Литература

1. Федоров Ф. И. Группа Лоренца. М., 1979. 384 с.
2. Богуш А. А., Федоров Ф. И. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-тэхн. навук. 1962. № 2. С. 26—38.
3. Суворов М. И., Самсоненко Н. В. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1986. № 6. С. 88—94.
4. Суворов М. И., Самсоненко Н. В. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1987. № 1. С. 102—108.
5. Суворов М. И., Самсоненко Н. В. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1987. № 3. С. 96—101.
6. Соколов А. А. Введение в квантовую электродинамику. М., 1958. 534 с.
7. Керимов Б. К. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1961. Т. 25. С. 157—162.
8. Блин-Стойл Р. Фундаментальные взаимодействия и атомное ядро. М., 1976. 360 с.
9. Керимов Б. К. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1959. Т. 23. С. 924—928.
10. Samsonenko N., Cumar Y., Suvorov M. // Ann. Inst. H. Poincaré. 1982. Vol. 36A, N 3. P. 239—255.
11. Йогеш Кумар, Самсоненко Н. В. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1982. Т. 46, № 5. С. 921—924.

Университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы

Поступила в редакцию 24.09.86

УДК 535.36

Н. Н. РОГОВЦОВ

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ СВЕЧЕНИЯ ОПТИЧЕСКИ ТОЛСТОГО ШАРА, СОДЕРЖАЩЕГО ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ВНУТРЕННИЕ ИСТОЧНИКИ

Известно [1—3], что рассмотрение сред, имеющих форму шара, представляет определенный интерес для изучения процесса многократного рассеяния света в реальных объектах. Существенное отличие шара от плоскопараллельного слоя, который используется в подавляющем числе работ в качестве модели для изучения переноса излучения, состоит в том, что он имеет конечную оптическую толщину в любом направлении (бо́льшая часть естественных и искусственных мутных сред удовлетворяет этому условию). Поэтому шар, так же как и ряд других тел, обладающих какой-либо содержательной симметрией и имеющих конечный объем, может служить удобным промежуточным звеном между плоскопараллельным слоем и множеством моделей сред, обладающих сложной формой. Исследование переноса излучения в сферически симметричных средах при наличии в них источников заданных типов проведено в работах (см. [1, 2, 4—12] и ссылки в них), в которых получен ряд асимптотических, точных и приближенных решений уравнения переноса. При этом часть асимптотик была найдена с помощью одной общей идеи, применявшейся еще в классических работах [13, 14] при изучении переноса излучения в плоскопараллельных слоях, которая почти без изменения применима и при исследовании многократного рассеяния света в средах сложной формы [15]. В общем случае суть ее состоит в том, что асимптотические решения уравнения переноса для рассеивающих тел некоторой конфигурации можно находить из выражений типа соотношений инвариантности (они связывают между собой решения различных или однотипных задач) или их следствий посредством подстановки в них известных асимптотик входящих в эти выражения величин. При реализации данной идеи наиболее удобно использовать такие соотношения, в которые входят решения относительно просто решаемых канонических задач теории переноса для сред более простой формы по сравнению с конфигурацией исследуемого объекта.

В данной работе указанным способом будут получены асимптотические неравенства и выражения для среднего времени t^* свечения оптически толстого рассеивающего шара, содержащего произвольные внутренние нестационарные источники. Будет также найдена двухчленная асимптотика для t^*, когда в центре шара имеется точечный изотропный импульсный источник. Для простоты ограничимся рассмотрением только случая консервативного рассеяния.

Рассмотрим однородную консервативно рассеивающую среду V, ограниченную полностью прозрачной для излучения невогнутой поверхностью S и содержащую внутренние нестационарные источники $g(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)$ ($\mathbf{r}$ — радиус-вектор; единичный вектор $\mathbf{\Omega}$ будем использовать для задания направления испускания или распространения излучения; t — время; $g(...) \equiv 0$ при $t<0$). Под средним временем t^* выхода энергии излучения из тела V (среднее время свечения) понимается следующая величина:

$$t^* = \left(\int_0^\infty \Pi(t)\, dt \right)^{-1} \int_0^\infty t\Pi(t)\, dt. \tag{1}$$

