений на внутренние термонапряжения $\sigma_{\max}$ при использовании соотношения (3) необходимо знать температуру поверхности пластины $u(s,t)$ из системы (1) [6]. Тогда определяются моменты времени t_1 и t_2, между которыми должно быть выполнено ограничение (3), использующее также текущее значение температуры поверхности $u(s,t)$; $t_1 \le t \le t_2$.

Рассмотрим численную реализацию данной задачи на примере решения уравнения

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4},\ 0<x<b;\ 0<t<T, \qquad (4)$$

где u – величина уклонения от стационарного положения; c, a – коэффициенты, характеризующие состояние объекта в момент времени t с координатой x; T – время процесса.

Для того чтобы полностью определить существо процесса, необходимо задать начальные и граничные условия. В качестве начальных условий возьмем начальное уклонение и начальную скорость:

$$u(x,0) = f(x);\ \frac{\partial u}{\partial t} = g(x). \qquad (5)$$

Граничные условия определяют режим изменений на концах объекта:

$$u(0,t)=0;\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t)=0;\ u(b,t)=0;\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(b,t)=0. \qquad (6)$$

Решение задачи удобнее проводить с помощью безразмерных переменных. Произведем замену $x \to x\sqrt{b}$; $t \to \frac{1}{c}t$, тогда решение производится на отрезке [0; 1] и уравнение (4) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}.$$

Решение задачи (4)–(6) осуществим методом сеток, для этого введем две вспомогательные функции $\upsilon(x,t)$ и $\omega(x,t)$ по формулам:

$$\upsilon = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Уравнение (4) заменяется системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \upsilon}{\partial t} = -\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}; \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}. \end{cases} \qquad (7)$$

Дополним систему (7) начальными и граничными условиями:

$$\upsilon(x,0) = g(x);\ \omega(x,0) = f''(x); \qquad (8)$$

$$\upsilon(0,t)=0;\ \omega(0,t)=0;\ \upsilon(1,t)=0;\ \omega(1,t)=0. \qquad (9)$$

Если задача (7)–(9) решена, то решение задачи (4)–(6) находится по формуле

$$u(x,t) = f(x) + \int_0^T \upsilon(x,t)dt. \qquad (10)$$

Частные производные по x будем аппроксимировать их полусуммой центральных разностных производных на слоях j и $j+1$:

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon_{j-1}^{j+1} - 2\upsilon_i^{j+1} + \upsilon_{i+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{\upsilon_{i-1}^{j} - 2\upsilon_i^{j} + \upsilon_{i+1}^{j}}{h^2}\right);$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_{j-1}^{j+1} - 2\omega_i^{j+1} + \omega_{i+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{\omega_{i-1}^{j} - 2\omega_i^{j} + \omega_{i+1}^{j}}{h^2}\right).$$

В частности, получаем систему (7) в разностном виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\upsilon^{j+1}-\upsilon^{j}}{\tau}=\dfrac{\left(\omega_{i-1}^{j+1}-2\omega_{i}^{j+1}+\omega_{i+1}^{j+1}\right)+\left(\omega_{i-1}^{j}-2\omega_{i}^{j}+\omega_{i+1}^{j}\right)}{2h^{2}}; \\ \dfrac{\omega^{j+1}-\omega^{j}}{\tau}=\dfrac{\left(\upsilon_{i-1}^{j+1}-2\upsilon_{i}^{j+1}+\upsilon_{i+1}^{j+1}\right)+\left(\upsilon_{i-1}^{j}-2\upsilon_{i}^{j}+\upsilon_{i+1}^{j}\right)}{2h^{2}}. \end{cases} \tag{11}$$

Система (11) относится к классу неявных и аппроксимирует решение исходной задачи с точностью $O\left(\tau^2+h^2\right)$. Она устойчива при любых соотношениях между τ и h.

