

Министерство образования Республики Беларусь  
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

---

Кафедра  
«Теоретическая механика и механика материалов»

Л.Е. Реут, Т.Ф. Богинская

***Динамическое действие нагрузок.  
Задачи на удар***

Учебно-методическое пособие

***Электронное учебное издание***

Минск – 2020

УДК 620.1 (075.8)

ББК 30.121я7

Р 44

**Авторы:**

Л.Е. Реут, Т.Ф. Богинская

**Рецензенты:**

кандидат технических наук, доцент *А.М. Авсиевич*

Электронное учебное издание представляет собой пособие по дисциплине «Механика материалов» и рассматривает один из классов динамических задач – расчеты на прочность деталей машин и механизмов при действии ударной нагрузки. Учитывая, что элементы машиностроительных конструкций часто в процессе работы подвергаются действию динамических нагрузок, способных привести к разрушению, расчеты на прочность таких элементов являются важными и актуальными. В пособии рассматривается теоретический аспект данной темы, а также предлагаются практические задачи с методиками решения, анализом и подробным пояснением для широкого класса деталей, подвергающихся ударному воздействию сил в процессе эксплуатации.

Пособие предназначено для студентов всех технических специальностей дневной и заочной форм обучения высших технических учебных заведений, а также для преподавателей при подготовке к лекционным и практическим занятиям.

Белорусский национальный технический университет  
пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь

Тел. (017) 292-41-01

E-mail: msf@bntu.by

Регистрационный № **БНТУ/МСФ22-39.2020**

© Реут Л.Е., Богинская Т.Ф., 2020

© Белорусский национальный  
технический университет, 2020

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b> .....	4
<b>ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ</b> .....	5
1. Техническая теория удара. Основные допущения .....	5
2. Напряжения и деформации при ударе. Динамический коэффициент .....	7
3. Частные случаи удара .....	12
3.1. Продольный удар .....	12
3.2. Поперечный (изгибающий) удар .....	14
3.3. Крутящий удар .....	17
4. Напряжения в стержнях переменного сечения .....	19
5. Механические испытания на удар. Ударная вязкость .....	21
<b>ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ</b> .....	27
1. Импульсная нагрузка .....	27
2. Продольный удар .....	28
3. Поперечный удар .....	48
4. Крутящий удар .....	62
 Литература .....	 65

## **ВВЕДЕНИЕ**

Механика материалов представляет собой фундаментальную общетехническую дисциплину, изучаемую во всех технических вузах и являющуюся основой технического образования инженера любой специальности. Одним из важных в курсе «Механики материалов» является раздел, посвященный расчетам деталей машин и механизмов, работающих в условиях динамических нагрузок – вибраций, колебаний, ударов, нагрузок, многократно изменяющихся по величине, направлению, скорости приложения и т.д. В этом случае возникают значительные силы инерции, многократно увеличивающие эффект воздействия, способные привести к потере прочности элемента и его разрушению. Расчет деталей, работающих в условиях динамических нагрузок, отличается от статического расчета и требует соответствующих методик и подходов при их проектировании.

Данное учебное пособие представляет собой вторую часть цикла электронных пособий, посвященных расчету на прочность и жесткость деталей машин и механизмов при динамическом действии нагрузок. Пособие рассматривает вопросы воздействия ударных нагрузок и расчеты на прочность и жесткость деталей, подвергающихся удару в процессе эксплуатации. Оно включает в себя краткую теоретическую часть, а также широкий набор практических инженерных задач с решениями, пояснениями и методическими рекомендациями.

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

## 1. ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УДАРА. ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ

Удар в инженерных конструкциях наблюдается в случае, когда соприкасаются детали, движущиеся с различными скоростями. Задачи на ударную нагрузку являются крайне сложными и по математическому описанию, и по тем физико-механическим процессам, которые возникают при ударе. Характерной чертой удара является то, что деформация системы, воспринимающей удар, получается не только за счет массы, наносящей удар, но, главным образом, за счет той кинетической энергии, которой эта масса обладает в начале воздействия на систему. При этом возникают большие ускорения и большие инерционные силы, которые и определяют силу удара. Однако в отличие от задач на учет сил инерции, при ударных нагрузках, когда промежуток времени изменения скорости составляет долю секунды, использование формул кинематики твердого тела для вычисления ускорений –  $a = \Delta V/t$ ,  $a = 2S/t^2$  и др. становится невозможным, а значит, невозможно определить и силу инерции как  $F_{ин} = ma$ , воздействующую на элемент. Очевидным является только то, что при столь малом значении времени  $t$  ускорения и силы инерции будут весьма значительными и величина последних может многократно превышать воздействующую нагрузку по сравнению с ее статическим значением.

Вторая проблема, возникающая при ударе, заключается в том, что удар сопровождается целым рядом сопутствующих явлений – возникают волновые процессы и упругие колебания деталей, скорость изменяется не только по величине, но и направлению, при соударении между деталями происходит перераспределение энергий, в окрестности контакта возникают местные деформации и т.д., что серьезно усложняет постановку задачи, принятие точной расчетной модели и математическое описание процесса.

Кроме того, как показывают многочисленные исследования, при ударе материалы изменяют свое механическое поведение. При ударных нагрузках механические свойства материалов в значительной степени отличаются от свойств, проявляемых при статическом нагружении, что требует проведения специальных испытаний, так называемых «ударная проба», определяющих способность материала к сопротивлению ударным нагрузкам. И хотя некоторые статические испытания, например, испытания на растяжение, дают в определенной степени ответ на вопрос

относительно способности материала к поглощению энергии и возможности его использования для деталей, работающих при динамических нагрузках, однако основным критерием оценки прочности при ударе является *ударная вязкость* материала – механическая характеристика, определяющая его способность при больших скоростях нагружения к быстрому поглощению механической энергии в процессе деформации и разрушения.

Изучением механического поведения тел при ударе с учетом всех вышеописанных явлений и эффектов занимается наука, называемая «*Точная теория удара*», использующая для изучения и исследования этих вопросов высоконаучные методы, точные подходы и соответствующий математический аппарат. Однако для решения практических инженерных задач такой подход представляется сложным и трудоемким. Здесь для выполнения расчета требуются более простые и удобные методы, позволяющие использовать простую и доступную математику. Для этого при рассмотрении и постановке задачи вводится ряд допущений, позволяющих значительно упростить решение, на основании которых строится инженерная наука, называемая «*Техническая теория удара*». Основными допущениями в *технической теории удара* являются:

- Удар предполагается абсолютно *неупругим*, т.е. *без отскока*. Это означает, что после соударения ударяющее и ударяемое тела, движущиеся с соответствующими скоростями  $V$  и обладающие запасом кинетической энергии  $K$ , продолжают двигаться в одну сторону как единое целое (рис. 1). Такой подход позволяет считать, что кинетическая энергия ударяющего тела целиком и полностью расходуется на деформацию ударяемого тела, и тогда по закону сохранения энергии можно принять, что  $K = U$ , где  $U$  – потенциальная энергия деформации, накапливаемая в ударяемом теле.

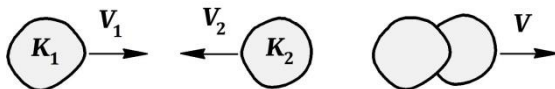


Рис. 1

- Ударяющее тело рассматривается как *инструмент*, поэтому его принимают абсолютно жестким и недеформируемым.
- Масса ударяемого тела считается весьма малой по сравнению с массой ударяющего тела, поэтому в большинстве задач массой ударяемого тела пренебрегают, считая, что эта масса не создает

силу инерции. Сила инерции как дополнительная сила возникает только от массы ударяющего тела (инструмента). Однако имеется ряд задач (они также будут рассмотрены), где масса ударяемого тела принимается в расчет.

- Возникающие при ударе колебания и волновые процессы не учитываются и принимается, что напряжения и деформации в ударяемом теле распространяются *мгновенно*.

- При ударе модуль Юнга принимается такой же величины, как при статическом нагружении, а пропорциональная зависимость между напряжениями и деформациями сохраняется, т.е. при ударе материал также подчиняется закону Гука.

## 2. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПРИ УДАРЕ. ДИНАМИЧЕСКИЙ КОЭФФИЦИЕНТ

Как было сказано выше, при ударных нагрузках определение сил инерции не представляется возможным, а поэтому, методика решения, основанная на применении принципа Даламбера, как это делается в задачах на учет сил инерции, здесь неприменима. Решение задач на удар требует принципиально иного подхода – энергетического, основанного на законе сохранения энергии.

Рассмотрим упругий элемент, который подвергается удару грузом весом  $Q$ , падающим с высоты  $H$ . В результате удара элемент получает динамическую деформацию  $\Delta_{\partial}$  (рис. 2).

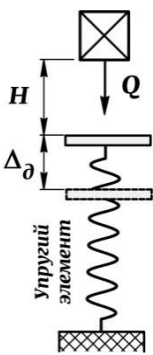


Рис. 2

Согласно принятому допущению о том, что удар является неупругим и происходит без отскока, на основании закона сохранения энергии получаем:

$$K = U, \quad (1)$$

где  $K$  – кинетическая энергия падающего груза, с учетом полной высоты опускания ( $H + \Delta_{\partial}$ ), равная

$$K = Q (H + \Delta_{\partial}); \quad (2)$$

$U$  – энергия деформации, накопленная в элементе при динамическом воздействии нагрузки.

Для определения  $U$  вернемся к *статическим нагрузкам* и рассмотрим варианты статического нагружения, прикладывая ударяющий груз статически, принимая статическое значение груза равным его весу, т.е.  $Q_{ст} = Q$ . Определим влияние способа приложения нагрузки на поведение упругого элемента и его свойства:

• При **растяжении-сжатии** (рис. 3) согласно закону Гука статическая деформация элемента определяется по формуле  $\Delta_{cm} = Q_{cm}\ell / EA$ , где  $EA/\ell = C$  – жесткость элемента при растяжении и сжатии. И тогда получаем:  $\Delta_{cm} = Q_{cm}/C$ .

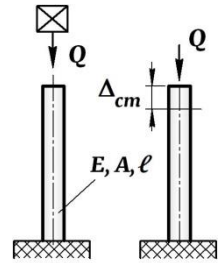


Рис. 3

• При **плоском изгибе** в зависимости от вида балки, вида опор и нагрузки расчетные формулы принимают соответствующий вид:

а) для консольной балки с заделкой (рис. 4, а) статический прогиб конца консоли определяется как  $\Delta_{cm} = Q_{cm}\ell^3 / 3EI_x$ , где жесткость данной балки равна  $C = 3EI_x / \ell^3$ . И здесь получаем ту же зависимость:  $\Delta_{cm} = Q_{cm}/C$ .

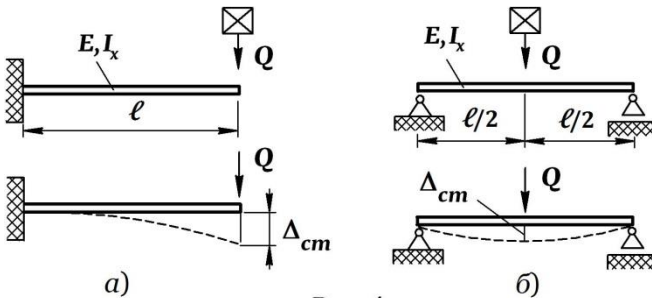


Рис. 4

б) для двухопорной балки (рис. 4, б) прогиб посередине пролета определяется как  $\Delta_{cm} = Q_{cm}\ell^3 / 48EI_x$ , где жесткость данной балки равна  $C = 48EI_x / \ell^3$ . И тогда здесь также получаем ту же зависимость:  $\Delta_{cm} = Q_{cm}/C$ .

• При **кручении** (рис. 5) статический угол закручивания по закону Гука определяется по формуле  $\varphi_{cm} = M\ell / GI_\rho$ , где  $C = GI_\rho / \ell$  – жесткость элемента при кручении. Тогда зависимость между статическим углом закручивания и нагрузкой имеет вид:  $\varphi_{cm} = M/C$ .

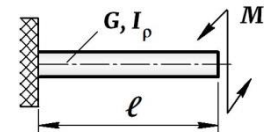


Рис. 5

На основании рассмотренных примеров при различных случаях нагружения следует **вывод**, что жесткость элемента,



согласно представленным значениям, зависит от механических свойств материала, от геометрии элемента – длины, размеров и формы поперечного сечения, а при изгибе – от расчетной схемы балки, *но не зависит от нагрузки и способа ее приложения* – будет нагрузка прикладываться *статически* или *динамически*. Жесткость конкретного элемента, определяемая указанными значениями, есть величина постоянная и как не зависящая ни от нагрузки, ни от возникающей при этом деформации, она выступает между этими величинами в качестве коэффициента пропорциональности как при статическом, так и динамическом нагружении:

$$Q_{cm} = C\Delta_{cm}; \quad (3)$$

$$Q_{\partial} = C\Delta_{\partial}. \quad (4)$$

Определим величину потенциальной энергии, накапливаемой в упругом элементе при его деформировании.

При *статическом нагружении* потенциальная энергия на основании закона сохранения энергии численно равна работе внешних сил и может быть вычислена по теореме Клапейрона, а значит, с учетом значения (3) она равна:

$$U_{cm} = \frac{Q_{cm}\Delta_{cm}}{2} = \frac{C\Delta_{cm}^2}{2}. \quad (5)$$

Тогда при *ударном нагружении*, полагая, что при ударных нагрузках динамические напряжения не превышают предел пропорциональности, а модуль упругости, согласно принятым допущениям, остается неизменным, потенциальная энергия по аналогии со статическим нагружением и с учетом значений (4) и (3), принимая, что статическая нагрузка равна весу груза, т.е.  $Q_{cm} = Q$ , определяется как:

$$U_{\partial} = \frac{Q_{\partial}\Delta_{\partial}}{2} = \frac{C\Delta_{\partial}^2}{2} = \frac{Q_{cm}\Delta_{\partial}^2}{2\Delta_{cm}} = \frac{Q\Delta_{\partial}^2}{2\Delta_{cm}}. \quad (6)$$

Подставляем значения кинетической (2) и потенциальной (6) энергий в закон сохранения (1)  $\rightarrow Q(H + \Delta_{\partial}) = Q\Delta_{\partial}^2/2\Delta_{cm}$  и приводим полученное выражение к виду квадратного уравнения относительно деформации  $\Delta_{\partial}$  —

$$\Delta_{\partial}^2 - 2\Delta_{cm}\Delta_{\partial} - 2H\Delta_{cm} = 0, \quad (7)$$

решение которого имеет вид:

$$\Delta_{\partial} = \Delta_{cm} \pm \sqrt{\Delta_{cm}^2 + 2H\Delta_{cm}} . \quad (8)$$

Так как знак «минус» не соответствует физической стороне рассматриваемой задачи, сохраняем только знак «плюс» и после преобразования получаем:

$$\Delta_{\partial} = \Delta_{cm} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{cm}}} \right) , \quad (9)$$

Величина в скобках называется *динамический коэффициент*:

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{cm}}} . \quad (10)$$

Тогда согласно формуле (9) и учитывая пропорциональную зависимость между напряжениями и деформациями, получаем выражения, которые показывают, что решение задач на удар, может быть сведено к статическому решению путем введения в расчет динамического коэффициента:

$$\begin{aligned} Q_{\partial} &= k_{\partial} Q_{cm}; & \Delta_{\partial} &= k_{\partial} \Delta_{cm}; \\ \sigma_{\partial} &= k_{\partial} \sigma_{cm}; & \tau_{\partial} &= k_{\partial} \tau_{cm}. \end{aligned} \quad (11)$$

где  $Q_{\partial}$  – динамическая нагрузка;  $\Delta_{\partial}$  – динамические линейные или угловые деформации;  $\sigma_{\partial}$ ,  $\tau_{\partial}$  – динамические напряжения.

Динамический коэффициент показывает, во сколько раз сила ударяющего груза больше веса этого груза и во сколько раз возникающие в элементе напряжения и деформации больше своих статических значений как если бы деформирование тела производилось статически.

Динамический коэффициент может иметь и другие выражения. Если для ударяющего тела задана скорость при соударении, то на основании формул кинематики твердого тела принимаем

$$V = \sqrt{2gH}, \text{ откуда } 2H = V^2/g, \text{ и соответственно, } \frac{2H}{\Delta_{cm}} = \frac{V^2}{g\Delta_{cm}}$$

и, подставляя последнее выражение в (10), получаем:

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g\Delta_{cm}}} , \quad (12)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения.

