

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет
Кафедра «Математические методы в строительстве»

**Электронный учебно-методический
комплекс по учебной дисциплине
"МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ"**

для специальности

**1-36 11 01-01 «Подъемно-транспортные, строительные, дорожные машины и
оборудование (производство и эксплуатация)»**

Минск БНТУ 2020

Составители:

Евсеева Е.А., Скачек П.Д.

Рецензенты:

Белорусский государственный аграрный технический университет,
кафедра механики материалов и деталей машин, заведующий кафедрой, кандидат
технических наук, доцент Основин В.Н.;

Гродненский государственный университет им. Я.Купалы, кафедра технической
механики, заведующий кафедрой, доктор технических наук, профессор
Барсуков В.Г.

Электронный учебно-методический комплекс содержит данные, необходимые для изучения дисциплины «Механика материалов». В теоретическом разделе учебно-методического комплекса изложены основные методы расчета элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость при простом и сложном видах сопротивления. Приведены примеры расчета и представлены задания для самостоятельной работы студентов.

© Белорусский национальный
технический университет, 2020

© Евсеева Е.А., Скачек П.Д., 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА.....	5
2. ПРОГРАММА КУРСА	7
2.1. Разделы курса	7
2.2. Учебно-методическая карта дисциплины.....	15
2.3. Перечень тем практических занятий.....	16
2.4. Перечень тем лабораторных работ.....	17
2.5. Перечень контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы студентов.....	18
2.6. Методические рекомендации по организации и выполнению самостоятельной работы студентов	18
2.7. Методы (технологии) обучения.....	18
2.8. Информационно-методическая часть	19
3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ	21
3.1. Растяжение и сжатие прямого стержня	21
3.1.1. Внутренние усилия.....	21
3.1.2. Напряжения в поперечных сечениях бруса.....	22
3.1.3. Деформации и перемещения при растяжении и сжатии.....	22
3.1.4. Статически неопределимые системы при растяжении и сжатии.....	33
3.2. Геометрические характеристики плоских сечений	40
3.3. Кручение цилиндрического стержня	45
3.3.1. Определение крутящих моментов и построение их эпюр	45
3.3.2. Определение напряжений и деформаций при кручении вала с круглым поперечным сечением.....	46
3.3.3. Подбор диаметра вала круглого сечения по прочности.....	48
3.3.4. Подбор диаметра вала по жёсткости.....	48
3.4. Плоский изгиб прямого бруса.....	56
3.4.1. Виды изгиба стержней.....	56
3.4.2. Определение опорных реакций	56
3.4.3. Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой и распределенной нагрузкой.....	57
3.4.4. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил в балках	57
3.4.5. Определение напряжений при изгибе	57
3.5. Определение перемещений при изгибе балок.....	78
3.5.1. Метод начальных параметров.....	78
3.6. Статически неопределимые балки	87
3.7. Сложное сопротивление	96

3.7.1. Внецентренное растяжение или сжатие.....	96
3.7.2. Косой изгиб.....	101
3.7.3. Расчет на прочность пространственного бруса.....	105
3.7.4. Изгиб с кручением.....	110
3.7.5. Расчет цилиндрических винтовых пружин	116
3.8. Продольный изгиб стержней	120
3.9. Динамическое действие нагрузки.....	129
3.9.1. Расчет на действие сил инерции	130
3.9.2. Расчет на ударную нагрузку.....	131
3.10. Напряженно-деформированное состояния в точке	136
4. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ.....	147
5. ПРИЛОЖЕНИЯ	248

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине «Механика материалов» разработана для направления специальности 1-36 11 01-01 «Подъемно-транспортные, строительные, дорожные машины и оборудование (производство и эксплуатация)» со сроком обучения 4 года.

Целью преподавания дисциплины является – научить студентов проводить расчеты типовых элементов строительных конструкций на прочность, жесткость, устойчивость и долговечность, правильно выбирать конструкционные материалы и форму сечений конструкций, обеспечивающие требуемые запасы надежности и безопасность их эксплуатации.

Основными задачами преподавания дисциплины являются: развить навыки по применению методов расчетов механики материалов и теории упругости при изучении курсов «Детали машин», «Строительная механика и расчет металлоконструкций», «Технические основы создания машин».

Изучение дисциплины базируется на знаниях, полученных при изучении таких курсов, как «Математика», «Физика» и «Теоретическая механика».

В основе учебной дисциплины лежат фундаментальные положения математики, физики и механики. Знания и умения, полученные студентами при изучении данной дисциплины, необходимы для освоения последующих специальных дисциплин и дисциплин специализаций, связанных с проектированием и расчетом деталей, узлов и агрегатов машин.

В результате изучения дисциплины «Механика материалов» студент должен:

знать:

– основные гипотезы механики материалов о свойствах конструкционных материалов и характере деформации;

– методы расчета типовых элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость;

– методы экспериментального исследования напряжений и деформаций;

уметь:

– применить на практике методы и подходы к решению инженерных задач расчета конструкций, деталей и узлов машин на прочность, жесткость и устойчивость;

– исследовать напряжения и деформации экспериментальными методами;

– осуществлять постановку задач с учетом сложных эксплуатационных условий функционирования исследуемого объекта;

владеть:

– методами теоретического и экспериментального анализа конструкций на прочность, жесткость и устойчивость с учетом свойств конструкционных материалов;

– методами расчета конструкций для их оптимального использования.

– методами расчета деталей и узлов на прочность.

Освоение данной учебной дисциплины обеспечивает формирование следующих компетенций:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-2. Владеть системным и сравнительным анализом.

АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.

АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.

АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.

СЛК-5. Быть способным к критике и самокритике (критическое мышление).

СЛК-6. Уметь работать в команде.

СЛК-7. Самостоятельно приобретать и использовать в практической деятельности новые знания и умения, в том числе в новых областях знаний, непосредственно не связанных со сферой деятельности.

ПК-10. Владеть методами определения технико-экономических показателей ПТМ и СДМ;

ПК-11. Владеть методами расчета энергетических, кинематических, динамических и силовых параметров ПТМ и СДМ и их проектирования;

ПК-12. Владеть методами контроля параметров машин (ПТМ и СДМ), применяемых в строительном комплексе;

ПК-13. Владеть методами диагностирования и оценки остаточного ресурса конструкций, механизмов и деталей ПТМ и СДМ;

ПК-14. Владеть методами монтажа, наладки, испытаний ПТМ и СДМ, лифтов и подъемников;

ПК-15. Владеть способами оценки и уменьшения вредного влияния ПТМ и СДМ на окружающую среду;

ПК-16. Оценивать патентоспособность технических решений, проводить патентные исследования;

ПК-17. Обеспечивать при проектировании безопасность конструкций ПТМ и СДМ;

ПК-18. В составе группы специалистов по проектированию ПТМ и СДМ, лифтов и подъемников или самостоятельно разрабатывать перспективный план развития отдельных машин, выполнять технико-экономическое обоснование структурной единицы машины или машины в целом;

ПК-19. Рассчитывать и проектировать ПТМ и СДМ, лифты и подъемники общего и специального назначения, работающих в условиях динамического нагружения в повторно-кратковременном режиме;

ПК-20. Применять теорию, методы расчета и режимы работы ПТМ и СДМ машин при физическом и математическом моделировании процессов;

ПК-21. Осуществлять оптимизацию параметров несущих конструкций, отдельных структурных единиц ПТМ и СДМ с целью снижения их металлоемкости и энергозатрат на изготовление и ремонт.

Согласно учебному плану для очной формы получения высшего образования на изучение дисциплины отведено всего 240 ч., в том числе 120 аудиторных занятий.

Распределение аудиторных часов по курсам, семестрам и видам занятий приведено в таблице 1.

Таблица 1.

Очная форма получения высшего образования					
Курс	Семестр	Лекции, ч.	Лабораторные занятия, ч.	Практические занятия, ч.	Форма текущей аттестации
2	3	34	18	18	зачет
2	4	18	16	16	экзамен

Согласно учебному плану для заочной формы получения высшего образования, интегрированного со средним специальным образованием, на изучение дисциплины отведено всего 240 часов, из них аудиторных - 36 часов.

Распределение аудиторных часов по курсам, семестрам и видам занятий приведено в таблице 2.

Таблица 2.

Заочная форма получения высшего образования, интегрированного со средним специальным образованием					
Курс	Семестр	Лекции, ч.	Лабораторные занятия, ч.	Практические занятия, ч.	Форма текущей аттестации
2	3	8	6	8	зачет
2	4	6	4	4	экзамен

2. ПРОГРАММА КУРСА

2.1. Разделы курса

Тема 1. Основные понятия и допущения

Основные гипотезы: сплошность, однородность, изотропия, упругость, пластичность, ползучесть, малые перемещения. Объекты, изучаемые в курсе: брус, пластина, оболочка, массив. Реальная конструкция и ее расчетная схема (модель). Типы опор.

Внешние силовые воздействия (нагрузки) и их классификация: объемные и поверхностные, сосредоточенные и распределенные, постоянные и временные, статические и динамические, случайные и повторяющиеся. Температурные, кинематические и другие воздействия.

Деформации и перемещения. Деформации линейные и угловые, абсолютные и относительные. Перемещения линейные и угловые.

Метод сечений. Силы упругости (внутренние силы) и их составляющие. Напряжения: полное, нормальное и касательное. Понятие о напряженном состоянии в точке.

Зависимость напряжений от деформаций. Закон Гука. Модули упругости материалов.

Элементарные внутренние силы. Равнодействующая внутренних сил и ее составляющие (продольные и поперечные силы). Равнодействующий момент внутренних сил и его составляющие (крутящий и изгибающие моменты). Простые и сложные сопротивления элементов конструкций. Связь составляющих внутренних сил и напряжений.

Предпосылки при расчете конструкций: гипотезы о плоских сечениях, принцип суперпозиций, принцип начальных размеров, принцип Сен-Венана, допущение об отсутствии начальных внутренних сил и о взаимном давлении продольных волокон стержня.

Тема 2. Растяжение (сжатие) прямого стержня

Осевое (центральное) растяжение (сжатие). Продольные силы в поперечных сечениях, правило знаков для продольных сил. Эпюры продольных сил. Дифференциальные и интегральные зависимости между продольной силой в сечении и интенсивностью распределенной нагрузки.

Особенности деформации центрально растянутого (сжатого) стержня. Равенство деформаций всех продольных волокон. Равенство напряжений во всех точках поперечного сечения стержня. Формула для определения нормальных напряжений в поперечном сечении стержня. Напряжения в наклонном сечении стержня. Эпюра напряжений. Напряжения во взаимно перпендикулярных сечениях стержня. Закон парности касательных напряжений. Правило знаков для нормальных и касательных напряжений.

Линейное (одноосное) напряженное состояние в точках растянутого (сжатого) стержня. Экстремальные значения нормальных напряжений.

Продольные и поперечные деформации стержня. Коэффициент Пуассона. Осевые перемещения (смещения) сечений стержня. Деформации участков стержня, закон Гука для центрального растяжения (сжатия). Жесткость сечения и жесткость участка стержня. Эпюры перемещений.

Полная и удельная работа, затраченная на деформирование участка стержня при растяжении (сжатии). Закон сохранения энергии. Потенциальная энергия упругой деформации: полная и удельная.

Тема 3. Основные характеристики механических свойств материалов

Механические свойства конструкционных материалов: прочность, жесткость, твердость, выносливость и др. Виды испытания материалов.

Испытательные машины и предъявляемые к ним требования. Типы образцов для испытаний. Необходимые условия для проведения испытаний.

Испытание на растяжение. Машинная диаграмма испытания. Характерные точки и характерные участки на диаграмме. Понятие о текучести материала и об упрочнении при повторных нагружениях (наклепе). Закономерности разгрузки и повторного нагружения. Особенности деформирования и разрушения материалов в пластическом и хрупком состояниях.

Основные механические характеристики материалов – пределы пропорциональности, упругости, пластичности, прочности. Характеристики пластичности. Нормативные и расчетные сопротивления материалов. Испытание на сжатие, особенности диаграмм. Испытания на срез, расчетные характеристики среза. Испытание на твердость, характеристики твердости.

Тема 4. Методы инженерных расчетов на прочность и жесткость

Основные требования к инженерным конструкциям: прочность, жесткость, надежность. Понятие о предельных состояниях, критерий их наступления в зависимости от свойств материалов, условия работы, назначения конструкций и др.

Основы методов расчета: по допускаемым напряжениям, по разрушающим нагрузкам и по предельным состояниям. Три вида задач при расчетах на прочность: проверка прочности по расчетному условию, подбор сечений (проектный расчет), определение эксплуатационной нагрузки (несущей способности).

Расчет на жесткость. Условие жесткости. Предельные линейные и угловые перемещения.

Расчеты инженерных конструкций при растяжении (сжатии). Учет собственного веса. Расчет стержней переменного сечения.

Понятие о рациональных конструкциях, об оптимальном проектировании. Ограничения и критерии оптимизации. Принцип равнопрочности, брус равного сопротивления. Понятие о конструкционной прочности с учетом анизотропии материала.

Тема 5. Основы теории напряженного и деформированного состояний

Напряженное состояние в точке деформированного тела. Компоненты напряжения. Тензор напряжений. Обозначения и правила знаков для компонентов напряжения. Главные площадки и главные напряжения. Виды напряженного состояния: линейное (одноосное), плоское (двухосное), объемное (трехосное).

Напряжения на наклонной площадке в условиях плоской задачи. Определение главных напряжений и положения главных площадок.

Круги Мора для напряжений. Графическое определение величины и направления напряжений на любых площадках при плоском напряженном состоянии.

Понятие о деформированном состоянии. Компоненты деформации. Тензор деформаций. Обозначения и правила знаков для компонентов деформации. Плоская и объемная деформации в точке тела. Главные оси деформации и главные деформации.

Обобщенный закон Гука. Закон Гука при плоском и объемном напряженных состояниях в точке.

Удельная потенциальная энергия деформации. Энергия изменения объема и энергия изменения формы.

Тема 6. Экспериментальные методы исследования напряжений и деформаций

Классификация экспериментальных методов. Измерение деформаций механическими, электрическими и оптическими тензометрами. Виды тензометров. База измерения.

Различные случаи применения тензометров. Использование тензометрических розеток при исследовании плоского напряженного состояния.

Поляризаторно-оптический метод исследования напряжений. Физические основы метода. Схема установки. Изохромы и изоклины. Тарировка материала модели. Определение напряжений на контуре. Вычисление касательных напряжений в произвольном сечении модели. Условие подобия природы и модели.

Краткие сведения о других экспериментальных методах исследования: метод сеток, метод хрупких лаковых покрытий, метод муаровых полос и фотоупругих покрытий, рентгеновские, голографические и другие методы. Понятие о физическом и математическом моделировании.

Тема 7. Теории прочности и пластичности

Назначение теорий прочности, понятие об эквивалентном напряжении и равноопасных напряженных состояниях. Хрупкое и вязкое разрушение. Критериальные условия наступления предельных состояний.

Теории прочности при хрупком состоянии материала. Гипотеза наибольших нормальных напряжений и соответствующее ей эквивалентное напряжение. Гипотеза наибольших относительных удлинений и соответствующее ей эквивалентное напряжение. Сопоставление с опытными данными.

Предельные состояния пластичных материалов. Гипотеза наибольших касательных напряжений и соответствующее ей эквивалентное напряжение. Гипотеза энергии формоизменения и соответствующее ей эквивалентное напряжение. Сопоставление с опытными данными.

Феноменологический критерий Мора для материалов с различными пределами прочности при растяжении и сжатии. Эквивалентные напряжения.

Общие сведения о других гипотезах прочности и пластичности.

Тема 8. Геометрические характеристики поперечных сечений

Назначение геометрических характеристик в курсе механика материалов. Статические моменты, их свойства. Статические моменты сечений сложной формы. Определение центра тяжести сложного (составного) сечения. Осевые, полярный и центробежный моменты инерции сечений, их свойства. Зависимость осевых и центробежного моментов инерции при параллельном переносе и при повороте координатных осей. Главные оси и главные моменты инерции. Определение главных моментов инерции и положения главных осей сечений сложной формы (составных сечений) аналитическим и графическим методами.

Моменты инерции сечений простых форм: прямоугольной, треугольной, круглой и кольцевой. Понятие о радиусе и эллипсе инерции.

Тема 9. Сдвиг

Сдвиг (чистый сдвиг) как сопротивление простой деформации стержня. Внутренние силы при сдвиге. Примеры элементов конструкций сопротивляющихся сдвигу (срезу).

Анализ напряженного состояния при сдвиге – напряжения на наклонной площадке, положение главных площадок, значения главных напряжений. Закон Гука при сдвиге. Модуль упругости второго рода (модуль сдвига). Жесткость сечения при сдвиге.

Потенциальная энергия упругой деформации при сдвиге. Удельная энергия деформации при чистом сдвиге. Неизменность объема при чистом сдвиге. Зависимости между модулями упругости первого и второго рода.

Расчет заклепочных, болтовых и сварных соединений. Расчет клееных соединений и деревянных врубок.

Тема 10. Кручение цилиндрического стержня

Внутренние силы в сечениях скручиваемого стержня (вала). Дифференциальные зависимости, эпюры крутящих моментов. Учет передаваемой валом мощности и угловой скорости.

Особенности деформации цилиндрического стержня – допущение о прямолинейности радиуса и об отсутствии депланации поперечных сечений. Относительный угол закручивания. Формула для вычисления касательных напряжений в поперечном сечении стержня при кручении. Эпюра напряжений.

Определение угловых деформаций (углов закручивания). Закон Гука при кручении стержня. Жесткость стержня при кручении. Эпюры углов поворота сечений.

Расчеты на прочность и жесткость стержня (вала) круглого (кольцевого) сечения. Полярный момент сопротивления.

Анализ напряженного состояния в стержне, подвергнутом кручению. Главные напряжения и их направления. Виды разрушения стержней, выполненных из различных материалов.

Особенности деформации при кручении стержней некруглого поперечного сечения. Основные результаты теории кручения стержней прямоугольного сечения.

Тема 11. Плоский изгиб прямого бруса

Классификация видов изгиба. Изгиб прямого бруса (балки) в главной плоскости инерции. Внешние силы (нагрузки), типы опор, реакции. Внутренние силы в поперечных сечениях балки при чистом и поперечном изгибах.

Определение поперечных сил и изгибающих моментов в сечениях балки. Правила знаков. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Способы построения эпюр и их практическое значение.

Дифференциальные зависимости между поперечной силой, изгибающим моментом и интенсивностью сплошной нагрузки. Использование указанных зависимостей для контроля построения эпюр.

Особенности деформирования участка балки с чистым изгибом. Нейтральный слой и нейтральная ось. Зависимость между изгибающим моментом и кривизной оси изогнутой балки. Жесткость сечения. Нормальные напряжения в точках сечения. Эпюра нормальных напряжений.

Особенности деформирования участка балки с поперечным изгибом. Условие распространение выводов для чистого изгиба на поперечный изгиб. Касательные напряжения для сплошных сечений (формула Журавского). Эпюра касательных напряжений в различных по форме сечениях.

Расчеты на прочность при изгибе. Осевой момент сопротивления сечения. Проверка прочности по касательным напряжениям. Рациональные сечения балки.

Анализ напряженного состояния балки. Главные напряжения, их траектории. Использование теорий прочности и пластичности при проверке прочности балки.

Потенциальная энергия упругих деформаций при изгибе. Удельная потенциальная энергия.

Касательные напряжения при чистом изгибе балок тонкостенного профиля. Понятие о центре изгиба.

Изгиб бруса переменного сечения. Балка равного сопротивления. Понятие о расчете составных (сварных и заклепочных) балок.

Линейные и угловые перемещения балки в результате ее деформации. Связь углового и линейного перемещения. Дифференциальное уравнение оси изогнутой балки (упругой линии балки).

Интегрирование дифференциального уравнения для случая одного участка. Определение постоянных интегрирования. Правило знаков линейных и угловых перемещений. Условие жесткости.

Определение постоянных интегрирования при наличии нескольких участков на балке. Обобщенное уравнение упругой линии балки с начальными параметрами. Метод начальных параметров. Условие его применения.

Работа сил на перемещениях в упругой системе. Возможная работа. Теоремы о взаимности работ и о взаимности перемещений. Применение теорем к внутренним силам системы.

Определение перемещений методом Максвелла–Мора. Графоаналитические приемы вычисления интегралов универсальной формулы Мора по правилу Верещагина.

Тема 12. Расчет простейших статически неопределимых систем

Статический и кинематический анализ простейших стержневых систем. Понятия о степенях свободы и связях. Связи необходимые и “лишние”. Степень статической неопределимости.

Расчет статически неопределимых стержневых систем при растяжении–сжатии и кручении. Внутренние силы и напряжения в статически неопределимых стержневых системах от температурных воздействий.

Способы регулирования напряжений в статически неопределимых системах, понятие о преднапряжении. Практическое применение преднапряжения в металлических и железобетонных конструкциях.

Основы метода сил при расчете простейших статически неопределимых стержневых систем. Выбор основной системы. Понятие об эквивалентной системе. Условия совместности деформаций, канонические уравнения, определение коэффициентов уравнений и свободных членов.

Применение метода сил к расчету статически неопределимых балок. Особенности выбора основной системы. Единичные и грузовые эпюры. Раскрытие статической неопределимости.

Тема 13. Сложное сопротивление бруса

Общий случай действия сил на брус. Составляющие внутренних сил и их эпюры. Характерные случаи сложного сопротивления бруса. Общий случай сложения напряжений в поперечных сечениях стержня – нормальных алгебраически, касательных геометрически.

Сложный (косой) изгиб. Внутренние силы, напряжения и их эпюры. Положение нейтральной линии (оси), опасные точки в сечениях. Расчет на прочность и особенности подбора сечения. Определение линейных и угловых перемещений, направление прогиба.