Для решения системы (11) рассмотрим вектор

$$Z_i^{j+1}=\begin{pmatrix}\upsilon_i^{j+1}\\ \omega_i^{j+1}\end{pmatrix}.$$

Тогда система примет вид

$$-A_iZ_{i-1}^{j+1}+B_iZ_i^{j+1}-C_{i+1}Z_{i+1}^{j+1}=D_i,\quad i=\overline{1,n-1}, \tag{12}$$

где

$$A_i=C_i=\begin{pmatrix} O & -\dfrac{\tau}{2h^2}; \\ \dfrac{\tau}{2h^2} & O; \end{pmatrix}\quad B_i=\begin{pmatrix} O & -\dfrac{\tau}{2h^2}; \\ \dfrac{\tau}{2h^2} & O; \end{pmatrix}$$

$$D_i=\begin{pmatrix} \upsilon_i-\dfrac{\tau}{2h^2}\left(\omega_{i-1}^{j}-2\omega_i^{j}+\omega_{i+1}^{j}\right); \\ \omega_i+\dfrac{\tau}{2h^2}\left(\upsilon_{i-1}^{j}-2\upsilon_i^{j}+\upsilon_{i+1}^{j}\right). \end{pmatrix}$$

Из начальных условий определяется вектор Z_i^0 на нулевом временном слое. Решив систему (12), получим значение векторов Z_i^1, а по формулам (10) – значения функции u_i^1. Продвигаясь на второй временной слой и далее, получим решение задачи на всем промежутке [0; T].

Решение системы (12) осуществляется методом матричной прогонки. Сначала определяется вспомогательный набор двумерных матриц E_i и векторов F_i по рекуррентным формулам:

$$E_0=0,\ F_0=0;$$

$$E_i=\left(B_i-C_iE_{i-1}\right)^{-1}A_i;$$

$$F_i=\left(B_i-C_iE_{i-1}\right)^{-1}\left(D_i-C_iF_{i-1}\right),\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Далее находятся искомые величины

$$Z_{i-1}^{j+1}=E_iZ_i^{j+1}+F_i,\quad i=n-1;\ n-2,\ldots,1.$$

Описанный алгоритм решения задачи реализован специальной программой.

Для системы (1) поставим задачу найти управление, удовлетворяющее системе, которое обеспечило бы минимальное время φ_0 выполнения равенства $u(l,\varphi_0)=0$ для всех $-1\le l\le 1$.

Эта задача решается при помощи метода моментов [1]. Решение конечномерной проблемы моментов сведено к определению чисел Θ_1, Θ_2, …, Θ_{k-1}, φ_0, где Θ_i – точка переключения $Q(\varphi)$ из системы k трансцендентных уравнений с k неизвестными. Для $k = 2$ эта система имеет вид

$$2e^{\mu_i^2\Theta_i}+(\chi-1)e^{\mu_i^2\varphi_0}=1+\chi+\nu,\ i=1,2,$$

где числа μ_i, i = 1, 2 являются различными действительными положительными корнями характеристического уравнения

$$\frac{1}{b}\mu=\operatorname{ctg}\mu.$$

При решении задачи о нагреве функция $u(\varphi)$ на отрезке [0; Θ_1] должна принимать значения $1 + \chi$, а следовательно, на отрезке [Θ_1; φ_0] она имеет значение $\chi - 1$.

Зададим начальное управление $Q(\varphi)$ в интервале $\Theta'\le\varphi\le\Theta''$, где $0\le\Theta'<\Theta''<\Theta_1$. Благодаря правильному выбору этого управления можно выполнить ограничения на термонапряжения. В этом случае оптимальное управление существует и величины Θ_1 и φ_0 определяются из системы уравнений:

$$2e^{\mu_i^2\Theta_1}+(\chi-1)e^{\mu_i^2\varphi_0}=\nu+(1+\chi)e^{\mu_i^2\Theta''}-\mu_i^2s_i,\ i=1,2,$$

где

$$s_i=\int_0^{\Theta'}(1+\chi)e^{\mu_i^2\varphi}d\varphi+\int_{\Theta'}^{\Theta''}Q(\varphi)e^{\mu_i^2\varphi}d\varphi.$$