Наиболее общим для динамического коэффициента является его выражение через кинетическую энергию ударяющего тела. Для получения этого значения приведем слагаемое под знаком радикала в формуле (10) к виду  $\rightarrow \frac{2H}{\Delta_{cm}} \cdot \frac{Q}{Q} = \frac{QH}{Q\Delta_{cm}/2} = \frac{K_0}{U_{cm}}$ , где  $K_0 = QH$  – кинетическая энергия ударяющего тела на момент соударения, т.е. без учета деформации ударяемого тела;  $U_{cm}$  – потенциальная энергия деформации в ударяемом теле, равная значению, согласно формуле (5). В результате получаем:

$$\boxed{k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{K_0}{U_{cm}}}} \quad (13)$$

При решении задач значения динамических коэффициентов (10), (12) и (13) можно упростить:

– если  $2H/\Delta_{cm} \geq 10$ , то  $\rightarrow$

$$\boxed{k_{\partial} = 1 + \sqrt{\frac{2H}{\Delta_{cm}}}, k_{\partial} = 1 + \sqrt{\frac{V^2}{g\Delta_{cm}}}, k_{\partial} = 1 + \sqrt{\frac{K_0}{U_{cm}}}} \quad ; \quad (14)$$

– если  $2H/\Delta_{cm} \geq 400$ , то  $\rightarrow$

$$\boxed{k_{\partial} = \sqrt{\frac{2H}{\Delta_{cm}}}, k_{\partial} = \sqrt{\frac{V^2}{g\Delta_{cm}}}, k_{\partial} = \sqrt{\frac{K_0}{U_{cm}}}} \quad (15)$$

При импульсном приложении нагрузки, принимая для этого случая  $H=0$  и  $V=0$ , на основании (10) и (12) —  $\boxed{k_{\partial} = 2}$ .

Анализ значений (10), (12)–(15) показывает, что динамический коэффициент, а значит, и динамические напряжения, зависят от жесткости упругой системы. Чем более жесткой является система, тем меньшую величину будут иметь в ней статические деформации, тем большим будет динамический коэффициент и динамические напряжения. Поэтому снижение напряжений при ударе может быть достигнуто уменьшением жесткости системы.

В полученных выражениях не учтена масса упругой системы, подвергающейся ударной нагрузке. Согласно технической теории удара масса ударяемого тела принимается ничтожно малой, не создающей существенную силу инерции, поэтому этой массой в большинстве расчетов пренебрегают. Но в случае учета массы

упругого элемента динамические напряжения будут иметь меньшие значения, а поэтому, рассчитывая конструкции без учета ее массы, мы получаем дополнительный запас прочности.

### 3. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ УДАРА

В зависимости от вида деформации различают *продольный*, *поперечный* и *крутящий* удар.

#### 3.1. Продольный удар

Рассмотрим вопрос на примере стержня, подвергающегося удару вдоль оси падающим с высоты  $H$  грузом  $Q$  (рис. 6). Определим динамические напряжения в стержне и установим, от чего они зависят и какие факторы влияют на их величину.

Динамические напряжения, согласно формулам (11), принимаем равными:

$$\sigma_{\partial} = k_{\partial} \sigma_{cm}, \quad (a)$$

где для динамического коэффициента используем упрощенную формулу (15) —  $k_{\partial} = \sqrt{K_0 / U_{cm}}$ . (б)

Распишем значения, входящие по знак корня, по формулам, рассмотренным выше, и с учетом зависимостей теории упругости, соответствующих продольной деформации:

$$K_0 = QH; \quad U_{cm} = \frac{Q\Delta_{cm}}{2} = \left| \Delta_{cm} = \frac{Q\ell}{EA} \right| = \frac{Q^2\ell}{2EA}.$$

Приведем выражение для  $U_{cm}$  к виду:

$$U_{cm} = \frac{Q^2\ell}{2EA} \cdot \frac{A}{A} = \frac{Q^2}{A^2} \cdot \frac{\ell A}{2E} = \left| \frac{Q}{A} = \sigma_{cm} \right| = \sigma_{cm}^2 \cdot \frac{\ell A}{2E}.$$

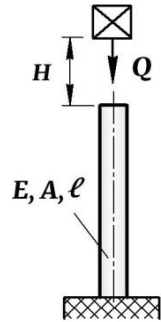


Рис. 6

Подставляем полученные значения под знак радикала (б) и определяем динамический коэффициент:

$$k_{\partial} = \sqrt{\frac{K_0}{U_{cm}}} = \sqrt{\frac{QH}{\sigma_{cm}^2 \ell A / 2E}} = \frac{1}{\sigma_{cm}} \sqrt{\frac{2QHE}{\ell A}}. \quad (в)$$

Тогда динамические напряжения в стержне при продольном ударе на основании значений (а) и (в) равны:

$$\sigma_{\partial} = k_{\partial} \sigma_{cm} = \frac{1}{\sigma_{cm}} \sqrt{\frac{2QHE}{\ell A}} \cdot \sigma_{cm} \rightarrow \boxed{\sigma_{\partial} = \sqrt{\frac{2QHE}{\ell A}}}. \quad (16)$$

Анализ формулы (16) и сравнение величины динамических напряжений со статическими, равными  $\sigma_{cm} = Q/A$ , показывает, что динамические напряжения в отличие от статических, зависят:

- от жесткости материала, которая определяется модулем Юнга, и чем более жестким является материал, тем большие будут возникать динамические напряжения. При статическом нагружении напряжения не зависят от свойств материала.

- от объема элемента (не только от размеров сечения), и чем больше его объем, тем больше его «энергоемкость» – способность поглощать большое количество энергии без разрушения, тем меньше будут возникать в нем динамические напряжения.

Как видно из формулы (16), а также формул (10), (12) – (15), чем больше длина стержня, тем меньше его жесткость и величина динамического коэффициента, а следовательно, меньше будет динамическая сила и динамические напряжения. Поэтому, например, соединяющие тягач с буксируемым объектом тросы не должны быть короткими, так как короткий трос при ударе (в момент начала движения буксируемого объекта с места или из-за неровностей дороги) не выдерживает динамической нагрузки и может разорваться.

Расчет элементов и проверка их прочности производится из условия прочности, которое при продольном ударе имеет вид:

$$\boxed{\sigma_{\partial} = \sqrt{\frac{2QHE}{\ell A}} \leq [\sigma]}. \quad (17)$$

Здесь допускаемое напряжение определяется как  $[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{опас}}}{n_{\partial}}$ ,

где  $\sigma_{\text{опас}}$  – опасное напряжение, соответствующее наступлению предельного состояния материала – текучести или хрупкого разрушения, равное соответственно  $\sigma_{\text{опас}} = \sigma_{\text{T}}$  или  $\sigma_{\text{опас}} = \sigma_{\text{В}}$ ;  $n_{\partial}$  – динамический коэффициент запаса прочности (принимается больше статического коэффициента запаса прочности –  $n_{\partial} \approx 2$ ).

### 3.2. Поперечный (изгибающий) удар

Рассмотрим вопрос на примере двух балок – консольной балки с заделкой (рис. 7) и двухопорной однопролетной балки (рис. 8). Определим динамические напряжения, возникающие в балках от удара грузом  $Q$ , падающим с высоты  $H$

Для определения динамических напряжений используем формулы –

$$\sigma_{\partial} = k_{\partial} \sigma_{cm}, \quad (a)$$

$$k_{\partial} = \sqrt{K_0 / U_{cm}}. \quad (б)$$

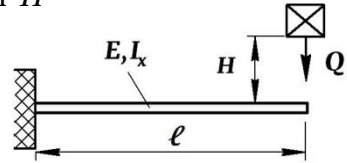


Рис. 7

Распишем значения, входящие в выражение (a), и под знак радикала (б):

$$\sigma_{cm} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{Q\ell}{W_x}; \quad (в) \quad K_0 = QH; \quad (з)$$

$$U_{cm} = \frac{Q\Delta_{cm}}{2} = \left| \Delta_{cm} = \frac{Q\ell^3}{3EI_x} \right| = \frac{Q^2\ell^3}{6EI_x}. \quad (д)$$

На основании формул (б), (з) и (д) определяем динамический коэффициент:

$$k_{\partial} = \sqrt{\frac{K_0}{U_{cm}}} = \sqrt{\frac{QH \cdot 6EI_x}{Q^2\ell^3}} = \frac{1}{Q\ell} \sqrt{\frac{6QHEI_x}{\ell}}. \quad (e)$$

Подставляем значения (в) и (e) в формулу (a) и определяем динамические напряжения в балке:

$$\sigma_{\partial} = \frac{1}{Q\ell} \sqrt{\frac{6QHEI_x}{\ell}} \cdot \frac{Q\ell}{W_x} \rightarrow \sigma_{\partial} = \sqrt{\frac{6QHEI_x}{W_x^2\ell}}. \quad (18)$$

Аналогичным образом проводим решение для балки (рис. 8):

$$\sigma_{cm} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{Q\ell}{4W_x}; \quad (ж) \quad K_0 = QH; \quad (з)$$

$$U_{cm} = \frac{Q\Delta_{cm}}{2} = \left| \Delta_{cm} = \frac{Q\ell^3}{48EI_x} \right| = \frac{Q^2\ell^3}{96EI_x}. \quad (u)$$

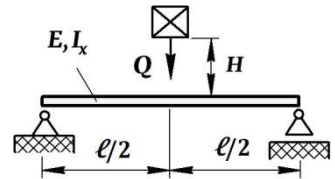


Рис. 8

На основании формул (б), (з) и (u) определяем динамический коэффициент:

$$k_{\partial} = \sqrt{\frac{K_0}{U_{cm}}} = \sqrt{\frac{QH \cdot 96EI_x}{Q^2 \ell^3}} = \frac{4}{Q\ell} \sqrt{\frac{6QHEI_x}{\ell}}. \quad (\kappa)$$

Подставляем значения ( $\varepsilon$ ) и ( $\kappa$ ) в формулу (а) и определяем динамические напряжения в балке:

$$\sigma_{\partial} = \frac{4}{Q\ell} \sqrt{\frac{6QHEI_x}{\ell}} \cdot \frac{Q\ell}{4W_x} \rightarrow \boxed{\sigma_{\partial} = \sqrt{\frac{6QHEI_x}{W_x^2 \ell}}}. \quad (19)$$

Примечание.

Для рассмотренных балок числовой коэффициент под знаком корня в формулах (18) и (19) оказался одинаковым, но это совпадение. Для других расчетных схем балок формула для динамических напряжений по составляющим в числителе и знаменателе будет идентична, но может иметь другой числовой коэффициент.

Преобразуем геометрические характеристики, входящие под знак радикала в формулах (18) и (19):

$$\frac{I_x}{W_x^2} = \left| W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} \right| = \frac{y_{\max}^2}{I_x} = \left| i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \right| = \frac{y_{\max}^2}{i_x^2 A}. \quad (20)$$

Подставляем значение (20) в выражения (18) и (19) и получаем окончательную формулу для динамических напряжений:

$$\boxed{\sigma_{\partial} = \frac{y_{\max}}{i_x} \sqrt{\frac{6QHE}{\ell A}}}. \quad (21)$$

Анализ формулы (21) и сравнение ее с величиной статических напряжений при плоском изгибе ( $\sigma_{cm} = M_{\max}/W_x$ ) показывает, что динамические напряжения в отличие от статических, также как и при продольном ударе, зависят от жесткости материала и от объема элемента.

Но при поперечном ударе есть еще одна важная особенность, связанная с динамическими напряжениями. Рассмотрим вопрос на примере консольной балки прямоугольного сечения (рис. 9), подвергающейся удару грузом  $Q$ , и определим в ней величину динамических напряжений для двух вариантов расположения сечения по отношению к направлению удара:

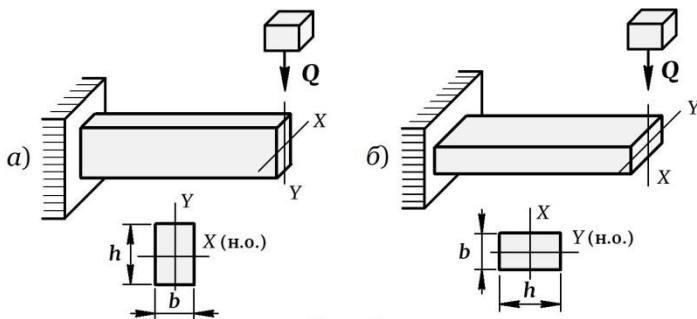


Рис. 9

а) для варианта расположения балки (рис. 9, а) динамические напряжения определяются формулой

$$\sigma_{\partial} = \frac{y_{\max}}{i_x} \sqrt{\frac{6QHE}{\ell A}}, \quad (a)$$

где  $\frac{y_{\max}}{i_x} = \left| \begin{array}{l} y_{\max} = h/2 \\ i_x = \sqrt{I_x/A} = \sqrt{bh^3/12bh} = h/\sqrt{12} \end{array} \right| = \frac{h\sqrt{12}}{2h} = \sqrt{3}.$

б) для варианта расположения балки (рис. 9, б) динамические напряжения определяются формулой

$$\sigma_{\partial} = \frac{x_{\max}}{i_y} \sqrt{\frac{6QHE}{\ell A}}, \quad (б)$$

где  $\frac{x_{\max}}{i_y} = \left| \begin{array}{l} x_{\max} = b/2 \\ i_y = \sqrt{I_y/A} = \sqrt{hb^3/12bh} = b/\sqrt{12} \end{array} \right| = \frac{b\sqrt{12}}{2b} = \sqrt{3}.$

Результаты расчета показывают, что  $\frac{y_{\max}}{i_x} = \frac{x_{\max}}{i_y}$ , и значит,

напряжения по формулам (а) и (б) имеют одинаковое значение. Отсюда следует вывод, что в балках прямоугольного сечения при поперечном ударе динамические напряжения зависят от формы сечения, но не зависят от расположения этого сечения по отношению к направлению нагрузки. В то же время при статическом нагружении напряжения существенно зависят от положения сечения балки по отношению к силовой плоскости.

Окончательно условие прочности при поперечном ударе для рассмотренных схем балок имеет вид:



$$\sigma_{\partial} = \sqrt{\frac{6QHEI_x}{W_x^2 \ell}} \leq [\sigma]. \quad (22)$$

### 3.3. Крутящий удар

Крутящий (или скручивающий) удар испытывают валы, на которые посажены массивные шкивы (маховики), при внезапной остановке или заклинивании вала.

Рассмотрим вращающийся вал с установленным на его конце массивным маховиком (рис. 10). В случае заклинивания опорного подшипника или включения тормозного устройства происходит резкая остановка вала, в то время как маховик по инерции продолжает вращаться и закручивает вал, но происходит это закручивание не статически, а резко, т.е. валу наносится крутящий удар, а маховик выступает в качестве ударяющего инструмента. В результате кинетическая энергия вращающегося маховика переходит в потенциальную энергию деформации вала.

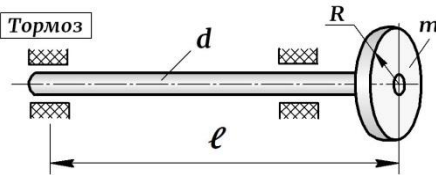


Рис. 10

Расчет на крутящий удар и определение динамических напряжений и деформаций выполняем по методике (11),

т.е. через статические значения этих величин и динамический коэффициент:

$$\tau_{\partial} = k_{\partial} \tau_{cm}; \quad (a) \quad \varphi_{\partial} = k_{\partial} \varphi_{cm}, \quad (б)$$

где

$$\tau_{cm} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}}; \quad (в) \quad \varphi_{cm} = \frac{M_{кр} \ell}{GI_{\rho}}. \quad (г)$$

Используем для динамического коэффициента формулу (15):

$$k_{\partial} = \sqrt{K_0 / U_{cm}}, \quad (д)$$

где  $K_0$  – кинетическая энергия вращающегося маховика (о ней подробнее будет сказано ниже);  $U_{cm}$  – потенциальная энергия деформации кручения при статическом закручивании, равная –

$$U_{cm} = \frac{M_{кр} \varphi_{cm}}{2} = \left| \varphi_{cm} = \frac{M_{кр} \ell}{GI_{\rho}} \right| = \frac{M_{кр}^2 \ell}{2GI_{\rho}}. \quad (е)$$

Тогда динамический коэффициент на основании значений (д) и (е) равен:

$$k_{\partial} = \sqrt{\frac{K_0}{U_{cm}}} = \sqrt{\frac{2GI_{\rho}K_0}{M_{кр}^2\ell}} = \frac{1}{M_{кр}} \sqrt{\frac{2GI_{\rho}K_0}{\ell}}, \quad (\text{ж})$$

а динамические напряжения по формуле (а) с учетом (в) и (ж) определяются как

$$\tau_{\partial} = k_{\partial}\tau_{cm} = \frac{1}{M_{кр}} \sqrt{\frac{2GI_{\rho}K_0}{\ell}} \cdot \frac{M_{кр}}{W_{\rho}} = \sqrt{\frac{2GI_{\rho}K_0}{W_{\rho}^2\ell}}. \quad (\text{з})$$

Преобразуем отношение геометрических характеристик под знаком радикала (з):

$$\frac{I_{\rho}}{W_{\rho}^2} = \left| \frac{I_{\rho} = \pi d^4/32}{W_{\rho} = \pi d^3/16} \right| = \frac{\pi d^4 \cdot 16^6}{32 \cdot \pi^2 d^6} = \frac{8}{\pi d^2} = \frac{2}{\pi d^2/4} = \frac{2}{A}, \quad (\text{и})$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения вала.