Здесь $\Pi(t)$ — поток излучения через границу S тела V. В работе [9] была найдена общая формула для t^* при $\Lambda=1$ (Λ — альбедо однократного рассеяния). Ее можно записать в виде

$$t^* = t_0^* + \frac{1}{\alpha v} \frac{\iiint\limits_{\overline{V}} d\overline{V} \int\limits_{\Omega} \tilde{I}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{\Omega}, \overline{V})\, d\Omega}{\iiint\limits_{\mathring{\overline{V}}} d\overline{V} \int\limits_{\Omega} \chi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{\Omega})\, d\Omega}, \tag{2}$$

$$t_0^* = \Big(\iiint\limits_{\mathring{V}} \chi_2(\mathbf{r})\, dV\Big)^{-1} \iiint\limits_{\mathring{V}} dV \int\limits_{\Omega} \chi_1(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})\, d\Omega.$$

Здесь $\boldsymbol{\tau} = \alpha\mathbf{r}$ (α — показатель ослабления); v — скорость света в среде V; $\overline{V}$ и $\mathring{\overline{V}}$ — образы, в которые переходят V и $\mathring{V}$ ($\mathring{V} = V \setminus S$ — внутренняя часть тела V) при отображении $\mathbf{r}$ в $\boldsymbol{\tau}$; $\chi_1(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \int\limits_0^\infty tg(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)\, dt$, $\chi_2(\mathbf{r}) = \int\limits_{\Omega} \chi_0(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})\, d\Omega$, $\chi_0(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \int\limits_0^\infty g(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)\, dt$; Ω — единичная сфера; $\tilde{I}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{\Omega}, \overline{V})$ — решение уравнения переноса излучения, записанного в безразмерных переменных, для области $\overline{V}$, имеющей «источники» $\chi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{\Omega}) = C\chi_0(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ (C — константа, имеющая размерность, обратную той, которой обладает $\chi_0(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$).

В статье [7] получены следующие неравенства для t^*:

$$t_0^* + \frac{1}{\alpha v}(F - \gamma_*) \leqslant t^* \leqslant t_0^* + \frac{1}{\alpha v}(F - \beta_*) \quad (\Lambda = 1), \tag{3}$$

$$F = \Big(\iiint\limits_{\mathring{\overline{V}}} d\overline{V} \int\limits_{\Omega} \chi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{\Omega})\, d\Omega\Big)^{-1} \iiint\limits_{\overline{V}} d\overline{V} \int\limits_{\Omega} \tilde{I}_\infty(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{\Omega})\, d\Omega,$$

где $\tilde{I}_\infty(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{\Omega})$ — *решение уравнения переноса излучения для бесконечной однородной среды* $\overline{V}_\infty$, *имеющей в области* $\mathring{\overline{V}}$ *«источники»* $\chi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{\Omega})$; γ_* и β_* — соответственно максимальное и минимальное значения величины

$\iiint\limits_{\bar V} d\bar V \int\limits_{\Omega} \tilde G_\infty(\boldsymbol\tau', -\boldsymbol\Omega', \boldsymbol\tau, \boldsymbol\Omega)\,d\Omega$, когда $\boldsymbol\tau'$ задает точки на $\bar S$ и $\boldsymbol\Omega' \in \Omega_+$ ($\bar S$ — образ S при отображении $\mathbf r$ в $\boldsymbol\tau$; $\tilde G_\infty(\dots)$ — объемная функция Грина уравнения переноса для $\bar V_\infty$; Ω_+ — полусфера, определяемая условием $(\mathbf n' \cdot \boldsymbol\Omega') > 0$, где $\mathbf n'$ — внешняя нормаль к $\bar S$ в точке, заданной $\boldsymbol\tau'$). Формулы (3) позволяют оценить t^* для любого невогнутого тела через характеристики полей излучения в $\bar V_\infty$. Они весьма удобны для получения асимптотических неравенств для t^*, когда тело V является шаром, содержащим произвольные внутренние нестационарные источники.

Пусть в центре шара V расположен точечный изотропный импульсный источник $g(\mathbf r, \boldsymbol\Omega, t) = \delta(\mathbf r) f(t)$ (при этом здесь и везде далее будем считать, что начало системы координат, в которой посредством радиус-векторов $\mathbf r$, $\boldsymbol\tau$ и т. д. задаются точки шара, совпадает с его центром). Тогда выражение (2) упростится и примет вид

$$t^* = t_0^* + (\alpha v)^{-1} \tilde I_{\text{ср}}(0). \tag{4}$$

Здесь $\tilde I_{\text{ср}}(\mathbf 0)$ — средняя «интенсивность» излучения в центре шара $\bar V$, содержащего равномерно распределенные «источники», равные единице. В общей форме асимптотика для $\tilde I_{\text{ср}}(\mathbf 0)$ при $\tau_0 \to \infty$ (τ_0 — оптический радиус шара) была найдена в [12]. Для данного случая ее можно записать в такой форме:

$$\tilde I_{\text{ср}}(\mathbf 0) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\bar V} d\bar V' \int\limits_{\Omega} \tilde G_\infty(|\boldsymbol\tau'|, -\mu')\,d\Omega' - \left(1 - \frac{x_1}{3}\right) \tau_0^2 +$$
$$+ \frac{3}{16\pi^2 \tau_0^2} \iint\limits_{\bar S} d\bar S' \int\limits_{\Omega_+} (\mathbf n' \cdot \boldsymbol\Omega')^2 \tilde I_1(\boldsymbol\tau', \boldsymbol\Omega', \bar V)\,d\Omega' + O(1), \quad \tau_0 \to \infty, \quad \Lambda = 1. \tag{5}$$