Внецентренное действие продольных сил. Внутренние силы, напряжения, их эпюры. Положение нейтральной (нулевой) линии. Опасные точки в сечении. Расчетное условие, определение несущей способности. Ядро сечения. Его свойства. Случай внецентренного сжатия преднапряженных балок.

Кручение с изгибом и кручение с растяжением (сжатием) цилиндрического стержня. Внутренние силы, нормальные, касательные и главные напряжения. Расчеты на прочность с применением теорий прочности и пластичности.

Тема 14. Устойчивость сжатых стержней

Понятие о формах равновесия сжатых стержней. Критические нагрузки, продольный изгиб. Примеры потери устойчивости элементов конструкции.

Формула Эйлера для критической силы упругой стадии материала. Учет опорных закреплений стержней, приведенная длина.

Критические напряжения, понятие о гибкости стержня, предельная гибкость. Пределы применимости формулы Эйлера.

Потеря устойчивости при напряжениях, превышающих предел пропорциональности. График зависимости критических напряжений от гибкости стержня. Эмпирическая формула Ясинского.

Практический метод расчета сжатых стержней на устойчивость. Использование коэффициентов продольного изгиба. Способы подбора сечений сжатого стержня с использованием удельного радиуса инерции сечения и характеристики сечения.

Тема 15. Расчет толстостенных труб и тонкостенных сосудов

Общие понятия о толстостенных трубах и тонкостенных сосудах. Особенности их расчетов.

Напряжения в сечениях толстостенных труб, эпюры напряжений. Анализ расчетных формул.

Деформации в главных направлениях толстостенных труб. Автофретирование.

Напряжения в сечениях толстостенных сосудов сферического и конического очертаний. Понятие о безмоментной теории.

Примеры расчета тонкостенных сосудов различных очертаний.

Тема 16. Простейшие задачи при динамическом нагружении

Типы динамических нагрузок на элементы строительных конструкций и деталей машин. Понятие о динамическом коэффициенте. Расчетное условие на прочность и жесткость.

Подъем и опускание груза с ускорением. Принцип Даламбера. Напряжения в сечениях быстро вращающихся элементов конструкций (диск, кольцо и др.).

Расчеты на удар. Формула динамического коэффициента, условие ее применимости. Случай продольного, поперечного и крутильного удара. Приближенный учет массы конструкции при ударных нагрузках.

Тема 17. Принципы расчета элементов конструкций, работающих за пределами упругости

Отличительная схема расчета и схематизация диаграммы растяжения. Напряжения и перемещения в простейших стержневых системах при наличии пластических деформаций.

Упруго-пластический изгиб бруса.

Кручение бруса круглого поперечного сечения при наличии пластических деформаций.

Основы расчета по предельным нагрузкам. Основы теории пластичности.

2.2. Учебно-методическая карта дисциплины

Таблица 2.1.

Номер темы	Название темы	Количество аудиторных часов				
		лекции	практические (семинарские)	лабораторные занятия	Количество часов	Форма контроля знаний
1	2	3	4	5	6	7
ОЧНАЯ ФОРМА ПОЛУЧЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ						
1	Основные понятия и допущения	2				
2	Растяжение (сжатие прямого стержня)	4	2	2		Защита отчета
3	Основные характеристики механических свойств материалов	2		2		Защита отчета
4	Методы инженерных расчетов на прочность и жесткость	2	2			
5	Основы теории напряженного и деформированного состояний	4	2			
6	Экспериментальные методы исследования напряжений и деформаций	2		4		Самостоятельная работа, защита отчета
1	2	3	4	5	6	7
7	Теории прочности и пластичности	2	2			
8	Геометрические характеристики поперечных сечений	4	2	2		Защита отчета
9	Сдвиг	2	2	2		Защита отчета
10	Кручение цилиндрического стержня	4	2	2		Защита отчета
11	Плоский изгиб прямого бруса	6	6	6		Защита отчета
12	Расчет простейших статически неопределимых систем	4	4	4		Защита отчета
13	Сложное сопротивление бруса	6	6	8		Защита отчета
14	Устойчивость сжатых стержней	2	2	2		Защита отчета

15	Расчет толстостенных труб и тонкостенных сосудов	2	1			Защита отчета
16	Простейшие задачи при динамическом нагружении	2	1			
17	Принципы расчета элементов конструкций, работающих за пределами упругости	2				
	Итого за 3 и 4 семестр	52	34	34		
	Всего аудиторных часов	120				Зачет, экзамен
ЗАОЧНАЯ ФОРМА ПОЛУЧЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ, ИНТЕГРИРОВАННАЯ СО СРЕДНИМ СПЕЦИАЛЬНЫМ ОБРАЗОВАНИЕМ						
1	Основные понятия и допущения	0,5				
2	Растяжение (сжатие прямого стержня)	1	2	4		Защита отчета
3	Основы теории напряженного и деформированного состояний	0,5				
4	Теории прочности и пластичности	0,5				
5	Геометрические характеристики поперечных сечений	1	1			
6	Сдвиг	1	1			
7	Кручение цилиндрического стержня	1	1			
8	Плоский изгиб прямого бруса	2,5	3	2		Защита отчета
9	Расчет простейших статически неопределимых систем	2	1	2		Защита отчета
10	Сложное сопротивление бруса	3	1	2		Защита отчета
12	Устойчивость сжатых стержней	0,5	1			
13	Простейшие задачи при динамическом нагружении	0,5	1			
	Итого за 3 и 4 семестр	14	12	10		
	Всего аудиторных часов	36				Зачет, экзамен

2.3. Перечень тем практических занятий

1. Определение продольных сил и напряжений.
2. Напряжения в наклонном сечении бруса.
3. Определение деформаций в брусe переменной жесткости.
4. Расчет центрально растянутого (сжатого) бруса по методу разрушающих нагрузок, допускаемых напряжения и предельных состояний.

5. Определение главных напряжений и положение главных площадок при плоском напряженном состоянии.
6. Определение условий наступления предельных состояний по различным теориям прочности.
7. Определение положения центра тяжести сечения, осевых и центробежного моментов инерции поперечных сечений.
8. Определение главных моментов инерции и положение главных осей инерции сечений сложной геометрической формы.
9. Расчет заклепочных и сварных соединений.
10. Расчет стержня круглого или кольцевого сечения на прочность и жесткость.
11. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов в балках.
12. Расчет балок на прочность.
13. Определение деформаций балок методом начальных параметров.
14. Определение деформаций балок методом Максвелла-Мора.
15. Определение деформаций балок графоаналитическим методом (способом Верещагина) и по формуле Симпсона.
16. Расчет статически неопределимого бруса на центральное растяжение (сжатие) и кручение и температурное воздействие.
17. Расчет статически неопределимых плоских стержневых систем.
18. Расчет неразрезных балок методом сил.
19. Расчет балки на косоугольный изгиб.
20. Расчет короткого стержня на внецентренное сжатие.
21. Расчет стержня круглого сечения на кручение с изгибом и изгиб со сжатием.
22. Расчет пружин растяжения и сжатия.
23. Расчет пространственного (ломаного) стержня круглого сечения.
24. Расчет тонкостенных сосудов различных очертаний.
25. Расчет балки на поперечный удар.

2.4. Перечень тем лабораторных работ

1. Вводное занятие. Охрана труда.
2. Испытательные установки, измерительные приборы и инструменты.
3. Испытание на растяжение образцов стали.
4. Испытание стали, чугуна, пластмасс и дерева на сжатие.
5. Определение модуля упругости и коэффициента Пуассона.
6. Определение модуля сдвига по результатам испытания стержня круглого сечения на кручение.
7. Определение напряжений в поперечном сечении балки.
8. Исследование напряженного состояния в точках балки.
9. Экспериментальное определение деформаций балки.
10. Опытное подтверждение теоремы о взаимности перемещений.
11. Исследование статически неопределимой балки.
12. Исследование балки при косоугольном изгибе, определение напряжений.
13. Исследование балки при косоугольном изгибе, определение деформаций.

14. Исследование стержня при внецентренном растяжении.
15. Исследование прямого сжатого стержня на устойчивость.
16. Отработка и защита лабораторных работ.

2.5. Перечень контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы студентов

1. Расчет статически определимого стержня и шарнирно стержневых систем.
2. Определение геометрических характеристик поперечных составных сечений и сечений сложной формы.
3. Расчет вала круглого поперечного сечения на кручение.
4. Определение внутренних сил в статически определимых балках при поперечном изгибе. Построение эпюр внутренних сил.
5. Расчет статически определимых балок на прочность при плоском поперечном изгибе.
6. Расчет статически определимых балок на жесткость (метод начальных параметров).
7. Построение эпюр внутренних сил в плоских рамах.
8. Исследование напряженного состояния в точке тела.
9. Решение плоской задачи теории упругости в полиномах.

2.6. Методические рекомендации по организации и выполнению самостоятельной работы студентов

При изучении дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- решение индивидуальных заданий (задач);
- подготовка рефератов по индивидуальным темам;
- составление тематической подборки литературных источников, интернет-источников;
- проработка тем (вопросов), вынесенных на самостоятельное изучение.

2.7. Методы (технологии) обучения

Основными методами (технологиями) обучения, отвечающими целям изучения дисциплины, являются:

- элементы проблемного обучения (проблемное изложение, вариативное изложение, частично-поисковый метод), реализуемые на лекционных занятиях;
- элементы учебно-исследовательской деятельности, творческого подхода, реализуемые на практических занятиях (или лабораторных работах) и при самостоятельной работе;

- коммуникативные технологии (дискуссия, учебные дебаты, мозговой штурм и другие формы и методы), реализуемые на практических занятиях и конференциях.

2.8. Информационно-методическая часть

2.8.1. Основная литература

1. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов / В.И.Феодосьев. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2005. – 592 с.
2. Подскребко М.Д. Сопротивление материалов / М.Д.Подскребко. – Минск: Высшэйшая школа, 2007. — 797 с.: ил.
3. Смирнов А.Ф.Сопротивление материалов/А.Ф.Смирнов [и др.]; под общ. ред. А.Ф.Смирнова. – М.: Высш. шк., 1975. – 480 с.
4. Сопротивление материалов/Г.С.Писаренко [и др.]; под общ. ред. Г.С.Писаренко. – Киев: Вища шк., 1973-672с.
5. Александров А.В. Основы теории упругости и пластичности/ А.В.Александров, В.Д.Потапов. – М.: Высш. шк., 1990. – 400 с.
6. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести/ Н.И.Безухов. – М.: Высш. шк., 1968. – 512 с.
7. Безухов Н.И. Примеры и задачи по теории упругости, пластичности и ползучести / Н.И.Безухов – М.: Высш. шк., 1965. – 320 с.
8. Хечумов Р.А. Применение метода конечных элементов к расчету конструкций: учебное пособие для технических вузов / Р.А.Хечумов, Х.Кепплер, В.И.Прокопьев. – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 1994. – 353 с.
9. Зубчанинов В.Г. Основы теории упругости и пластичности / В.Г.Зубчанинов. – М.: Высш. шк., 1990. – 368 с.
10. Гастев В.А. Краткий курс сопротивления материалов / В.А.Гастев. - М.:Наука, 1977. - 456 с.
11. Терегулов И.П. Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности / И.П.Терегулов. – М.:Высшая школа,1984. – 472 с.
12. Старовойтов Э.И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости/ Э.И.Старовойтов. – Гомель: БелГУТ, 2001. – 344 с.
13. Беляев Н.М. Сопротивление материалов / Н.М.Беляев. – М.: Наука, 1976. – 608 с.
14. Сопротивление материалов. Практикум: учебно-методическое пособие / С.И.Зиневич и др. – Минск: Новое знание; М: ИНФРА – М. 2015. – 316 с.

2.8.2. Дополнительная литература

1. Справочник по сопротивлению материалов / Е.Ф.Винокуров [и др.]. – Минск: Наука и техника, 1988. – 464 с.
2. Заяц В.Н. Сопротивление материалов / В.Н.Заяц, М.К.Балыкин, И.А.Голубев. – Минск: БГПА, 1998. – 367 с.
3. Подскребко М.Д. Сопротивление материалов. / М.Д. Подскребко

4. Практикум по решению задач: учеб. пособие Минск: Вышэйшая школа, 2009. – 688 с.: ил.
5. Писаренко Г.С. Справочник по сопротивлению материалов / Г.С.Писаренко, А.П.Яковлев, В.В.Матвеев; под ред. Г.С.Писаренко. – Киев: Наукова думка, 1988. – 736 с.
6. Сопротивление материалов деформированию и разрушению: справочное пособие: [1 ч.] / В.Г.Трощенко [и др.]; под общ. ред. В.Г.Трощенко. – Киев: Наукова думка, 1993. – 388 с.
7. Сопротивление материалов деформированию и разрушению: справочное пособие: [2 ч.] / В.Г.Трощенко [и др.]; под общ. ред. В.Г.Трощенко. – Киев: Наукова думка, 1994. – 700 с.
8. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П.Тимошенко, Дж.Гудьер. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
9. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности / В.И.Самуль.– М.: Высш. шк., 1982. – 264 с.
10. Варвак П.М. Справочник по теории упругости / П.М.Варвак, А.Ф.Рябов; под ред. П.М. Варвака. – Киев: Будівельник, 1971. – 418 с.
11. Рочняк О.А. Основы теории упругости: учебное пособие для студентов строительных специальностей вузов / О.А.Рочняк, В.Г.Федоров, В.М.Хвисевич. – Брест: Изд-во БГТУ, 2001. – 150 с.
12. Саргсян А.Е. Сопротивление материалов, теория упругости и пластичности. Основы теории с примерами расчетов. - Учебник для вузов. - 2-е изд., испр. и доп. /А.Е. Саргсян. - М.: Высшая школа, 2000. - 286 с: ил.
13. Макаров Е.Г. Сопротивление материалов на базе MathCad / Е.Г. Макаров. - СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 512 с.
14. Старовойтов Э.И. Сопротивление материалов / Э.И.Старовойтов. – Гомель: БелГУТ, 2004. – 376 с.
15. Сборник задач по сопротивлению материалов/ Н.М.Беляев [и др.]; под общ. ред. В.К.Качурина. – М.:Наука, 1972. – 431 с
16. Зиневич С.И. Сборник задач для расчетно-проектировочных работ по дисциплине «Сопротивление материалов» для студентов строительных специальностей / С.И. Зиневич, М.К. Балыкин, И.А. Голубев и [др]. – Минск: БНТУ, 2012. – 108 с.
17. Вербицкая О.Л. Пособие к лабораторным работам по сопротивлению материалов для студентов строительных специальностей (часть 1) / О.Л. Вербицкая, С.И. Зиневич, Л.И. Шевчук – Минск: БНТУ, 2013. – 108 с.
18. Вербицкая О.Л. Пособие к лабораторным работам по сопротивлению материалов для студентов строительных специальностей (часть 2) / О.Л. Вербицкая, С.И. Зиневич, Л.И. Шевчук – Минск: БНТУ, 2016. – 88 с.
19. Сборник задач по сопротивлению материалов с примерами решения /сост.: Е.А.Евсеева, С.И.Зиневич, М.В.Югова. – Минск: БНТУ, 2017. – 274 с.
20. Электронный учебно-методический комплекс для студентов специальности 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены» / Е.А.Евсеева. – Минск: БНТУ, 2013. – 245 с.

2.8.3. Компьютерные программы

1. Макаров Е.Г. Сопротивление материалов на базе Mathcad. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003 – 512 с.
2. Кузьмин Л.Ю., Кузьмин А.Л. Методические указания к выполнению виртуальных работ на ПЭВМ. Для студентов 2 и 3 курсов. (21/1/12). М.: РГОТУПС, 2002.
3. Учебная компьютерная программа TUR по исследованию напряженного состояния в точке.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ

3.1. Растяжение и сжатие прямого стержня

Осевым растяжением-сжатием называется такой вид нагружения, при котором в любом поперечном сечении бруса возникает только продольная сила. Другие силовые факторы отсутствуют.

В простейшем случае растянутый или сжатый стержень — это стержень с силами, приложенными к его концам и направленными вдоль его оси. Передача усилий к стержню может быть осуществлена различными способами, и от этого зависит характер распределения внутренних усилий в области, близкой к нагружению стержня внешними силами.

3.1.1. Внутренние усилия

При действии на стержень внешних нагрузок, равнодействующая которых направлена вдоль продольной оси, в поперечных сечениях возникает только один силовой фактор — продольная сила.

Эта сила называется продольной или нормальной, поскольку она перпендикулярна (нормальна) поперечному сечению. Такие нагрузки вызывают в стержнях деформации растяжения и сжатия.

Брус с прямолинейной осью, работающие на растяжение или сжатие называются стержнями. Стержни конструктивно могут являться стойками, колоннами, поясами ферм. Продольная сила N считается положительной, если она вызывает растяжение, т. е. направлена от сечения, и отрицательной, если она вызывает сжатие, т. е. направлена к сечению.

Продольную силу определяют методом сечений.

Брус мысленно рассекают плоскостью, перпендикулярной к его оси, и условно отбрасывают одну из образовавшихся частей, а ее действие на оставшуюся часть заменяют неизвестной силой N . После этого составляют единственное уравнение равновесия оставшейся части $\sum Z = 0$, из которого и определяют значение N .

$$\sum Z = 0, \text{ откуда } -F + N = 0,$$
$$N = F(\text{растяжение})$$

3.1.2. Напряжения в поперечных сечениях бруса

При растяжении (сжатии) бруса в его поперечных сечениях возникают только нормальные напряжения.

Напряжение – это интенсивность распределения внутренних усилий по сечению.

В сечениях, удаленных от зоны приложения внешней нагрузки справедлива гипотеза плоских сечений. Сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации. Отсюда следует, что в этих сечениях нормальные напряжения распределены равномерно и определяются по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A}, \text{ Па} \quad (1)$$

где N – продольная сила (Н), A – площадь поперечного сечения (м^2).

Нормальные напряжения σ при сжатии определяются так же, как и при растяжении, но считаются отрицательными.

В тех случаях, когда нормальные напряжения в различных поперечных сечениях бруса неодинаковы, целесообразно показывать закон их изменения по длине бруса в виде графика – эпюры нормальных напряжений.

3.1.3. Деформации и перемещения при растяжении и сжатии

При растяжении стержня его длина увеличивается, а размеры поперечного сечения уменьшаются, а при сжатии – наоборот.

Изменение длины стержня $\Delta l = l - l_0$ называют линейной продольной деформацией (абсолютным удлинением); изменение размеров поперечного сечения $\Delta b = b - b_0$ – линейной поперечной деформацией.

Интенсивность деформирования оценивают деформациями, приходящимися на единицу длины (размер сечения) стержня: относительной продольной ε и относительной поперечной ε' :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}; \varepsilon' = \frac{\Delta b}{b_0} \quad (2)$$

Если представить на левом торце идеальные случаи отсутствия закрепления точек от перемещений перпендикулярных оси стержня.

При растяжении продольную деформацию (удлинение) считают положительной, поперечную (сужение сечения) – отрицательной. Экспериментально установлено, что между относительными поперечной и продольной деформациями существует зависимость

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon; \mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| \quad (3)$$

Здесь μ – коэффициент поперечной деформации, или коэффициент Пуассона.

В пределах упругого деформирования коэффициент Пуассона для каждого материала имеет постоянное значение (табл. 3.1). Значения коэффициента Пуассона находятся в пределах от 0 (пробка) примерно до 0,5 (каучук).

Экспериментально установлено, что в пределах упругого деформирования между нормальным напряжением и относительной деформацией существует прямая пропорциональная зависимость

$$\sigma = E\varepsilon \quad (4)$$

Эта зависимость называется законом Гука.

Здесь E – коэффициент пропорциональности, также называемый модулем продольной упругости или модулем Юнга.

Модуль упругости первого рода (модуль Юнга) E , постоянный для каждого материала (см. табл. 3.1). Модуль упругости имеет размерность напряжения. На практике удобно использовать единицы, кратные паскалю: мегапаскаль (1 МПа = 10^6 Па) и гигапаскаль (1 ГПа = 10^9 Па).

Таблица 3.1.

Значения модуля упругости и коэффициента Пуассона для некоторых конструкционных материалов

Материал	$E, 10^{11}, \text{Па}$	μ
Сталь	1,90 ... 2,15	0,25 ... 0,33
Чугун	0,75 ... 1,60	0,23 ... 0,27
Медь техническая	1,10 ... 1,30	0,31 ... 0,34
Бронза	0,80... 1,20	0,32 ... 0,35
Алюминиевые сплавы	0,68 ... 0,75	0,32 ... 0,36
Дерево (вдоль волокон)	0,68 ... 0,75	----
Резина	0,00008... 0,47	0,47

Расчет бруса, работающего на растяжение и сжатие, рассмотрим в следующем примере.

Пример 1.

Ступенчатый стержень находится под действием внешних сил F (рис.1). Материал стержня – сталь с модулем продольной упругости $E = 200$ ГПа.

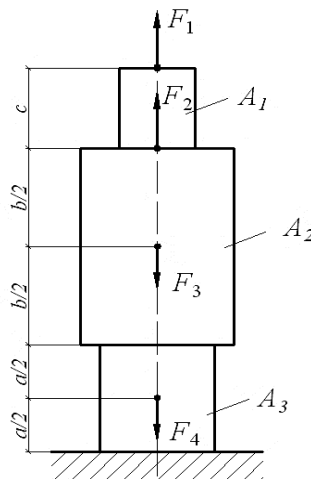
Требуется: построить эпюры продольных сил, напряжений и перемещений. Собственный вес стержня не учитывать.

Решение.