Тогда окончательно динамические напряжения (з) с учетом значения (и) принимают вид:

$$\tau_{\partial} = \sqrt{\frac{4GK_0}{\ell A}}. \quad (23)$$

Динамический угол закручивания на основании формул (б), (г) и (ж) равен:

$$\varphi_{\partial} = k_{\partial} \varphi_{cm} = \frac{1}{M_{кр}} \sqrt{\frac{2GI_{\rho}K_0}{\ell}} \cdot \frac{M_{кр}\ell}{GI_{\rho}} \rightarrow \varphi_{\partial} = \sqrt{\frac{2\ell K_0}{GI_{\rho}}}. \quad (24)$$

Значение кинетической энергии  $K_0$  для вращающегося тела определяется по формуле  $K_0 = I_0\omega^2/2$ , где  $\omega = \pi n/30$  – угловая скорость вращения ( $n$  – об/мин);  $I_0$  – момент инерции массы (мера инертности тела по отношению к вращательному движению, играет ту же роль, что и масса при поступательном движении). В справочной литературе представлены моменты инерции массы для тел различной формы. Для маховика массой  $m$  и радиусом  $R$  (рис. 10) момент инерции массы равен:

$$I_0 = mR^2/2.$$

#### 4. НАПРЯЖЕНИЯ В СТЕРЖНЯХ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Динамические напряжения в элементах, работающих на удар, зависят не только от объема элемента, но и от его формы, и в частности, от изменения этой формы по длине. Наличие на детали различных конструктивных элементов в виде вырезов, выточек, канавок, сквозных отверстий и т.д. приводит к изменению размеров поперечного сечения вдоль оси и вызывает в местах резкого перехода концентрацию напряжений. Это представляет опасность для прочности даже при статическом нагружении, и особенно, для хрупких материалов, а при динамических нагрузках такая опасность возрастает многократно. При ударных нагрузках энергия деформации не успевает распространиться по всему объему тела. Она концентрируется в области местных дефектов (надразов, трещин, пор, резкого изменения сечения), поэтому напряжения в области концентратора резко увеличиваются, и становятся опасными даже для высоко пластичных материалов, нечувствительных к концентрации при статическом нагружении. Другая серьезная опасность заключается в том, что элементы с резкими перепадами формы являются менее энергоемкими, т.е. способны поглощать меньшее количество энергии, и это также снижает их прочность при ударе.

Исследуем вопрос влияния выточек на способность элемента к поглощению энергии на примере продольного удара и для сравнения рассмотрим три стержня, выполненных из одного материала и имеющих одинаковую длину (рис. 11).

Для обеспечения прочности элемента при ударных нагрузках динамические напряжения  $\sigma_{\partial}$  не должны превышать предел пропорциональности материала  $\sigma_{\text{пц}}$ . И тогда согласно формул

(11) получаем:

$$\sigma_{\partial} = k_{\partial} \sigma_{cm} \leq \sigma_{\text{пц}},$$

где принимаем динамический коэффициент равным (15)

$$k_{\partial} = \sqrt{\frac{K_0}{U_{cm}}}.$$

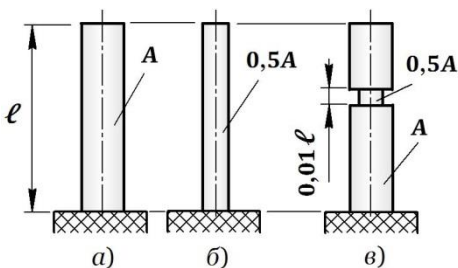


Рис. 11

Подставляем значение  $k_{\partial}$  в выражение для  $\sigma_{\partial}$  и получаем:

$$\sigma_{\partial} = \sqrt{\frac{K_0}{U_{cm}}} \cdot \sigma_{cm} = \sigma_{\text{шт}} \rightarrow K_0 = \frac{\sigma_{\text{шт}}^2 \cdot U_{cm}}{\sigma_{cm}^2}.$$

Принимая для сжатия  $U_{cm} = \frac{Q^2 \ell}{2EA}$  и  $\sigma_{cm} = \frac{Q}{A}$ , определяем количество кинетической энергии, которое может безопасно поглотить элемент без опасности разрушения:

$$K_0 = \frac{\sigma_{\text{шт}}^2 \ell A}{2E}. \quad (25)$$

Используя формулу (25), определяем для стержней (рис. 11) максимальное количество кинетической энергии, которое они способны безопасно поглотить:

- для стержня (рис. 11, а) —  $K_1 = \frac{\sigma_{\text{шт}}^2 \ell A}{2E}; \quad (a)$

- для стержня (рис. 11, б) —

$$K_2 = \frac{\sigma_{\text{шт}}^2 \ell (0,5A)}{2E} = 0,5 \frac{\sigma_{\text{шт}}^2 \ell A}{2E}; \quad (б)$$

- для стержня (рис. 11, в) с выточкой количество энергии определяем как сумму энергий, поглощаемой выточкой  $K_3'$  и остальной частью стержня  $K_3''$  —

$$K_3' = \frac{\sigma_{\text{шт}}^2 (0,01\ell)(0,5A)}{2E} = 0,005 \frac{\sigma_{\text{шт}}^2 \ell A}{2E};$$

$$K_3'' = \frac{(0,5\sigma_{\text{шт}})^2 (0,99\ell)A}{2E} = 0,247 \frac{\sigma_{\text{шт}}^2 \ell A}{2E},$$

откуда  $K_3 = K_3' + K_3'' = 0,252 \frac{\sigma_{\text{шт}}^2 \ell A}{2E}. \quad (в)$

Анализ полученных значений (а)-(в) показывает, что энергия, которую способен безопасно поглотить стержень при наличии короткой выточки, значительно меньше энергии, поглощаемой стержнем постоянного сечения. По сравнению со стержнями (рис. 11, а, б) стержень с выточкой (рис. 11, в) поглощает энергию соответственно в четыре и два раза меньшую, а значит, имеет более высокую вероятность потери прочности. Поэтому короткие

выточки на стержнях, подвергающихся удару, опасны и крайне нежелательны. Местное уменьшение площади сечения на небольшой длине приводит к резкому повышению напряжений и разрушению. Понижение динамических напряжений в таких элементах может быть достигнуто увеличением площади сечения в ослабленном месте. Но если конструктивно выточку нужно сохранить, тогда для повышения прочности следует уменьшить площадь сечения в утолщенной части. И в ряде случаев именно такое решение – уменьшение площади по наименьшей – является наиболее эффективным. Примером стержней, проектируемых таким образом, являются болты (рис. 12, а), в которых резьба представляет собой серию последовательных выточек, серьезно снижающих прочность болта при ударных нагрузках. Поэтому диаметр гладкого цилиндрического участка болта уменьшают, выравнивая размер по диаметру резьбовой части (рис. 12, б).

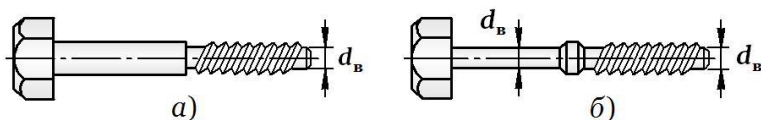


Рис. 12

Такое решение при конструировании элементов, работающих на удар, а также увеличение их длины, выравнивание площадей поперечных сечений, применение материалов с более низким модулем Юнга и т.п. направлено на увеличение податливости (деформируемости) стержня. Чем более податливым является элемент, тем меньше в нем будут возникать динамические напряжения. Таким образом, сопротивление стержней удару качественно отличается от сопротивления их статическим нагрузкам и это необходимо учитывать при конструировании деталей, работающих на удар.

## 5. МЕХАНИЧЕСКИЕ ИСПЫТАНИЯ НА УДАР. УДАРНАЯ ВЯЗКОСТЬ

Как было сказано выше, при ударных нагрузках механическое поведение материала сильно отличается от его поведения при статическом нагружении. Испытания образцов на ударный разрыв показывают, что диаграмма растяжения в этом случае имеет совершенно другой вид, чем при статическом растяжении для одного и того же материала (рис. 13).

При ударе нагрузки являются более «короткими», поэтому диаграмма на ударный разрыв имеет меньшую площадь, чем при статическом разрыве. Механические характеристики при ударе, в том числе и предел текучести, резко возрастают, а пластические свойства снижаются. Материал, который при статических испытаниях проявлял высокую пластичность, при ударном действии нагрузки оказывался хрупким.

Поэтому при выборе материала для деталей, работающих на удар, производят проверку способности материала сопротивляться

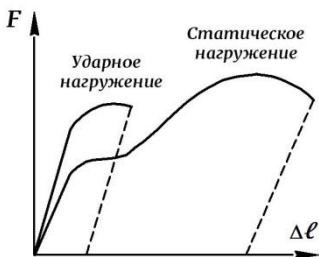


Рис. 13

ударному разрушению, т.е. *вводят ударную пробу*. Суть ударной пробы заключается в том, что образцы подвергают разрушению ударом при растяжении или, чаще, при изгибе. При испытании на удар оценивают работоспособность металла в сложных условиях нагружения и выявляют его склонность к хрупкому разрушению.

Для выявления свойств материала при ударной пробе в образце выполняется надрез в сечении, куда наносится удар (рис. 14). В зависимости от формы надреза различают образцы трех типов: с U-образным надрезом (рис. 14, а), их применяют для контроля при приемке металлопродукции; с V-образным надрезом (рис. 14, б), они являются основными и их используют при контроле металлопродукции для ответственных конструкций как летательные аппараты, транспортные средства; с Т-образным надрезом (рис. 14, в), имитирующим усталостную трещину, они предназначены для испытания материалов, работающих в особо ответственных конструкциях.

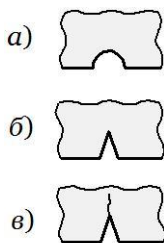


Рис. 14

Смысл надреза заключается в том, что материал заведомо ставят в наиболее тяжелые условия работы в отношении ударных нагрузок. Надрез на образце ударной пробы является местной выточкой и значительно ослабляет сечение в середине образца. Он является концентратором напряжений и опасной зоной элемента. Почти вся энергия удара поглощается в зоне местного ослабления небольшим объемом материала, в результате чего здесь резко повышаются динамические напряжения. Также в зоне надреза возникают значительные местные напряжения,

создающие здесь по своей комбинации объемное напряженное состояние, при котором пластические деформации затруднены и материал в области надреза переходит в хрупкое состояние. Таким образом, надрез ставит материал в самые невыгодные и жесткие условия, но именно в таких условиях работают многие детали машин, имеющие выточки, отверстия, канавки и т.д.

В зависимости от типа разрушений, который потенциально будет оказываться на материал, выбирают метод исследования, заключающийся в применении соответствующих инструментов. Так, нанося удары небольшим молоточком, можно проверить подверженность разрушению при точечных ударах. Но чаще всего ударную вязкость определяют с помощью маятника. Удар по образцу производится на маятниковом копре (рис. 15), по его шкале оценивают работу (количество энергии)  $W$ , затраченную на разрушение образца, и **ударную вязкость «а»** определяют как отношение этой работы к площади его поперечного сечения  $A$ :

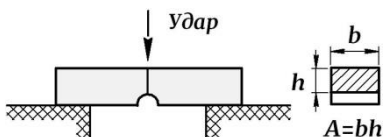


Рис. 15

$$a = \frac{W}{A} \left[ \text{Дж/м}^2 \right]. \quad (26)$$

Таким образом —

|| **Ударной вязкостью материала называется величина работы разрушения образца, отнесенная к площади его поперечного сечения в месте надреза.**

Примечание.

Ударную вязкость обозначают также буквами  $KCU$ ,  $KCV$ ,  $KCT$ , где последняя буква означает форму надреза – скругленный, острый и надрез в виде трещины.

На величину ударной вязкости материала оказывают влияние некоторые факторы.

Ударная вязкость зависит от температуры, поэтому испытания проводят при определенной для каждой стали температуре. С понижением температуры ударная вязкость материала падает. Существует так называемая «критическая температура хрупкости» или «порог хладноломкости» – температура перехода стали в хрупкое состояние. При этой температуре ударная вязкость резко снижается и ниже этой температуры материал становится непригодным для работы при динамических нагрузках. По результатам испытаний строят кривые зависимости ударной

вязкости от температуры и устанавливается температурный интервал, в пределах которого происходит переход стали из вязкого состояния в хрупкое. Однако ударная хрупкость может проявляться и при повышенных температурах: так, например, для углеродистых сталей ударная вязкость падает в интервале температур 200 ÷ 550°С.

Ударная вязкость зависит от точности изготовления образцов и наличия скрытых дефектов структуры материала. Эти дефекты могут быть весьма разнообразными и находиться в любом месте образца, поэтому требуется проведение испытаний на большом количестве образцов и статистическая обработка результатов.

Ударная вязкость зависит от химического состава стали, ее структуры и величины зерен. Присадки к стали углерода и фосфора понижают ударную вязкость, поэтому на практике при изготовлении материала для деталей, работающих на удар, эти примеси технологически ограничивают. Крупнозернистая сталь имеет меньшую ударную вязкость и высокую температуру хладноломкости. Легированные стали имеют более высокую ударную вязкость и более низкий порог хладноломкости.

Для каждого материала существует минимальное значение ударной вязкости, которое служит основанием для выбраковки материала и непригодности его для деталей, работающих при динамических нагрузках. Такой величиной, например, для стали является  $a_{\min} = (0,008 \div 0,01) \times 10^6 \text{ Дж/м}^2$ .

Ударная вязкость является важной характеристикой материала. Она представляет собой комплексный механический показатель, характеризующий чувствительность стали к концентрации напряжений, сопротивление стали динамическим воздействиям, состояние стали (вязкое или хрупкое), склонность стали к хрупкому разрушению при низких температурах, склонность к старению.

**Сводная таблица** расчетных формул для решения задач на ударную нагрузку представлена ниже.



## ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ

### Методика решения

$$Q_{\partial} = k_{\partial} Q_{cm}$$

$$\sigma_{\partial} = k_{\partial} \sigma_{cm}$$

$$\tau_{\partial} = k_{\partial} \tau_{cm}$$

$$\Delta_{\partial} = k_{\partial} \Delta_{cm}$$

### Динамические коэффициенты

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{cm}}}; \quad k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g\Delta_{cm}}}; \quad k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{K_0}{U_{cm}}}$$

$k_{\partial} = 2$  – динамический коэффициент при импульсной нагрузке.

### Напряжения при продольном ударе

$$\sigma_{\partial} = \sqrt{\frac{2QHE}{\ell A}}$$

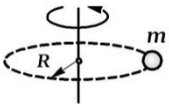
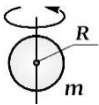
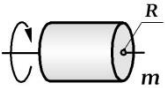
### Напряжения при поперечном ударе (для конкретной расчетной схемы)

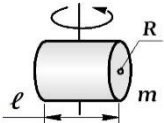
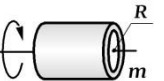
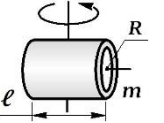
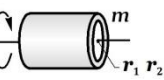
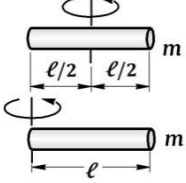
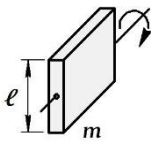
$$\sigma_{\partial}^{\max} = \sqrt{\frac{6QHEI_x}{W_x^2 A}}$$

### Напряжения и деформации при крутящем ударе

$$\tau_{\partial}^{\max} = \sqrt{\frac{4GK_0}{\ell A}}; \quad \varphi_{\partial} = \sqrt{\frac{2\ell K_0}{GI_{\rho}}}, \quad \text{где}$$

$K_0 = \frac{I_0 \omega^2}{2}$  – кинетическая энергия вращающегося тела;  $\omega = \frac{\pi n}{30}$  – угловая скорость вращения;  $I_0$  – момент инерции массы, равный:

	Материальная точка массой $m$	$mR^2$
	Сплошной шар	$\frac{2mR^2}{5}$
	Тонкостенная сфера	$\frac{2mR^2}{3}$
	Сплошной цилиндр или диск	$\frac{mR^2}{2}$

	<p>Сплошной цилиндр или диск (для диска принять <math>\ell = 0</math>)</p>	$\frac{mR^2}{4} + \frac{m\ell^2}{12}$
	<p>Тонкостенный цилиндр или кольцо</p>	$mR^2$
	<p>Тонкостенный цилиндр или кольцо (для кольца принять <math>\ell = 0</math>)</p>	$\frac{mR^2}{2} + \frac{m\ell^2}{12}$
	<p>Толстостенный цилиндр с внешним <math>r_2</math> и внутренним <math>r_1</math> радиусами</p>	$\frac{m(r_2^2 + r_1^2)}{2}$
	<p>Прямой тонкий стержень</p>	$\frac{m\ell^2}{12}$
		$\frac{m\ell^2}{3}$
	<p>Четырехугольная пластина</p>	$\frac{m\ell^2}{12}$

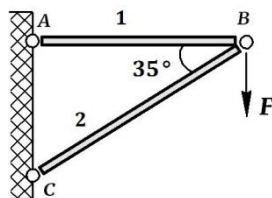
# ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

## ИМПУЛЬСНАЯ НАГРУЗКА

### Задача 1

Импульсная нагрузка  $F = 50$  кН мгновенно, но без удара, приложена в узле  $B$  кронштейна  $ABC$ . Стержни кронштейна имеют размеры поперечного сечения  $A_1 = 10$  см<sup>2</sup> и  $A_2 = 60$  см<sup>2</sup> а предел прочности материала стержней соответственно равен  $\sigma_{B(1)} = 360$  МПа и  $\sigma_{B(2)} = 50$  МПа.

