УДК 539.3

ОБЩИЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В АНАЛИТИЧЕСКИХ МНОГОМЕРНЫХ ФУНКЦИЯХ МАТРИЧНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Канд. физ.-мат. наук, доц. **НИФАГИН В. А.**, *асп.* **СЕВРУК А. Б.**

Белорусский национальный технический университет

Широко применяемая методика решения плоских задач линейной теории упругости, базирующаяся на физически ясно интерпретируемых представлениях компонент вектора перемещений и тензора напряжений через аналитические функции комплексной переменной и их производные [1–3], позволяет построить эффективный математический аппарат для нахождения замкнутых решений основных краевых задач, включая смешанные задачи. Дальнейшее развитие этот аппарат получил в теории интегралов типа Коши и сингулярных интегральных уравнений, которые использовались для решения многих важных в теоретическом и прикладном аспектах задач [4, 5]. Сочетание этих подходов с различными вариантами метода возмущений [6, 7] дало возможность распространить указанную методологию на краевые задачи механики упругих сред с нелинейными законами деформирования, а также упругопластические задачи.

В то же время попытки найти аналитические решения (точные и приближенные) пространственных задач теории упругости [8–10] не получили дальнейшего развития, что, на наш взгляд, объясняется недостаточной проработанностью методов теории функций многих комплексных переменных для решения конкретных задач. В [11, 12] построен компактизирующий изоморфизм между евклидовым пространством E_3 и комплексным пространством C^2, введена новая структура матричной комплексной переменной Гамильтона – Кели, пространственные аналитические функции этой переменной (так называемые многомерные комплексные потенциалы), а также дифференциальные операторы в C^2. В данной работе получены общие решения основных трехмерных задач физически нелинейной теории упругости в представлениях матричных комплексных потенциалов матричной переменной, которые используются для формулировки краевых задач в перемещениях и напряжениях.

Рассмотрим элемент пространства C^2 в виде комплексной матрицы

$$A=\sum_{p=1}^{4}a_p e_p = D_{\kappa}^{(2)}\left(a_p\right)=\begin{pmatrix} a_1+ia_2 & a_3+ia_4 \\ -a_3+ia_4 & a_1-ia_2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Сопряжение введем по формуле

$$\bar{A}=\sum_{p=1}^{4}a_p \bar{e}_p = \bar{D}_{\kappa}^{(2)}\left(a_p\right)=D_{\kappa}^{(2)}\left(a_1,-a_2,-a_3,-a_4\right), \quad (2)$$

где a_p – скаляры пространства $E_n\ (n=2,3,4)$; e_p – матрицы Гамильтона – Кели; $\bar{e}_p$ – комплексно-сопряженные матрицы. Таким же образом получим $\kappa = D_{\kappa}^{(2)}\left(x_p\right)$ – независимую матричную переменную Гамильтона; $f(\kappa)$ = $= D_{\kappa}^{(2)}\left(f_q\left(x_p\right)\right)$, $p,q=\overline{1,n}$ – матричную функцию переменной Гамильтона; $n\dfrac{\partial}{\partial\bar{\kappa}}=D_{\kappa}^{(2)}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_p}\right)$ – оператор матричной производной и комплексные матричные образы дифференциальных операторов; $\nabla = D_{\kappa}^{(2)}\left(\frac{\partial}{\partial x_p}\right)$ – матричный комплексный оператор Гамильтона; $\Delta_{\kappa\bar{\kappa}} = \frac{\partial^2}{\partial\kappa\,\partial\bar{\kappa}}$ – матричный комплексный оператор Лапласа; $\Delta_{\kappa\kappa}^2 = \frac{\partial^4}{\partial\kappa^2\,\partial\bar{\kappa}^2}$ – матричный комплексный бигармонический оператор; $\operatorname{div}(\cdot) = \frac{3}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\kappa}(\cdot) + (\cdot)\frac{\partial}{\partial\bar{\kappa}}\right)$ – матричный комплексный оператор дивергенции.