Для определения внутренних усилий разбиваем стержень на участки. Границами участков являются точки продольной оси, соответствующие изменению площади поперечного сечения и местам приложения сосредоточенных сил. Определяем, что стержень необходимо разбить на пять участков (рис.2).

На участке 1-2 проведем сечение I-I. Отбросим нижнюю часть стержня и её действие заменим продольной силой N_{12} . Направляем

продольную силу от сечения в сторону отброшенной части, тем самым предполагаем, что участок растягивается.



$F_1 = 60 \text{ кН},$
 $F_2 = 20 \text{ кН},$
 $F_3 = 100 \text{ кН},$
 $F_4 = 30 \text{ кН},$
 $A_1 = 6 \text{ см}^2,$
 $A_2 = 12 \text{ см}^2,$
 $A_3 = 10 \text{ см}^2,$
 $a = 80 \text{ см},$
 $b = 100 \text{ см},$
 $c = 100 \text{ см}.$

Рис. 1 – Схема стержня

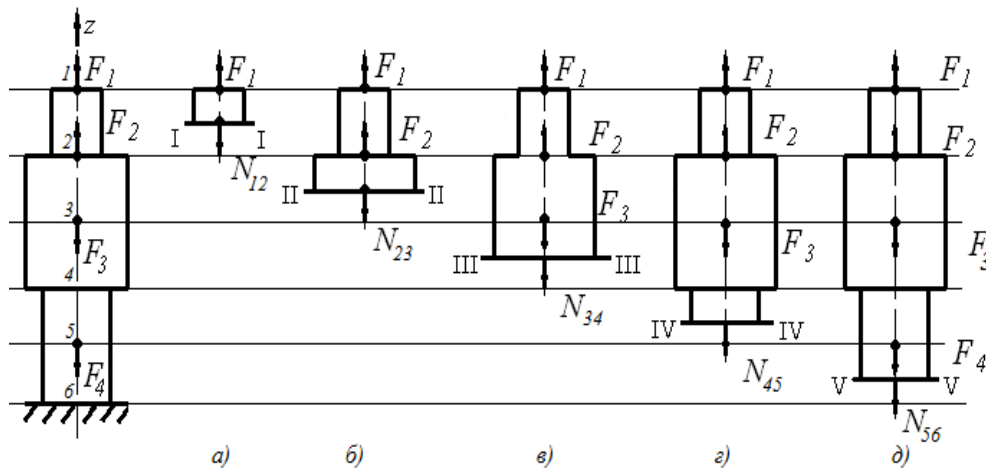


Рис. 2 – Схема расчета стержня

Запишем уравнение равновесия, проецируя все силы на продольную ось стержня:

$$\sum Z = F_1 - N_{12}, \text{ откуда}$$

$$N_{12} = F_1 = 60 \text{ кН}.$$

На участке 1-2 нормальная сила N_{12} постоянна по величине.

Проведем сечение II-II (рис. 2, б) и, отбрасывая нижнюю часть стержня, заменяем её действие продольной силой N_{23} . Проецируем все силы на ось стержня:

$$\sum Z = F_1 + F_2 - N_{23} = 0, \text{ откуда}$$

$$N_{23} = F_1 + F_2 = 60 + 20 = 80 \text{ кН}.$$

Аналогично находим продольную силу в сечении III-III (рис. 2, в):

$$\sum Z = F_1 + F_2 - F_3 - N_{34} = 0, \text{ откуда}$$

$$N_{34} = F_1 + F_2 - F_3 = 60 + 20 - 100 = -20 \text{ кН}.$$

В сечении IV-IV (рис. 2, г):

$$\sum Z = F_1 + F_2 - F_3 - N_{45} = 0, \text{ откуда}$$

$$N_{45} = F_1 + F_2 - F_3 = 60 + 20 - 100 = -20 \text{ кН}.$$

И в сечении V-V (рис. 2, д):

$$\sum Z = F_1 + F_2 - F_3 - F_4 - N_{56} = 0, \text{ откуда}$$

$$N_{56} = F_1 + F_2 - F_3 - F_4 = 60 + 20 - 100 - 30 = -50 \text{ кН.}$$

Откладывая в масштабе значения продольных сил N_{12} , N_{23} , N_{34} , N_{45} , N_{56} в пределах соответствующих участков, получаем эпюру продольных сил (рис. 3,а).

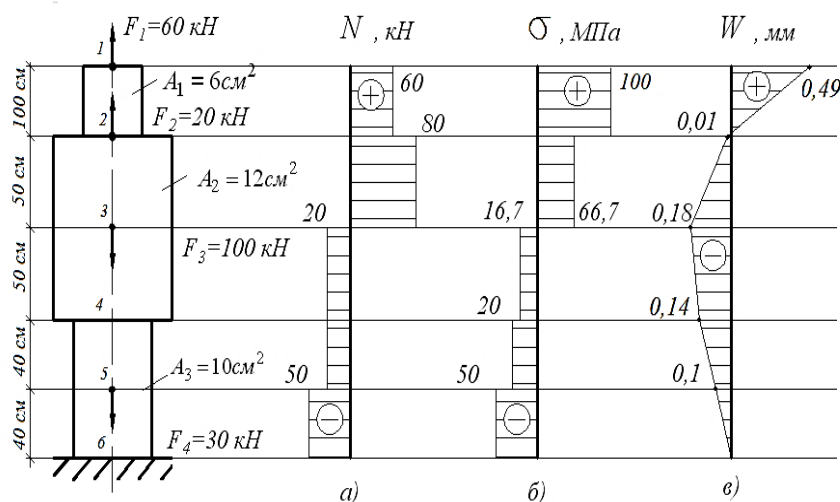


Рис. 3 – Эпюры продольных сил, напряжений и перемещений

Знак «плюс» показывает, что в пределах данного участка происходит растяжение, а «минус» – сжатие.

Для построения эпюры нормальных напряжений воспользуемся формулой

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Определим напряжение на каждом участке:

$$\sigma_{12} = \frac{N_{12}}{A_1} = \frac{60 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = 100 \cdot 10^6 \text{ Па} = 100 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{23} = \frac{N_{23}}{A_2} = \frac{80 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^{-4}} = 66,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 66,7 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{34} = \frac{N_{34}}{A_2} = -\frac{20 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^{-4}} = -16,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = -16,7 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{45} = \frac{N_{45}}{A_3} = -\frac{20 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = -20 \cdot 10^6 \text{ Па} = -20 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{56} = \frac{N_{56}}{A_3} = -\frac{50 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = -50 \cdot 10^6 \text{ Па} = -50 \text{ МПа}.$$

В масштабе откладываем значения напряжений и определяем, что максимальное напряжение возникает на участке 1-2 (рис. 3,б).

Определим изменение длин каждого из участков по формуле

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{\sigma l}{E}.$$

$$\Delta l_{56} = \frac{\sigma_{56} l_{56}}{E} = -\frac{50 \cdot 10^6 \cdot 0,4}{200 \cdot 10^9} = -0,1 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,1 \text{ мм},$$

$$\Delta l_{45} = \frac{\sigma_{45} l_{45}}{E} = -\frac{20 \cdot 10^6 \cdot 0,4}{200 \cdot 10^9} = -0,04 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,04 \text{ мм},$$

$$\Delta l_{34} = \frac{\sigma_{34} l_{34}}{E} = -\frac{16,7 \cdot 10^6 \cdot 0,5}{200 \cdot 10^9} = -0,04 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,04 \text{ мм},$$

$$\Delta l_{23} = \frac{\sigma_{23} l_{23}}{E} = \frac{66,7 \cdot 10^6 \cdot 0,5}{200 \cdot 10^9} = 0,17 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,17 \text{ мм},$$

$$\Delta l_{12} = \frac{\sigma_{12} l_{12}}{E} = \frac{100 \cdot 10^6 \cdot 1,0}{200 \cdot 10^9} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,5 \text{ мм}.$$

Построим эпюру перемещений. Расчёт начинаем с верхнего сечения, так как перемещение в заделке отсутствует:

$$W_6 = 0,$$

$$W_5 = W_6 + \Delta l_{56} = -0,1 \text{ мм},$$

$$W_4 = W_5 + \Delta l_{45} = -0,1 - 0,04 = -0,14 \text{ мм},$$

$$W_3 = W_4 + \Delta l_{34} = -0,14 - 0,04 = -0,18 \text{ мм},$$

$$W_2 = W_3 + \Delta l_{23} = -0,18 + 0,17 = -0,01 \text{ мм},$$

$$W_1 = W_2 + \Delta l_{12} = -0,01 + 0,5 = 0,49 \text{ мм}.$$

В масштабе откладываем значение перемещений (рис. 3,в).

Пример 2.

Конструкция, состоящая из элементов большой жёсткости и двух стальных стержней, загружена согласно схеме (рис. 4). Допускаемое напряжение материала $[\sigma] = 210 \text{ МПа}$, модуль продольной упругости $E = 210 \text{ ГПа}$.

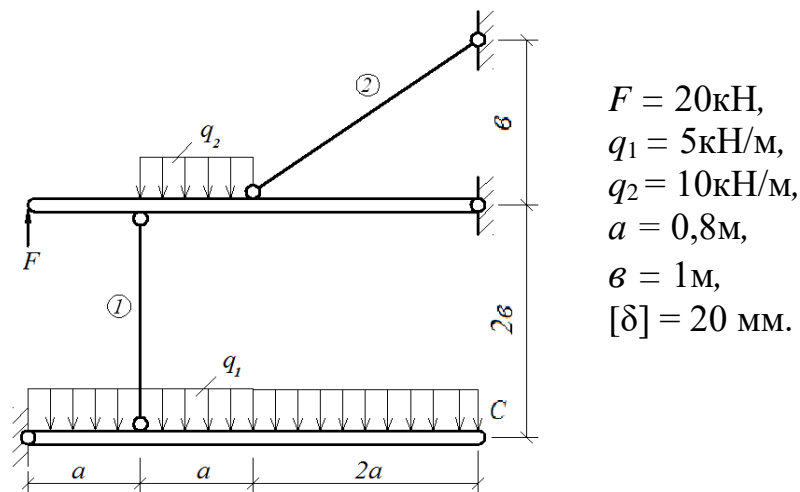


Рис. 4 – Схема стержневой системы

Требуется: подобрать диаметр стержней, округлив их до большего значения с шагом 0,5 см, и выполнить проверочный расчёт жёсткости, если перемещение точки C не должно превышать 20 мм.

Решение.

Для определения усилий в стержнях мысленно разделим стержневую систему на две составляющих. В первую очередь рассмотрим жёсткий элемент I (рис. 5), так как при рассечении стержня I он теряет первоначальную форму

равновесия. Приложим к стержню l неизвестную продольную силу N_1 , направим ее от сечения, предположив, что стержень растягивается, и определим ее значение.

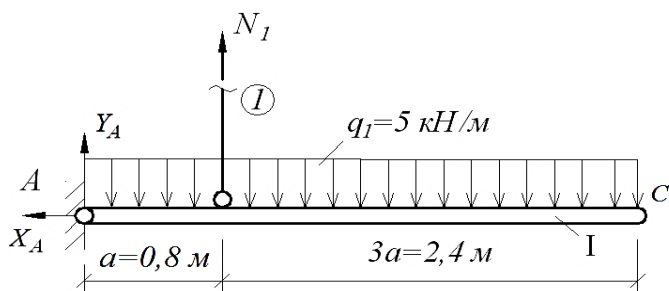


Рис. 5 – Схема жесткого элемента I

Составим уравнение равновесия:

$$\begin{aligned}\sum M_A = 0; & q_1 \cdot 4a \cdot 2a - N_1 \cdot a = 0, \\ 5 \cdot 4 \cdot 0,8 \cdot 2 \cdot 0,8 - N_1 \cdot 0,8 &= 0, \\ N_1 = \frac{25,6}{0,8} &= 32 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Знак «плюс» свидетельствует о том, что стержень растягивается.

Определим опорные реакции X_A и Y_A , составив уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum X = 0; & X_A = 0, \\ \sum Y = 0; & Y_A + N_1 - q_1 \cdot 4a = 0 \quad Y_A + N_1 - q_1 \cdot 4a = 0, \\ Y_A = q_1 \cdot 4a - N_1 &= 5 \cdot 4 \cdot 0,8 - 32 = -16 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Знак «минус» показывает, что направление реакции Y_A необходимо заменить на противоположное.

Рассмотрим жесткий элемент II (рис. 6), приложив к нему растягивающую продольную силу N_1 . Рассечем стержень 2, приложив к нему растягивающее усилие N_2 .

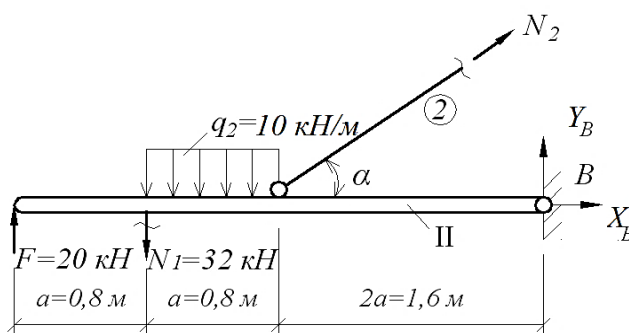


Рис. 6 – Схема жесткого элемента II

Составим уравнение равновесия:

$$\begin{aligned}\sum M_B = 0; & F \cdot 4a - N_1 \cdot 3a - q_2 \cdot a \cdot 2,5a + N_2 \sin \alpha \cdot 2a = 0, \\ 20 \cdot 4 \cdot 0,8 - 32 \cdot 3 \cdot 0,8 - 10 \cdot 0,8 \cdot 2,5 \cdot 0,8 + N_2 \sin \alpha \cdot 2 \cdot 0,8 &= 0, \\ N_2 \sin \alpha \cdot 1,6 &= 28,8.\end{aligned}$$

Определим $\sin \alpha$.

Длина стержня l : $l_1 = 2b = 2 \text{ м}$.

Длина стержня 2: $l_2 = \sqrt{b^2 + (2a)^2} = \sqrt{1^2 + 1,6^2} = 1,89$ м.

$$\sin \alpha = \frac{b}{l_2} = \frac{1}{1,89} = 0,529.$$

Тогда $N_2 \cdot 0,529 \cdot 1,6 = 28,8$, $N_2 = \frac{28,8}{0,529 \cdot 1,6} = 34,03$ кН.

Определим опорные реакции Y_B и X_B , составив уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum Y &= 0; F - N_1 - q_2 \cdot a + N_2 \cdot \sin \alpha + Y_B = 0, \\ Y_B &= -20 + 32 + 10 \cdot 0,8 - 34,03 \cdot 0,529 = 1,99 \text{ кН}, \\ \sum X &= 0; X_B + N_2 \cdot \cos \alpha = 0; X_B = -N_2 \cdot \cos \alpha, \\ \cos \alpha &= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,529^2} = 0,849, \sqrt{1 - 0,529^2} = 0,847, \\ X_B &= -34,03 \cdot 0,849 = -28,89 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Знак «минус» свидетельствует о том, что направление реакции X_B необходимо заменить на противоположное.

Подберём диаметр сечения для стержней по допускаемому напряжению $[\sigma]$:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma] \Rightarrow A \geq \frac{N}{[\sigma]}.$$

Для первого стержня:

$$A_1 = \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{32 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 1,524 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 1,524 \text{ см}^2,$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}}, d_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot 1,524}{3,14}} = 1,393 \text{ см} \approx 1,5 \text{ см}, \text{ тогда}$$

$$A_1 = \frac{3,14 \cdot 1,5^2}{4} = 1,77 \text{ см}^2.$$

Для второго стержня:

$$A_2 = \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{34,03 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 1,62 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 1,62 \text{ см}^2,$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot 1,62}{3,14}} = 1,44 \text{ см} \approx 1,5 \text{ см},$$

тогда

$$A_2 = 1,77 \text{ см}^2.$$

Для проведения расчёта на жёсткость, определим удлинение стержней 1 и 2:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{32 \cdot 10^3 \cdot 2}{210 \cdot 10^9 \cdot 1,77 \cdot 10^{-4}} = 1,72 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,72 \text{ мм},$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{34,03 \cdot 10^3 \cdot 1,89}{210 \cdot 10^9 \cdot 1,77 \cdot 10^{-4}} = 1,73 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,73 \text{ мм}.$$

Составим схему перемещений элементов стержневой системы, предположив, что жёсткие брусья I и II будут поворачиваться относительно своих опор A и B, оставаясь прямыми (рис. 7).

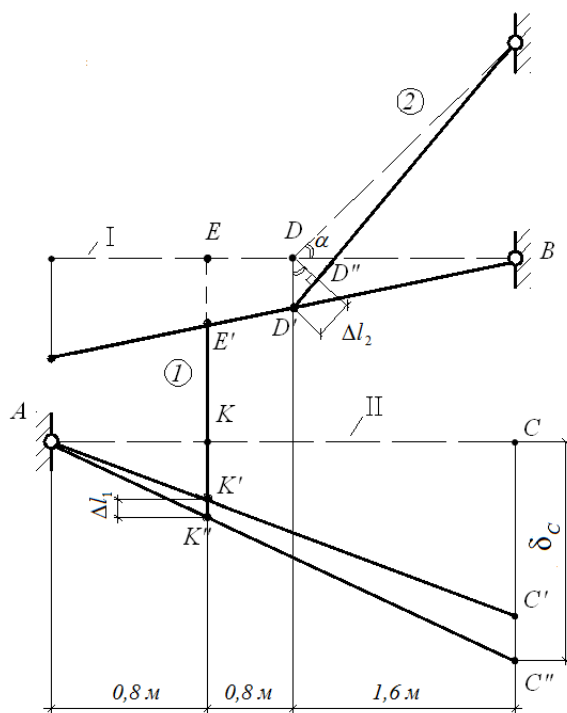


Рис. 7 – Схема перемещений стержневой системы

Из-за малости перемещений будем полагать, что точки D , E , K и C переместятся соответственно в точки D' , E' , K' и C' , т.е. перемещение точек жесткого бруса будет происходить вертикально.

Определим перемещение точки D :

$$D'D'' = \Delta l_2,$$

$$DD' = \frac{D'D''}{\sin \alpha} = \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha} = \frac{1,73}{0,529} = 3,27 \text{ мм}.$$

Из подобия треугольников BEE' и BDD' определим перемещение точки E :

$$\frac{EE'}{BE} = \frac{DD'}{BD},$$

$$EE' = \frac{BE \cdot DD'}{BD} = \frac{2,4 \cdot 3,27 \cdot 10^{-3}}{1,6} = 4,91 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 4,91 \text{ мм}, \quad KK'' = KK' + K'K'',$$

$$KK' = EE' = 4,91 \text{ мм},$$

$$K'K'' = \Delta l_1 = 1,72 \text{ мм},$$

$$KK'' = 4,91 + 1,72 = 6,63 \text{ мм}.$$

Из подобия треугольников ACC'' и AKK'' определим перемещение точки C :

$$\frac{CC''}{AC} = \frac{KK''}{AK},$$

$$CC'' = \frac{AC \cdot KK''}{AK} = \frac{3,2 \cdot 6,63 \cdot 10^{-3}}{0,8} = 26,52 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 26,52 \text{ мм},$$

$$\delta_c = CC'' = 26,52 \text{ мм} > [\delta] = 20 \text{ мм}.$$

Жёсткость конструкции не обеспечена.

Пример 3.

Конструкция, состоящая из элементов большой жёсткости и двух стальных стержней, нагружена согласно схеме (рис.8). Допускаемое напряжение $[\sigma] = 210 \text{ МПа}$, модуль продольной упругости $E = 210 \text{ ГПа}$.

Требуется: подобрать диаметр стержней, округлив их до большего значения с шагом 0,5 см, и выполнить проверочный расчёт жёсткости, если перемещение точки C не должно превышать 20 мм.

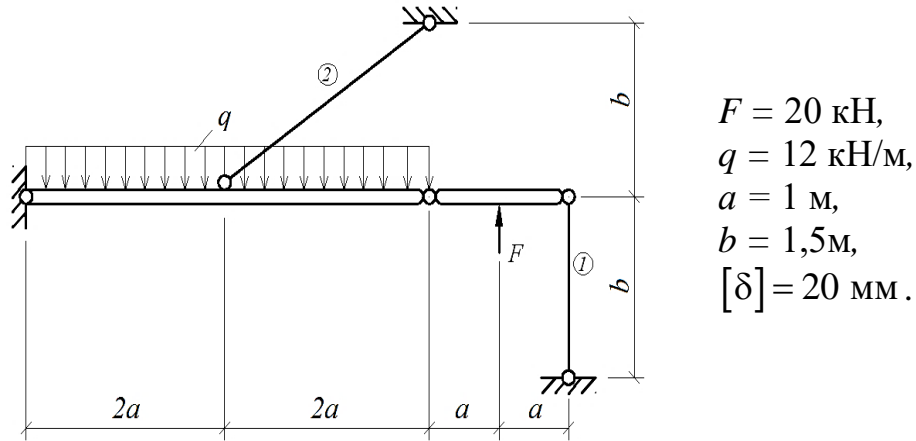


Рис. 8 – Схема стержневой системы

Решение.

Определим усилия в стержнях, мысленно разделив стержневую систему на две составляющих. Рассмотрим жёсткий элемент I (рис.9).