Определить запас прочности стержней конструкции.



РЕШЕНИЕ:

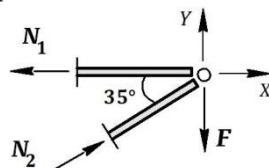
#### I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Прикладываем силу  $F$  статически, отсекаем узел и методом сечений определяем продольные силы в стержнях:

$$\sum X = 0: N_2 \cos 35^\circ - N_1 = 0;$$

$$\sum Y = 0: N_2 \sin 35^\circ - F = 0, \text{ откуда}$$

$$N_1 = 71,4 \text{ кН}; N_2 = 87,2 \text{ кН}.$$



② Статические напряжения в стержнях:

$$\sigma_{cm(1)} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{71,4 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^2} = 71,4 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{cm(2)} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{87,2 \cdot 10^3}{60 \cdot 10^2} = 14,5 \text{ МПа}.$$

#### II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Динамические напряжения в стержнях:

$$\sigma_{\partial(1)} = k_{\partial} \sigma_{cm(1)} = 2 \cdot 71,4 = 142,8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\partial(2)} = k_{\partial} \sigma_{cm(2)} = 2 \cdot 14,5 = 29 \text{ МПа}.$$

② Коэффициенты запаса прочности стержней:

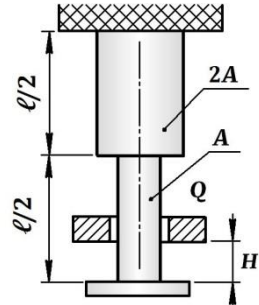
$$n_1 = \frac{\sigma_{B(1)}}{\sigma_{\partial(1)}} = \frac{360}{142,8} = 2,52; \quad n_2 = \frac{\sigma_{B(2)}}{\sigma_{\partial(2)}} = \frac{50}{29} = 1,72.$$

## ПРОДОЛЬНЫЙ УДАР

### Задача 2

В стальном ступенчатом стержне длиной  $\ell = 6\text{ м}$  и площадью поперечного сечения  $A = 3\text{ см}^2$ , подвергающемся действию удара грузом  $Q = 6\text{ кН}$ , падающим с высоты  $H = 8\text{ мм}$ , определить  $\sigma_{\partial}^{\max}$  и удлинение  $\Delta_{\partial}$  от удара. Как изменятся  $\sigma_{\partial}^{\max}$  в стержне, если на кольцевой выступ для смягчения удара поместить винтовую пружину, которая при действии статической нагрузки в  $10\text{ Н}$  сжимается на  $0,005\text{ мм}$ ?

Принять для стали:  $E = 2 \times 10^5\text{ МПа}$ .

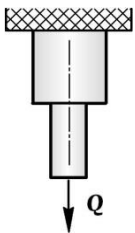


РЕШЕНИЕ:

#### Часть 1. Расчет без пружины

#### I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

Прикладываем груз  $Q$  статически и определяем в стержне максимальные статические напряжения и статическое удлинение. При одинаковой продольной силе во всех сечениях наибольшие напряжения в стержне возникают на участке с меньшей площадью поперечного сечения:



$$\sigma_{ст}^{\max} = \frac{Q}{A} = \frac{6 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^2} = 20\text{ МПа};$$

$$\Delta_{ст} = \frac{Q(\ell/2)}{EA} + \frac{Q(\ell/2)}{E \cdot 2A} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^2} + \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10^2} = 0,45\text{ мм}.$$

#### II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

Вычисляем динамический коэффициент по соответствующей формуле, а затем максимальные динамические напряжения в стержне и динамическое его удлинение:

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 8}{0,45}} = 7,1;$$

$$\sigma_{\partial}^{\max} = k_{\partial} \sigma_{cm}^{\max} = 7,1 \cdot 20 = 142 \text{ МПа};$$

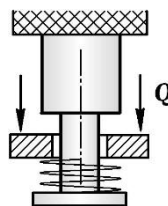
$$\Delta_{\partial} = k_{\partial} \Delta_{cm} = 7,1 \cdot 0,45 = 3,2 \text{ мм.}$$

## Часть 2. Расчет с пружиной

### I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

Устанавливаем на кольцевой выступ цилиндрическую винтовую пружину и прикладываем груз  $Q$  статически. Теперь сила  $Q$  воздействует на два элемента – сжимает пружину и растягивает стержень, в результате чего в элементах происходит накопление потенциальной энергии деформации, равной по закону сохранения энергии работе внешних сил:

$$U_{cm} = U_{cm}(\text{стерж}) + U_{cm}(\text{пруж}) = \frac{Q \Delta_{cm}}{2} + \frac{Q \lambda_{cm}}{2}, \quad (1)$$



где  $\Delta_{cm}$  – статическое удлинение стержня, вычисленное выше;  $\lambda_{cm}$  – статическая осадка пружины. Согласно условию задачи пружина от действия силы в 10Н сжимается на 0,005 мм. Но так как при упругом деформировании деформация изменяется пропорционально нагрузке, поэтому от силы  $Q = 6 \text{ кН} = 6000 \text{ Н}$  осадка пружины увеличивается в 600 раз и становится равной  $\lambda_{cm} = 3 \text{ мм}$ . Тогда энергия, накопленная в пружине и стержне, на основании выражения (1) равна:

$$U_{cm} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 0,45}{2} + \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 3}{2} = 10350 \text{ Нмм.}$$

### II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Вычисляем динамический коэффициент :

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{K_0}{U_{cm}}}, \quad (2)$$

где  $K_0$  – кинетическая энергия падающего груза на момент соударения, т.е. без учета деформации элемента, равная:

$$K_0 = QH = 6000 \cdot 8 = 48000 \text{ Нмм.}$$

Тогда динамический коэффициент на основании (2) равен:

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{K_0}{U_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{48000}{10350}} = 3,37.$$

② Определяем динамические напряжения в стержне:

$$\sigma_{\partial}^{\max} = k_{\partial} \sigma_{cm}^{\max} = 3,37 \cdot 20 = 67,4 \text{ МПа.}$$

**ВЫВОД.** Установка пружины, которая, деформируясь, берет на себя часть энергии падающего груза, позволяет снизить напряжения в стержне примерно в два раза.

### Задача 3

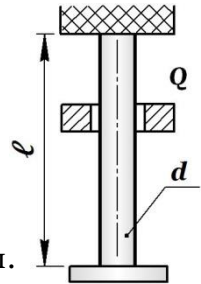
Вдоль оси стального стержня ( $E = 2 \times 10^5$  МПа) длиной  $\ell = 2$  м круглого поперечного сечения диаметром  $d = 40$  мм падает груз  $Q = 4$  кН. и, задерживаясь выступом, производит продольный удар по стержню. Определить скорость груза в момент удара, при которой динамические напряжения в стержне равны  $\sigma_{\partial} = 160$  МПа.

РЕШЕНИЕ:

#### I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

$$\sigma_{cm} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi d^2 / 4} = \frac{4 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 40^2 / 4} = 3,2 \text{ МПа;}$$

$$\Delta_{cm} = \frac{Q\ell}{EA} = \frac{Q\ell}{E(\pi d^2 / 4)} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 40^2 / 4} = 0,03 \text{ мм.}$$



#### II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Динамические напряжения в стержне равны:

$$\sigma_{\partial} = k_{\partial} \sigma_{cm}, \text{ откуда } k_{\partial} = \frac{\sigma_{\partial}}{\sigma_{cm}} = \frac{160}{3,2} = 50.$$

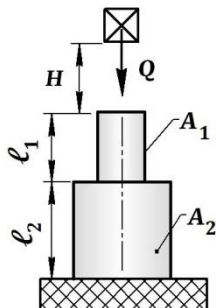
② Определяем скорость груза в момент удара:

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g \Delta_{cm}}}, \text{ откуда}$$

$$V = \sqrt{[(k_{\partial} - 1)^2 - 1] g \Delta_{cm}} = \sqrt{[(50 - 1)^2 - 1] \cdot 9800 \cdot 0,03} = 84 \text{ см/сек.}$$

## Задача 4

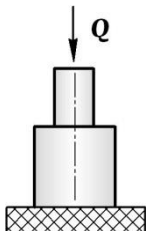
На ступенчатый стержень с высоты  $H$  падает груз  $Q = 2$  кН. Стержень выполнен из стали ( $E = 2 \times 10^5$  МПа) и имеет размеры:  $\ell_1 = 1$  м,  $\ell_2 = 1,5$  м,  $A_1 = 10$  см<sup>2</sup>,  $A_2 = 20$  см<sup>2</sup>. Определить наибольшую безопасную высоту падения груза, если для материала стержня  $[\sigma] = 160$  МПа. Определить также в стержне динамическую деформацию  $\Delta_{\partial}$ .



### РЕШЕНИЕ:

#### I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

Прикладываем груз статически и определяем в стержне наибольшие статические напряжения и статическое укорочение:



$$\sigma_{ст}^{\max} = \frac{Q}{A_1} = \frac{2 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^2} = 2 \text{ МПа};$$

$$\Delta_{ст} = \frac{Q\ell_1}{EA_1} + \frac{Q\ell_2}{EA_2} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^2} + \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^2} = 0,0175 \text{ мм}.$$

#### II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Из условия прочности стержня определяем динамический коэффициент:

$$\sigma_{\partial}^{\max} = k_{\partial} \sigma_{ст}^{\max} \leq [\sigma], \text{ откуда } k_{\partial} = \frac{[\sigma]}{\sigma_{ст}^{\max}} = \frac{160}{2} = 80.$$

② Определяем наибольшую безопасную высоту падения груза:

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{ст}}}, \text{ откуда}$$

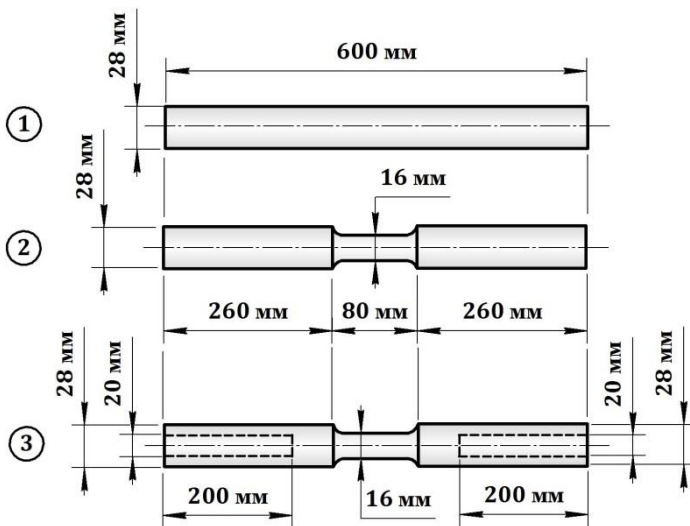
$$H = \frac{[(k_{\partial} - 1)^2 - 1] \Delta_{ст}}{2} = \frac{[(80 - 1)^2 - 1] \cdot 0,0175}{2} = 54,6 \text{ мм}.$$

③ Определяем динамическую деформацию стержня:

$$\Delta_{\partial} = k_{\partial} \Delta_{ст} = 80 \cdot 0,0175 = 1,4 \text{ мм}.$$

## Задача 5

Стальные стержни 1, 2, 3, представленные на рисунке ниже, подвергаются удару вдоль оси грузом  $Q = 4$  кН, обладающему в момент соударения кинетической энергией  $K_0 = 3000$  Нмм. Определить в стержнях максимальные динамические напряжения  $\sigma_{\partial}^{\max}$  и сделать сравнительный анализ их прочности. Принять для стали:  $E = 2 \times 10^5$  МПа.



РЕШЕНИЕ:

### I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

Прикладываем груз статически и определяем в каждом стержне максимальные статические напряжения  $\sigma_{ст}^{\max}$ , статическое удлинение  $\Delta_{ст}$  и потенциальную энергию деформации  $U_{ст}$ , накопленную элементом при статическом нагружении.

#### Стержень № 1

Это призматический стержень постоянного сечения:

$$\ell_1 = 600 \text{ мм}; \quad A_1 = \pi d_1^2 / 4 = 3,14 \cdot 28^2 / 4 = 615,44 \text{ мм}^2.$$

Поэтому в стержне:



$$\sigma_{cm(1)}^{\max} = \frac{Q}{A_1} = \frac{4 \cdot 10^3}{615,44} = 6,5 \text{ МПа};$$

$$\Delta_{cm(1)} = \frac{Q\ell_1}{EA_1} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 600}{2 \cdot 10^5 \cdot 615,44} = 0,019 \text{ мм};$$

$$U_{cm(1)} = \frac{Q\Delta_{cm(1)}}{2} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 0,019}{2} = 38 \text{ Нмм}.$$

### Стержень № 2

Это ступенчатый стержень, имеющий участки разной длины и разной площади поперечного сечения:

– центральный участок диаметром  $d_2' = 16 \text{ мм} \rightarrow$

$$\ell_2' = 80 \text{ мм}; \quad A_2' = \pi(d_2')^2 / 4 = 3,14 \cdot 16^2 / 4 = 200,96 \text{ мм}^2;$$

– два крайних участка диаметром  $d_2'' = 28 \text{ мм} \rightarrow$

$$\ell_2'' = 260 \times 2 = 520 \text{ мм}; \quad A_2'' = \pi(d_2'')^2 / 4 = 3,14 \cdot 28^2 / 4 = 615,44 \text{ мм}^2.$$

Поэтому в стержне:

$$\sigma_{cm(2)}^{\max} = \frac{Q}{A_2'} = \frac{4 \cdot 10^3}{200,96} = 19,9 \text{ МПа};$$

$$\Delta_{cm(2)} = \frac{Q\ell_2'}{EA_2'} + \frac{Q\ell_2''}{EA_2''} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 80}{2 \cdot 10^5 \cdot 200,96} + \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 520}{2 \cdot 10^5 \cdot 615,44} = 0,025 \text{ мм};$$

$$U_{cm(2)} = \frac{Q\Delta_{cm(2)}}{2} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 0,025}{2} = 50 \text{ Нмм}.$$

### Стержень № 3

Это также ступенчатый стержень, имеющий участки разной длины и разной площади поперечного сечения:

– центральный участок диаметром  $d_3' = 16 \text{ мм} \rightarrow$

$$\ell_3' = 80 \text{ мм}; \quad A_3' = \pi(d_3')^2 / 4 = 3,14 \cdot 16^2 / 4 = 200,96 \text{ мм}^2;$$

– два участка сплошного сечения диаметром  $d_3'' = 28 \text{ мм}$  примыкающие слева и справа к центральной части  $\rightarrow$

$$\ell_3'' = 60 \times 2 = 120 \text{ мм}; \quad A_3'' = \pi(d_3'')^2 / 4 = 3,14 \cdot 28^2 / 4 = 615,44 \text{ мм}^2;$$

– два полых участка с наружным  $d_3'' = 28$  мм и внутренним  $d_3''' = 20$  мм диаметрами →

$$\ell_3''' = 200 \times 2 = 400 \text{ мм};$$

$$A_3''' = \frac{\pi \left[ (d_3'')^2 - (d_3''')^2 \right]}{4} = \frac{3,14(28^2 - 20^2)}{4} = 301,44 \text{ мм}^2.$$

Поэтому в стержне:

$$\sigma_{cm(3)}^{\max} = \frac{Q}{A_3'} = \frac{4 \cdot 10^3}{200,96} = 19,9 \text{ МПа};$$

$$\begin{aligned} \Delta_{cm(3)} &= \frac{Q\ell_3'}{EA_3'} + \frac{Q\ell_3''}{EA_3''} + \frac{Q\ell_3'''}{EA_3'''} = \\ &= \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 80}{2 \cdot 10^5 \cdot 200,96} + \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 120}{2 \cdot 10^5 \cdot 615,44} + \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 400}{2 \cdot 10^5 \cdot 301,44} = 0,038 \text{ мм}; \end{aligned}$$

$$U_{cm(3)} = \frac{Q\Delta_{cm(3)}}{2} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 0,038}{2} = 76 \text{ Нмм}.$$

## II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Определяем для стержней динамические коэффициенты:

$$k_{\partial(1)} = 1 + \sqrt{1 + \frac{K_0}{U_{cm(1)}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{3000}{38}} = 9,94;$$

$$k_{\partial(2)} = 1 + \sqrt{1 + \frac{K_0}{U_{cm(2)}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{3000}{50}} = 8,81;$$

$$k_{\partial(3)} = 1 + \sqrt{1 + \frac{K_0}{U_{cm(3)}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{3000}{76}} = 7,36.$$

② Определяем динамические напряжения в стержнях:

$$\sigma_{\partial(1)}^{\max} = k_{\partial(1)} \sigma_{cm(1)}^{\max} = 9,94 \cdot 6,5 = 64,6 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\partial(2)}^{\max} = k_{\partial(2)} \sigma_{cm(2)}^{\max} = 8,81 \cdot 19,9 = 175,3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\partial(3)}^{\max} = k_{\partial(3)} \sigma_{cm(3)}^{\max} = 7,36 \cdot 19,9 = 146,5 \text{ МПа}.$$

**ВЫВОД.** Анализ прочности стержней показывает, что наибольшую прочность на ударную нагрузку имеет 3-й стержень, имеющий наименьший динамический коэффициент и обладающий при такой конструкции большей деформируемостью, а значит, способностью накапливать большее количество энергии без опасности разрушения.