Отметим, что в силу некоммутативности операции матричного умножения для функций и операторов из (1) следует, что $\overline{AB} = \bar{B}\,\bar{A}$. Всего можно сформировать восемь различных произведений, однако их количество сокращается за счет операции сопряжения (2). В силу указанного различаются дифференцированные слева и справа:

$$\frac{\partial}{\partial\kappa} f(\kappa) = \left(\frac{\partial f(\kappa)}{\partial\kappa}\right)^{-}; \quad f(\kappa)\frac{\partial}{\partial\kappa} = \left(\frac{\partial f}{\partial\kappa}\right)^{+}.$$

В то же время далее за основу примем левые производные

$$\frac{\partial}{\partial\kappa} f(\kappa); \quad \frac{\partial}{\partial\bar{\kappa}} f(\kappa); \quad \frac{\partial}{\partial\kappa} \bar{f}(\bar{\kappa}); \quad \frac{\partial}{\partial\bar{\kappa}} \bar{f}(\bar{\kappa}),$$

учитывая, что $\frac{\partial}{\partial\bar{\kappa}} \bar{f}(\bar{\kappa}) = f(\kappa)\frac{\partial}{\partial\kappa}$.

Кроме того, структура матричной переменной, функции и оператора в C^2 выбирается так, что круговым перестановкам индексов координат $\to x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4 \to$ в E_4 соответствуют круговые перестановки элементов $\to \kappa_1 \to \to\kappa_2 \to \kappa_3 \to \kappa_4 \to$ в C^2, где $\kappa_p = D_{\kappa}^{(2)}\left(x_p, x_{p+1}, x_{p+2}, x_{p+3}\right)$, p, $p+m=\overline{1,4}$. Отсюда вытекает, что круговым перестановкам при вырождении ${}^0\kappa_1 = D_{\kappa}^{(2)}(x_1, x_2, x_3, 0)$ $\to {}^0\kappa_1 \to {}^0\kappa_2 \to {}^0\kappa_3 \to {}^0\kappa_4 \to$ в C^2 соответствуют круговые перестановки координат $\to x_1 \to x_2 \to x_3 \to 0 \to$ в пространстве E_3. Для того чтобы упорядочить последовательности аргументов и функций, примем обозначения

$$f_p(\kappa_p) = D_{\kappa}^{(2)}\left(f_p(\kappa_p), f_{p+1}(\kappa_p), f_{p+2}(\kappa_p), f_{p+3}(\kappa_p)\right). \quad (3)$$

Транслируя известные условия сопряжения гармонических функций – условия Моисила – Теодореску [13] из областей действительного пространства E_3 в C^2, получим условие

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\kappa}} f(\kappa) = 0, \quad (4)$$

которое принимается за условие аналитичности функции $f(\kappa)$ в $G \subset C^2$. Тогда аналитическую в области G функцию будем называть многомерным C^2-потенциалом. Для получения общих решений основных пространственных задач физически нелинейной теории упругости обобщим эти уравнения на случай E_4. В векторной записи с учетом расслоения базиса $e_p^{\pm}$, $p=\overline{1,4}$ для смещений $u_i\left(i=\overline{1,4}\right)$ уравнения Навье запишутся в тензорной форме

$$u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu}\varepsilon_{,i} = 0, \quad i,j=\overline{1,4}. \quad (5)$$

Тензор деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \operatorname{def}\vec{u} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \quad i,j=\overline{1,4}. \quad (6)$$

Уравнения совместности деформаций Сен-Венана

$$\Delta I_1\left(\varepsilon_{ij}\right) = 0, \quad i,j=\overline{1,4}, \quad (7)$$

где $\Delta I_1\left(\varepsilon_{ij}\right)$ – первый инвариант тензора деформаций.

Аналогично можно записать пару систем уравнений в напряжениях – уравнения равновесия Коши и совместности Бельтрами. Связь между основными уравнениями задач теории упругости осуществляется с помощью закона Гука. Следуя гипотезе о существовании упругого потенциала [14], примем закон связи между напряжениями и деформациями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii} &= \frac{1}{3K}k(\sigma_0)\sigma + \frac{1}{2G}g\left(T_0^2\right)S_{ii}; \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{G}g\left(T_0^2\right)\sigma_{ij}, \quad i,j=\overline{1,4}, \end{aligned} \quad (8)$$

где ε_{ij} – тензор деформаций; σ – шаровой тензор; S_{ii} – девиатор напряжений; $k(\sigma_0)$ – функция среднего напряжения σ_0; $g(T_0^2)$ – функция интенсивности касательных напряжений T_0, характеризующая отклонение от закона Гука; K, G – модуль объемного сжатия и модуль сдвига.