Приложим к стержню I неизвестную растягивающую продольную силу N_1 и определим ее значение, составив уравнение равновесия:

$$\sum M_c = 0; N_1 \cdot 2a - F \cdot a = 0, N_1 \cdot 2a = F \cdot a,$$

$$N_1 = \frac{20 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 10 \text{ кН}.$$

Определим реакцию в шарнире Y_c :

$$\sum Y = 0; F - Y_c - N_1 = 0,$$

$$Y_c = 20 - 10 = 10 \text{ кН}.$$

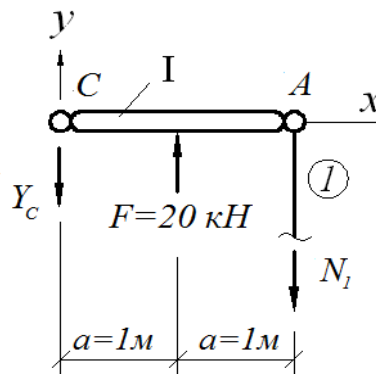


Рис. 9 – Схема жесткого элемента I

Рассмотрим жёсткий элемент II (рис.10), приложив к нему реакцию Y_C , взятую с обратным знаком.

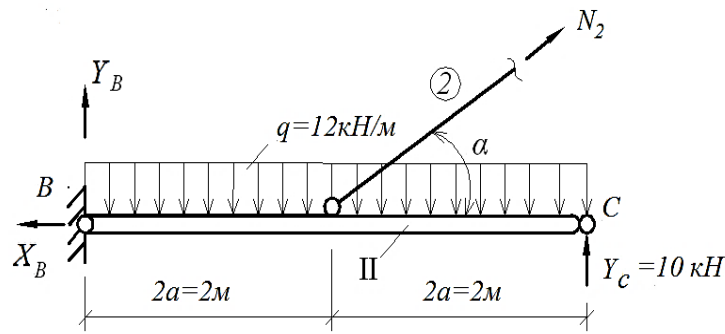


Рис. 10 – Схема жесткого элемента II

Рассекаем стержень 2 и прикладываем к нему растягивающее усилие N_2 . Составим уравнение равновесия:

$$\sum M_B = 0; q \cdot 4a \cdot 2a - N_2 \cdot \sin \alpha \cdot 2a - Y_C \cdot 4a = 0,$$

$$N_2 \sin \alpha = \frac{q \cdot 4a \cdot 2a - Y_C \cdot 4a}{2a} = \frac{12 \cdot 4 \cdot 2 - 10 \cdot 4}{2} = 28 \text{ кН},$$

$$\sin \alpha = \frac{b}{l_2} = \frac{1,5}{2,5} = 0,6,$$

$$l_2 = \sqrt{b^2 + (2a)^2} = \sqrt{1,5^2 + 2^2} = 2,5 \text{ м},$$

$$l_2 = \sqrt{b^2 + (2a)^2} = \sqrt{1,5^2 + 2^2} = 2,5 \text{ м. тогда } N_2 = \frac{28}{0,6} = 46,67 \text{ кН}.$$

Усилия N_1 и N_2 получились положительными, что свидетельствует о том, что оба стержня растягиваются.

Подберём диаметр сечения для стержней по допускаемому напряжению $[\sigma]$:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma] \Rightarrow A \geq \frac{N}{[\sigma]}.$$

Для первого стержня:

$$A_1 = \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{10 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,476 \cdot 10^{-4} = 0,476 \text{ см}^2,$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}},$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,476}{3,14}} = 0,78 \text{ см} \approx 1,0 \text{ см},$$

тогда

$$A_1 = \frac{3,14 \cdot 1,0^2}{4} = 0,79 \text{ см}^2.$$

Для второго стержня:

$$A_2 = \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{46,67 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 2,22 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 2,22 \text{ см}^2,$$

3.1.4. Статически неопределимые системы при растяжении и сжатии

Для решения задач сопротивления материалов необходимо знать все внешние силы, действующие на конструкцию, включая реакции наложенных на нее связей. Для определения реакций в связях тела, нагруженного плоской системой сил, достаточно трёх уравнений равновесия.

Системы, для которых реакции связей и внутренние силовые факторы не могут быть определены только с помощью уравнений статистики, называются статически неопределимыми.

Для решения таких задач помимо уравнений равновесия составляют уравнения перемещений или уравнения совместности деформаций.

Эти уравнения составляют, определяя перемещения отдельных элементов системы и устанавливая связь между ними. Число таких уравнений равно степени статической неопределимости системы.

Степень статической неопределимости системы равна разности между числом неизвестных сил и уравнений статики, которые можно составить для данной системы.

$$S = \sum R - n,$$

где S – степень статической неопределимости системы;

R – число неизвестных реакций,

n – число независимых уравнений статики.

Расчет статически неопределимых систем производят по следующему алгоритму:

1. Статическая сторона задачи. Отсекаем все связи, заменяем их действия неизвестными усилиями. И для оставшейся части записываем уравнения равновесия. Таким образом подсчитываем степень статической неопределимости и выявляем так называемые «лишние» неизвестные.

2. Геометрическая сторона задачи. Рассматривая систему в деформированном состоянии, устанавливают связь между перемещениями точек ее элементов. Полученные зависимости называются уравнениями совместности перемещений. Их количество должно быть равно числу лишних неизвестных.

3. Физическая сторона задачи. На основании закона Гука выражают удлинения (укорочения) элементов системы, входящие в уравнения перемещений, через усилия.

4. Решая совместно статические и физические уравнения, находят неизвестные усилия.

Пример 4.

Статически неопределимый ступенчатый стержень находится под действием внешних сил F (рис. 12). Материал стержня – сталь с модулем продольной упругости $E = 200$ МПа .

Требуется: построить эпюры продольных сил, напряжений и перемещений. Собственный вес стержня не учитывать.

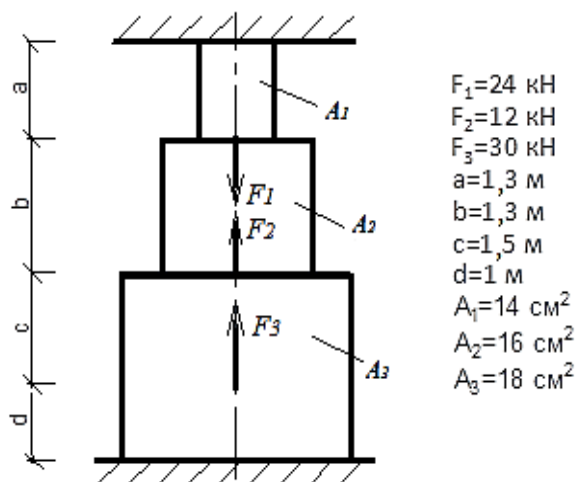


Рис. 12 – Схема стержня

Решение.

Составим уравнение равновесия стержня:

$$\sum Z = 0; \sum Z = R_B - F_1 + F_2 + F_3 - R_A = 0.$$

Имеем уравнение с двумя неизвестными. Стержень является статически неопределимым. Для его расчета необходимо составить основную систему (рис. 13,а). Мысленно избавляемся от одной из связей (R_B) и составляем уравнение перемещений для точки В, приравнявая его к нулю:

$$\sum W = \frac{R_B \cdot a}{E \cdot A_1} + \frac{R_B \cdot b}{E \cdot A_2} + \frac{R_B \cdot (c+d)}{E \cdot A_3} - \frac{F_1 \cdot b}{E \cdot A_2} - \frac{F_1 \cdot (c+d)}{E \cdot A_3} + \frac{F_2 \cdot (c+d)}{E \cdot A_3} + \frac{F_3 \cdot d}{E \cdot A_3} = 0,$$

$$\sum W = \frac{R_B \cdot 1,3}{E \cdot 14 \cdot 10^{-4}} + \frac{R_B \cdot 1,3}{E \cdot 16 \cdot 10^{-4}} + \frac{R_B \cdot 2,5}{E \cdot 18 \cdot 10^{-4}} - \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 1,3}{E \cdot 16 \cdot 10^{-4}} - \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 2,5}{E \cdot 18 \cdot 10^{-4}} +$$

$$+ \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 2,5}{E \cdot 18 \cdot 10^{-4}} + \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 1}{E \cdot 18 \cdot 10^{-4}} = 0$$

Решая уравнение, получим $R_B = 6,23 \text{ кН}$. Из уравнения равновесия определим:

$$R_B - 24 + 12 + 30 - R_A; R_A = 18 + 6,23 = 24,23 \text{ кН}.$$

Построим эпюру продольных сил (рис.13, б)

$$N_{12} = R_B = 6,23 \text{ кН}; N_{23} = N_{12} - F_1 = 6,23 - 24 = -17,77 \text{ кН};$$

$$N_{34} = N_{23} + F_2 = -17,77 + 12 = -5,77 \text{ кН}; N_{45} = N_{34} + F_3 = -5,77 + 30 = 24,23 \text{ кН}.$$

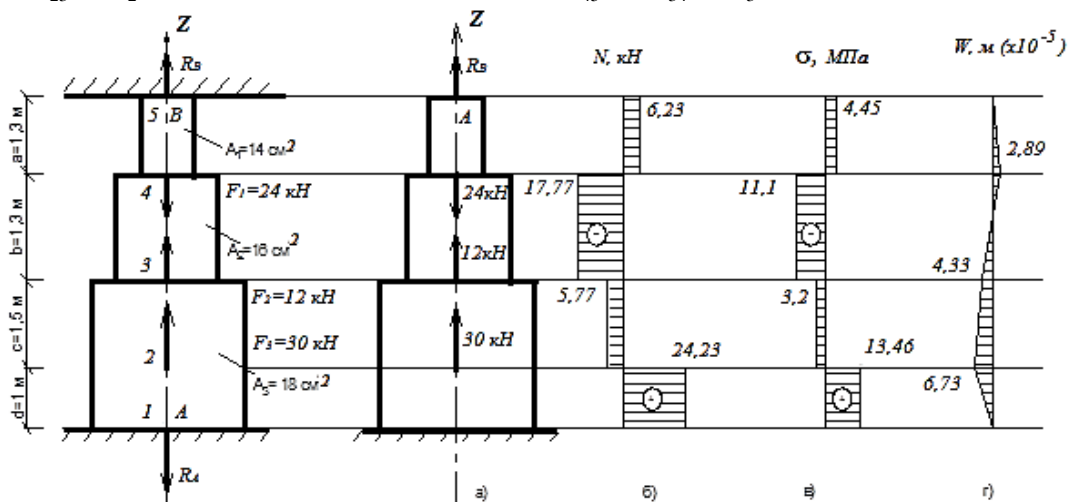


Рис. 13 – Основная система, эпюры продольных сил, напряжений и перемещений

Построим эпюру напряжений (рис.13, в):

$$\sigma_{12} = \frac{N_{12}}{A_{12}} = \frac{6,23 \cdot 10^3}{14 \cdot 10^{-4}} = 4,45 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{23} = \frac{N_{23}}{A_{23}} = -\frac{17,77 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^{-4}} = -11,1 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{34} = \frac{N_{34}}{A_{34}} = -\frac{5,77 \cdot 10^3}{18 \cdot 10^{-4}} = -3,2 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{45} = \frac{N_{45}}{A_{45}} = \frac{24,23 \cdot 10^3}{18 \cdot 10^{-4}} = 13,46 \text{ МПа}.$$

Построим эпюру перемещений (рис.13,г):

$$\Delta l_{12} = \frac{\sigma_{12} \cdot l_{12}}{E} = \frac{4,45 \cdot 10^6 \cdot 1,3}{200 \cdot 10^9} = 2,89 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

$$W_2 = \Delta l_{12} = 2,89 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

$$\Delta l_{23} = \frac{\sigma_{23} \cdot l_{23}}{E} = -\frac{11,1 \cdot 10^6 \cdot 1,3}{200 \cdot 10^9} = -7,22 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

$$W_3 = W_2 + \Delta l_{23} = 2,89 \cdot 10^{-5} - 7,22 \cdot 10^{-5} = -4,33 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

$$\Delta l_{34} = \frac{\sigma_{34} \cdot l_{34}}{E} = -\frac{3,2 \cdot 10^6 \cdot 1,5}{200 \cdot 10^9} = -2,4 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

$$W_4 = W_3 + \Delta l_{34} = -4,33 \cdot 10^{-5} - 2,4 \cdot 10^{-5} = -6,73 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

$$\Delta l_{45} = \frac{\sigma_{45} \cdot l_{45}}{E} = \frac{13,46 \cdot 10^6 \cdot 1}{200 \cdot 10^9} = 6,73 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

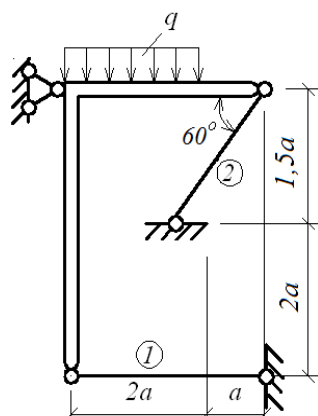
$$W_5 = W_4 + \Delta l_{45} = -6,73 \cdot 10^{-5} + 6,73 \cdot 10^{-5} = 0.$$

Перемещение точек 1 и 5 равны нулю, что соответствует условию задачи.

Пример 5.

Система, состоящая из элементов большой жёсткости и двух стальных стержней, нагружена расчётной нагрузкой (рис.14, 15). Допускаемое напряжение материала стержней $[\sigma] = 210 \text{ МПа}$.

Требуется: проверить прочность стержней.



$$q = 10 \text{ кН/м},$$

$$A_1 = 5 \text{ см}^2,$$

$$A_2 = 10 \text{ см}^2,$$

$$a = 2 \text{ м}.$$

Рис. 14 – Схема стержневой системы

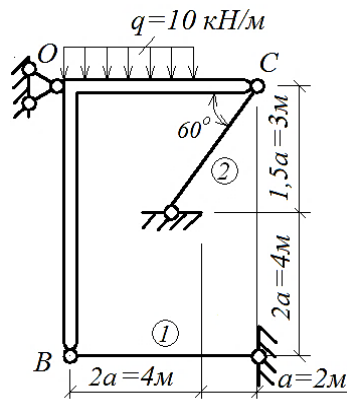


Рис. 15 – Схема стержневой системы с нагрузкой

Решение.

Составим расчётную схему стержневой системы (рис. 16).

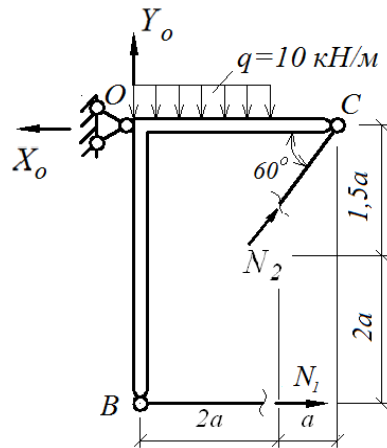


Рис. 16 – Расчётная схема стержневой системы

В схеме N_1 и N_2 – продольные силы, возникающие в стержнях 1 и 2, Y_0 и X_0 – вертикальная и горизонтальная составляющая опорной реакции шарнирно-неподвижной опоры O .

Из направления действия нагрузки предполагаем, что первый стержень растягивается (силу N_1 направляем от сечения), а второй стержень сжимается (силу N_2 направляем к сечению).

Таким образом, имеем четыре неизвестные силы (N_1, N_2, Y_0, X_0) и три уравнения равновесия ($\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum M_i = 0$).

Следовательно, данная система является один раз статически неопределимой и для её решения требуется составить дополнительное уравнение перемещений.

Запишем уравнение равновесия:

$$\begin{aligned} \sum M_i &= -N_2 \sin 60^\circ \cdot 3a + q \cdot 2a \cdot a - N_1 \cdot 3,5a = 0, \\ -N_2 \cdot 0,866 \cdot 6 + 10 \cdot 4 \cdot 2 - N_1 \cdot 3,5 \cdot 2 &= 0, \\ -5,196 \cdot N_2 - 7 \cdot N_1 \cdot 3,5 + 80 &= 0. \end{aligned}$$

Данное уравнение имеет две неизвестные продольные силы.

Для составления дополнительного уравнения рассмотрим схему перемещений стержневой системы (рис.17). Из-за малости деформаций считаем, что при повороте жесткого элемента вокруг неподвижной точки O , все точки его перемещаются линейно по перпендикуляру к линии, соединяющей эту точку с неподвижной.

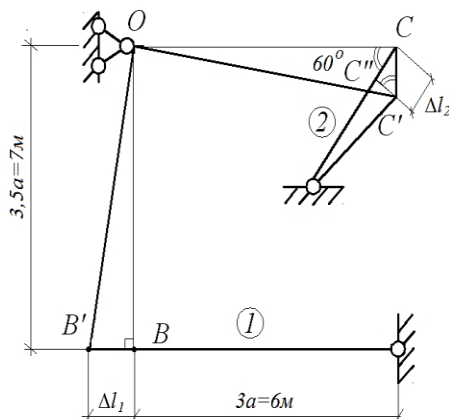


Рис. 17 – Схема перемещений стержневой системы

Из подобия треугольников OCC' и OBB' определим:

$$\frac{BB'}{OB} = \frac{CC'}{OC}, \quad \frac{BB'}{7} = \frac{CC'}{6},$$

$$BB' = \Delta l_1, \quad CC' = \frac{CC''}{\sin 60^\circ} = \frac{\Delta l_2}{\sin 60^\circ},$$

$$\frac{\Delta l_1}{7} = \frac{\Delta l_2}{\sin 60^\circ \cdot 6},$$

$$\frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1 \cdot 7} = \frac{N_2 \cdot l_2}{0,866 \cdot E \cdot A_2 \cdot 6}.$$

Рассчитаем длину стержней:

$$l_1 = 6 \text{ м}, \quad l_2 = \frac{1,5a}{\sin 60^\circ} = \frac{1,5 \cdot 2}{0,866} = 3,46 \text{ м}.$$

Подставляем все известные величины и получаем дополнительное уравнение перемещений:

$$\frac{N_1 \cdot 6}{E \cdot 5 \cdot 7} = \frac{N_2 \cdot 3,46}{0,866 \cdot E \cdot 10 \cdot 6} \Rightarrow N_1 = 0,388 N_2.$$

Решаем совместно уравнение моментов и дополнительное уравнение:

$$\begin{cases} -5,196 \cdot N_2 - 7 \cdot N_1 + 80 = 0 \\ N_1 = 0,388 N_2 \end{cases}$$

$$-5,196 \cdot N_2 - 7 \cdot 0,388 \cdot N_2 + 80 = 0, \quad -7,912 \cdot N_2 = -80,$$

$$N_2 = 10,11 \text{ кН}, \quad N_1 = 0,388 N_2 = 0,388 \cdot 10,11 = 3,92 \text{ кН}.$$

Знак «плюс» указывает на то, что предполагаемый вид деформации стержней подтверждается.

Определим напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{3,92 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-4}} = 7,84 \cdot 10^6 \text{ Па} = 7,84 \text{ МПа} < 210 \text{ МПа} ,$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{10,11 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 10,11 \cdot 10^6 \text{ Па} = 10,11 \text{ МПа} < 210 \text{ МПа} .$$

Прочность стержней обеспечена.

Определим реакции в опоре O :

$$\sum Y = 0; Y_0 - q \cdot 2a + N_2 \sin 60^\circ = 0 ,$$

$$Y_0 = 10 \cdot 4 - 10,11 \cdot 0,866 = 31,24 \text{ кН} ,$$

$$\sum X = 0; -X_0 + N_1 + N_2 \cos 60^\circ = 0 ,$$

$$X_0 = 3,92 + 10,11 \cdot 0,5 = 8,98 \text{ кН} .$$

Пример 6.

Абсолютно жесткая балка шарнирно прикреплена к стене, и подвешена на стальные стержни, имеющие сечение из двух уголков $70 \times 70 \times 5$. Определить допускаемое значение интенсивности распределенной нагрузки $[q]$ из условия прочности, если $[\sigma] = 210 \text{ МПа}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

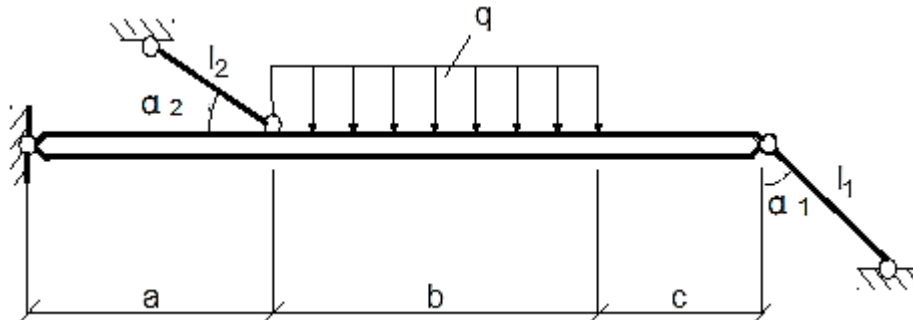


Рис. 18 – Схема стержневой системы

Решение.