## **Задача 6**

Три стержня, имеющие одинаковую длину  $\ell = 80$  см и площадь поперечного сечения  $A = 5 \text{ см}^2$ , но выполненные из разных материалов – стали, дерева и резины, подвергаются удару вдоль оси грузом  $Q = 2 \text{ кН}$ , обладающему к моменту соударения запасом кинетической энергии  $K_0 = 1500 \text{ Нмм}$ . Определить динамические напряжения в стержнях. Принять для материалов:  $E_{\text{сталь}} = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$ ;  $E_{\text{дер}} = 1 \times 10^4 \text{ МПа}$ ;  $E_{\text{рез}} = 10 \text{ МПа}$ .

**РЕШЕНИЕ:**

### **I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ**

① Прикладываем груз  $Q$  статически и определяем статические напряжения в стержнях. При статическом нагружении напряжения не зависят от механических свойств материала, поэтому для всех стержней они одинаковы и равны:

$$\sigma_{ст} = \frac{Q}{A} = \frac{2 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^2} = 4 \text{ МПа}.$$

② Определяем статическое удлинение стержней:

$$\Delta_{ст}(\text{сталь}) = \frac{Q\ell}{E_{\text{сталь}}A} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 800}{2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^2} = 0,016 \text{ мм};$$

$$\Delta_{ст}(\text{дер}) = \frac{Q\ell}{E_{\text{дер}}A} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 800}{1 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^2} = 0,32 \text{ мм};$$

$$\Delta_{ст}(\text{рез}) = \frac{Q\ell}{E_{\text{рез}}A} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 800}{10 \cdot 5 \cdot 10^2} = 320 \text{ мм}.$$

③ Определяем потенциальную энергию, накопленную при статическом нагружении, равную по закону сохранения энергии работе внешних сил:

$$U_{cm(\text{сталь})} = \frac{Q\Delta_{cm(\text{сталь})}}{2} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 0,016}{2} = 16 \text{ Нмм};$$

$$U_{cm(\text{дер})} = \frac{Q\Delta_{cm(\text{дер})}}{2} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 0,32}{2} = 320 \text{ Нмм};$$

$$U_{cm(\text{рез})} = \frac{Q\Delta_{cm(\text{рез})}}{2} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 320}{2} = 320000 \text{ Нмм}.$$

## II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Определяем для стержней динамические коэффициенты:

$$k_{\partial(\text{сталь})} = 1 + \sqrt{1 + \frac{K_0}{U_{cm(\text{сталь})}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{1500}{16}} = 10,7;$$

$$k_{\partial(\text{дер})} = 1 + \sqrt{1 + \frac{K_0}{U_{cm(\text{дер})}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{1500}{320}} = 3,4;$$

$$k_{\partial(\text{рез})} = 1 + \sqrt{1 + \frac{K_0}{U_{cm(\text{рез})}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{1500}{320000}} = 2.$$

② Определяем динамические напряжения в стержнях:

$$\sigma_{\partial(\text{сталь})} = k_{\partial(\text{сталь})}\sigma_{cm} = 10,7 \cdot 4 = 42,8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\partial(\text{дер})} = k_{\partial(\text{дер})}\sigma_{cm} = 3,4 \cdot 4 = 13,6 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\partial(\text{рез})} = k_{\partial(\text{рез})}\sigma_{cm} = 2 \cdot 4 = 8 \text{ МПа}.$$

**ВЫВОД.** Наибольшей деформируемостью обладает материал с меньшей жесткостью, т.е. с меньшим модулем Юнга. Поэтому из трех заданных стержней при одинаковых условиях нагружения наибольшую деформацию получает резиновый стержень, а значит, он способен безопасно поглощать большее количество энергии и возникающие в нем динамические напряжения будут наименьшими.

### Задача 7

Цилиндрическая винтовая пружина подвергается удару грузом  $Q = 50 \text{ Н}$ , движущимся со скоростью  $V = 3 \text{ м/сек}$ . Данные для пружины:



$D = 6 \text{ см}; d = 0,6 \text{ см}; G = 8 \times 10^4 \text{ МПа}; \tau_T = 300 \text{ МПа}.$

Определить минимальное число витков пружины  $n$ , чтобы она могла воспринимать удар без появления в ней пластических деформаций. Массой пружины пренебречь.

РЕШЕНИЕ:

### I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

Прикладываем груз  $Q$  статически и определяем возникающие в пружине статические напряжения:

$$\tau_{cm} = \frac{8QD}{\pi d^3} = \frac{8 \cdot 50 \cdot 60}{3,14 \cdot 6^3} = 35,4 \text{ МПа.}$$

### II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Из условия возникновения пластических деформаций в пружине, определяем динамический коэффициент:

$$\tau_{\partial} = k_{\partial} \tau_{cm} = \tau_T, \text{ откуда } k_{\partial} = \frac{\tau_T}{\tau_{cm}} = \frac{300}{35,4} = 8,47.$$

② На основании формулы для динамического коэффициента, определяем статическую деформацию пружины:

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g \lambda_{cm}}},$$

$$\text{откуда } \lambda_{cm} = \frac{V^2}{g \left[ (k_{\partial} - 1)^2 - 1 \right]} = \frac{3000^2}{9800 \left[ (8,47 - 1)^2 - 1 \right]} = 16,8 \text{ мм.}$$

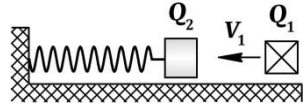
③ Используя формулу для осадки пружины, определяем для нее минимальное число витков, обеспечивающее ее прочность:

$$\lambda_{cm} = \frac{8QD^3 n}{Gd^4}, \text{ откуда } n = \frac{\lambda_{cm} Gd^4}{8QD^3} = \frac{16,8 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 6^4}{8 \cdot 50 \cdot 60^3} = 20 \text{ витков.}$$

### Задача 8

Тело весом  $Q_1 = 20 \text{ Н}$ , движущееся со скоростью  $V_1 = 4 \text{ м/сек}$ , наносит удар по детали весом  $Q_2 = 30 \text{ Н}$ , укрепленной на конце цилиндрической винтовой пружины. Данные для пружины:  $D = 5 \text{ см}$ ;  $d = 0,6 \text{ см}$ ;  $n = 12$  (число витков);  $G = 8 \times 10^4 \text{ МПа}$ .

Определить динамические напряжения в пружине, вызванные ударом. Массой пружины пренебречь.



РЕШЕНИЕ:

Примечание.

Согласно законам механики, тело массой  $m$ , движущееся со скоростью  $V$ , обладает КОЛИЧЕСТВОМ ДВИЖЕНИЯ или ИМПУЛЬСОМ, равным  $p = mV$  и имеющим вектор, совпадающий с направлением вектора скорости. При взаимодействии элементов одной системы имеет силу ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА: векторная сумма импульсов тел, входящих в замкнутую систему, до их взаимодействия равна векторной сумме их импульсов после взаимодействия. Закон сохранения импульса впервые был сформулирован Р. Декартом: «Я принимаю, что во Вселенной, во всей созданной материи есть известное количество движения, которое никогда не изменяется – не увеличивается, не уменьшается, и, таким образом, если одно тело приводит в движение другое, то теряет столько своего движения, сколько его сообщает».

① До соударения импульс тела  $Q_1$ , движущегося со скоростью  $V_1$ , равен:

$$p_1 = m_1 V_1 . \quad (1)$$

② После соударения тела  $Q_1$  с деталью  $Q_2$ , принимая удар как неупругий, оба тела как единое целое продолжают двигаться в одном направлении с одинаковой, но уже другой скоростью  $V_2$ . Импульс такой движущейся системы равен:

$$p_2 = m_1 V_2 + m_2 V_2 = V_2 (m_1 + m_2) , \quad (2)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  – массы соответствующих элементов.

③ На основании закона сохранения импульса приравниваем значения (1) и (2)

$$p_1 = p_2 \rightarrow m_1 V_1 = V_2 (m_1 + m_2) ,$$

откуда определяем новую скорость движения системы:

$$V_2 = \frac{m_1 V_1}{m_1 + m_2} . \quad (3)$$

④ Кинетическая энергия  $K_0$  такой движущейся системы на основании формулы  $K_0 = mV^2/2$  и значения (3) равна:

$$K_0 = \frac{(m_1 + m_2)V_2^2}{2} = \frac{m_1^2 V_1^2}{2(m_1 + m_2)}. \quad (4)$$

Учитывая соотношение  $m = Q/g$ , выражение кинетической энергии (4) принимает вид:

$$K_0 = \frac{Q_1^2 V_1^2}{2g(Q_1 + Q_2)}. \quad (5)$$

⑤ В результате удара силой  $Q_1$  происходит сжатие пружины. В ней возникают динамические напряжения  $\tau_\partial$ , динамическая деформация  $\lambda_\partial$  и накапливается потенциальная энергия  $U_\partial$ . Согласно расчетным формулам для пружин:

$$\tau_\partial = \frac{8Q_1 D}{\pi d^3} \quad (6); \quad \lambda_\partial = \frac{8Q_1 D^3 n}{Gd^4} \quad (7); \quad U_\partial = \frac{Q_1 \lambda_\partial}{2} \quad (8) -$$

$$a) \text{ из формулы (6) выражаем } - Q_1 = \frac{\tau_\partial \pi d^3}{8D}; \quad (9)$$

$$b) \text{ подставляем (9) в (7) и получаем } - \lambda_\partial = \frac{\tau_\partial \pi D^2 n}{Gd}; \quad (10)$$

$$в) \text{ подставляем (9) и (10) в (8) } - U_\partial = \frac{\tau_\partial^2 \pi^2 d^2 D n}{16G}. \quad (11)$$

⑥ На основании закона сохранения энергии приравняем выражения (5) и (11) -

$$\boxed{K_0 = U_\partial} \rightarrow \frac{Q_1^2 V_1^2}{2g(Q_1 + Q_2)} = \frac{\tau_\partial^2 \pi^2 d^2 D n}{16G},$$

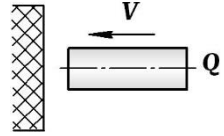
откуда определяем динамические напряжения в пружине:

$$\tau_\partial = \frac{Q_1 V_1}{\pi d} \sqrt{\frac{8G}{g(Q_1 + Q_2) D n}} = \frac{20 \cdot 4000}{3,14 \cdot 6} \sqrt{\frac{8 \cdot 8 \cdot 10^4}{9800(20 + 30)50 \cdot 12}} = 198 \text{ МПа.}$$

## Задача 9

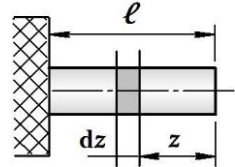
Короткий стальной стержень ( $\gamma = 7,85 \times 10^{-5} \text{ Н/мм}^3$ ) весом  $Q$ , длиной  $\ell$  и площадью поперечного сечения  $A$  движется в горизонтальном направлении со скоростью  $V = 3 \text{ м/сек}$ .

Определить динамические напряжения в стержне при ударе о жесткую недеформируемую стенку. Считать, что напряжения в стержне изменяются по линейному закону. Принять для материала:  $E = 2 \times 10^5$  МПа.



РЕШЕНИЕ:

① При ударе стержня о жесткую стенку происходит его резкое торможение и под действием возникающей силы инерции  $F_{ин}$  стержень сжимается. При этом, действующая сила инерции не постоянна по длине стержня и изменяется от нуля на свободном конце до максимального значения в сечении, соприкасающемся со стенкой. Возникающие при сжатии динамические напряжения, определяемые как  $\sigma_{\partial} = F_{ин}/A$ , также изменяются по длине стержня и наибольшее значение, как и сила инерции, принимают в сечении, ударяющемся в стену.



② Рассмотрим стержень в момент удара. Выделим на расстоянии  $z$  от свободного конца бесконечно малую часть стержня длиной  $dz$ , определим ее деформацию  $\Delta(dz)$

и величину накопленной потенциальной энергии  $dU_z$ :

а) Напряжения, согласно условию задачи, изменяются по линейному закону —

$$\sigma_z = \sigma_{\partial} (z/\ell), \quad (1)$$

принимая значения от нуля (при  $z = 0$ ) до наибольшей величины, равной  $\sigma_{\partial}$  (при  $z = \ell$ ).

б) Сила инерции  $F_{ин}(z)$  в сечении  $z$  на основании (1) равна:

$$F_{ин}(z) = \sigma_z A = \sigma_{\partial} (z/\ell) A; \quad (2)$$

в) Деформация выделенного элемента согласно закону Гука и с учетом выражения (2) определяется как:

$$\Delta(dz) = \frac{F_{ин}(z) dz}{EA} = \frac{\sigma_{\partial} z dz}{E\ell}; \quad (3)$$

г) Потенциальная энергия деформации выделенного элемента определяется на основании закона сохранения энергии через работу силы и с учетом значений (2) и (3) равна:



$$dU_z = \frac{F_{ин}(z) \Delta(dz)}{2} = \frac{\sigma_{\partial}^2 A}{2E\ell^2} z^2 dz. \quad (4)$$

③ Полная потенциальная энергия, накопленная во всем стержне, на основании (4) определяется как:

$$U_{\partial} = \int_0^{\ell} dU_z = \int_0^{\ell} \frac{\sigma_{\partial}^2 A}{2E\ell^2} z^2 dz = \frac{\sigma_{\partial}^2 A \ell}{6E}. \quad (5)$$

④ Кинетическая энергия движущегося стержня  $Q$  равна:

$$K_0 = \frac{mV^2}{2} = \left| m = \frac{Q}{g} = \frac{\gamma A \ell}{g} \right| = \frac{\gamma A \ell V^2}{2g}, \quad (6)$$

где  $Q = \gamma A \ell$  – вес стержня.

⑤ На основании закона сохранения энергии приравниваем выражения (5) и (6) —

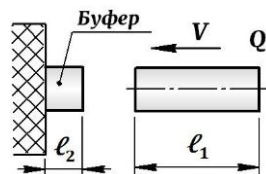
$$\boxed{K_0 = U_{\partial}} \rightarrow \frac{\sigma_{\partial}^2 A \ell}{6E} = \frac{\gamma A \ell V^2}{2g},$$

откуда определяем динамические напряжения, возникающие в опасном сечении стержня:

$$\sigma_{\partial} = \sqrt{\frac{3\gamma E V^2}{g}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 7,85 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3000^2}{9800}} = 208 \text{ МПа.}$$

### Задача 10

Короткий стальной стержень ( $\gamma = 7,85 \times 10^{-5} \text{ Н/мм}^3$ ) весом  $Q$ , длиной  $\ell_1 = 8 \text{ см}$  и площадью поперечного сечения  $A$  движется в горизонтальном направлении со скоростью  $V = 3 \text{ м/сек}$ . Определить динамические напряжения в стержне при ударе о буфер, представляющий собой короткий стальной стержень такого же сечения, но длиной  $\ell_2 = 2 \text{ см}$ . Напряжения в буфере считать постоянными. Принять для стали:  $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$ .



### РЕШЕНИЕ:

① При ударе стержня о буфер оба элемента деформируются. Определим потенциальную энергию деформации, накопленную в стержне и буфере:

#### **Стержень**

Решение для стержня выполняем по алгоритму *Задачи 9*. Тогда в соответствии с проведенным выше решением, принимая для стержня линейный закон изменения напряжений, энергия деформации в нем, возникающая при ударе, равна:

$$U_{\partial(1)} = \frac{\sigma_{\partial}^2 A \ell_1}{6E}, \quad (1)$$

где  $\sigma_{\partial}$  – наибольшие динамические напряжения, возникающие в сечении, соприкасающемся с буфером, и равные при сжатии  $\sigma_{\partial} = F_{ин}/A$ .