Таким образом, оставаясь в рамках малых деформаций (6), для ряда материалов наблюдается нелинейный характер диаграммы зависимости между деформациями и напряжениями (8), так называемая физическая нелинейность. При этом для большинства сред соблюдается пропорциональность между средним напряжением σ_0 и средним удлинением ε_0. Поэтому функцию среднего напряжения можно положить $k(\sigma_0) \equiv 1$. Разлагая функцию интенсивности касательных напряжений в ряд по четным степеням T_0 и ограничиваясь для определенности первыми двумя членами ряда, получим квадратичный закон упругости (8) при

$$g\left(T_0^2\right) = 1 + g_2 T_0^2. \qquad (9)$$

Здесь постоянная g_2, характеризующая физическую нелинейность материала, определяется экспериментально. Решение пространственной статической задачи физически нелинейной теории упругости заключается в совместном интегрировании уравнений равновесия (5) и совместности деформаций (7) при соответствующем законе упругости (8).

Применим к соотношениям (5)–(9) приближенный аналитический метод решения, который, следуя [6], назовем методом разложения по параметру нагружения.

Введем малый безразмерный параметр $\lambda = \dfrac{q}{G} < 1$, где q – интенсивность внешнего сжимающего усилия. Будем искать решение сформулированной выше задачи в виде рядов по положительным степеням параметра λ:

$$u_j = \sum_{n\ge 0} u^{(n)} \lambda^n; \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{n\ge 0} \varepsilon_{ij}^{(n)} \lambda^n; \quad \sigma_{ij} = \sum_{n\ge 0} \sigma_{ij}^{(n)} \lambda^n. \qquad (10)$$

Тогда уравнения равновесия в произвольном приближении будут с учетом круговой перестановки $\to 1 \to 2 \to 3 \to$

$$\frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{\partial \varepsilon^{(n+1)}}{\partial x_1} - \frac{d\,\omega_3^{(n+1)}}{\partial x_2} + \frac{d\,\omega_2^{(n+1)}}{\partial x_3} + \frac{K_1^{(n+1)}}{2G} = -F_1^{(n-1)}, \qquad (11)$$

где $K_j^{(n+1)}$ – компоненты вектора объемных сил $\vec{K}^{(n+1)}$; $F_j^{(n-1)}$ – составляющие фиктивных объемных сил $\vec{F}^{(n+1)}$ (j = 1, 2, 3);

$$F_1^{(n-1)} = \frac{\partial \eta_{11}^{(n-1)}}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial \eta_{12}^{(n-1)}}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial \eta_{13}^{(n-1)}}{\partial x_3},$$

$$F_1^{(0)} = 0, \ K_1^{(l)} = 0, \ l > 2 \cdot \qquad (12)$$

Здесь

$$\eta_{ij}^{(n-1)} = -g_2\left(\psi_0^{(n-1)}\right)^2\left(\varepsilon_{ij}^{(n-1)} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\,\varepsilon^{(n-1)}\right); \qquad (13)$$

$$\left(\psi_0^{(n-1)}\right)^2 = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\left(\varepsilon_{11}^{(n-1)^2} + \varepsilon_{22}^{(n-1)^2} + \varepsilon_{33}^{(n-1)^2} - \varepsilon_{11}^{(n-1)}\varepsilon_{22}^{(n-1)} - \varepsilon_{11}^{(n-1)}\varepsilon_{33}^{(n-1)} - \varepsilon_{22}^{(n-1)}\varepsilon_{33}^{(n-1)}\right) + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{12}^{(n-1)^2} + \varepsilon_{13}^{(n-1)^2} + \varepsilon_{23}^{(n-1)^2}\right)\right). \qquad (14)$$