Составим расчетную схему:

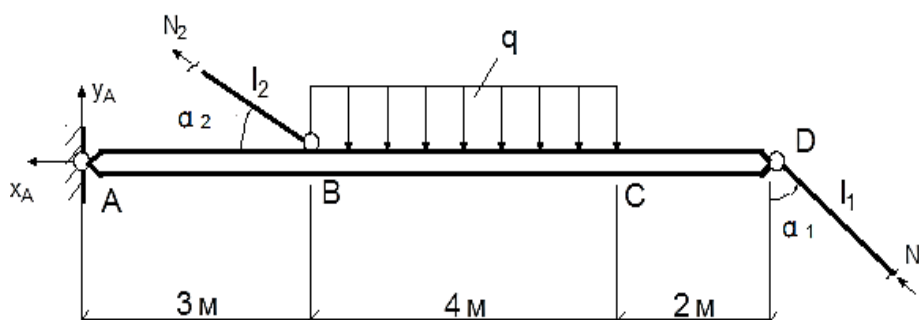


Рис. 19 – Расчетная схема стержневой системы

$$\sum M_A = -N_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot 3 + q \cdot 4 \cdot 5 - N_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot 9 = 0 ,$$

$$2,6N_2 + 7,8N_1 = 20q .$$

Составим схему перемещений:

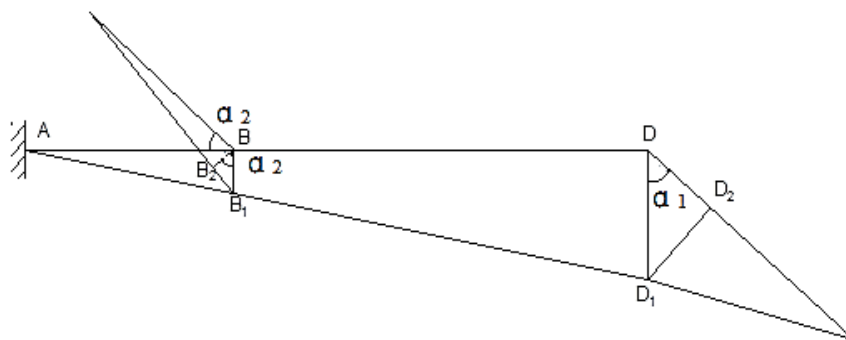


Рис. 20 – Схема перемещений

$$\frac{AB}{BB_1} = \frac{AD}{DD_1}, \quad BB_1 = \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha_2}, \quad DD_1 = \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha_1},$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2},$$

$$A_1 = A_2 = 6,86 \cdot 2 = 13,2 \text{ см}^2 \text{ (площадь двух уголков, Приложение 3)}$$

$$\frac{3 \cdot \sin \alpha_2}{\Delta l_2} = \frac{9 \cdot \cos \alpha_1}{\Delta l_1},$$

$$\frac{3 \cdot \sin \alpha_2 \cdot EA_2}{N_2 l_2} = \frac{9 \cdot \cos \alpha_1 \cdot EA_1}{N_1 l_1},$$

$$4,7N_2 = 11,69N_1,$$

$$N_2 = 2,49N_1.$$

Решаем совместно полученные уравнения:

$$2,6N_2 + 7,8N_1 = 20q,$$

$$N_2 = 2,49N_1,$$

$$14,27N_1 = 20q.$$

Определим N_1 из условия прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma], \quad N = [\sigma]A,$$

$$N_1 = 210 \cdot 10^6 \cdot 13,2 \cdot 10^{-4} = 277,2 \text{ кН},$$

$$N_2 = 2,49N_1 = 14,27 \cdot 277,2 = 690,23 \text{ кН}.$$

Определим допустимое значение нагрузки q по значению N_1 , т.к. $N_1 < N_2$.

$$20q = 14,27N_1 = 14,27 \cdot 277,2 = 3955,64 \text{ кН},$$

$$q = \frac{3955,64}{2} = 197,78 \text{ кН/м},$$

$$[q] \leq 197 \text{ кН/м}.$$

3.2. Геометрические характеристики плоских сечений

В формулах при расчетах стержней на прочность и жесткость используются параметры, зависящие от размеров и формы поперечного сечения стержня. Они называются геометрическими характеристиками. Рассмотрим общий вид поперечного сечения и привяжем его к ортогональной системе координат XU , проходящей через произвольную точку O .

1. Площадь поперечного сечения A , которая измеряется в m^2 и выражается через бесконечно малую частицу площади по формуле

$$A = \int_A dA \quad (5)$$

Площадь – величина положительная.

2. Статический момент площади относительно оси

$$S_x = \int_A y dA; S_y = \int_A x dA \quad (6)$$

Размерность - m^3 .

В отличие от площади статический момент может быть положительным, отрицательным и нулевым в зависимости от ориентации осей относительно сечения.

Точка пересечения двух осей, относительно которых статические моменты равны нулю, называется центром тяжести.

Геометрическое место центров тяжести всех сечений стержня называется осью стержня.

Оси, проходящие через центр тяжести называются центральными осями X_c и Y_c . Относительно них

$$S_x = \int_A y dA = 0; S_y = \int_A x dA = 0 \quad (7)$$

Вычислим статические моменты относительно осей XU , отстоящих от центральных на расстояние $y_{ц.т.}$ и $x_{ц.т.}$. учтем при этом (5) и (6)

$$\begin{aligned} S_x &= \int_A y dA = \int_A (y_{ц.т.} + y) dA = y_{ц.т.} \int_A dA + \int_A y dA = y_{ц.т.} A; \\ S_y &= \int_A x dA = \int_A (x_{ц.т.} + x) dA = x_{ц.т.} \int_A dA + \int_A x dA = x_{ц.т.} A. \end{aligned} \quad (8)$$

Отсюда получим формулы для координат центра тяжести в произвольных осях

$$x_{ц.т.} = \frac{S_y}{A}; y_{ц.т.} = \frac{S_x}{A}. \quad (9)$$

Если $x_{ц.т.}$ и $y_{ц.т.}$ известны, то статические моменты определяются по формулам

$$S_y = Ax_{ц.т.}; S_x = Ay_{ц.т.}. \quad (10)$$

Рассмотрим составное сечение, состоящее из n частей, для которых известны координаты центров тяжести.

Тогда, используя (9), (10) для каждой части:

$$x_{ц.т} = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}; \quad y_{ц.т} = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}. \quad (11)$$

По этим формулам можно определить ц.т. любого сечения и, следовательно, определить положение оси стержня.

3. Моменты инерции

$$J_x = \int_A y^2 dA; \quad J_y = \int_A x^2 dA \text{ – осевые моменты инерции,}$$

$$J_p = \int_A \rho^2 dA \text{ – полярный момент инерции,}$$

$$J_{xy} = \int_A x y dA \text{ – центробежный момент инерции.}$$

Размерность – m^4 .

Между осевыми и полярными моментами инерции существует важная зависимость

$$J_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = J_x + J_y \quad (12)$$

Таким образом, для любой пары осей, проведенной через конкретную точку, сумма осевых моментов инерции есть величина постоянная.

$$J_x + J_y = const. \quad (13)$$

Осевые и полярные моменты инерции – величины существенно положительные, а центробежный – может быть и отрицательным, и нулевым. Величины моментов инерции для конкретных простейших форм вычислены и получены готовые формулы. Для прокатных профилей величины даются в табличной форме в сортаменте.

Рассмотрим, как меняются моменты инерции при параллельном переносе осей координат.

Пусть моменты инерции относительно центральных осей X_c и Y_c известны (по формулам или таблицам). Нужно найти моменты инерции относительно параллельных осей XU , отстоящих от центральных на расстояние a и b .

$$J_x = \int_A y^2 dA = \int_A (y + a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA = J_{x_c} + a^2 A; \quad (14)$$

аналогично,

$$J_y = J_{y_c} + b^2 A;$$

$$J_{xy} = J_{x_c y_c} + abA.$$

4. Главные центральные оси инерции сечения

Через центр тяжести можно провести бесчисленное количество пар осей координат. У каждой пары будут свои значения J_x , J_y , J_{xy} , J_u , J_v , J_{uv} , связанные соотношениями $J_x + J_y = J_u + J_v$.

Для новых осей существуют формулы, зависящие от угла поворота α , которые приведены в учебниках. Среди этих пар существует в общем случае пара

осей относительно которой центробежный момент инерции $J_{uv} (J_{1,2}) = 0$. Такие оси называются главными. Осевые моменты инерции относительно главных осей обладают свойством экстремальности: относительно одной из них момент инерции самый большой, и относительно другой – самый маленький.

Все формулы сопротивления материалов относятся к главным центральным осям инерции сечения.

Если известны моменты инерции относительно центральных осей $J_{x_c}, J_{y_c}, J_{x_c y_c}$ то главные оси и моменты инерции находятся по формулам:

$$J_{\max} = J_{1,2} = \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{x_c} - J_{y_c}}{2}\right)^2 + J_{x_c y_c}^2}; \quad \tan 2\alpha = -\frac{2J_{x_c y_c}}{J_{x_c} - J_{y_c}}. \quad (15)$$

Пример 7.

Заданное сечение (рис.21) состоит из прямоугольного листа и прокатных профилей:

1. Лист 22×2 см,
2. Уголок неравнобокий $125 \times 80 \times 8$,
3. Двутавр №18.

Требуется: вычислить главные центральные моменты инерции, начертить сечение и показать все оси и размеры.

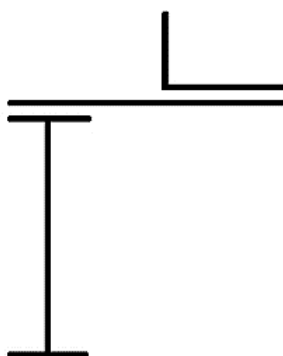
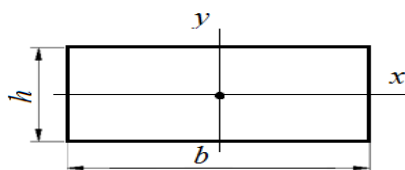


Рис. 21 – Схема сечения

Решение.

Предварительно рассчитаем и выпишем из сортамента (Приложение 1) геометрические характеристики профилей, составляющих сечение.

Геометрические характеристики листа 22×2 см (фигура 1):



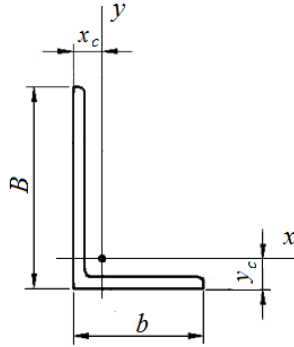
$$b = 22 \text{ см}, \quad h = 2 \text{ см}, \quad A_1 = 22 \cdot 2 = 44 \text{ см}^2,$$

$$J_{x_1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{22 \cdot 2^3}{12} = 14,67 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_1} = \frac{b^3 h}{12} = \frac{22^3 \cdot 2}{12} = 1774,67 \text{ см}^4,$$

$$J_{x_1 y_1} = 0.$$

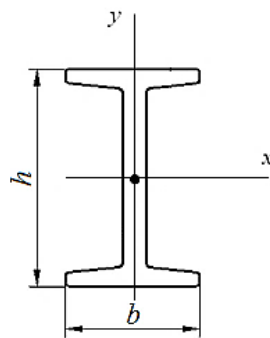
Геометрические характеристики уголка $125 \times 80 \times 8$ (фигура 2):



$$\begin{aligned}
 B &= 125 \text{ мм}, \quad b = 80 \text{ мм}, \\
 A_2 &= 15,98 \text{ см}^2, \\
 J_{x_2} &= 80,95 \text{ см}^4, \quad J_{y_2} = 225 \text{ см}^4, \\
 x_{C_2} &= 4,05 \text{ см}, \quad y_{C_2} = 1,84 \text{ см}, \\
 J_{x_2, y_2} &= 84,1 \text{ см}^4.
 \end{aligned}$$

Уголок в составном сечении повернут на 90° , поэтому моменты инерции из сортамента меняются местами.

Геометрические характеристики двутавра №18 (фигура 3):



$$\begin{aligned}
 h &= 180 \text{ мм}, \quad b = 90 \text{ мм}, \\
 A_3 &= 23,4 \text{ см}^2, \\
 J_{x_3} &= 1290 \text{ см}^4, \\
 J_{y_3} &= 82,6 \text{ см}^4, \\
 J_{x_3, y_3} &= 0.
 \end{aligned}$$

Определим положение центра тяжести сечения, предварительно выбрав вспомогательные оси x_0 и y_0 . Проведем эти оси через центр тяжести листа и рассчитаем расстояние между осями x_0 и y_0 и центральными осями каждого из элементов сечения (рис.22).

$$\begin{aligned}
 x_C &= \frac{S_y}{A_i} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{44 \cdot 0 + 15,98 \cdot 2,55 - 23,4 \cdot 6,5}{44 + 15,98 + 23,4} = -\frac{111,35}{83,38} = -1,33 \text{ см}, \\
 y_C &= \frac{S_x}{A_i} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{44 \cdot 0 + 15,98 \cdot 2,84 - 23,4 \cdot 10}{44 + 15,98 + 23,4} = -\frac{188,62}{83,38} = -2,26 \text{ см}.
 \end{aligned}$$

Через найденный центр тяжести составного сечения проводим центральные оси x_C и y_C .

Рассчитаем расстояния между осями x_C и y_C и центральными осями каждого из элементов сечения.

Расстояния между осями x_i :

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 10 - 7,74 = 2,26 \text{ см}, \\
 a_2 &= 2,26 + 2,84 = 5,1 \text{ см}, \\
 a_3 &= -10 + 2,26 = -7,74 \text{ см}.
 \end{aligned}$$

Расстояния между осями y_i :

$$\begin{aligned}
 b_1 &= 1,33 \text{ см}, \\
 b_2 &= 2,55 + 1,33 = 3,88 \text{ см}, \\
 b_3 &= -6,5 + 1,33 = -5,17 \text{ см}.
 \end{aligned}$$

Определим осевые моменты инерции составного сечения относительно центральных осей:

$$J_{x_c} = \sum (J_{x_i} + a_i^2 A) = J_{x_1} + a_1^2 \cdot A_1 + J_{x_2} + a_2^2 \cdot A_2 + J_{x_3} + a_3^2 \cdot A_3 =$$

$$= 14,67 + 2,26^2 \cdot 44 + 80,95 + 5,1^2 \cdot 15,98 + 1290 + (-7,74)^2 \cdot 23,4 = 3427,83 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_c} = \sum (J_{y_i} + b_i^2 A) = J_{y_1} + b_1^2 \cdot A_1 + J_{y_2} + b_2^2 \cdot A_2 + J_{y_3} + b_3^2 \cdot A_3 =$$

$$= 1774,67 + 1,33^2 \cdot 44 + 225 + 3,88^2 \cdot 15,98 + 82,6 + (-5,17)^2 \cdot 23,4 = 3026,13 \text{ см}^4.$$

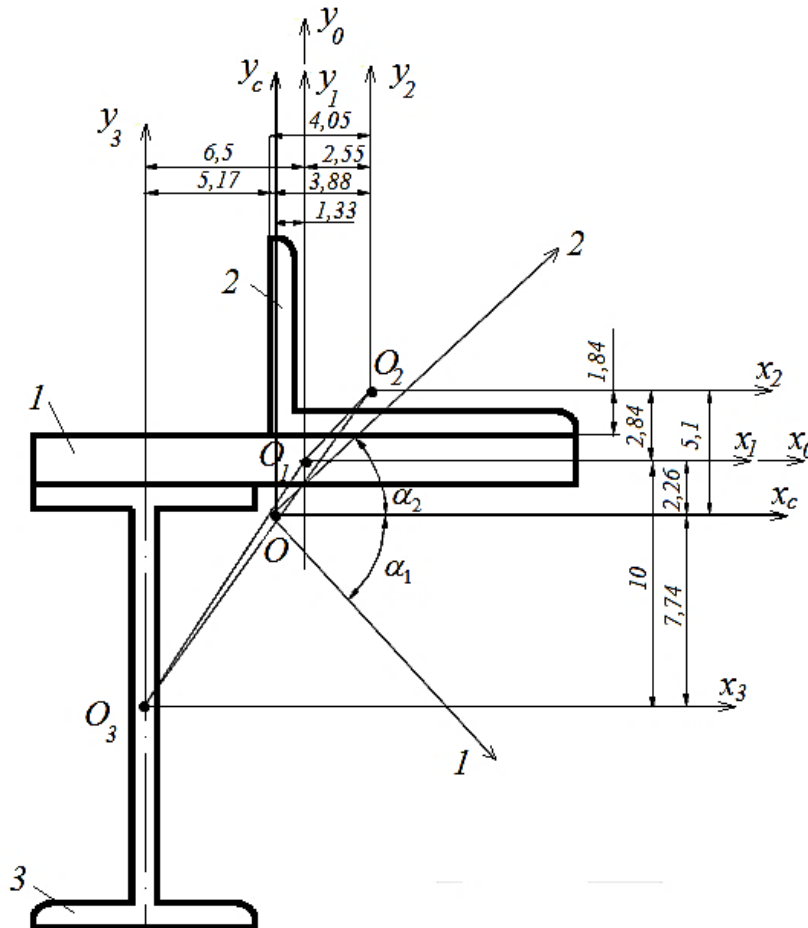


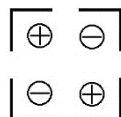
Рис. 22 – Схема составного сечения с положением главных центральных осей (размеры даны в см)

Определим центробежный момент инерции составного сечения:

$$J_{x_c y_c} = \sum (J_{x_i y_i} + a_i b_i A_i) = J_{x_1 y_1} + a_1 b_1 A_1 + J_{x_2 y_2} + a_2 b_2 A_2 + J_{x_3 y_3} + a_3 b_3 A_3 =$$

$$= 0 + 2,26 \cdot 1,33 \cdot 44 - 84,1 + 5,1 \cdot 3,88 \cdot 15,98 + 0 + (-7,74) \cdot (-5,17) \cdot 23,4 = 1300,73 \text{ см}^4.$$

Перед $J_{x_3 y_3}$ ставим знак «минус» в соответствии со следующим правилом знаков при расположении уголка:



Определим значения главных центральных моментов инерции:

$$J_{\frac{\max}{\min}} = J_{1,2} = \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{x_c} - J_{y_c}}{2}\right)^2 + J_{x_c y_c}^2} =$$

$$= \frac{3427,83 + 3026,13}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3427,83 - 3026,13}{2}\right)^2 + 1300,73^2} = 3228,42 \pm 1316,15$$

$$J_{\max} = J_1 = 3228,42 + 1316,15 = 4543,13 \text{ см}^4,$$

$$J_{\min} = J_2 = 3228,42 - 1316,15 = 1910,83 \text{ см}^4.$$

Проверим правильность вычисления:

$$J_{x_c} + J_{y_c} = J_{\max} + J_{\min},$$

$$3427,83 + 3026,13 = 4543,13 + 1910,83.$$

Определим положение главных центральных осей:

$$\tan \alpha_1 = \frac{J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_1} = \frac{1300,73}{3026,13 - 4543,13} = -0,857,$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_2} = \frac{1300,73}{3026,13 - 1910,83} = 1,163,$$

$$\alpha_1 = -40,7^\circ; \quad \alpha_2 = 49,3^\circ; \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| = 90^\circ.$$

Угол α_1 откладывается от оси x_c по ходу часовой стрелки, т.к. он отрицателен, α_2 – против часовой, т.к. он положителен (рис. 22).

3.3. Кручение цилиндрического стержня

Случай нагружения стержня, когда в поперечном сечении возникает только крутящий момент, а продольные и поперечные силы и изгибающие моменты отсутствуют, называется кручением. Стержень, подвергающийся кручению, часто называют валом. Кручению подвергаются элементы сооружений, детали машин, валы станков и двигателей, оси колесных пар локомотивов, дрезин и др. Характер деформации вала, подвергающегося кручению, в большой степени зависит от формы поперечного сечения. Наибольшее распространение в производстве имеют валы с круглым и кольцевым сечением.

3.3.1. Определение крутящих моментов и построение их эпюр

Для расчета реального вала необходимо составить его расчётную схему. Под расчётной схемой конструкции (вала) подразумевается упрощённое изображение самой конструкции и нагрузки, действующей на эту конструкцию. Вал рассматривается в положении равновесия. Условие равновесия вала имеет вид:

$$\sum M_{k_i} = 0. \quad (16)$$

Для определения величины крутящего момента в любом сечении вала используется метод сечений. Мысленно рассечем вал плоскостью, отбросим правую часть и рассмотрим равновесие левой части вала. На эту часть вала действуют внешние моменты и внутренний крутящий момент $M_K(T)$, приложенный в рассматриваемом сечении вала. Если отбросить левую часть вала и рассмотреть равновесие правой части, то на эту часть вала действуют внутренний крутящий момент $M_K(T)$ и внешние моменты.

Для крутящего момента принимается следующее правило знаков: крутящий момент M_K считается положительным, если, при взгляде на рассматриваемое сечение со стороны его внешней нормали, он закручивает вал по ходу часовой стрелки. Условие равновесия любой рассматриваемой части вала имеет вид: $\sum M_{K_i} = 0$, т.е. сумма моментов всех сил, действующих на конкретную часть вала равна нулю.

Для анализа деформированного состояния вала и решения вопроса его прочности необходимо построить эпюру крутящего момента. Эпюра крутящего момента M_K – это графическое изображение закона изменения величины крутящего момента по длине вала в зависимости от положения рассматриваемого сечения.

3.3.2. Определение напряжений и деформаций при кручении вала с круглым поперечным сечением

Для вычисления напряжений в сечении закручиваемого вала и определения деформации его закручивания приняты две гипотезы:

- 1) сечения вала, плоские до закручивания вала, остаются плоскими и во время закручивания;
- 2) радиусы, мысленно проведённые в сечении вала, в процессе кручения не искривляются, а остаются прямыми.

Принятые гипотезы позволяют рассматривать кручение вала круглого сечения как результат сдвигов, вызванных взаимным поворотом поперечных сечений относительно друг друга. А в силу того, что длина вала при кручении его не изменяется (это установлено опытами) в поперечном сечении закручиваемого вала возникают только касательные напряжения, а нормальные напряжения отсутствуют, то есть $\sigma_z = 0$.

Максимальные касательные напряжения определяются следующим образом:

$$\tau_{\max} = \gamma G = G \frac{d\varphi}{dz} r; \quad \tau_\rho = G \frac{d\varphi}{dz} \rho. \quad (17)$$

Касательные напряжения изменяются пропорционально расстоянию ρ от центра сечения вала (от оси стержня, $0 \leq \rho \leq r$) до конкретной точки сечения. Наибольшие касательные напряжения возникают в точках, лежащих на поверхности закручиваемого вала. Следовательно, разрушение вала будет начинаться на поверхности вала.