Здесь x_1 — соответствующий коэффициент в разложении индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра; $\mu' = (|\boldsymbol\tau'|)^{-1} (\boldsymbol\tau \cdot \boldsymbol\Omega')$; $\tilde G_\infty(|\boldsymbol\tau'|, \mu') = \int\limits_{\Omega} \tilde G_\infty(\boldsymbol\tau', \boldsymbol\Omega', \mathbf 0, \boldsymbol\Omega)\,d\Omega$, $\tilde I_1(\boldsymbol\tau', \boldsymbol\Omega', \bar V)$ равно $\tilde I(\boldsymbol\tau', \boldsymbol\Omega', \bar V)$ при $\chi(\boldsymbol\tau', \boldsymbol\Omega') \equiv 1$.

Из формул (3)—(5) видно, что для получения искомых асимптотических выражений для оптически толстого шара необходимо найти асимптотики величин $\iiint\limits_{\bar V} d\bar V \int\limits_{\Omega} \tilde I_\infty(\boldsymbol\tau, \boldsymbol\Omega)\,d\Omega$, γ_*, β_*, $\tilde I_1(\boldsymbol\tau', \boldsymbol\Omega', \bar V)$ при $\tau_0 \to \infty$ и $\Lambda = 1$. Для этого достаточно отыскать асимптотику функции Грина $\tilde G_\infty(|\boldsymbol\tau'|, \mu')$ при $|\boldsymbol\tau'| \to \infty$. Учитывая представление $\tilde G_\infty(|\boldsymbol\tau'|, \mu')$ в виде суммы обобщенной q_1 и регулярной q_2 функций [16], особенности q_1 [16] и единственность разложения q_2 в ряд по полиномам Лежандра, из формулы (12) работы [12] получим следующую асимптотику:

$$\tilde G_\infty(|\boldsymbol\tau'|, \mu') = \frac{3 - x_1}{4\pi |\boldsymbol\tau'|} + \frac{3\mu'}{4\pi |\boldsymbol\tau'|^2} + q_1 + q_3,$$
$$q_3 = O(|\boldsymbol\tau'|^{-3}), \quad |\boldsymbol\tau'| \to \infty, \quad \Lambda = 1. \tag{6}$$

Первый член асимптотического выражения (6) был найден в [17]. Асимптотика для $\tilde G_\infty(|\boldsymbol\tau'|, \mu')$ при $\mu' < 0$ была получена в [12].

Принимая во внимание определения $\tilde I_\infty(\boldsymbol\tau, \boldsymbol\Omega)$, γ_*, β_* и принцип взаимности [18], на основе (6) находим такие асимптотические соотношения:

$$\iiint\limits_{\bar V} d\bar V \int\limits_{\Omega} \tilde I_\infty(\boldsymbol\tau, \boldsymbol\Omega)\,d\Omega = \tag{7}$$

$$= \iiint\limits_{\overset{\circ}{\bar{V}}} d\bar{V}' \int\limits_{\Omega} \chi(\boldsymbol{\tau}', \boldsymbol{\Omega}') \left[\frac{3-x_1}{6} (3\tau_0^2 - |\boldsymbol{\tau}'|^2) - (\boldsymbol{\tau}' \cdot \boldsymbol{\Omega}') \right] d\Omega' +$$

$$+ O\left[\ln \tau_0 \iiint\limits_{\overset{\circ}{\bar{V}}} d\bar{V}' \int\limits_{\Omega} \chi(\boldsymbol{\tau}' \ \boldsymbol{\Omega}') d\Omega' \right],$$

$$\gamma_* = \left(1 - \frac{x_1}{3} \right) \tau_0^2 + O(\ln \tau_0),$$

$$\beta_* = \left(1 - \frac{x_1}{3} \right) \tau_0^2 - \tau_0 + O(\ln \tau_0),$$

$$\tau_0 \to \infty, \quad \Lambda = 1.$$

Подставляя (7) в (3), получаем искомые асимптотические неравенства для оптически толстого шара:

$$P \iiint\limits_{\overset{\circ}{\bar{V}}} d\bar{V}' \int\limits_{\Omega} \left[\frac{3-x_1}{6} (\tau_0^2 - |\boldsymbol{\tau}'|^2) - (\boldsymbol{\tau}' \cdot \boldsymbol{\Omega}') \right] \chi(\boldsymbol{\tau}', \boldsymbol{\Omega}') d\Omega' +$$

$$+ h_1 \leqslant t^* \leqslant h_2 + \frac{\tau_0}{\alpha v} + \tag{8}$$

$$+ P \iiint\limits_{\overset{\circ}{\bar{V}}} d\bar{V}' \int\limits_{\Omega} \left[\frac{3-x_1}{6} (\tau_0^2 - |\boldsymbol{\tau}'|^2) - (\boldsymbol{\tau}' \cdot \boldsymbol{\Omega}') \right] \chi(\boldsymbol{\tau}' \ \boldsymbol{\Omega}') d\Omega',$$

$$P = \frac{1}{\alpha v} \left(\iiint\limits_{\overset{\circ}{\bar{V}}} d\bar{V} \int\limits_{\Omega} \chi(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Omega}) d\Omega \right)^{-1},$$

$$h_1 = O\left(\frac{\ln \tau_0}{\alpha v} \right), \quad h_2 = O\left(\frac{\ln \tau_0}{\alpha v} \right),$$

$$\tau_0 \to \infty, \quad \Lambda = 1.$$

Из (8) следует, что для среднего времени свечения шара имеет место асимптотика

$$t^* = P \iiint\limits_{\overset{\circ}{\bar{V}}} d\bar{V}' \int\limits_{\Omega} \left[\frac{3-x_1}{6} (\tau_0^2 - |\boldsymbol{\tau}'|^2) - (\boldsymbol{\tau}' \cdot \boldsymbol{\Omega}') \right] \chi(\boldsymbol{\tau}', \boldsymbol{\Omega}') d\Omega' +$$

$$+ \frac{\varkappa \tau_0}{\alpha v} + O\left(\frac{\ln \tau_0}{\alpha v} \right),$$

$$\tau_0 \to \infty, \quad \Lambda = 1, \tag{9}$$

где величина $\varkappa \in [0, 1]$. Частный вариант формулы (9) при $\chi(\boldsymbol{\tau}', \boldsymbol{\Omega}') = C_1 \delta(\boldsymbol{\tau}')$ ($C_1 = \text{const}$) был получен ранее в [12].

Если на внутренней стороне границы $\bar{S}$ шара $\bar{V}$ находится точечный источник с угловой диаграммой $f(\boldsymbol{\Omega}')$ ($-\boldsymbol{\Omega}' \in \Omega_+$), то из (9) получим

$$t^* \sim \varkappa_1 \frac{\tau_0}{\alpha v}, \quad \tau_0 \to \infty, \quad \Lambda = 1,$$

причем постоянная $\varkappa_1$ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{\int\limits_0^1 \mu'' f_1(\mu'')\,d\mu''}{\int\limits_0^1 f_1(\mu'')\,d\mu''} \leqslant \varkappa_1 \leqslant 1+\frac{\int\limits_0^1 \mu'' f_1(\mu'')\,d\mu''}{\int\limits_0^1 f_1(\mu'')\,d\mu''}, \tag{10}$$

где $f_1(\mu'')=\int\limits_0^{2\pi} f(-\mathbf{\Omega}')\,d\varphi''$, $\mu''=-\left(\mathbf{\Omega}'\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}'}{|\boldsymbol{\tau}'|}\right)$ ($\boldsymbol{\tau}'$ задает положение источника на $\bar{S}$), φ'' — азимут проекции вектора $(-\mathbf{\Omega}')$ на плоскость, перпендикулярную $\boldsymbol{\tau}'$. Заметим, что параметр $\varkappa_1$ нетрудно найти в явном виде из формулы (2), если учесть асимптотику [10]

$$\bar{I}_1(\boldsymbol{\tau}', -(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{\Omega}'), \bar{V}) \sim \frac{4}{3}\tau_0 u_0(-(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{\Omega}')), \tag{11}$$

$$\tau_0\to\infty,\ \Lambda=1\quad (-\mathbf{\Omega}'\in\Omega_+,\ |\boldsymbol{\tau}'|=\tau_0)$$