Итак, правые части (11) на каждом этапе являются известными функциями, вполне определенными на предыдущих шагах. Таким образом, напряженно-деформированное состояние при $n \ge 0$ представляет сумму

$$u_j^{(n)} = u^0{}_j^{(n)} + u^*{}_j^{(n)}; \quad \sigma_{ij}^{(n)} = \sigma^0{}_{ij}^{(n)} + \sigma^*{}_{ij}^{(n)}. \qquad (15)$$

При этом первые слагаемые справа в (15) соответствуют общему решению однородной системы дифференциальных уравнений равновесия линейной теории упругости и поэтому могут быть выражены в виде гармонических и бигармонических функций, на основе известных представлений для задачи в перемещениях в форме Буссинеска – Галеркина. Вторые слагаемые представляют собой частное решение неоднородной системы (11) с правой частью (12). Для их определения в качестве исходного этапа можно взять обобщение формулы Гурса – Альманси [11] для бигармонических функций через комплексные аналитические матричные функции

$$G_1(x_1,x_2,x_3) = {}^0\overline{\kappa}_1\left({}^0\kappa_1\,{}^0\varphi_1\left({}^0\kappa_1\right)\right) +$$
$$+\left({}^0\overline{\varphi}_1\left({}^0\overline{\kappa}_1\right){}^0\overline{\kappa}_1\right){}^0\kappa_1 + {}^0\overline{\chi}_1\left({}^0\overline{\kappa}_1\right) + {}^0\chi_1\left({}^0\kappa_1\right). \tag{16}$$

Еще два соотношения получатся с учетом круговой перестановки. Затем строятся выражения для компонент напряжений, деформаций и поворотов. Составляющие вектора перемещений находятся по известным величинам дивергенции и ротора.

Без учета индексных перестановок выпишем представления для компонент σ_{ij} через комплексные C^2-потенциалы:

$$D_\kappa^{(2)}\left(\sigma_{22}^{(n)}-\sigma_{11}^{(n)}, \sigma_{12}^{(n)}, \sigma_{23}^{(n)}, \sigma_{13}^{(n)}\right) = {}^0\overline{\kappa}_1\,{}^0\varphi_1^{(n)''}(\kappa_1) + {}^0\chi_1^{(n)''}(\kappa_1) + {}^0G^{(n-2)};$$
$$D_\kappa^{(2)}\left(\sigma_{33}^{(n)}-\sigma_{22}^{(n)}, \sigma_{23}^{(n)}, \sigma_{13}^{(n)}, \sigma_{12}^{(n)}\right) = {}^0\overline{\kappa}_2\,{}^0\varphi_2^{(n)''} + \chi_2^{(n)''} + {}^0F^{(n-2)},$$