Величина полного крутящего момента в сечении вала равна:

$$M_K = \int_A \rho \tau_\rho dA. \quad (18)$$

$$M_K = \int_A G \frac{d\varphi}{dz} \rho^2 dA; \quad M_K = G \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 dA;$$

$\int_A \rho^2 dA = J_\rho$ – полярный момент инерции сечения вала,

$$M_K = GJ_\rho \frac{d\varphi}{dz}, \Rightarrow \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_K}{GJ_\rho} \quad (19)$$

$$\tau_\rho = \frac{M_K}{J_\rho} \rho; \quad \tau_{\max} = \frac{M_K}{J_\rho} r; \quad \frac{J_\rho}{r} = W_\rho; \quad \tau_{\max} = \frac{M_K}{W_\rho}. \quad (20)$$

Величина W_ρ является полярным моментом сопротивления круглого сечения. Полярный момент инерции и полярный момент сопротивления круглого сечения равны:

$$J_\rho = \frac{\pi d^4}{32}; \quad W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Для кольцевого сечения с внешним диаметром D и внутренним d :

$$J_\rho = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4); \quad W_\rho = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^3), \quad \text{где } \alpha = \frac{d}{D}.$$

Определим угол закручивания вала.

Воспользуемся вторым выражением из (19) и найдём $d\varphi$:

$$d\varphi = \frac{M_K}{GJ_\rho} dz.$$

После интегрирования получаем угол поворота конечного сечения участка по отношению к начальному сечению того же участка вала

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_K}{GJ_\rho} dz,$$

Если $M_K = const$ и $GJ_\rho = const$, то $\varphi = \frac{M_K l}{GJ_\rho}$. (21)

Величина GJ_ρ называется жесткостью вала при кручении.

Полученные формулы (20) и (21) для определения касательных напряжений и угла поворота при закручивании вала правомочны только для валов с круглым или кольцевым сечениями. Эти формулы используются для решения задач прочности и жёсткости валов.

Условия прочности и жёсткости вала имеют вид соответственно:

$$\tau_{\max} \leq [\tau], \quad \theta \leq [\theta], \quad (22)$$

где $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение, $[\theta]$ – допускаемый угол закручивания в рад/м, которые задаются в ГОСТ;

$\theta = \varphi / l = M_K / GJ_\rho$ – относительный угол закручивания, то есть взаимный поворот двух сечений вала, находящихся друг от друга на расстоянии одного метра.

Используя условия прочности и жёсткости вала, решается задача подбора размеров сечения вала по прочности или по жёсткости.

3.3.3. Подбор диаметра вала круглого сечения по прочности

Запишем условие прочности вала в виде:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_\rho} \leq [\tau], \text{ или } W_\rho \geq \frac{M_K}{[\tau]}, \text{ то есть } d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_K}{\pi[\tau]}}.$$

Для кольцевого сечения

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_K}{\pi[\tau](1-\alpha^3)}}, \text{ где } \alpha = \frac{d}{D}. \quad (23)$$

3.3.4. Подбор диаметра вала по жёсткости

Условие жёсткости вала представим в виде:

$$\theta = \frac{M_K}{GJ_\rho} \leq [\theta] \text{ или } J_\rho \geq \frac{M_K}{G\theta}, \text{ то есть } d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_K}{\pi G[\theta]}}.$$

Для трубчатого сечения

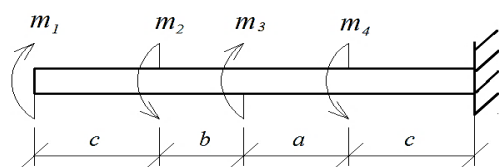
$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32M_K}{\pi G[\theta](1-\alpha^4)}}. \quad (24)$$

Пример 8.

Стальной вал круглого поперечного сечения нагружен скручивающими моментами (рис.23). Допускаемое касательное напряжение $[\tau] = 130$ МПа, модуль сдвига $G = 80$ ГПа.

Требуется:

- 1) построить эпюру крутящих моментов;
- 2) подобрать диаметр вала, округлив его до большего размера с шагом 0,5 см;
- 3) построить эпюру напряжений;
- 4) построить эпюру углов закручивания;
- 5) построить эпюру относительных углов закручивания.



$$\begin{aligned} a &= 1 \text{ м}, \quad b = 0,8 \text{ м}, \quad c = 1,2 \text{ м}, \\ m_1 &= 12 \text{ кНм}, \quad m_2 = 21 \text{ кНм}, \\ m_3 &= 8 \text{ кНм}, \quad m_4 = 16 \text{ кНм}, \\ [\theta] &= 2^\circ / \text{м}. \end{aligned}$$

Рис. 23 – Схема вала

Решение.

Построим эпюру крутящих моментов (рис.24, а).

При определении крутящих моментов в сечениях вала, принимаем следующее правило знаков: момент считается положительным, если при взгляде со стороны сечения его направление совпадает с движением часовой стрелки.

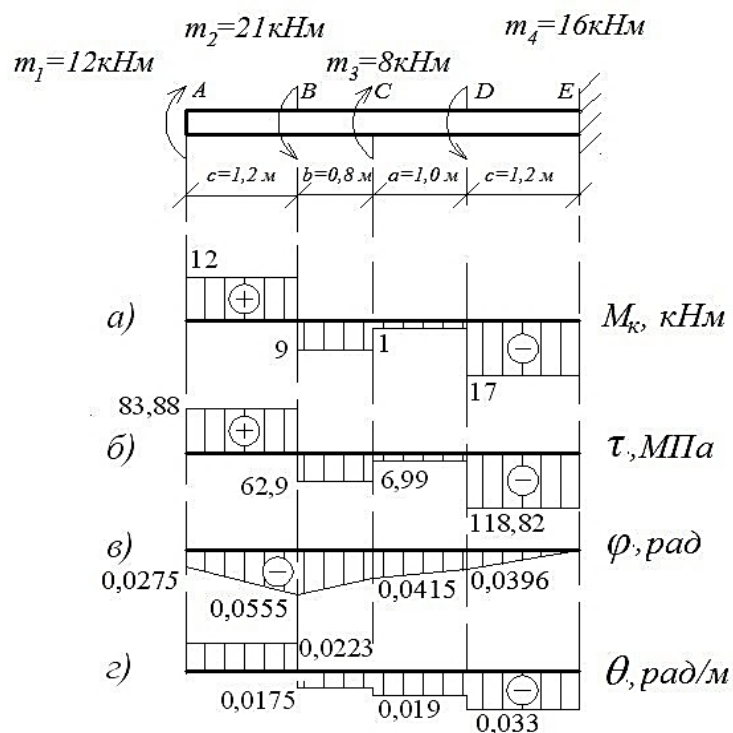


Рис. 24 – Эпюры крутящих моментов, касательных напряжений, углов закручивания и относительных углов закручивания

Участок AB : $M_{K_{AB}} = m_1 = 12 \text{ кНм}$,

Участок BC : $M_{K_{BC}} = m_1 - m_2 = 12 - 21 = -9 \text{ кНм}$,

Участок CD : $M_{K_{CD}} = m_1 - m_2 + m_3 = -9 + 8 = -1 \text{ кНм}$,

Участок DE : $M_{K_{DE}} = m_1 - m_2 + m_3 - m_4 = -1 - 16 = -17 \text{ кНм}$.

По эпюре (рис.24,а) определяем максимальный крутящий момент:

$$M_{K_{\max}} = 17 \text{ кНм}.$$

Определим диаметр вала из условия прочности:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{K_{\max}}}{W_{\rho}} = \frac{16M_{K_{\max}}}{\pi d^3} \leq [\tau], \text{ где } W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16}.$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{K_{\max}}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 17 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 130 \cdot 10^6}} = 0,0873 \text{ м} = 8,73 \text{ см} \approx 9 \text{ см}.$$

Определим диаметр вала из условия жесткости:

$$\theta = \frac{M_{K_{\max}}}{G \cdot J_{\rho}} \leq [\theta], \text{ где } J_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32}, \Rightarrow \theta = \frac{32 \cdot M_{K_{\max}}}{G \cdot \pi d^4} \leq [\theta],$$

$$[\theta] = 2^\circ / \text{м} \cdot \frac{\pi}{180} = 0,0349 \text{ рад/м},$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{K_{\max}}}{G \cdot \pi [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 17 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,0349}} = 0,0888 \text{ м} = 8,88 \text{ см} \approx 9 \text{ см}.$$

Из двух значений диаметров выбираем большее, округлив его: $d = 0,09 \text{ м}$.

Тогда полярный момент сопротивления равен

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 0,09^3}{16} = 143,07 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Определим касательные напряжения, возникающие на участках вала:

$$\tau_{AB} = \frac{M_{K_{AB}}}{W_p} = \frac{12 \cdot 10^3}{143,07 \cdot 10^{-6}} = 83,88 \cdot 10^6 \text{ Па} = 83,88 \text{ МПа},$$

$$\tau_{BC} = \frac{M_{K_{BC}}}{W_p} = -\frac{9 \cdot 10^3}{143,07 \cdot 10^{-6}} = -62,91 \cdot 10^6 \text{ Па} = -62,91 \text{ МПа},$$

$$\tau_{CD} = \frac{M_{K_{CD}}}{W_p} = -\frac{1 \cdot 10^3}{143,07 \cdot 10^{-6}} = -6,99 \cdot 10^6 \text{ Па} = -6,99 \text{ МПа},$$

$$\tau_{DE} = \frac{M_{K_{DE}}}{W_p} = -\frac{17 \cdot 10^3}{143,07 \cdot 10^{-6}} = -118,82 \cdot 10^6 \text{ Па} = -118,82 \text{ МПа}.$$

Построим эпюру касательных напряжений (рис.24,б).

Определим углы закручивания на участках вала, используя следующую формулу:

$$\varphi = \frac{M_K \cdot l}{G \cdot J_p},$$

где полярный момент инерции равен $J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 0,09^4}{32} = 643,79 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4,$

$$\varphi_{DE} = \frac{M_{K_{DE}} \cdot c}{G \cdot J_p} = -\frac{17 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{80 \cdot 10^9 \cdot 644 \cdot 10^{-8}} = -0,0396 \text{ рад},$$

$$\varphi_{CD} = \frac{M_{K_{CD}} \cdot a}{G \cdot J_p} = -\frac{1 \cdot 10^3 \cdot 1}{80 \cdot 10^9 \cdot 644 \cdot 10^{-8}} = -0,0019 \text{ рад},$$

$$\varphi_{BC} = \frac{M_{K_{BC}} \cdot b}{G \cdot J_p} = -\frac{9 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{80 \cdot 10^9 \cdot 644 \cdot 10^{-8}} = -0,014 \text{ рад},$$

$$\varphi_{AB} = \frac{M_{K_{AB}} \cdot c}{G \cdot J_p} = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{80 \cdot 10^9 \cdot 644 \cdot 10^{-8}} = 0,0279 \text{ рад}.$$

Строим эпюру углов закручивания (рис.24,в), учитывая, что угол поворота в заделке отсутствует:

$$\varphi_E = 0,$$

$$\varphi_D = \varphi_E + \varphi_{DE} = -0,0396 \text{ рад},$$

$$\varphi_C = \varphi_D + \varphi_{CD} = -0,0396 - 0,0019 = -0,0415 \text{ рад},$$

$$\varphi_B = \varphi_C + \varphi_{BC} = -0,0415 - 0,014 = -0,0555 \text{ рад},$$

$$\varphi_A = \varphi_B + \varphi_{AB} = -0,0555 + 0,0279 = -0,0276 \text{ рад}.$$

Построим эпюру относительных углов закручивания (рис.24,г). Наиболее нагруженным является участок *DE*, где

$$\tau_{\max} = 118,82 < [\tau] = 130 \text{ МПа}.$$

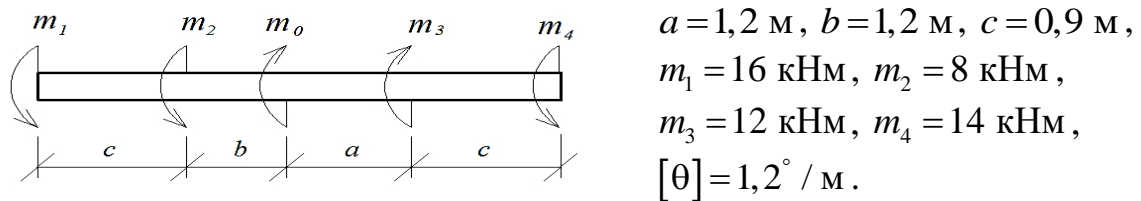
Условие прочности выполняется.

Пример 9.

Стальной вал круглого поперечного сечения нагружен скручивающими моментами (рис.25). Расчётное сопротивление материала вала на сдвиг $[\tau] = 130$ МПа, модуль сдвига $G = 80$ ГПа.

Требуется:

- 1) построить эпюру крутящих моментов;
- 2) подобрать диаметр вала, округлив его до большего размера с шагом 0,5 см;
- 3) построить эпюру напряжений;
- 4) построить эпюру углов закручивания;
- 5) построить эпюру относительных углов закручивания.



$$\begin{aligned} a &= 1,2 \text{ м}, \quad b = 1,2 \text{ м}, \quad c = 0,9 \text{ м}, \\ m_1 &= 16 \text{ кНм}, \quad m_2 = 8 \text{ кНм}, \\ m_3 &= 12 \text{ кНм}, \quad m_4 = 14 \text{ кНм}, \\ [\theta] &= 1,2^\circ / \text{м}. \end{aligned}$$

Рис. 25 – Схема вала

Решение.

Определим величину значения неизвестного момента m_0 , составив уравнение равновесия:

$$\begin{aligned} \sum m &= 0; \\ \sum m &= -m_1 - m_2 + m_0 + m_3 - m_4 = 0; \\ -16 - 8 + m_0 + 12 - 14 &= 0; \Rightarrow m_0 = 26 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Находим крутящий момент на участках вала:

Участок AB: $M_{K_{AB}} = -m_1 = -16$ кНм,

Участок BC: $M_{K_{BC}} = -m_1 - m_2 = -16 - 8 = -24$ кНм,

Участок CD: $M_{K_{CD}} = -m_1 - m_2 + m_0 = -24 + 26 = 2$ кНм,

Участок DE: $M_{K_{DE}} = -m_1 - m_2 + m_0 + m_3 = 2 + 12 = 14$ кНм.

Построим эпюру крутящих моментов (рис.26,а).

По эпюре определяем максимальный крутящий момент:

$$M_{K_{\max}} = 24 \text{ кНм}.$$

Определим диаметр вала из условия прочности:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{K_{\max}}}{W_\rho} = \frac{16M_{K_{\max}}}{\pi d^3} \leq [\tau], \text{ где } W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}.$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{K_{\max}}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 24 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 130 \cdot 10^6}} = 0,098 \text{ м} = 9,8 \text{ см} \approx 10 \text{ см}.$$

Определим диаметр вала из условия жесткости:

$$\theta = \frac{M_{K_{\max}}}{G \cdot J_\rho} \leq [\theta], \text{ где } J_\rho = \frac{\pi d^4}{32}, \Rightarrow \theta = \frac{32 \cdot M_{K_{\max}}}{G \cdot \pi d^4} \leq [\theta],$$

$$[\theta] = 1,2^\circ / \text{м} \cdot \frac{\pi}{180} = 0,021 \text{ рад/м},$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{K_{\max}}}{G \cdot \pi [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 24 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 0,021}} = 0,109 \text{ м} = 10,9 \text{ см} \approx 11 \text{ см}.$$

Из двух значений диаметров выбираем большее, округлив его: $d = 0,11 \text{ м}$.

Тогда полярный момент сопротивления равен

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 0,11^3}{16} = 261,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Определим касательные напряжения, возникающие на участках вала:

$$\tau_{AB} = \frac{M_{K_{AB}}}{W_p} = -\frac{16 \cdot 10^3}{261,2 \cdot 10^{-6}} = -61,26 \cdot 10^6 \text{ Па} = -61,26 \text{ МПа},$$

$$\tau_{BC} = \frac{M_{K_{BC}}}{W_p} = -\frac{24 \cdot 10^3}{261,2 \cdot 10^{-6}} = -91,88 \cdot 10^6 \text{ Па} = -91,88 \text{ МПа},$$

$$\tau_{CD} = \frac{M_{K_{CD}}}{W_p} = \frac{2 \cdot 10^3}{261,2 \cdot 10^{-6}} = 7,66 \cdot 10^6 \text{ Па} = 7,66 \text{ МПа},$$

$$\tau_{DE} = \frac{M_{K_{DE}}}{W_p} = \frac{14 \cdot 10^3}{261,2 \cdot 10^{-6}} = 53,59 \cdot 10^6 \text{ Па} = 53,59 \text{ МПа}.$$

Построим эпюру касательных напряжений (рис.26,б).

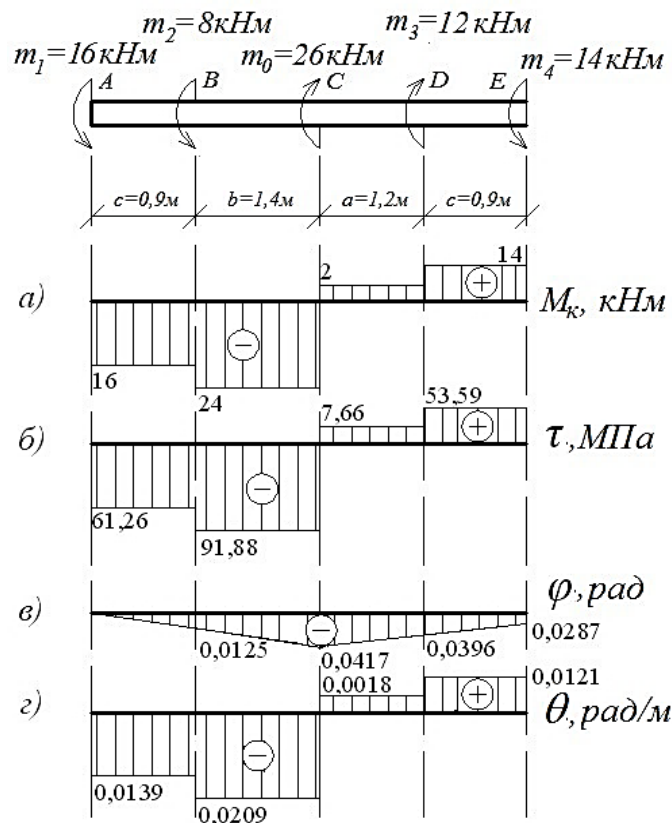


Рис. 26 – Схема вала. Эпюры крутящих моментов, касательных напряжений, углов закручивания и относительных углов закручивания

Определим углы закручивания на участках вала, используя следующую формулу:

$$\varphi = \frac{M_K \cdot l}{G \cdot J_\rho},$$

где полярный момент инерции равен $J_\rho = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 0,11^4}{32} = 1437 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$,

$$\varphi_{AB} = \frac{M_{K_{AB}} \cdot c}{G \cdot J_\rho} = -\frac{16 \cdot 10^3 \cdot 0,9}{80 \cdot 10^9 \cdot 1437 \cdot 10^{-8}} = -0,0125 \text{ рад},$$

$$\varphi_{BC} = \frac{M_{K_{BC}} \cdot b}{G \cdot J_\rho} = -\frac{24 \cdot 10^3 \cdot 1,4}{80 \cdot 10^9 \cdot 1437 \cdot 10^{-8}} = -0,0292 \text{ рад},$$

$$\varphi_{CD} = \frac{M_{K_{CD}} \cdot a}{G \cdot J_\rho} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{80 \cdot 10^9 \cdot 1437 \cdot 10^{-8}} = 0,0021 \text{ рад},$$

$$\varphi_{DE} = \frac{M_{K_{DE}} \cdot c}{G \cdot J_\rho} = \frac{14 \cdot 10^3 \cdot 0,9}{80 \cdot 10^9 \cdot 1437 \cdot 10^{-8}} = 0,0109 \text{ рад}.$$

Строим эпюру углов закручивания (рис.26,в), условно считая, что сечение A является неподвижным:

$$\varphi_A = 0,$$

$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_{AB} = 0 - 0,0125 = -0,0125 \text{ рад},$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \varphi_{BC} = -0,0125 - 0,0292 = -0,0417 \text{ рад},$$

$$\varphi_D = \varphi_C + \varphi_{CD} = -0,0417 + 0,0021 = -0,0396 \text{ рад},$$

$$\varphi_E = \varphi_D + \varphi_{DE} = -0,0396 + 0,0109 = -0,0287 \text{ рад}.$$

Определим относительные углы закручивания на участках вала, для расчета используем формулу $\theta = \frac{\varphi}{l}$:

$$\theta_{AB} = \frac{\varphi_{AB}}{c} = -\frac{0,0125}{0,9} = -0,0139 \frac{\text{рад}}{\text{м}},$$

$$\theta_{BC} = \frac{\varphi_{BC}}{b} = -\frac{0,0292}{1,4} = -0,0209 \frac{\text{рад}}{\text{м}},$$

$$\theta_{CD} = \frac{\varphi_{CD}}{a} = \frac{0,0021}{1,2} = 0,0018 \frac{\text{рад}}{\text{м}},$$

$$\theta_{DE} = \frac{\varphi_{DE}}{c} = \frac{0,0109}{0,9} = 0,0121 \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

Построим эпюру относительных углов закручивания (рис.26,г). Наиболее нагруженным является участок BC , где

$$\tau_{\max} = 91,88 < [\tau] = 130 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

Пример 10.

Стальной вал круглого поперечного сечения нагружен скручивающими моментами $M_1 = 12$ кНм, $M_2 = 21$ кНм. Требуется построить эпюру крутящих моментов, напряжений и перемещений, если $d_1 = 13$ см; $d_2 = 10$ см; $d_3 = 8$ см; $l_1 = 0,5$ м; $l_2 = 0,6$ м; $l_3 = 0,8$ м; $G = 80$ ГПа. Проверить прочность вала, если $[\tau] = 80$ МПа.