Решение данной системы получим из соотношений:

$$\left(\frac{2e^{\mu_1^2\Theta_1}-\left(1+\chi+\nu_1\right)}{1-\chi}\right)^{\mu_2^2}=\left(\frac{2e^{\mu_2^2\Theta_1}-\left(1+\chi+\nu_2\right)}{1-\chi}\right)^{\mu_1^2};$$

$$\varphi_0=\frac{1}{\mu_1^2}\ln\left(\frac{2e^{\mu_2^2\Theta_1}-\left(1+\chi+\nu_1\right)}{1-\chi}\right),$$

где $\nu_i = \nu + (1+\chi)\left(e^{\mu_i^2\Theta''} - e^{\mu_i^2\Theta'}\right) - \mu_i^2 \int\limits_{\Theta'}^{\Theta''} Q(\varphi) e^{\mu_i^2\varphi} d\varphi$,

$i = 1, 2$.

Если принудительное управление является линейной функцией, т. е. $Q(\varphi) = d + g\varphi$, $\Theta' \le \varphi \le \Theta''$, то значения Θ_1 и φ_0 определяются из соотношения

$$\nu_i = \nu + e^{\mu_i^2\Theta''}\left[1 + \chi - d - g\left(\Theta'' - \frac{1}{\mu_i^2}\right)\right] -$$

$$- e^{\mu_i^2\Theta'}\left[1 + \chi - d - g\left(\Theta' - \frac{1}{\mu_i^2}\right)\right].$$

ВЫВОД

Таким образом, используя прием для замены ограничения на фазовую координату ограничением на управляющее воздействие, приходим к тому, что метод решения задачи оптимального по быстродействию нагрева термически массивного тела с учетом ограничений на термонапряжения принципиально не отличается от метода решения той же задачи без учета ограничений на термонапряжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Болтянский, В. Г.** Математические методы оптимального управления / В. Г. Болтянский. – М.: Наука, 1966. – 208 с.

2. **Бутковский, А. Г.** Методы управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. – М.: Наука, 1975. – 568 с.

3. **Бутковский, А. Г.** Проблемы финитного управления / А. Г. Бутковский. – М.: Энергия, 1972. – 244 с.

4. **Андреев, Ю. Н.** О приближенном решении задачи нагрева стали с минимальным обезуглероживанием / Ю. Н. Андреев // ИФЖ. – 1968. – № 2. – С. 21–23.

5. **Воронова, Н. П.** Об одном оптимальном управлении процессом сушки / Н. П. Воронова, Н. И. Березовский // Литье и металлургия. – 1998. – № 2. – С. 42–46.

6. **Воронова, Н. П.** Разработка оптимального по времени режима работы печи садочного типа / Н. П. Воронова, Р. В. Михнова // Энергетика… (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 1996. – № 1–2. – С. 72–75.

7. **Гетвуд, Б. Е.** Температурные напряжения / Б. Е. Гетвуд. – М.: Наука, 1969. – 288 с.

Поступила 24.04.2006

УДК 624.078.5

ОПОРНЫЙ УЗЕЛ ТРЕУГОЛЬНОЙ ДЕРЕВЯННОЙ ФЕРМЫ НА ВКЛЕЕННЫХ СТЕРЖНЯХ

Канд. техн. наук, доц. ОКОВИТЫЙ А. В.

Белорусский национальный технический университет

При изготовлении строительных конструкций с дощатоклееными элементами все большее распространение получают соединения на вклеенных арматурных стержнях, наиболее известные из которых: монтажные стыки элементов конструкций большой длины (арок, рам), узлы опирания стоек рам на фундаменты, опорные узлы ферм, а также усиление отдельных участков конструкций при действии в них значительных перерезывающих усилий [1, 2].

Соединения на вклеенных стержнях отличаются компактностью конструктивных решений. Стыковые соединения не имеют ограничений по величине действующих в стыкуемых элементах усилий. При конструировании узловых соединений, в частности опорных узлов ферм, имеющих размеры контактных площадок, ограниченных размерами поперечных сечений поясных элементов, из-за необходимости соблюдения требований условий расстановки и