которые совместно с

$$\begin{aligned}
e_1\sigma_{11}^{(n)} = \frac{1}{3}\Bigg(&\left(\left({}^0\varphi_1^{(n)'}({}^0\kappa_1) + {}^0\overline{\varphi}_1^{(n)}({}^0\overline{\kappa}_1)\right) + \left({}^0\varphi_2^{(n)'}({}^0\kappa_2) + {}^0\overline{\varphi}_2^{(n)}({}^0\overline{\kappa}_2)\right)\right. +\\
&+2\left({}^0\overline{\kappa}_1\,{}^0\varphi_1^{(n)''}({}^0\kappa_1) + {}^0\overline{\varphi}_1^{(n)}({}^0\overline{\kappa}_1)\cdot{}^0\kappa_1\right) -\\
&-\left({}^0\overline{\kappa}_2\cdot{}^0\varphi_2^{(n)''}({}^0\kappa_2) + {}^0\overline{\varphi}_2^{(n)''}({}^0\overline{\kappa}_2)\cdot{}^0\kappa_2\right) +\\
&\left.+2\left({}^0\chi_1^{(n)''}({}^0\kappa_1) + {}^0\overline{\chi}_1^{(n)''}({}^0\overline{\kappa}_1)\right) - \left({}^0\chi_2^{(n)''}({}^0\kappa_2) + {}^0\overline{\chi}_2^{(n)''}({}^0\overline{\kappa}_2)\right)\right)\Bigg) + {}^0R_{11}^{(n-2)};
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
e_2\,\sigma_{12}^{(n)} = \frac{1}{3}\Bigg(&2\left({}^0\overline{\kappa}_1\,{}^0\varphi_1^{(n)''}({}^0\kappa_1) - \overline{{}^0\varphi_1^{(n)''}}({}^0\overline{\kappa}_1)\,{}^0\kappa_1\right) - \left({}^0\overline{\kappa}_2\,{}^0\varphi_2^{(n)''}({}^0\kappa_2) - \overline{{}^0\varphi_2^{(n)''}}({}^0\overline{\kappa}_2)\,{}^0\kappa_2\right) +\\
&+2\left({}^0\chi_1^{(n)''}({}^0\kappa_1) + \overline{{}^0\chi_1^{(n)''}}({}^0\overline{\kappa}_1)\right) - \left({}^0\chi_2^{(n)''}({}^0\kappa_2) + \overline{{}^0\chi_2^{(n)''}}({}^0\overline{\kappa}_2)\right)\Bigg) + {}^0R_{12}^{(n-2)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_1(\sigma_{22}-\sigma_{11}) = \frac{1}{3}\Bigg(&\left({}^0\overline{\kappa}_1\cdot{}^0\varphi_1^{(n)''}({}^0\kappa_1) + \overline{{}^0\varphi_1^{(n)''}}({}^0\overline{\kappa}_1)\cdot{}^0\kappa_1\right) - \left({}^0\overline{\kappa}_2\cdot{}^0\varphi_2^{(n)''}({}^0\kappa_2) + \overline{{}^0\varphi_2^{(n)''}}({}^0\overline{\kappa}_2)\cdot{}^0\kappa_2\right) -\\
&-\left({}^0\chi_1^{(n)''}({}^0\kappa_1) + \overline{{}^0\chi_1^{(n)''}}({}^0\overline{\kappa}_1)\right)\Bigg) + {}^0Q^{(n-2)};
\end{aligned}$$

$$e_1\sigma = \frac{1}{2}\left(\left({}^0\varphi_1^{(n)'}({}^0\kappa_1) + \overline{{}^0\varphi_1^{(n)'}}({}^0\overline{\kappa}_1)\right) + \left({}^0\varphi_2^{(n)'}({}^0\kappa_2) + \overline{{}^0\varphi_2^{(n)'}}({}^0\overline{\kappa}_2)\right)\right) + {}^0R^{(n-2)}$$

полностью решают задачу в напряжениях.

Заметим, что в последних формулах верхние правые индексы в скобках указывают на порядок приближения, левые – на характер вырождения. Добавочные члены с индексами $n-2$ определяются через решения на предыдущих этапах и интерпретируются как известные.

Переведя действительное решение для перемещений из E_3 в C^2 на основе (16), (17), получим

$$2\mu\,{}^0u^{(n)}\left({}^0\kappa\right) = \frac{7-8\nu}{3}\,{}^0\varphi^{(n)}\left({}^0\kappa\right) - \overline{{}^0\varphi^{(n)'}}\left({}^0\overline{\kappa}\right){}^0\kappa - \overline{{}^0\chi^{(n)'}}\left({}^0\overline{\kappa}\right) + {}^0B^{(n-2)}. \tag{18}$$

Или каждую координату вектора перемещений выразим через свои комплексные потенциалы:

$$2\mu u_1^{(n)} e_1 = \mathrm{Re}\left(\frac{7-8\nu}{3}\ {}^0\varphi^{(n)}\left({}^0\kappa\right) - \overline{{}^0\varphi^{(n)'}}\left({}^0\overline{\kappa}\right){}^0\kappa - \overline{{}^0\chi^{(n)'}}\left({}^0\overline{\kappa}\right) + {}^0B_1^{(n-2)}\right);$$