#### **Буфер**

Буфер от стержня  $Q$  испытывает удар силой, равно силе инерции стержня  $F_{ин}$ , и при одинаковой площади поперечного сечения обоих элементов в буфере возникают динамические напряжения такой же величины, которые, согласно условию задачи, постоянны по его длине:

$$\sigma_{\partial} = F_{ин}/A, \quad \text{откуда } F_{ин} = \sigma_{\partial} A. \quad (2)$$

Тогда деформация буфера согласно закону Гука и с учетом выражения (2) будет равна

$$\Delta \ell_2 = \frac{F_{ин} \ell_2}{EA} = \frac{\sigma_{\partial} \ell_2}{E}, \quad (3)$$

а потенциальная энергия деформации буфера с учетом значений (2) и (3) определяется как:

$$U_{\partial(2)} = \frac{F_{ин} \Delta \ell_2}{2} = \frac{\sigma_{\partial}^2 A \ell_2}{2E}. \quad (4)$$

② Полная потенциальная энергия, накопленная при ударе в стержне и буфере на основании выражений (1) и (4) равна:

$$U_{\partial} = \frac{\sigma_{\partial}^2 A \ell_1}{6E} + \frac{\sigma_{\partial}^2 A \ell_2}{2E} = \frac{\sigma_{\partial}^2 A}{6E} (\ell_1 + 3\ell_2). \quad (5)$$

③ Кинетическая энергия движущегося груза  $Q$  :

$$K_0 = \frac{mV^2}{2} = \left| m = \frac{Q}{g} = \frac{\gamma A l_1}{g} \right| = \frac{\gamma A l_1 V^2}{2g}, \quad (6)$$

где  $Q = \gamma A l_1$  – вес стержня.

④ На основании закона сохранения энергии –  $K_0 = U_\partial$  – приравниваем выражения (5) и (6):

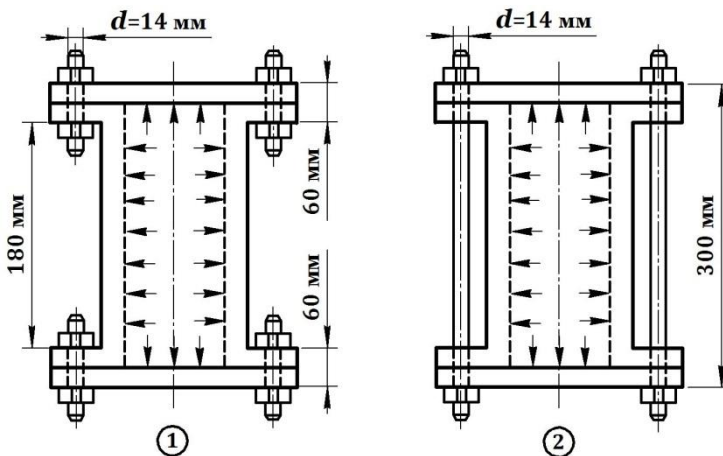
$$\frac{\sigma_\partial^2 A}{6E} (\ell_1 + 3\ell_2) = \frac{\gamma A l_1 V^2}{2g},$$

откуда определяем динамические напряжения, возникающие в опасном сечении стержня:

$$\sigma_\partial = \sqrt{\frac{3E\gamma\ell_1 V^2}{g(\ell_1 + 3\ell_2)}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 7,85 \cdot 10^{-5} \cdot 80 \cdot 3000^2}{9800 (80 + 3 \cdot 20)}} = 157,2 \text{ МПа.}$$

### Задача 11

Крышки цилиндра крепятся к фланцам с помощью стальных болтов. Вследствие резкого повышения давления внутри цилиндра болты воспринимают кинетическую энергию удара, равную  $K_0 = 4800 \text{ Нмм}$ . Определить необходимое количество болтов для двух вариантов крепления, если для материала болтов  $[\sigma] = 40 \text{ МПа}$ . Принять для стали:  $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$ .



### РЕШЕНИЕ:

Динамические напряжения при продольном ударе могут быть определены по формуле:

$$\sigma_{\partial} = \sqrt{\frac{2QHE}{\ell A}}, \quad (1)$$

где  $Q$  – нагрузка, действующая на все болты.

Тогда при установке  $n$  болтов сила, действующая на каждый болт, будет равна  $Q/n$  и, заменив в формуле (1)  $QH = K_0$ , где  $K_0$  – кинетическая энергия удара, условие прочности для болта принимает вид:

$$\sigma_{\partial} = \sqrt{\frac{2QHE}{n\ell A}} = \sqrt{\frac{2K_0E}{n\ell A}} \leq [\sigma], \quad (2)$$

откуда можно определить количество болтов, необходимое для обеспечения их прочности при заданных условиях работы:

$$n = \frac{2K_0E}{[\sigma]^2 \ell A}. \quad (3)$$

**Вариант 1:**  $\ell = 60$  мм;  $A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 14^2}{4} = 153,86$  мм<sup>2</sup> →

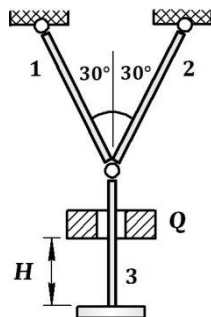
$$n = \frac{2K_0E}{[\sigma]^2 \ell A} = \frac{2 \cdot 4800 \cdot 2 \cdot 10^5}{40^2 \cdot 60 \cdot 153,86} = 130 \text{ шт.}$$

**Вариант 2:**  $\ell = 300$  мм;  $A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 14^2}{4} = 153,86$  мм<sup>2</sup> →

$$n = \frac{2K_0E}{[\sigma]^2 \ell A} = \frac{2 \cdot 4800 \cdot 2 \cdot 10^5}{40^2 \cdot 300 \cdot 153,86} = 26 \text{ шт.}$$

### Задача 12

Стержневая конструкция, состоящая из трех стальных стержней одинаковой длины  $\ell = 1$  м и одинакового поперечного сечения  $A = 2$  см<sup>2</sup>, подвергается удару грузом  $Q$ , падающему с высоты  $H = 0,6$  м. Определить допускаемую,



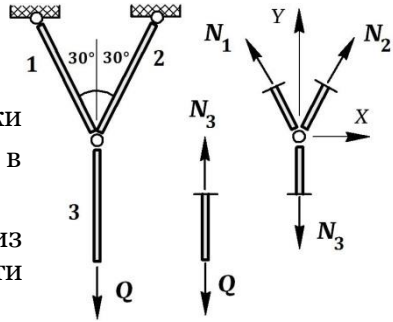
безопасную для прочности стержней, величину груза  $Q$ , если для материала  $[\sigma] = 180 \text{ МПа}$ . Принять:  $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$ .

РЕШЕНИЕ:

**I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ**

① Прикладываем груз  $Q$  статически и определяем продольные силы в стержнях:

а) рассекаем стержень 3 и из условия равновесия отсеченной части получаем  $N_3 = Q$ ;



б) отсекаем узел и составляем для него уравнения равновесия:

$$\sum X = 0: -N_1 \sin 30 + N_2 \sin 30^\circ = 0 \rightarrow N_1 = N_2;$$

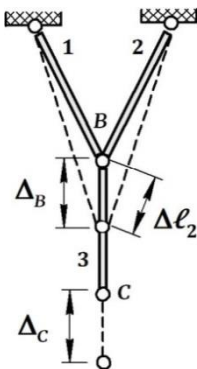
$$\sum Y = 0: 2N_1 \cos 30^\circ - Q = 0 \rightarrow N_1 = N_2 = \frac{Q}{2 \cos 30^\circ}.$$

② Наиболее нагруженным в системе является стержень 3, поэтому при одинаковой для всех стержней площади сечения именно здесь будут возникать наибольшие напряжения:

$$\sigma_{cm}^{\max} = \frac{N_3}{A} = \frac{Q}{A}. \tag{1}$$

③ Определяем перемещение  $\Delta_{cm}$  точки приложения силы  $Q$ , которое представляет собой результат перемещения точки  $B$  и удлинения 3-го стержня, т.е.

$$\Delta_C = \Delta_{cm} = \Delta_B + \Delta l_3, \tag{2}$$



где

$$\Delta_B = \frac{\Delta l_2}{\cos 30^\circ} = \left| \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA} \right| = \frac{Ql}{2EA \cos^2 30^\circ} = \frac{2Ql}{3EA};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l}{EA} = \frac{Ql}{EA}. \tag{3}$$

Подставляем значения (3) в (2) и получаем:

$$\Delta_{cm} = \frac{2Ql}{3EA} + \frac{Ql}{EA} = \frac{5Ql}{3EA}. \tag{4}$$

## II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Определяем динамический коэффициент по приближенной формуле, которая с учетом выражения (4) принимает вид:

$$k_{\partial} = \sqrt{\frac{2H}{\Delta_{cm}}} = \sqrt{\frac{6HEA}{5Q\ell}}. \quad (5)$$

② Записываем для стержня условие прочности и, подставляя сюда значения (1) и (5), получаем:

$$\sigma_{\partial}^{\max} = k_{\partial} \sigma_{cm}^{\max} \leq [\sigma] \rightarrow \sigma_{\partial}^{\max} = \sqrt{\frac{6HEA}{5Q\ell}} \cdot \frac{Q}{A} = \sqrt{\frac{6QHE}{5Al}} \leq [\sigma],$$

откуда определяем допускаемую величину груза  $[Q]$ :

$$[Q] = \frac{5Al \cdot [\sigma]^2}{6HE} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 10^2 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 180^2}{6 \cdot 0,6 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^5} = 45 \text{ Н.}$$

### Задача 13

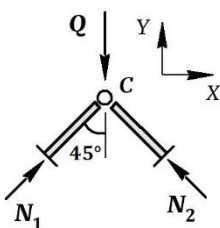
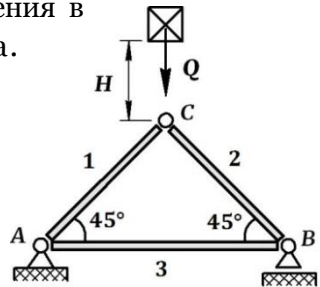
Конструкция, состоящая из трех стальных стержней длиной  $\ell_1 = \ell_2 = 1,6 \text{ м}$ ,  $\ell_3 = \ell_1 / \cos 45^\circ = 2,26 \text{ м}$  и одинакового диаметра  $d = 10 \text{ мм}$  подвергается удару грузом  $Q = 3 \text{ кН}$  падающим с высоты  $H$ . Определить допускаемую высоту падения груза, чтобы наибольшие динамические напряжения в стержнях не превышали  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

Принять для стали:  $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$ .

РЕШЕНИЕ:

#### I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Прикладываем груз  $Q$  статически и рассматриваем равновесие узлов —

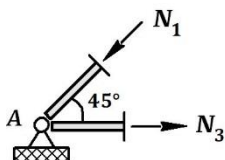


**Узел С:**

$$\sum X = 0: N_1 \sin 45^\circ - N_2 \sin 45^\circ = 0 \rightarrow N_1 = N_2;$$

$$\sum Y = 0: 2N_1 \cos 45^\circ - Q = 0 \rightarrow$$

$$N_1 = N_2 = \frac{Q}{2 \cos 45^\circ} = \frac{3}{2 \cos 45^\circ} = 2,12 \text{ кН.}$$



**Узел А:**

$$\sum X = 0: N_3 - N_1 \cos 45^\circ = 0 \rightarrow$$

$$N_3 = N_1 \cos 45^\circ = \frac{Q \cos 45^\circ}{2 \cos 45^\circ} = \frac{Q}{2} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ кН.}$$

② Определяем статические напряжения в стержнях:

$$\sigma_{cm(1)} = \sigma_{cm(2)} = \frac{N_{1,2}}{A} = \frac{2,12 \cdot 10^3}{78,5} = 27 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_{cm(3)} = \frac{N_3}{A} = \frac{1,5 \cdot 10^3}{78,5} = 19,1 \text{ МПа,}$$

где  $A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 10^2}{4} = 78,5 \text{ мм}^2$  – площадь сечения стержней.

Наибольшими являются статические напряжения:

$$\sigma_{cm}^{\max} = \sigma_{cm(1)} = \sigma_{cm(2)} = 27 \text{ МПа.}$$

③ Определяем величину потенциальной энергии деформации, накопленной в конструкции. Вычисление производим через работу внутренних сил:

$$\begin{aligned} U_{cm} &= \frac{N_1^2 \ell_1}{2EA} + \frac{N_2^2 \ell_2}{2EA} + \frac{N_3^2 \ell_3}{2EA} = 2 \times \frac{N_1^2 \ell_1}{2EA} + \frac{N_3^2 \ell_3}{2EA} = \\ &= 2 \times \frac{(2,12 \cdot 10^3)^2 \cdot 1,6 \cdot 10^3}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 78,5} + \frac{(1,5 \cdot 10^3)^2 \cdot 2,26 \cdot 10^3}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 78,5} = 619,97 \text{ Нмм.} \end{aligned}$$

## II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Записываем условие прочности для стержней —

$$\sigma_{\partial}^{\max} = k_{\partial} \sigma_{cm}^{\max} \leq [\sigma],$$

откуда определяем динамический коэффициент:

$$k_{\partial} = \frac{[\sigma]}{\sigma_{cm}^{\max}} = \frac{160}{27} = 5,9.$$

② Используем для динамического коэффициента формулу —

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{K_0}{U_{cm}}},$$

откуда определяем кинетическую энергию падающего груза:

$$K_0 = \left[ (k_{\partial} - 1)^2 - 1 \right] U_{ст} = \left[ (5,9 - 1)^2 - 1 \right] \cdot 619,97 = 14265,5 \text{ Нмм.}$$

Здесь  $K_0$  – это энергия груза на момент соударения, без учета деформации конструкции, т.е. без учета опускания узла  $C$ , и она определяется как  $K_0 = QH$ , откуда находим допускаемую безопасную высоту падения  $H$ :

$$H = \frac{K_0}{Q} = \frac{14265,5}{3000} = 4,8 \text{ мм.}$$

### ПОПЕРЕЧНЫЙ (ИЗГИБАЮЩИЙ) УДАР

#### Задача 14

На середину пролета двутавровой балки (двутавр №18) падает груз  $Q = 6 \text{ кН}$ . Скорость груза при соударении  $V = 70 \text{ см/сек}$ . Определить наибольшие динамические напряжения в балке и проверить ее прочность, если  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ . Определить, как изменятся напряжения, если на опорах установить резиновые амортизаторы, а также рассмотреть вариант, если такой амортизатор будет установлен только на одной опоре.

Данные для двутавра № 18:

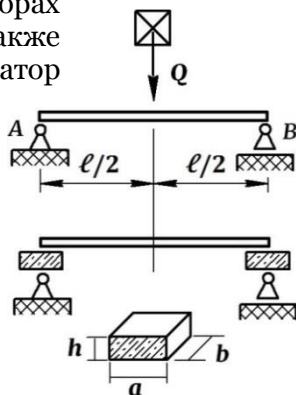
$$I_x = 1660 \text{ см}^4; W_x = 185 \text{ см}^3; \ell = 2 \text{ м};$$

$$E = 2 \times 10^5 \text{ МПа.}$$

Данные для амортизаторов:

$$a = 15 \text{ см}; b = 10 \text{ см}; h = 1,5 \text{ см};$$

$$E_{рез} = 8 \text{ МПа.}$$



#### РЕШЕНИЕ:

##### Часть 1. Балка на жестких опорах

#### I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

Прикладываем груз  $Q$  статически и для опасного сечения (посередине пролета) определяем максимальные статические напряжения и максимальный статический прогиб балки:



$$\sigma_{cm}^{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{Ql}{4W_x} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3}{4 \cdot 185 \cdot 10^3} = 16,2 \text{ МПа}; \quad (1)$$

$$\Delta_{cm}(\text{балка}) = \frac{Ql^3}{48EI_x} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot (2 \cdot 10^3)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1660 \cdot 10^4} = 0,3 \text{ мм}. \quad (2)$$

## II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

Определяем динамический коэффициент и динамические напряжения в балке:

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g\Delta_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{700^2}{9800 \cdot 0,3}} = 13,95; \quad (3)$$

$$\sigma_{\partial}^{\max} = k_{\partial} \sigma_{cm}^{\max} = 13,95 \cdot 16,2 = 226 \text{ МПа}. \quad (4)$$

Перенапряжение:  $\frac{\sigma_{\partial}^{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{226 - 160}{160} \cdot 100\% = 40\% -$

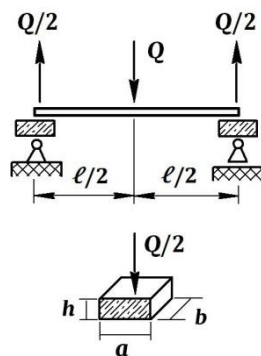
*прочность балки не обеспечена (перегрузка допускается до 5%).*

### Часть 2. Балка на упругих амортизаторах

#### I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① При установке балки на амортизаторах статические напряжения в ней не изменятся, так как деформируемость опор не влияет на реакции опор, определяемые из уравнений равновесия, а поэтому изгибающий момент в опасном сечении  $M_{\max}$  будет иметь такую же величину, и значит, согласно расчету (1):

$$\sigma_{cm}^{\max} = 16,2 \text{ МПа}.$$



② Но установка опорных амортизаторов изменит величину статического перемещения точки приложения груза, т.е.  $\Delta_{cm}$ , которая используется в динамическом расчете для определения динамического коэффициента. Перемещение этой точки теперь будет определяться двумя факторами: опусканием балки как единого целого за счет сжатия амортизаторов (*при одинаковой*