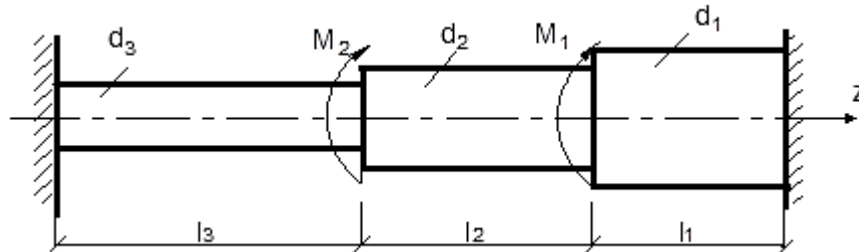


Рис. 27 – Схема вала

Решение.

Составим уравнение равновесия:

$$\sum M_{кр} = -M_A + M_2 + M_1 - M_D = 0;$$

$$M_A + M_D = 21 + 12 = 33 \text{ кНм.}$$

Вал является статически неопределимым. Для решения необходимо составить основную систему мысленно отбросив одну из опор (опора В).

Составим уравнение совместности перемещений:

$$\sum \varphi = \frac{M_D \cdot l_1}{G \cdot J_{\rho_1}} + \frac{M_D \cdot l_2}{G \cdot J_{\rho_2}} + \frac{M_D \cdot l_3}{G \cdot J_{\rho_3}} - \frac{M_1 \cdot l_2}{G \cdot J_{\rho_2}} - \frac{M_1 \cdot l_3}{G \cdot J_{\rho_3}} - \frac{M_2 \cdot l_3}{G \cdot J_{\rho_3}} = 0;$$

$$J_{\rho_1} = \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 12^4}{32} = 2034,7 \text{ см}^4;$$

$$J_{\rho_2} = \frac{\pi d_2^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 10^4}{32} = 981,2 \text{ см}^4;$$

$$J_{\rho_3} = \frac{\pi d_3^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 8^4}{32} = 401,9 \text{ см}^4.$$

$$\sum \varphi = \frac{M_D \cdot 0,5}{G \cdot 2034,7 \cdot 10^{-8}} + \frac{M_D \cdot 0,6}{G \cdot 981,2 \cdot 10^{-8}} + \frac{M_D \cdot 0,8}{G \cdot 401,9 \cdot 10^{-8}} -$$

$$- \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{G \cdot 981,2 \cdot 10^{-8}} - \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{G \cdot 401,9 \cdot 10^{-8}} - \frac{21 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{G \cdot 401,9 \cdot 10^{-8}} = 0;$$

Из уравнений находим, что

$$M_D = 25,66 \text{ кНм, тогда } M_A = 32 - 25,66 = 7,34 \text{ кНм.}$$

Построим эпюру крутящих моментов (рис.28,а)

$$M_{K_{CD}} = 25,66 \text{ кНм};$$

$$M_{K_{BC}} = 25,66 - 12 = 13,66 \text{ кНм};$$

$$M_{K_{AB}} = 13,66 - 21 = -7,34 \text{ кНм}$$

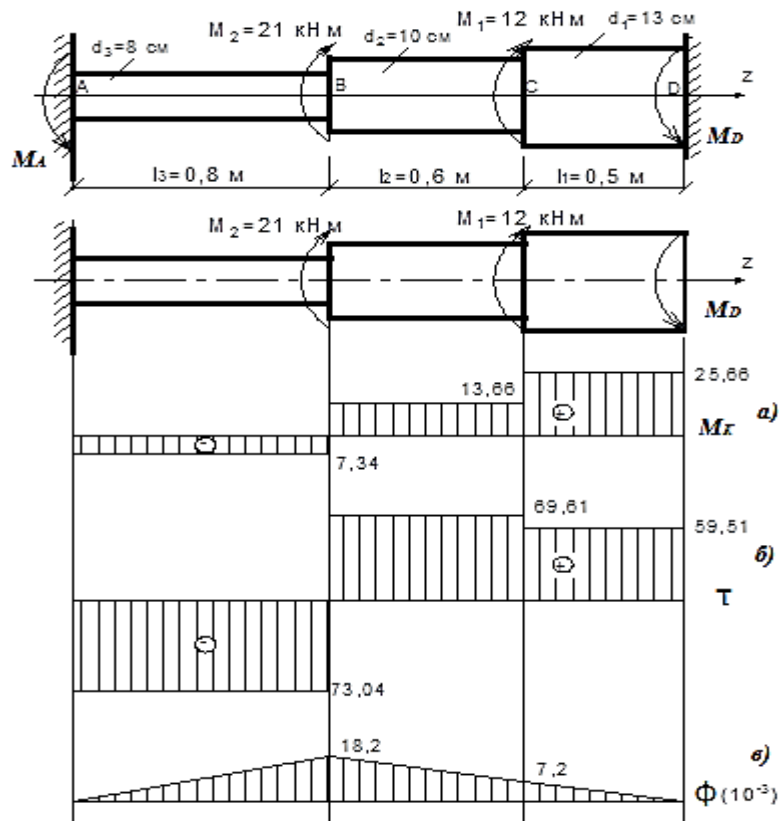


Рис. 28 – Схема вала. Эпюры крутящих моментов, касательных напряжений, углов закручивания

Посчитаем полярные моменты сопротивления участков

$$W_{\rho_1} = \frac{\pi d_1^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 13^3}{16} = 431,16 \text{ см}^3;$$

$$W_{\rho_2} = \frac{\pi d_2^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 10^3}{16} = 196,25 \text{ см}^3;$$

$$W_{\rho_3} = \frac{\pi d_3^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 8^3}{16} = 100,48 \text{ см}^3.$$

Определим касательные напряжения, возникающие на участках вала:

$$\tau_{CD} = \frac{M_{KCD}}{W_{\rho_1}} = \frac{25,66 \cdot 10^3}{431,16 \cdot 10^{-6}} = 59,51 \text{ МПа};$$

$$\tau_{BC} = \frac{M_{KBC}}{W_{\rho_2}} = \frac{13,66 \cdot 10^3}{196,25 \cdot 10^{-6}} = 69,61 \text{ МПа};$$

$$\tau_{AB} = \frac{M_{KAB}}{W_{\rho_3}} = -\frac{7,34 \cdot 10^3}{100,48 \cdot 10^{-6}} = -73,04 \text{ МПа}.$$

Построим эпюру касательных напряжений (рис.28,б).

Построим эпюру углов закручивания (рис.28,в)

$$\varphi_{CD} = \frac{M_{KCD} \cdot l_1}{G \cdot J_{\rho_1}} = \frac{25,66 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{80 \cdot 10^9 \cdot 2034,7 \cdot 10^{-8}} = 7,8 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_{BC} = \frac{M_{K_{BC}} \cdot l_2}{G \cdot J_{\rho_2}} = \frac{13,66 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{80 \cdot 10^9 \cdot 981,2 \cdot 10^{-8}} = 10,4 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_{AB} = \frac{M_{K_{AB}} \cdot l_3}{G \cdot J_{\rho_3}} = -\frac{7,34 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{80 \cdot 10^9 \cdot 401,9 \cdot 10^{-8}} = -18,2 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_D = 0; \varphi_C = \varphi_{CD} = 7,8 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_B = \varphi_C + \varphi_{BC} = 7,8 \cdot 10^{-3} + 10,4 \cdot 10^{-3} = 18,2 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_A = \varphi_B + \varphi_{AB} = 18,2 \cdot 10^{-3} - 18,2 \cdot 10^{-3} = 0;$$

$$\varphi_A = 0 \text{ – по условию задачи};$$

$$\tau_{\max} = 73,94 \text{ МПа} < [\tau] = 80 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

3.4. Плоский изгиб прямого бруса

3.4.1. Виды изгиба стержней

Плоским изгибом называется такой случай нагружения стержня, когда все нагрузки и опорные реакции направлены перпендикулярно оси стержня и лежат в одной его главной плоскости инерции. При изгибе стержни деформируются, т.е. меняют свою форму, так, что его продольная ось и волокна искривляются. Стержни, работающие преимущественно на изгиб, называются балками.

В зависимости от вида нагрузки, действующей на балку, возникают различные виды изгиба. Если в поперечном сечении балки при её изгибе возникает только изгибающий момент, а другие внутренние силовые факторы отсутствуют, то такой изгиб называется чистым. Если же в поперечном сечении балки при её изгибе возникают изгибающий момент и поперечная сила, то такой изгиб называется поперечным изгибом.

3.4.2. Определение опорных реакций

Балка опирается на основание (фундамент, стены и т.п.) через опорные связи (опоры). Виды опор: шарнирно-подвижная, шарнирно-неподвижная и заделка.

Для определения внутренних сил в изгибаемой балке используется метод сечений. Но для этого необходимо знать все действующие на балку силы. При этом мы рассматриваем случай, когда на балку действует произвольная система сил, лежащих в одной плоскости. Внешняя нагрузка, действующая на балку, как правило, задаётся, а неизвестными являются опорные реакции. Для определения опорных реакций используются уравнения равновесия статики. При выборе осей координат для плоской системы сил можно использовать следующие варианты систем уравнений равновесия балки:

$$1\text{-й вариант } \sum Z = 0; \sum Y = 0; \sum M_A = 0;$$

2-й вариант $\sum Z = 0$; $\sum M_A = 0$; $\sum M_B = 0$.

Здесь $\sum Z = 0$; $\sum Y = 0$ – суммы проекций всех сил, действующих на балку, соответственно, на координатные оси z и y , $\sum M = 0$ – сумма моментов всех сил относительно любой выбранной точки.

3.4.3. Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой и распределенной нагрузкой

Между изгибающим моментом M_x , поперечной силой Q_y и внешней распределённой нагрузкой q существуют следующие зависимости:

$\frac{dM_x}{dz} = Q_y$ – функция поперечной силы является первой производной функции изгибающего момента по длине балки;

$\frac{dQ_y}{dz} = q$ – распределённая нагрузка – это первая производная функции поперечной силы по длине балки. При этом q считается положительной, если направлена вверх.

Имея две дифференциальные зависимости, получаем третью $\frac{d^2M_x}{dz^2} = q$.

3.4.4. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил в балках

Для оценки прочности балки на изгиб нужно определить наибольшую величину изгибающего момента M_x и положение сечения, в котором этот момент возникает. Точно так же надо знать и наибольшую поперечную силу.

Для полного анализа деформированного состояния изгибаемой балки, необходимо знать законы изменения этих усилий по ее длине. С этой целью строятся эпюры изгибающих моментов и поперечных сил M_x и Q_y по всей длине балки.

3.4.5. Определение напряжений при изгибе

При поперечном изгибе зависимости между внутренними силами и напряжениями имеют следующий вид:

$$M_x = \int_A \sigma y dA; Q_y = \int_A \tau_y dA. \quad (25)$$

Для случая чистого изгиба, то есть для изгиба, когда в поперечном сечении балки действует только изгибающий момент, а поперечная сила отсутствует, выведена следующая формула для нормальных напряжений: $\sigma = \frac{M_x}{J_x} y$.

В формулу входят следующие величины: M_x – изгибающий момент, действующий в рассматриваемом сечении балки, J_x – момент инерции сечения балки относительно оси x , проходящей через центр тяжести сечения (она называется нейтральной осью), y – расстояние от нейтральной оси до рассматриваемого волокна балки.

Эта же формула нормальных напряжений используется и при поперечном изгибе, пренебрегая влиянием сдвигов на величину нормального напряжения.

Так как отношение $\frac{M_x}{J_x}$ для конкретного сечения конкретной балки есть

величина постоянная, то величина нормального напряжения зависит от расстояния от продольной оси балки z до рассматриваемого волокна (или от нейтральной оси x сечения до рассматриваемой точки). Наибольшие напряжения возникают в точках поперечного сечения, наиболее удалённых от нейтральной оси балки, то есть, когда $y = \max$.

Следовательно, получаем:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} y_{\max}. \quad (26)$$

Примем $\frac{J_{\max}}{y_{\max}} = W_x$. Эта величина называется моментом сопротивления

сечения относительно нейтральной оси x , то есть, получаем: $\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}$.

При поперечном изгибе, в отличие от чистого изгиба, в поперечном сечении балки наряду с изгибающим моментом возникает поперечная сила, вызывающая касательные напряжения τ_y в сечении балки. Эти касательные напряжения вычисляются по формуле Журавского:

$$\tau_y = \frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{J_x b}, \quad (27)$$

где $S_x^{\text{отс}}$ – статический момент части сечения относительно нейтральной оси x , мысленно отсечённой от сечения, определяемый по формуле

$$S_x^{\text{отс}} = \int_{A_{\text{отс}}} y dA; \Rightarrow S_x^{\text{отс}} = A_{\text{отс}} \cdot y_{\text{отс}};$$

b – ширина сечения в той точке, в которой определяются касательные напряжения (точка К), $A_{\text{отс}}$ – площадь отсечённой части сечения, $y_{\text{отс}}$ – расстояние от оси x до центра тяжести отсечённой части сечения.

Принято, что касательные напряжения τ равномерно распределены по ширине сечения. Наибольшие касательные напряжения τ_{\max} возникают в точках сечения балки, расположенных на нейтральной оси сечения (ось x).

Опытами установлено, что влияние поперечной силы при разрушении балки намного меньше, чем влияние изгибающего момента. Поэтому прочность изгибаемой балки определяется по максимальной величине нормальных напряжений. Балка считается прочной при выполнении условия прочности.

Условие прочности балки имеет следующий вид: $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ при расчёте балки по допускаемым напряжениям.

По условию прочности подбираются размеры поперечного сечения проектируемой балки. Условие прочности изгибаемой балки имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (28)$$

Из этого неравенства находим минимальное значение момента сопротивления сечения балки изгибу:

$$W_x^{\text{доп}} \geq \frac{M_x}{[\sigma]}. \quad (29)$$

Пример 11.

Для заданной балки (рис.29) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Подобрать двутавровое сечение из прокатного профиля, если для стали $[\sigma] = 210 \text{ МПа}$, $[\tau] = 130 \text{ МПа}$.

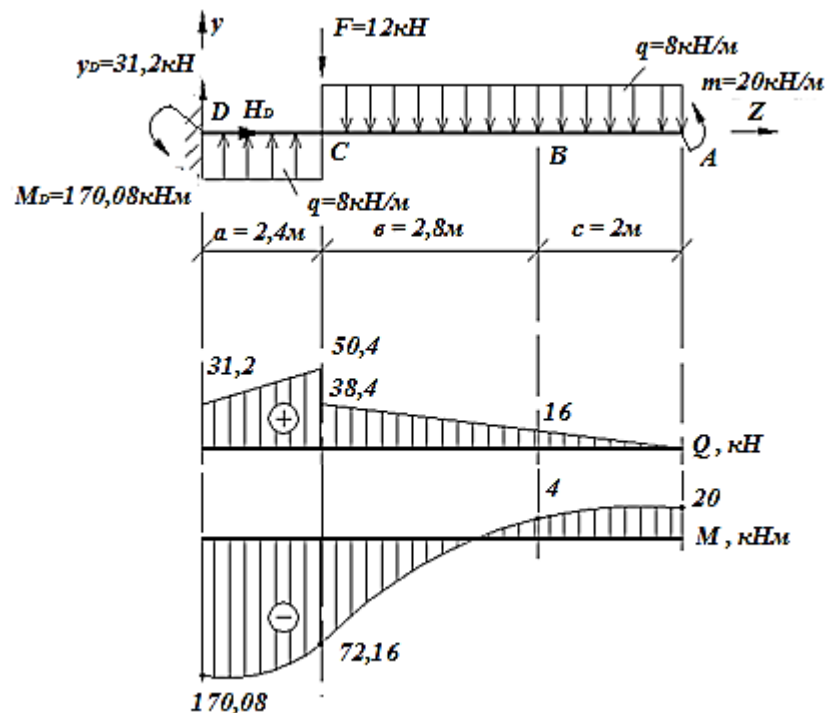


Рис. 29 – Схема балки. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Решение.

Определим реакции опор, составив уравнения равновесия:

$$\sum M_D = 0; \Rightarrow -m + q \cdot (b+c) \cdot \left(\frac{b+c}{2} + a \right) + F \cdot a - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - M_D = 0,$$

$$-20 + 8 \cdot 4,8 \cdot \left(\frac{4,8}{2} + 2,4 \right) + 12 \cdot 2,4 - 8 \cdot \frac{2,4^2}{2} - M_D = 0, \Rightarrow M_D = 170,08 \text{ кНм},$$

$$\sum Y = 0; \Rightarrow Y_D + q \cdot a - F - q \cdot (b+c) = 0,$$

$$Y_D + 8 \cdot 2,4 - 12 - 8 \cdot (2,8 + 2) = 0, \Rightarrow Y_D = 31,2 \text{ кН},$$

$$\sum Z = 0; \Rightarrow H_D = 0.$$

Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, используя метод сечений.

$$\text{В точке } A: \quad Q_A = 0; \quad M_A = m = 20 \text{ кНм}.$$

$$\text{В точке } B: \quad Q_B = 8 \cdot 2 = 16 \text{ кН}; \quad M_B = 20 - 8 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \text{ кНм}.$$

$$\text{В точке } C \text{ (правее): } Q_C = 8 \cdot 4,8 = 38,4 \text{ кН}; \quad M_C = 20 - 8 \cdot 4,8 \cdot 2,4 = -72,16 \text{ кНм}.$$

$$\text{В точке } C \text{ (левее): } Q_C = 38,4 + 12 = 50,4 \text{ кН}; \quad M_C = -72,16 \text{ кНм}.$$

$$\text{В точке } D: \quad Q_D = 50,4 - 8 \cdot 2,4 = 31,2 \text{ кН};$$

$$M_D = 20 - 8 \cdot 4,8 \cdot 4,8 - 12 \cdot 2,4 + 8 \cdot 2,4 \cdot 1,2 = -170,08 \text{ кНм}.$$

Подберём двутавровое сечение при $[\sigma] = 210 \text{ МПа}$.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \quad W_x^{\text{доп}} \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}.$$

Максимальный изгибающий момент определим из эпюры изгибающих моментов (рис.29): $M_{\max} = 170,08 \text{ кНм}$.

$$W_x \geq \frac{170,08 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,8099 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 809,9 \text{ см}^3.$$

Пользуясь сортаментом (Приложение 1), выбираем двутавр № 40 с $W_x = 953 \text{ см}^3$.

Проверим прочность по нормальным напряжениям, если $[\sigma] = 210 \text{ МПа}$:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{170,08 \cdot 10^3}{953 \cdot 10^{-6}} = 178,46 \cdot 10^6 \text{ Па} = 178,46 \text{ МПа} < 210 \text{ МПа}.$$

Недогрузка составляет:

$$\frac{210 - 178,46}{210} \cdot 100\% = 15\%.$$

Проверим прочность по касательным напряжениям, если $[\tau] = 130 \text{ МПа}$:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^{\text{отс}}}{J_x b} \leq [\tau].$$

Максимальное значение поперечной силы определяем по эпюре поперечных сил (рис.29): $Q_{\max} = 50,4 \text{ кН}$.

Геометрические характеристики выбираем из Приложения 1: $S_x^{\text{отс}} = 545 \text{ см}^3$; $J_x = 19062 \text{ см}^4$; $b = 8,3 \text{ мм}$.

$$\tau_{\max} = \frac{50,4 \cdot 10^3 \cdot 545 \cdot 10^{-6}}{19062 \cdot 10^{-8} \cdot 8,3 \cdot 10^{-3}} = 17,36 \cdot 10^6 \text{ Па} = 17,36 \text{ МПа} < 130 \text{ МПа}.$$

Прочность двутавровой балки по нормальным и касательным напряжениям обеспечена.

Пример 12.

Для заданной балки (рис.30) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Подобрать сечение из прокатных профилей (двух швеллеров), если $[\sigma] = 210 \text{ МПа}$, $[\tau] = 130 \text{ МПа}$.

Решение.

Определим реакции опор, составив уравнения равновесия:

$$\sum M_A = 0; \Rightarrow -m_1 + Y_D \cdot (a+b+c) + m_2 - q \cdot \frac{(a+b)^2}{2} + F \cdot a = 0,$$

$$-18 + Y_D \cdot 8,4 + 18 - 20 \cdot \frac{5^2}{2} + 12 \cdot 3 = 0; \Rightarrow Y_D = 25,48 \text{ кН},$$

$$\sum M_D = 0; \Rightarrow -Y_A \cdot (a+b+c) + q \cdot (a+b) \left(\frac{a+b}{2} + c \right) - F \cdot (b+c) - m_1 + m_2 = 0,$$

$$-Y_A \cdot 8,4 + 20 \cdot 5 \cdot 5,9 - 12 \cdot 5,4 - 18 + 18 = 0; \Rightarrow Y_A = 62,52 \text{ кН}.$$

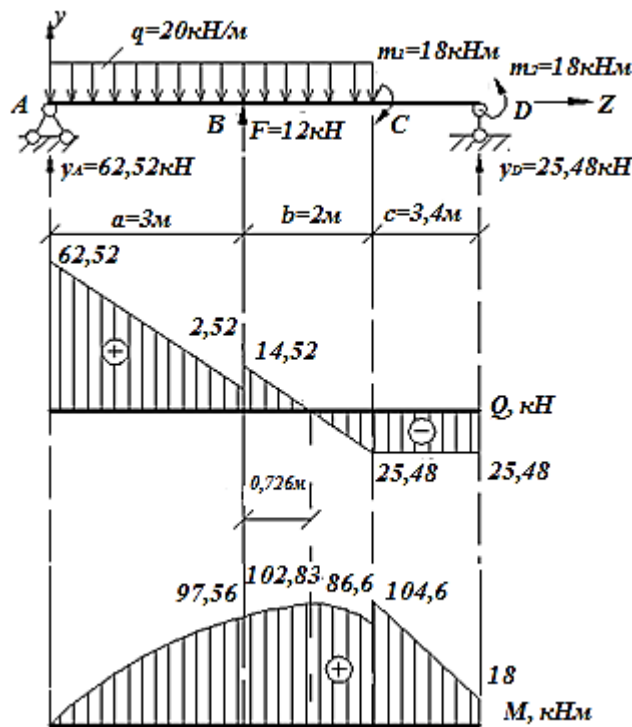


Рис. 30 – Схема балки. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Проверим правильность определения реакций:

$$\sum Y = 0; Y_A + Y_D + F - q \cdot (a+b) = 0; \Rightarrow 62,52 + 25,48 + 12 - 20 \cdot (3+2) = 0.$$

Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов методом сечений (рис.30).