$$2\mu u_2^{(n)} e_1 = \mathrm{Im}\left(\frac{7-8\nu}{3}\ {}^0\varphi^{(n)}\left({}^0\kappa\right) - \overline{{}^0\varphi^{(n)'}}\left({}^0\overline{\kappa}\right){}^0\kappa - \overline{{}^0\chi^{(n)'}}\left({}^0\overline{\kappa}\right) + {}^0B_2^{(n-2)}\right); \qquad (19)$$

$$2\mu u_3^{(n)} e_1 = \mathrm{Re}\left(\frac{7-8\nu}{3}\ {}^0\phi^{(n)}\left({}^0\kappa\right) - \overline{{}^0\phi^{(n)'}}\left({}^0\overline{\kappa}\right)\kappa - \overline{{}^0\psi^{(n)'}}\left({}^0\overline{\kappa}\right) + {}^0B_3^{(n-2)}\right),$$

что полностью решает задачу нелинейной теории упругости в перемещениях.

Здесь введены обозначения:

$${}^0\tilde{\chi}_m^{(n)'}\left({}^0\kappa_m\right) = \overline{{}^0\chi_m^{(n)''}}\left({}^0\overline{\kappa}_m\right) - \frac{8(1-\nu)}{3}\overline{{}^0\varphi_m^{(n)'}}\left({}^0\overline{\kappa}_m\right);$$

$${}^0\varphi\left({}^0\kappa\right) = -\frac{\partial}{\partial {}^0\kappa_1}\left({}^0\varphi_1\left({}^0\kappa_1\right) + {}^0\varphi_2\left({}^0\kappa_2\right)\right); \quad {}^0\chi\left({}^0\kappa\right) = -\frac{\partial}{\partial {}^0\kappa_1}\left({}^0\tilde{\chi}_1\left({}^0\kappa_1\right) + {}^0\tilde{\chi}_2\left({}^0\kappa_2\right)\right);$$

$${}^0\phi\left({}^0\kappa\right) = -\frac{\partial}{\partial {}^0\kappa_3}\,{}^0\varphi_3\left({}^0\kappa_3\right); \quad {}^0\psi\left({}^0\kappa\right) = -\frac{\partial}{\partial {}^0\kappa_3}\,{}^0\tilde{\chi}_3\left({}^0\kappa_3\right).$$

Используем (6) для нахождения комплексных представлений для деформаций и поворотов:

$$\mu\left(\varepsilon_{11}^{(n)} + \varepsilon_{22}^{(n)} + \varepsilon_{33}^{(n)}\right)e_1 = 2(1-2\nu)\mathrm{Re}\left({}^0\varphi^{(n)'}\left({}^0\kappa\right) + {}^0D_1^{(n-1)}\right);$$

$$2\mu\left(\varepsilon_{11}^{(n)} - \varepsilon_{22}^{(n)} - \varepsilon_{33}^{(n)}\right)e_1 = \mathrm{Re}\left({}^0\varphi^{(n)'}\left({}^0\kappa\right) - 6\,\mathrm{Re}\left({}^0\kappa\frac{\partial}{\partial {}^0\overline{\kappa}}\right){}^0\varphi^{(n)'}\left({}^0\kappa\right) - 3{}^0\chi^{(n)''}({}^0\kappa) + D_2^{(n-2)}\right);$$

$$4\omega_1 e_4 = \frac{3}{2\mu}\left({}^0\overline{\kappa}\,{}^0\varphi^{(n)''}\left({}^0\kappa\right) - \overline{{}^0\varphi^{(n)''}}\left({}^0\overline{\kappa}\right){}^0\kappa + {}^0D_3^{(n-2)}\right);$$

$$4\mu\varepsilon_{11} e_1 = \mathrm{Re}\left((5-8\nu)\,{}^0\varphi^{(n)'}\left({}^0\kappa\right) - 2\,{}^0\kappa\overline{{}^0\varphi^{(n)''}}\left({}^0\overline{\kappa}\right) - 3\,{}^0\chi^{(n)''}\left({}^0\kappa\right) + {}^0D_{11}^{(n-1)}\right).$$

Полученные общие решения основных пространственных задач физически нелинейной теории упругости необходимы для формулировки и решения краевых задач. Использование квазиконформного отображения позволит обобщить их для трехмерных областей с регулярной граничной поверхностью и произвести оценку напряженно-деформированного состояния конструкций с концентраторами напряжений.