жесткости их деформации будут одинаковыми) и прогибом балки непосредственно от действия силы  $Q$ , вычисленным выше. И тогда, на основании расчета (2) и учитывая, что сжатие упругих опор происходит силой  $(Q/2)$ , получаем:

$$\Delta_{cm} = \Delta_{cm(\text{балка})} + \Delta_{cm(\text{аморт})} = \frac{Q\ell^3}{48EI_x} + \frac{(Q/2)h}{E_{\text{рез}}A} = 0,3 + \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 15}{8 \cdot (10 \times 15) \cdot 10^2} = 0,3 + 0,375 = 0,675 \text{ мм.} \quad (5)$$

## II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

Определяем динамический коэффициент и динамические напряжения в балке :

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g \Delta_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{700^2}{9800 \cdot 0,675}} = 9,66; \quad (6)$$

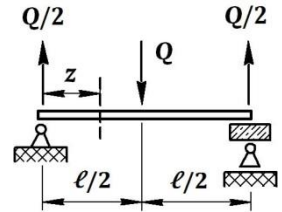
$$\sigma_{\partial}^{\max} = k_{\partial} \sigma_{cm}^{\max} = 9,66 \cdot 16,2 = 156,5 \text{ МПа.} \quad (7)$$

### Часть 3. Установка амортизатора на одной опоре

#### I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Как было сказано выше, при статическом нагружении опорные реакции, определяемые исключительно из уравнений статики, не зависят от жесткости опор, а поэтому  $M_{\max}$  не изменяется и статические напряжения равны:

$$\sigma_{cm}^{\max} = 16,2 \text{ МПа.}$$



② Учитывая, что от действия  $Q$  деформируются два элемента конструкции – балка и упругая опора, определим потенциальную энергию деформации  $U_{cm}$ , накопленную в системе, используя соответствующие формулы:

$U_{\text{изг}} = \frac{M_{\text{изг}}^2 \ell}{2EI_x}$	– потенциальная энергия деформации изгиба (поперечной силой и ее вкладом в величину энергии деформации пренебрегаем);
--	---

$$U_{\text{сж}} = \frac{N^2 \ell}{2EA} \quad \text{— потенциальная энергия деформации сжатия.}$$

### Балка:

Изгибающий момент в сечении  $z$  (см. рис.) равен  $M_z = (Q/2)z$ , и учитывая, что на балке два одинаковых участка, определяем потенциальную энергию деформации в балке как:

$$\begin{aligned} U_{\text{бал}} &= 2 \times \int_0^{\ell/2} \frac{(M_z)^2 dz}{2EI_x} = 2 \times \int_0^{\ell/2} \frac{[(Q/2)z]^2 dz}{2EI_x} = 2 \times \frac{Q^2}{8EI_x} \int_0^{\ell/2} z^2 dz = \\ &= \frac{Q^2 \ell^3}{96EI_x} = \frac{(6 \cdot 10^3)^2 (2 \cdot 10^3)^3}{96 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1660 \cdot 10^4} = 903,6 \text{ Нмм.} \end{aligned} \quad (8)$$

### Амортизатор:

Потенциальная энергия деформации опоры, учитывая, что она сжимается и в ней  $N = Q/2$ , определяется как:

$$U_{\text{аморт}} = \frac{N^2 h}{2E_{\text{рез}} A} = \frac{(Q/2)^2 h}{2E_{\text{рез}} ab} = \frac{(3 \cdot 10^3)^2 \cdot 15}{2 \cdot 8 \cdot (10 \times 15) \cdot 10^2} = 562,5 \text{ Нмм.} \quad (9)$$

Полная потенциальная энергия деформации всей конструкции на основании значений (8) и (9) равна:

$$U_{\text{см}} = U_{\text{бал}} + U_{\text{аморт}} = 903,6 + 562,5 = 1466,1 \text{ Нмм.} \quad (10)$$

## II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Определяем кинетическую энергию падающего груза:

$$K_0 = \frac{mV^2}{2} = \frac{QV^2}{2g} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 700^2}{2 \cdot 9800} = 150000 \text{ Нмм.} \quad (11)$$

② Определяем динамический коэффициент и динамические напряжения в балке с учетом значений (10), (11) и (1):

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{K_0}{U_{\text{см}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{150000}{1466,1}} = 11,16. \quad (12)$$

$$\sigma_{\partial}^{\text{max}} = k_{\partial} \sigma_{\text{см}}^{\text{max}} = 11,16 \cdot 16,2 = 180,8 \text{ МПа.} \quad (13)$$

Примечание.

В последней части задачи статическое перемещение  $\Delta_{cm}$  точки приложения силы можно вычислить через работу внешней силы, определяемую по теореме Клапейрона —  $A_Q = (Q\Delta_{cm})/2$ , и закон сохранения энергии —  $A_Q = U_{cm}$ . Тогда на основании (10) получаем —

$$\frac{Q\Delta_{cm}}{2} = U_{cm}, \text{ откуда } \Delta_{cm} = \frac{2U_{cm}}{Q} = \frac{2 \cdot 1466,1}{6000} = 0,489 \text{ мм}$$

и, используя эту величину, определяем динамический коэффициент:

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g\Delta_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{700^2}{9800 \cdot 0,489}} = 11,16,$$

что соответствует полученному выше значению (12). Совпадение результатов расчета вытекает из того, что формулы для  $k_{\partial}$ , выраженные через  $U_{cm}$  и  $\Delta_{cm}$ , идентичны друг другу:

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{K_0}{U_{cm}}} = \left| \begin{array}{l} K_0 = \frac{mV^2}{2} = \frac{QV^2}{2g} \\ A_Q = U_{cm} = \frac{Q\Delta_{cm}}{2} \end{array} \right| = 1 + \sqrt{1 + \frac{QV^2 \cdot 2}{2g \cdot Q\Delta_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g\Delta_{cm}}}.$$

ВЫВОД. Установка деформируемых опор в балках, подвергающихся удару или другим динамическим нагрузкам, позволяет снизить в них динамические напряжения и повышает прочность балок.

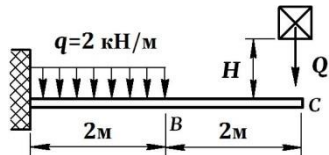
### Задача 15

На стальную двутавровую балку (двутавр №27) с высоты  $H = 5 \text{ мм}$  падает груз  $Q = 6 \text{ кН}$ . Определить максимальные динамические напряжения в балке и перемещение точки  $B$ , вызванное ударом. Данные для двутавра №27:

$$I_x = 5500 \text{ см}^4; W_x = 407 \text{ см}^3;$$

$$E = 2 \times 10^5 \text{ МПа.}$$

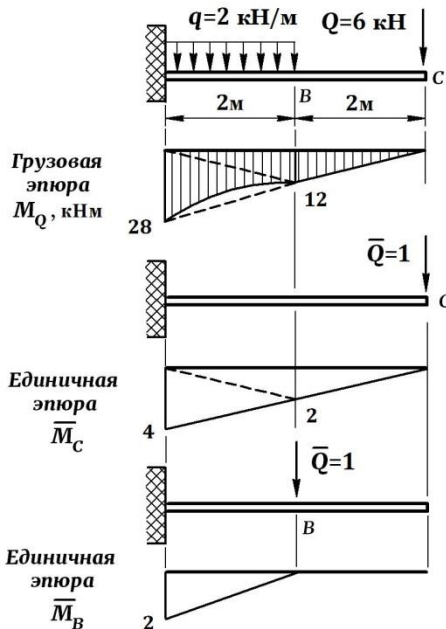
РЕШЕНИЕ:



#### **I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ**

Прикладываем силу  $Q$  статически, строим эпюру моментов, устанавливаем на балке опасное сечение и определяем здесь наибольшие статические напряжения, а также вычисляем статические прогибы в точках  $C$  и  $B \rightarrow$

а) Напряжения:  $\sigma_{ст}^{max} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{28 \cdot 10^6}{407 \cdot 10^3} = 68,8 \text{ МПа.}$



б) Статический прогиб в точке C :

$$\Delta_{ст}^C = \frac{1}{EI_x} (M_Q \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_x} \left[ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 12 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{4+2}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 12 \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 4 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 28 \left( \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) \right] = \frac{137,33 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 5500 \cdot 10^4} = 12,48 \text{ мм.}$$

Примечание.

Важно помнить, что в формулу для динамического коэффициента входит именно ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ТОЧКИ ПРИЛОЖЕНИЯ ГРУЗА.

в) Статический прогиб в точке B :

$$\Delta_{ст}^B = \frac{1}{EI_x} (M_Q \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_x} \left( -\frac{2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 28 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = \frac{44 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 5500 \cdot 10^4} = 4 \text{ мм.}$$

## II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Определяем динамический коэффициент:

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{cm}^C}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 5}{12,48}} = 2,34.$$

② Определяем динамические напряжения и вызванное ударом перемещение точки  $B$ :

$$\sigma_{\partial}^{\max} = k_{\partial} \sigma_{cm}^{\max} = 2,34 \cdot 68,8 = 161 \text{ МПа};$$

$$\Delta_{\partial}^B = k_{\partial} \Delta_{cm}^B = 2,34 \cdot 4 = 9,4 \text{ мм}.$$

### Задача 16

На конец консоли  $C$  двутавровой балки (двутавр №24) падает груз  $Q = 5 \text{ кН}$ . Определить скорость груза при соударении, если в результате удара точка  $B$  перемещается на 40 мм.

Данные для двутавра №24:

$$I_x = 3460 \text{ см}^4; E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}.$$

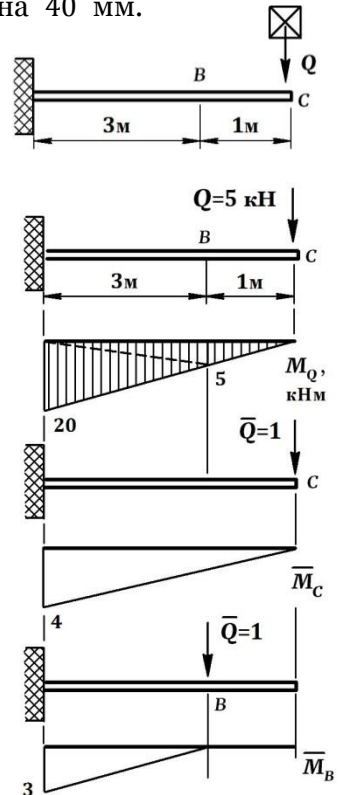
РЕШЕНИЕ:

#### I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Прикладываем силу  $Q$  статически и по методу Верещагина определяем статические прогибы в точках  $B$  и  $C$ :

$$\begin{aligned} \Delta_{cm}^C &= \frac{1}{EI_x} (M_Q \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_x} \left( \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 20 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \\ &= \frac{106,67 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 3460 \cdot 10^4} = 15,4 \text{ мм}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{cm}^B &= \frac{1}{EI_x} (M_Q \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_x} \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 20 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) = \frac{67,5 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 3460 \cdot 10^4} = 9,8 \text{ мм}. \end{aligned}$$



## II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Перемещение точки  $B$  от удара определяется как:

$$\Delta_{\partial}^B = k_{\partial} \Delta_{cm}^B, \text{ откуда } k_{\partial} = \frac{\Delta_{\partial}^B}{\Delta_{cm}^B} = \frac{40}{9,8} = 4,1.$$

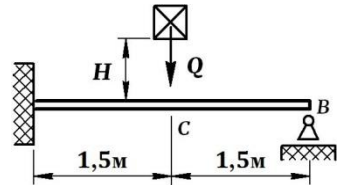
② На основании формулы для динамического коэффициента определяем скорость груза при соударении:

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g \Delta_{cm}^C}}, \text{ откуда}$$

$$V = \sqrt{\left[ (k_{\partial} - 1)^2 - 1 \right] g \Delta_{cm}^C} = \sqrt{\left[ (4,1 - 1)^2 - 1 \right] 9800 \cdot 15,4} = 114 \text{ см/сек.}$$

### Задача 17

На двутавровую балку (двутавр №20) падает груз  $Q = 8 \text{ кН}$ . Определить допустимую высоту падения груза  $H$ , чтобы максимальные напряжения в балке, вызванные ударом, не превышали  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ . Данные для двутавра №20:



$$I_x = 1840 \text{ см}^4; W_x = 184 \text{ см}^3; E = 2 \times 10^5 \text{ МПа.}$$

### РЕШЕНИЕ:

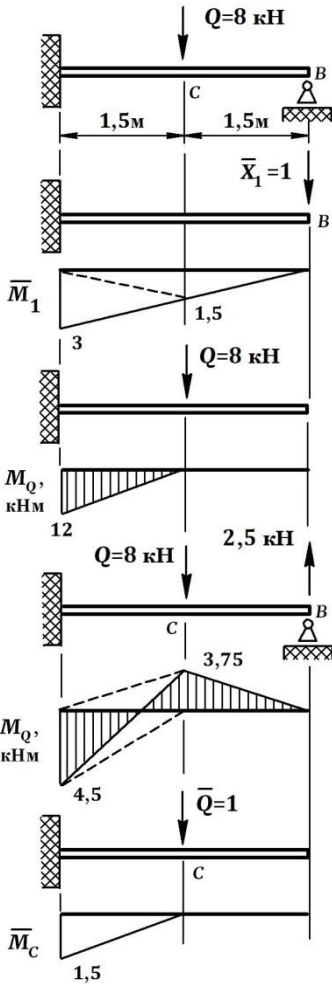
#### I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Балка статически неопределима. Поэтому для определения статических данных, необходимых для решения, прикладываем силу  $Q$  статически и, используя МЕТОД СИЛ, раскрываем статическую неопределимость —

а) Убираем подвижную опору  $B$ , в направлении отброшенной связи прикладываем неизвестную силу  $X_1$  и задаем условие, что перемещение в направлении этой силы равно нулю. Получаем каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1Q} = 0.$$

б) Определяем коэффициенты канонического уравнения:



$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} (\bar{M}_1 \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_x} \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) = \frac{9}{EI_x};$$

$$\Delta_{1Q} = \frac{1}{EI_x} (M_Q \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_x} \left( \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 1,5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 \right) = \frac{22,5}{EI_x}.$$

в) Решаем каноническое уравнение:

$$\frac{9}{EI_x} X_1 + \frac{22,5}{EI_x} = 0 \rightarrow X_1 = R_B = -2,5 \text{ кН}.$$

*Примечание.*

Знак «минус» указывает, что реакция на опоре B направлена в сторону, обратную заданному направлению силы \$X\_1\$.

г) Строим окончательную грузовую эпюру изгибающих моментов и делаем проверку, согласно которой необходимо доказать, что прогиб на опоре B равен нулю. Принимая \$\bar{M}\_B = \bar{M}\_1\$, получаем:

$$\Delta_B = \frac{1}{EI_x} (M_Q \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_x} \left[ -\frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 3,75 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 - \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 3,75 \left( \frac{2}{3} \cdot 1,5 + \frac{1}{3} \cdot 3 \right) + \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 4,5 \left( \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 1,5 \right) \right] = \frac{1}{EI_x} (-2,8125 - 5,625 + 8,4375) = 0.$$

② Для опасного сечения (\$M\_{\max} = 4,5\$ кНм) определяем в балке максимальные статические напряжения:

$$\sigma_{ст}^{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{4,5 \cdot 10^6}{184 \cdot 10^3} = 24,5 \text{ МПа}.$$

③ Определяем статический прогиб в точке приложения груза:

$$\Delta_{cm}^C = \frac{1}{EI_x} (M_Q \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_x} \left( -\frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 3,75 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,5 + \right.$$



$$+\frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 4,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 \Big) = \frac{1,969 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1840 \cdot 10^4} = 0,54 \text{ мм.}$$

## II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Из условия прочности балки определяем динамический коэффициент:

$$\sigma_{\partial}^{\max} = k_{\partial} \sigma_{cm}^{\max} \leq [\sigma], \text{ откуда } k_{\partial} = \frac{[\sigma]}{\sigma_{cm}^{\max}} = \frac{160}{24,5} = 6,53.$$

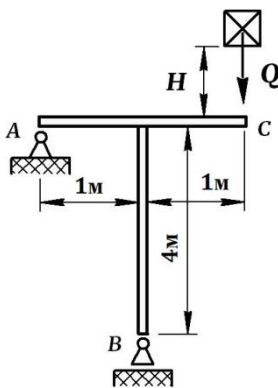
② Из формулы для динамического коэффициента определяем допустимую высоту падения груза:

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{cm}^C}}, \text{ откуда}$$

$$H = \left[ (k_{\partial} - 1)^2 - 1 \right] \Delta_{cm}^C / 2 = \left[ (6,53 - 1)^2 - 1 \right] 0,54 / 2 = 8 \text{ мм.}$$

### Задача 18

На раму, выполненную из двутавра №14, с высоты  $H = 12 \text{ мм}$  падает груз весом  $Q = 10 \text{ кН}$ . Определить вызванное ударом горизонтальное перемещение подвижной опоры  $B$ . Данные для двутавра №14:  $I_x = 572 \text{ см}^4$ ;  $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$ .