и тип источника. В (11) величина $u_0(-(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{\Omega}'))=u_0(|\mu''|)$ — коэффициент пропускания полубесконечной среды для случая консервативного рассеяния [14]. В итоге получим

$$\varkappa_1=\frac{4}{3}\left(\int\limits_0^1 f_1(\mu)\,d\mu\right)^{-1}\int\limits_0^1 u_0(\mu) f_1(\mu)\,d\mu. \tag{12}$$

Отметим, что из (10), (12) при $f_1(\mu)=C_3\delta(\mu-\mu_1)$ ($C_3=\mathrm{const}$, $\mu_1\in(0, 1)$) следует неравенство $\mu_1<\frac{4}{3}u_0(\mu_1)<\mu_1+1$, которое было найдено в [14] другим способом. В качестве приближенного значения $\varkappa_1$ можно взять полусумму левой и правой частей неравенства (10). Например, при $f_1(\mu'')=C_4\mu''$ ($C_4=\mathrm{const}$) относительная погрешность ε такого выбора параметра $\varkappa_1$ составляет (1/8).

Найдем теперь двухчленную асимптотику для t^*, когда в центре шара находится точечный изотропный источник. Подставляя (6), (11) в (5), с учетом (4) получим искомую асимптотику

$$t^*\sim\frac{1}{\alpha v}\left[\frac{3-x_1}{6}\tau_0^2+2\tau_0\int\limits_0^1\mu^2 u_0(\mu)\,d\mu\right], \tag{13}$$

$$\tau_0\to\infty,\quad \Lambda=1.$$

Сравнивая (13) с (9), находим, что для данного случая $\varkappa=2\int\limits_0^1\mu^2 u_0(\mu)\,d\mu$. Принимая во внимание неравенство, приведенное выше, которому удовлетворяет $u_0(\mu)$, получаем, что $\varkappa\in\left(\frac{3}{8}, \frac{7}{8}\right)$ для любой индикатрисы рассеяния. Формула (13) дает асимптотику t^* при условии, что отсчет времени ведется от момента $t=0$. Однако для рассматриваемой задачи более разумно вести отсчет времени от момента прихода света к границе шара. При этом для среднего времени t_1^* свечения шара из (13) легко получить

$$t_1^*\sim\frac{1}{\alpha v}\left[\frac{3-x_1}{6}\tau_0^2+\left(2\int\limits_0^1\mu^2 u_0(\mu)\,d\mu-1\right)\tau_0\right],$$

$$\tau_0\to\infty,\quad \Lambda=1.$$

В заключение подчеркнем, что метод исследования асимптотических свойств полей излучения, использованный в данной работе, применим и для изучения переноса излучения в средах более сложной формы по сравнению с шаром, причем для любых значений альбедо однократного рассеяния.

Summary

Some inequalities and asymptotic formulas have been derived to calculate average luminosity durations of an optically thick uniform conservatively scattering sphere with random internal sources.

Литература

1. Соболев В. В. // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 3. С. 573—576.
2. Колесов А. К. // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272, № 1. С. 53—56.
3. Енгибарян Н. Б. // Астрофизика. 1972. Т. 8, № 1. С. 149—153.
4. Соболев В. В. // Астрофизика. 1972. Т. 8, № 2. С. 197—212.
5. Нагирнер Д. И. // Астрофизика. 1972. Т. 8, № 3. С. 353—368.
6. Гермогенова Т. А. // Астрофизика. 1966. Т. 2, № 3. С. 251—266.
7. Роговцов Н. Н. // Докл. АН БССР. 1983. Т. 27, № 1. С. 34—37.
8. Роговцов Н. Н. // ЖПС. 1985. Т. 42, № 5. С. 839—843.
9. Роговцов Н. Н., Самсон А. М. // Астрофизика. 1985. Т. 23, № 1. С. 163—176.
10. Колесов А. К. // Астрофизика. 1985. Т. 22, № 1. С. 177—187.
11. Роговцов Н. Н. // Изв. АН СССР. ФАО. 1985. Т. 21, № 10. С. 1111—1112.
12. Роговцов Н. Н. // ЖПС. 1986. Т. 44, № 4. С. 659—663.
13. Амбарцумян В. А. Научные труды. Ереван, 1960. Т. 1. 430 с.
14. Соболев В. В. Рассеяние света в атмосферах планет. М., 1972. 335 с.
15. Роговцов Н. Н. // Докл. АН БССР. 1983. Т. 27, № 10. С. 901—903.
16. Гермогенова Т. А. Локальные свойства решений уравнения переноса. М., 1986. 272 с.
17. Колесов А. К. // Астрофизика. 1984. Т. 20, № 1. С. 133—147.
18. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М., 1972. 384 с.

Белорусский политехнический институт

Поступила в редакцию 27.10.86