В качестве модельной задачи рассмотрим напряженное состояние изотропного физически нелинейного пространства с шаровой полостью радиуса r_0 при воздействии всестороннего растяжения усилиями интенсивности q. Переходя к сферическим координатам (r, θ, φ), на основе представлений (17) получим для задачи в напряжениях при двух членах разложения:

$$\sigma_{rr}^{(0)} = \left(-\frac{r_0^3}{r^3} + 1\right)q; \quad \sigma_{rr}^{(1)} = \frac{r_0^3\, g_2^2\, q^3 (1+\nu)}{18G^2 r^3(-1+\nu)} + \frac{(1+\nu) r_0^9\, q^3 g_2^2}{18G^2(1-\nu)r^9};$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \left(\frac{r_0^3}{2r^3} + 1\right)q; \quad \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = -\frac{4r_0^3}{9r^3} + \frac{g_2^2\, q^3(1+\nu)}{16\,G^2\, r^3(1-\nu)} - \frac{r_0^9\, q^3\, g_2^2}{2G^2(1-\nu)r^9}.$$

Решение совпадает с уже известным [15] при соответствующем выборе параметра нагружения.

ВЫВОД

Разработка современных математических методов в механике сплошных сред со сложной реологией может служить теоретической основой создания эффективных алгоритмов и пакетов прикладных программ как важной составляющей математического обеспечения систем автоматизированного проектирования для отраслей машиностроения, приборостроения и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мусхелишвили, Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – 5-е изд. – М.: Наука, 1966.
2. **Лурье, А. И.** Теория упругости / А. И. Лурье. – М.: Наука, 1970.
3. **Бицадзе, А. В.** Основы теории аналитических функций комплексного переменного / А. В. Бицадзе. – 3-е изд. – М.: Наука, 1984.
4. **Мусхелишвили, Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – 3-е изд. – М.: Наука, 1968.
5. **Гахов, Ф. Д.** Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М.: Физматизд, 1963.
6. **Клюшников, В. Д.** Математическая теория пластичности / В. Д. Клюшников. – М.: Изд-во МГУ, 1979.
7. **Савин, Г. Н.** Метод возмущения упругих свойств в механике твердых деформируемых тел / Г. Н. Савин, Ю. Н. Немиш // ДАН СССР. – 1974. – Т. 216, № 1. – С. 53–55.
8. **Александров, Л. Я.** Пространственные задачи теории упругости / Л. Я. Александров, Ю. И. Соловьев. – М.: Наука, 1978.
9. **Александрович, А. И.** Применение теории функций двух комплексных переменных в теории упругости / А. И. Александрович. // ДАН СССР. – 1977. – Т. 232, № 3. – С. 542–544.
10. **Мельниченко, И. П.** Кватернионные переменные и гиперкомплексные потенциалы в механике сплошной среды / И. П. Мельниченко, Е. М. Пик // Прикладная механика. – 1973. – Т. 9, вып. 4. – С. 45–50.
11. **Богачев, Ф. А.** Описание решений пространственных задач теории упругости через бигармонические функции / Ф. А. Богачев // Проблемы прочности и пластичности / Изд-во Новгородского ун-та. – 1996. – Вып. 45. – С. 63–71.
12. **Penrod, D. D.** Analogue of complex formulas of for three-dimensional problems of the theory of elasticity / D. D. Penrod // Quart. Appl. Math. – 1966. – V. 23, № 4. – P. 312–322.
13. **Ганнинг, Р.** Аналитические функции многих комплексных переменных / Р. Ганнинг, Х. Росси. – М.: Мир, 1969.
14. **Каудерер, Г.** Нелинейная механика / Г. Каудерер. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
15. **Левчук, О. И.** О влиянии физической нелинейности материала на напряженное состояние среды с упругим сферическим включением при равномерном нагружении / О. И. Левчук // Прикладная механика. – 1989. – Т. 34, вып. 11. – С. 46–51.

Поступила 13.01.2006