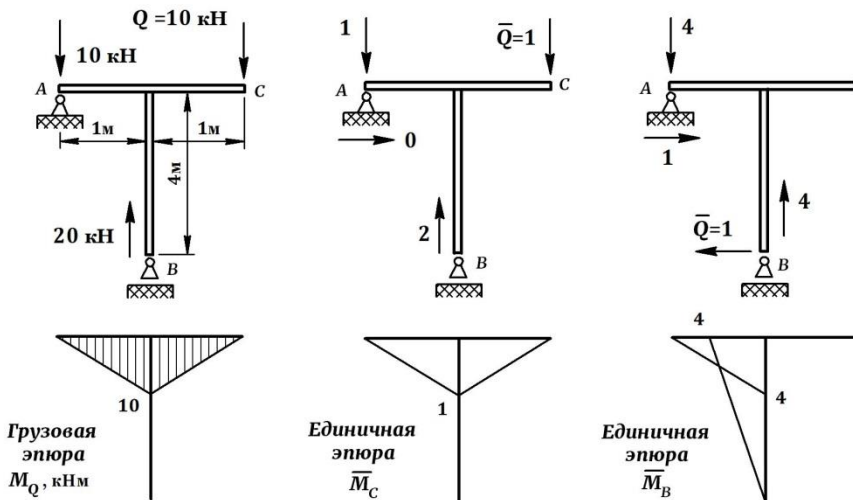
РЕШЕНИЕ:

### I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

Прикладываем груз  $Q$  статически и определяем перемещение точки приложения груза  $\Delta_{cm}^C$  и горизонтальное перемещение шарнирно-подвижной опоры  $\Delta_{cm}^B$ :

$$\begin{aligned} \Delta_{cm}^C &= \frac{1}{EI_x} (M_Q \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_x} \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) \times 2 = \\ &= \frac{6,67 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 572 \cdot 10^4} = 5,8 \text{ мм} \end{aligned}$$

$$\Delta_{cm}^B = \frac{1}{EI_x} (M_Q \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_x} \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \frac{13,33 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 572 \cdot 10^4} = 11,7 \text{ мм.}$$



## II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Определяем динамический коэффициент:

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{C}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 12}{5,8}} = 3,3.$$

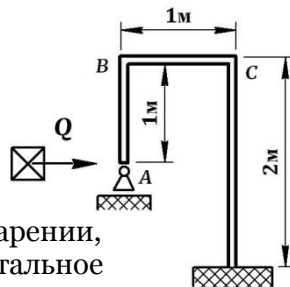
② Определяем горизонтальное перемещение подвижной опоры, вызванное ударом:

$$\Delta_{\partial}^B = k_{\partial} \Delta_{cm}^B = 3,3 \cdot 11,7 = 38,6 \text{ мм.}$$

### Задача 19

По подвижной опоре плоской рамы ударяет движущийся горизонтально груз  $Q=14 \text{ кН}$ . Рама выполнена из двутавра №22. Определить скорость груза при соударении, если от удара точка  $B$  получает горизонтальное перемещение 12 мм. Принять для двутавра №22:

$$I_x = 2550 \text{ см}^4; E = 2 \times 10^5 \text{ МПа.}$$



РЕШЕНИЕ:

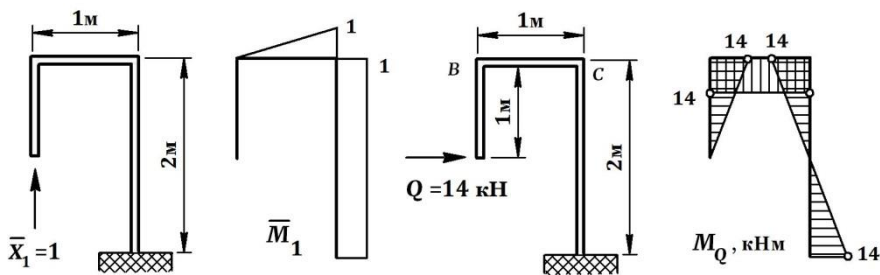
**I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ**

① Рама является статически неопределимой. Поэтому для определения всех необходимых статических параметров прикладываем силу  $Q$  статически и, используя МЕТОД СИЛ, раскрываем, статическую неопределимость  $\rightarrow$

а) Убираем подвижную опору  $A$ , в направлении отброшенной связи прикладываем неизвестную силу  $X_1$  и задаем условие, что перемещение в направлении этой силы равно нулю. Получаем каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1Q} = 0.$$

б) Определяем коэффициенты канонического уравнения:



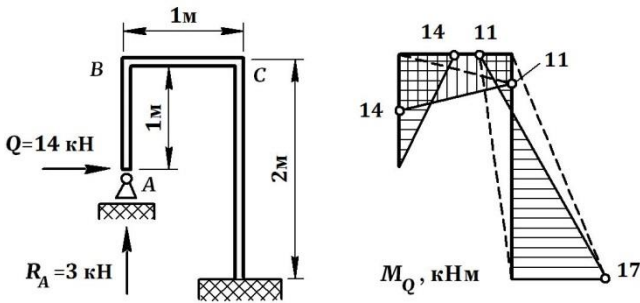
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} (\bar{M}_1 \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_x} \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 \right) = \frac{7}{3EI_x};$$

$$\Delta_{1Q} = \frac{1}{EI_x} (M_Q \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_x} \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 14 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 14 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 14 \right) = -\frac{21}{3EI_x}.$$

в) Решаем каноническое уравнение:

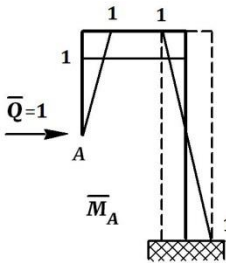
$$\frac{7}{3EI_x} X_1 - \frac{21}{3EI_x} = 0, \text{ откуда } X_1 = R_A = 3 \text{ кН.}$$

г) Строим окончательную эпюру моментов и делаем проверку, согласно которой необходимо доказать, что  $\Delta_A^{\text{верт}} = 0$ . Принимая для этого направления идентичность единичных эпюр  $\bar{M}_A$  и  $\bar{M}_1$ , выполняем проверку:

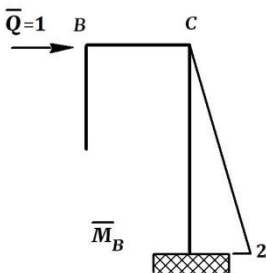


$$\Delta_A^{\text{верт}} = \frac{1}{EI_x} (M_Q \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_x} \left( -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 11 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 14 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 17 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 11 \cdot 1 \right) = \frac{1}{EI_x} \left( -\frac{22}{6} - \frac{14}{6} + \frac{102}{6} - \frac{66}{6} \right) = 0.$$

② Определяем горизонтальные статические перемещения в точках A и B:



$$\Delta_{cm}^A = \frac{1}{EI_x} (M_Q \bar{M}_A) = \frac{1}{EI_x} \left[ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 14 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 11 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 14 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 17 \left( \frac{2}{3} \cdot 2 - 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 11 \left( \frac{2}{3} \cdot 2 - 1 \right) \right] = \frac{26,5 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 2550 \cdot 10^4} = 5,2 \text{ мм};$$



$$\Delta_{cm}^B = \frac{1}{EI_x} (M_Q \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_x} \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 17 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 11 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \right) = \frac{15,33 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 2550 \cdot 10^4} = 3 \text{ мм};$$

## II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Определяем динамический коэффициент:

$$\Delta_{\partial}^B = k_{\partial} \Delta_{cm}^B, \text{ откуда } k_{\partial} = \frac{\Delta_{\partial}^B}{\Delta_{cm}^B} = \frac{12}{3} = 4.$$

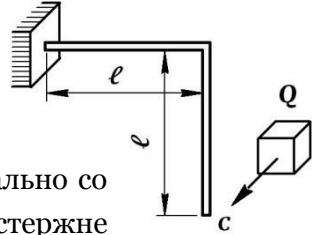
② Определяем скорость груза при соударении:

$$k_{\partial} = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g \Delta_{cm}^A}}, \text{ откуда}$$

$$V = \sqrt{\left[ (k_{\partial} - 1)^2 - 1 \right] g \Delta_{cm}^A} = \sqrt{\left[ (4 - 1)^2 - 1 \right] 9800 \cdot 5,2} = 63,8 \text{ см/сек.}$$

### Задача 20

Ломаный стержень, состоящий из двух одинаковых участков длиной  $\ell = 0,2$  м и диаметром  $d = 8$  см, подвергается удару грузом  $Q = 10$  кН, движущимся горизонтально со скоростью  $V = 10$  см/сек. Определить в стержне максимальные динамические напряжения и динамическое перемещение точки приложения груза. Использовать для расчета III-ю теорию прочности. Принять для материала:  $E = 2 \times 10^5$  МПа;  $G = 8 \times 10^4$  МПа.



РЕШЕНИЕ:

#### I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Определяем для стержня геометрические характеристики, необходимые для решения задачи:

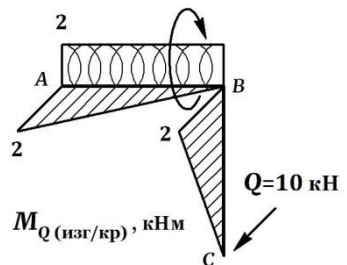
$$I_x = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 8^4}{64} = 201 \text{ см}^4; \quad I_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 8^4}{32} = 402 \text{ см}^4;$$

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 8^3}{32} = 50,24 \text{ см}^3.$$

② Прикладываем груз  $Q$  статически, строим эпюры изгибающих и крутящих моментов и устанавливаем на стержне опасное сечение. Здесь опасным является сечение  $A$  —

$$M_{Q(\text{изг})} = 2 \text{ кНм}; \quad M_{Q(\text{кр})} = 2 \text{ кНм},$$

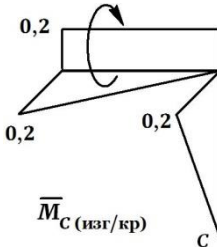
в котором, используя III-ю теорию прочности, определяем расчетный момент и статические напряжения:



$$M_{\text{расч}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2,83 \text{ кНм};$$

$$\sigma_{\text{см}}^{\text{max}} = \frac{M_{\text{расч}}^{\text{III}}}{W_x} = \frac{2,83 \cdot 10^6}{50,24 \cdot 10^3} = 56,3 \text{ МПа.}$$

③ Определяем статическое перемещение точки приложения груза по направлению его действия:



$$\begin{aligned} \Delta_{\text{см}}^C &= \frac{1}{EI_x} (M_{Q(\text{изг})} \bar{M}_{(\text{изг})}) + \frac{1}{GI_\rho} (M_{Q(\text{кр})} \bar{M}_{(\text{кр})}) = \\ &= \frac{1}{EI_x} \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,2 \right) \times 2 + \frac{1}{GI_\rho} (2 \cdot 0,2 \cdot 0,2) = \\ &= \frac{0,053 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 201 \cdot 10^4} + \frac{0,08 \cdot 10^{12}}{8 \cdot 10^4 \cdot 402 \cdot 10^4} = 0,38 \text{ мм.} \end{aligned}$$

## II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Определяем динамический коэффициент:

$$k_\partial = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g \Delta_{\text{см}}^C}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{100^2}{9800 \cdot 0,38}} = 2,92.$$

② Определяем максимальные динамические напряжения и динамическое перемещение точки приложения груза:

$$\sigma_\partial^{\text{max}} = k_\partial \sigma_{\text{см}}^{\text{max}} = 2,92 \cdot 56,3 = 164,4 \text{ МПа};$$

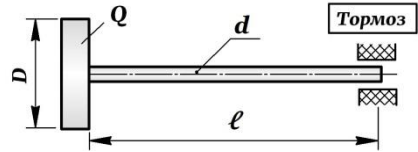
$$\Delta_\partial^C = k_\partial \Delta_{\text{см}}^C = 2,92 \cdot 0,38 = 1,11 \text{ мм.}$$

### Крутящий удар

#### Задача 21

Шкив диаметром  $D = 20$  см и весом  $Q = 0,5$  кН насажен на вал длиной  $\ell = 1$  м и диаметром  $d = 60$  мм. Шкив вращается с постоянной скоростью  $n = 120$  об/мин, но на правом конце вала включается тормоз и происходит резкая его остановка. За счет возникающей силы инерции шкива вал получает крутящий

удар. Определить максимальные динамические напряжения в вале в момент остановки.



РЕШЕНИЕ:

### I. СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① При статическом закручивании напряжения в вале равны:

$$\tau_{ст}^{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}} = \left| W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16} \right| = \frac{16M_{кр}}{\pi d^3}. \quad (1)$$

② Потенциальная энергия деформации кручения при статическом закручивании через работу внешних сил определяется как:

$$U_{ст} = \frac{M_{кр}\varphi}{2}, \quad (2)$$

где  $\varphi = \frac{M_{кр}\ell}{GI_{\rho}} = \left| I_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32} \right| = \frac{32M_{кр}\ell}{G\pi d^4}$  – угол закручивания. Тогда

выражение (2) принимает вид:

$$U_{ст} = \frac{16M_{кр}^2\ell}{G\pi d^4}. \quad (3)$$

### II. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

① Определяем динамический коэффициент по формуле —

$$k_{\partial} = \sqrt{\frac{K_0}{U_{ст}}}, \quad (4)$$

где  $K_0 = \frac{I_0\omega^2}{2}$  – кинетическая энергия вращающегося шкива на

момент остановки;  $I_0 = \frac{mR^2}{2} = \left| m = \frac{Q}{g}; R = \frac{D}{2} \right| = \frac{QD^2}{8g}$  – момент

инерции массы шкива;  $\omega = \pi n/30$  – угловая скорость вращения.

Примечание.

Следует помнить, что масса  $m$  – это мера инертности тела по отношению к поступательному движению, а момент инерции массы  $I_0$  – мера инертности тела по отношению к вращательному движению.

Тогда на основании вышеуказанных значений кинетическая энергия шкива равна:

$$K_0 = \frac{I_0 \omega^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{QD^2}{8g} \cdot \frac{\pi^2 n^2}{30^2} = \frac{QD^2 \pi^2 n^2}{16g \cdot 30^2}. \quad (5)$$

Подставляем значения (3) и (5) в выражение (4) и получаем динамический коэффициент в виде:

$$k_\partial = \sqrt{\frac{K_0}{U_{cm}}} = \sqrt{\frac{QD^2 \pi^2 n^2}{16g \cdot 30^2} \cdot \frac{G\pi d^4}{16M_{кр}^2 \ell}} = \frac{\pi D n d^2}{480M_{кр}} \sqrt{\frac{\pi QG}{g \ell}}. \quad (6)$$

② На основании значений (1) и (6) определяем максимальные динамические напряжения в вале:

$$\begin{aligned} \tau_\partial^{\max} &= k_\partial \tau_{cm}^{\max} = \left( \frac{\pi D n d^2}{480M_{кр}} \sqrt{\frac{\pi QG}{g \ell}} \right) \cdot \frac{16M_{кр}}{\pi d^3} = \frac{Dn}{30d} \sqrt{\frac{\pi QG}{g \ell}} = \\ &= \frac{200 \cdot 120}{30 \cdot 60} \sqrt{\frac{3,14 \cdot 0,5 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^4}{9800 \cdot 1 \cdot 10^3}} = 47,7 \text{ МПа}. \end{aligned}$$



## ЛИТЕРАТУРА

1. Подскребко, М.Д. Сопротивление материалов: Учебник. / М.Д. Подскребко – Минск: Вышэйшая школа, 2007. – 797 с.
2. Сборник задач по сопротивлению материалов / А.С. Вольмир [и др.]; под ред. Вольмира А.С. – М.: Наука, 1984. – 407 с.
3. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов: Учебник./В.И. Феодосьев – М.: Наука, 1986. – 512 с.
4. Дарков, А.В. Сопротивление материалов: Учебник. / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро – М.: Высшая школа, 1975. – 742 с.
5. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов / Н.М. Беляев – М.: Наука, 1976. – 607 с.
6. Писаренко, Г.С. Сопротивление материалов: Учебник./ Г.С. Писаренко [и др.]; под ред. Писаренко Г.С. – Киев: Вища школа, 1979. – 696 с.
7. Татур, Г.К. Общий курс сопротивления материалов: Учебник. / Г.К. Татур – Минск:Вышэйшая школа, 1974. – 462 с.
8. Реут, Л.Е. Курс лекций и практических занятий по дисциплине «Механика материалов». Растяжение-сжатие: Учебно-методическое пособие. / Л.Е. Реут. – Минск: БНТУ, 2011. – 147 с.
9. Реут, Л.Е. Плоский поперечный изгиб: Пособие по учебной дисциплине «Механика материалов». / Л.Е. Реут. – Минск: БНТУ, 2016. – 263 с.