В точке A: $Q_A = 62,52 \text{ кН}; M_A = 0.$

В точке B (левее): $Q_B = 62,52 - 20 \cdot 3 = 2,52 \text{ кН};$

$$M_B = 62,52 \cdot 3 - 20 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{2} = 97,56 \text{ кНм}.$$

В точке B (правее): $Q_B = 2,52 + 12 = 14,52 \text{ кН}; M_B = 97,56 \text{ кНм}.$

В точке C (левее): $Q_C = 14,52 - 20 \cdot 2 = -25,48 \text{ кН};$

$$M_C = 62,52 \cdot 5 - 20 \cdot 5^2 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot 2 = 86,6 \text{ кНм}.$$

В точке C (правее): $Q_C = -25,48 \text{ кН}; M_C = 86,6 + 18 = 104,6 \text{ кНм}.$

В точке D (левее): $Q_D = -25,48$ кН;

$$M_D = 62,52 \cdot 8,4 + 12 \cdot 5,5 - 20 \cdot 5 \cdot 5,9 + 18 = 18 \text{ кНм}.$$

В точке E эпюра поперечных сил пересекает ось z. Определим расстояние z_E :

$$z_E = \frac{Q_E}{q} = \frac{14,52}{20} = 0,726 \text{ м}.$$

Определим значение изгибающего момента в точке E:

$$\begin{aligned} M_E &= 62,52 \cdot 3,726 - 20 \cdot 3,726^2 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot 0,726 = \\ &= 232,95 - 138,83 + 8,712 = 102,83 \text{ кНм} \end{aligned}$$

Подберём сечение в виде двух швеллеров при $[\sigma] = 210$ МПа.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \quad W_x^{\text{доп}} \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}.$$

Максимальный изгибающий момент определим из эпюры изгибающих моментов (рис.30): $M_{\max} = 104,6$ кНм.

$$W_x = \frac{104,6 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,498 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 498 \text{ см}^3.$$

Для одного швеллера:

$$\frac{W_x}{2} = \frac{498}{2} = 249 \text{ см}^3.$$

Из сортамента (Приложение 2) выбираем швеллер №24 с $W_x = 242 \text{ см}^3$. Для двух швеллеров $W_x = 2 \cdot 242 = 484 \text{ см}^3$.

Проверим прочность по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{104,6 \cdot 10^3}{484 \cdot 10^{-6}} = 216 \cdot 10^6 \text{ Па} = 216 \text{ МПа} > 210 \text{ МПа}.$$

Перегрузка составляет:

$$\frac{216 - 210}{210} \cdot 100\% = 2,8\% < 5\%, \text{ что допустимо.}$$

Проверим прочность по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^{\text{отс}}}{J_x b} \leq [\tau],$$

$$Q_{\max} = 62,52 \text{ кН}.$$

Геометрические характеристики выбираем из Приложения 2:

$$S_x^{\text{отс}} = 139 \text{ см}^3; \quad J_x = 2900 \text{ см}^4; \quad b = 5,6 \text{ мм},$$

$$\tau_{\max} = \frac{62,52 \cdot 10^3 \cdot 139 \cdot 10^{-6} \cdot 2}{2 \cdot 2900 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 5,6 \cdot 10^{-3}} = 26,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 26,8 \text{ МПа} < 130 \text{ МПа}.$$

Прочность балки, состоящей из двух швеллеров, по нормальным и касательным напряжениям обеспечена.

Пример 13.

Для заданной балки (рис.31) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Выполнить расчёт на прочность. Подобрать прямоугольное сечение из древесины, если соотношение сторон сечения составляет $h/b=1,4$; $[\sigma]=16$ МПа; $[\tau]=2$ МПа.

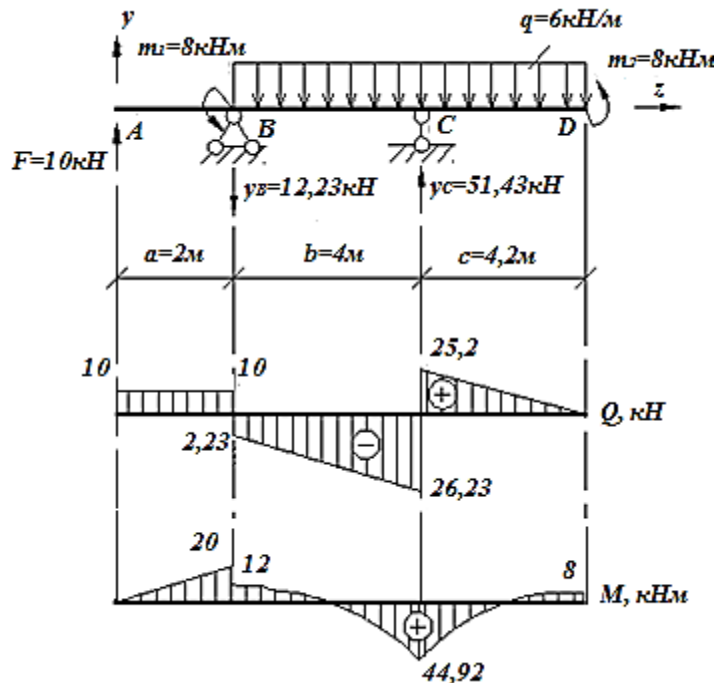


Рис. 31 – Схема балки. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Решение.

Определим реакции опор, составив уравнения равновесия:

$$\sum M_B = 0; \Rightarrow m_1 - q \cdot (b+c)^2 \cdot \frac{1}{2} + Y_C \cdot b + m_2 - F \cdot a = 0,$$

$$8 - 6 \cdot 8,2^2 \cdot \frac{1}{2} + Y_C \cdot 4 + 8 - 10 \cdot 2 = 0, \Rightarrow Y_C = 51,43 \text{ кН},$$

$$\sum M_C = 0; \Rightarrow -F \cdot (a+b) + m_1 - Y_B \cdot b + q \cdot b^2 \cdot \frac{1}{2} - q \cdot c^2 \cdot \frac{1}{2} + m_2 = 0,$$

$$-10 \cdot 6 + 8 - Y_B \cdot 4 + 6 \cdot 4^2 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot 4,2^2 \cdot \frac{1}{2} + 8 = 0; \Rightarrow Y_B = -12,23 \text{ кН}.$$

Направление реакции меняем на противоположное.

Проверим правильность определения реакций:

$$\sum Y = 0; F - Y_B + Y_C - q \cdot 8,2 = 10 - 12,23 + 51,43 - 6 \cdot 8,2 = 0$$

Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис.31).

В точке A: $Q_A = 10$ кН; $M_A = 0$.

В точке B (левее): $Q_B = 10$ кН; $M_B = 10 \cdot 2 = 20$ кНм.

В точке B (правее): $Q_B = 10 - 12,23 = -2,23$ кН; $M_B = 20 - 8 = 12$ кНм.

В точке C (левее): $Q_C = -2,23 - 6 \cdot 4 = -26,23$ кН;

$$M_C = 10 \cdot 6 - 12,23 \cdot 4 - 8 - 6 \cdot 4 \cdot 2 = -44,92 \text{ кНм}.$$

В точке D: $Q_D = 10 - 12,23 - 6 \cdot 8,2 + 51,43 = 0;$

$$M_D = 10 \cdot 10,2 - 12,23 \cdot 8,2 - 8 + 51,43 \cdot 4,2 - 6 \cdot 8,2 \cdot 4,1 = 8 \text{ кНм}.$$

Подберём прямоугольное сечение, $M_{\max} = 44,92 \text{ кНм}$ (рис 31):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma],$$

$$W_x^{\text{доп}} \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{44,92 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^6} = 2,808 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 2808 \text{ см}^3,$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6}, \quad h = 1,4b,$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b \cdot (1,4b)^2}{6} = \frac{1,96b^3}{6}, \quad 6W_x = 1,96b^3, \quad b = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 2808}{1,96}} = 20,48 \text{ см}.$$

Округляем: $b = 20,5 \text{ см}.$

Тогда $h = 1,4 \cdot 20,5 = 28,7 \text{ см},$

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{20,5 \cdot 28,7^2}{6} = 2814,27 \text{ см}^3,$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{44,92 \cdot 10^3}{2814,27 \cdot 10^{-6}} = 15,96 \cdot 10^6 \text{ Па} = 15,96 \text{ МПа} < 16 \text{ МПа}.$$

Недогрузка составляет:

$$\frac{16 - 15,96}{16} \cdot 100\% = 0,3\%.$$

Проверим прочность по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^{\text{отс}}}{J_x b} \leq [\tau],$$

$$Q_{\max} = 26,23 \text{ кН (рис. 31),}$$

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{20,5 \cdot 28,7^3}{12} = 40384,83 \text{ см}^4,$$

$$S_x^{\text{отс}} = 20,5 \cdot \frac{28,7}{2} \cdot \frac{28,7}{4} = 2110,7 \text{ см}^3,$$

$$\tau_{\max} = \frac{26,23 \cdot 10^3 \cdot 2110,7 \cdot 10^{-6}}{40384,83 \cdot 10^{-8} \cdot 20,5 \cdot 10^{-2}} = 0,67 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0,67 \text{ МПа} < 2 \text{ МПа}.$$

Прочность деревянной балки по нормальным и касательным напряжениям обеспечена.

Пример 14.

Для заданной балки (рис.32) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Выполнить расчёт на прочность. Подобрать круглое сечение из древесины, если $[\sigma] = 16 \text{ МПа}; [\tau] = 2 \text{ МПа}.$

Решение.

Определим реакции опор, составив уравнения равновесия:

$$\sum M_B = 0; \Rightarrow -Y_D \cdot (b+c) + q \cdot c \cdot \left(\frac{c}{2} + b\right) + m - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} + F \cdot a = 0,$$

$$-Y_D \cdot 5,4 + 10 \cdot 3,2 \cdot 3,8 + 20 - 10 \cdot \frac{2,2^2}{2} + 16 \cdot 2 = 0; \Rightarrow Y_D = 27,67 \text{ кН},$$

$$\sum M_D = 0; \Rightarrow F \cdot (a+b+c) - Y_B \cdot (b+c) + q \cdot b \cdot \left(\frac{b}{2} + c\right) + m - q \cdot c \cdot \frac{c}{2} = 0,$$

$$16 \cdot 7,4 - Y_B \cdot 5,4 + 10 \cdot 2,2 \cdot 4,3 + 20 - 10 \cdot \frac{3,2^2}{2} = 0; \Rightarrow Y_B = 33,67 \text{ кН}.$$

Проверим правильность определения реакций:

$$\begin{aligned} \sum Y = 0; \Rightarrow -F - q \cdot b + q \cdot c + Y_B - Y_D &= 0, \\ -16 - 10 \cdot 2,2 + 10 \cdot 3,2 + 33,67 - 27,67 &= 0. \end{aligned}$$

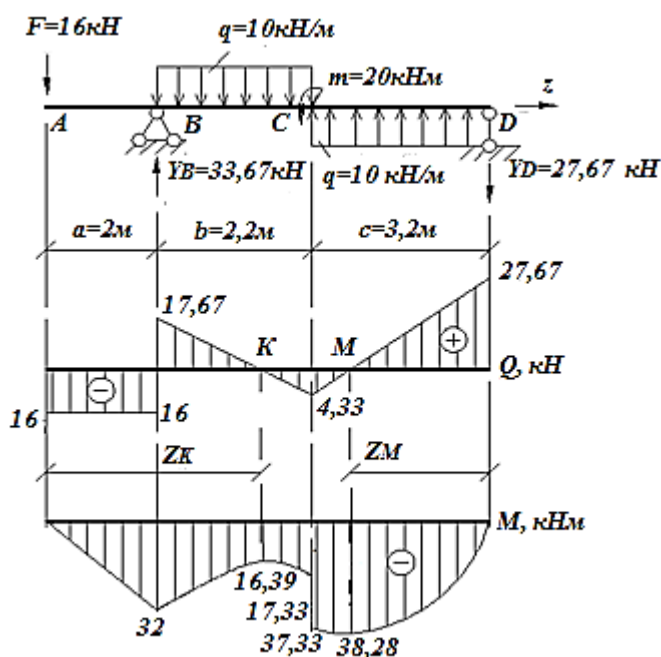


Рис. 32 – Схема балки. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

В точке A: $Q_A = -16 \text{ кН}, M_A = 0.$

В точке B (левее): $Q_B = -16 \text{ кН}, M_B = -16 \cdot 2 = -32 \text{ кНм}.$

В точке B (правее): $Q_B = -16 + 33,67 = 17,67 \text{ кН}, M_B = -32 \text{ кНм}.$

В точке C (левее): $Q_C = 17,67 - 10 \cdot 2,2 = -4,33 \text{ кН},$

$M_C = -16 \cdot 4,2 - 10 \cdot 2,2 \cdot 1,1 + 33,67 \cdot 2,2 = -17,33 \text{ кНм}.$

В точке C (правее): $Q_C = -4,33 \text{ кН}, M_C = -17,33 - 20 = -37,33 \text{ кНм}.$

В точке D: $Q_D = -4,33 + 10 \cdot 3,2 = 27,67 \text{ кН},$

$M_D = -16 \cdot 7,4 - 10 \cdot 2,2 \cdot 4,3 + 33,67 \cdot 5,4 - 20 + 10 \cdot 3,2 \cdot 1,6 = 0.$

Определим значение изгибающих моментов в точке K и M (в этих точках эпюра поперечных сил меняет знак).

$$z_K = a + \frac{Q_B}{q} = 2 + \frac{17,67}{10} = 3,77 \text{ м},$$

$$M_K = -F \cdot z_K + Y_B \cdot (z_K - a) - q \cdot (z_K - a) \cdot \frac{(z_K - a)}{2} =$$

$$= -16 \cdot 3,77 + 33,67 \cdot 1,77 - 10 \cdot \frac{1,77^2}{2} = -16,39 \text{ кНм},$$

$$z_M = \frac{Q_D}{q} = \frac{27,67}{10} = 2,77 \text{ м},$$

$$M_M = -Y_D \cdot z_M + q \cdot z_M \cdot \frac{z_M}{2} = -27,67 \cdot 2,77 + 10 \cdot \frac{2,77^2}{2} = -38,28 \text{ кНм}.$$

Подберём круглое сечение из условия прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Из эпюры изгибающих моментов (рис.32) выберем максимальный изгибающий момент: $M_{\max} = 38,28 \text{ кНм}$.

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{38,28 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^6} = 2,393 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 2393 \text{ см}^3,$$

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}, \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 2393}{3,14}} = 28,99 \text{ см}.$$

Принимаем $d = 29 \text{ см}$, $W_x = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 29^3}{32} = 2393 \text{ см}^3$.

Определим максимальное нормальное напряжение:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{38,28 \cdot 10^3}{2393 \cdot 10^{-6}} = 16 \cdot 10^6 \text{ Па} = 16 \text{ МПа} = [\sigma] = 16 \text{ МПа}.$$

Проверим прочность по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^{\text{отс}}}{J_x b} \leq [\tau].$$

Из эпюры поперечных сил (рис.32) выберем максимальную поперечную силу: $Q_{\max} = 27,67 \text{ кН}$.

$$J_x = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 29^4}{64} = 34700,97 \text{ см}^4,$$

$$S_x^{\text{отс}} = \frac{\pi d^2}{8} \cdot 0,212d = \frac{3,14 \cdot 29^2}{8} \cdot 0,212 \cdot 29 = 2029,41 \text{ см}^3, \quad b = d = 29 \text{ см},$$

$$\tau_{\max} = \frac{27,67 \cdot 10^3 \cdot 2029,41 \cdot 10^{-6}}{34700,97 \cdot 10^{-8} \cdot 29 \cdot 10^{-2}} = 0,56 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0,56 \text{ МПа} < 2 \text{ МПа}.$$

Прочность деревянной балки по нормальным и касательным напряжениям обеспечена.

Пример 15.

Для заданной балки (рис.33) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, проверить прочность. Поперечное сечение балки – двутавр № 30, $[\sigma] = 210 \text{ МПа}$, $[\tau] = 130 \text{ МПа}$.

Решение.

Данная шарнирная балка может рассматриваться как сочетание консольной балки DE и подвесной двухопорной балки AD , для которой правой опорой является конец консоли D первой балки.

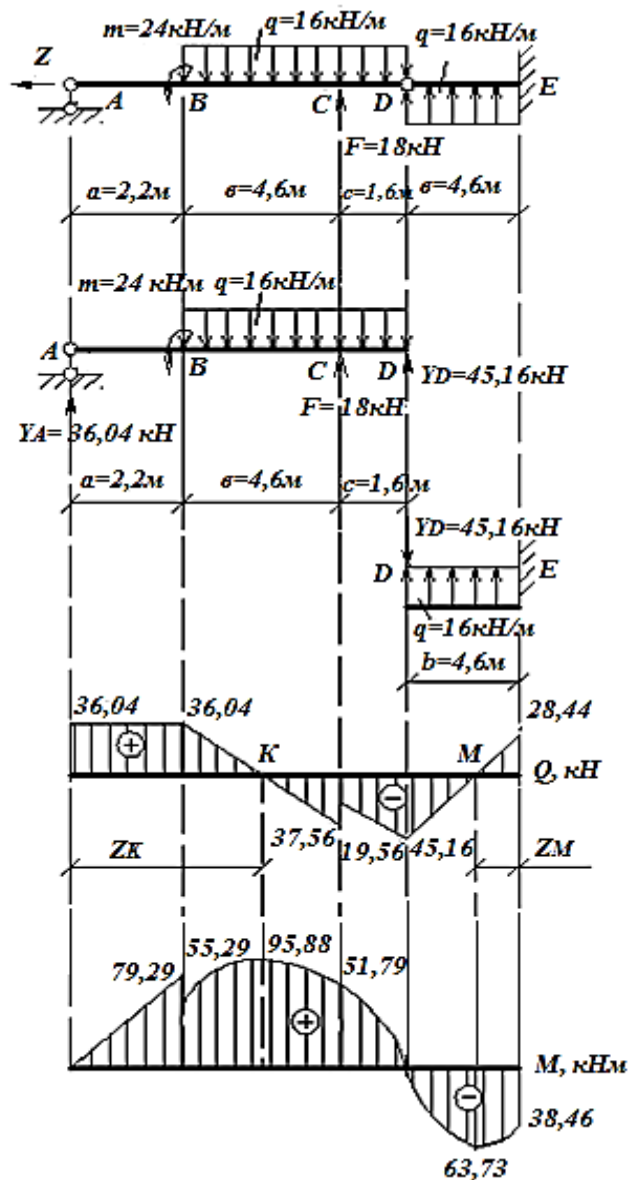


Рис. 33 – Схема шарнирной балки. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Рассмотрим равновесие подвесной балки AD и определим ее опорные реакции:

$$\sum M_A = 0; \Rightarrow -Y_D(a+b+c) - F(a+b) + q(b+c)\left(a + \frac{b+c}{2}\right) - m = 0,$$

$$-Y_D \cdot 8,4 - 18 \cdot 6,8 + 16 \cdot 6,2 \cdot 5,3 - 24 = 0; \Rightarrow Y_D = 45,16 \text{ кН},$$

$$\sum M_D = 0; \Rightarrow Y_A \cdot (a + b + c) - m - q \cdot (b + c) \cdot \frac{b + c}{2} + F \cdot c = 0,$$

$$Y_A \cdot 8,4 - 24 - 16 \cdot 6,2 \cdot 3,1 + 18 \cdot 1,6 = 0; \Rightarrow Y_A = 36,04 \text{ кН}.$$

Определим правильность определения опорных реакций:

$$\sum Y = 0; \Rightarrow Y_A + F + Y_D - q \cdot (b + c) = 0,$$

$$36,04 + 18 + 45,16 - 16 \cdot 6,2 = 0.$$

Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

В точке A : $Q_A = 36,04 \text{ кН}, M_A = 0.$

В точке B (левее): $Q_B = 36,04 \text{ кН}, M_B = 36,04 \cdot 2,2 = 79,29 \text{ кНм}.$

В точке B (правее): $Q_B = 36,04 \text{ кН}, M_B = 79,29 - 24 = 55,29 \text{ кНм}.$

В точке C (левее): $Q_C = 36,04 - 16 \cdot 4,6 = -37,56 \text{ кН},$

$$M_C = 36,04 \cdot 6,8 - 24 - 16 \cdot 4,6 \cdot 2,3 = 51,79 \text{ кНм}.$$

В точке C (правее): $Q_C = -37,56 + 18 = -19,56 \text{ кН}, M_C = 51,79 \text{ кНм}.$

В точке D : $Q_D = -19,56 - 16 \cdot 1,6 = -45,16 \text{ кН},$

$$M_C = 36,04 \cdot 8,4 - 24 - 16 \cdot 6,2 \cdot 3,1 + 18 \cdot 1,6 = 0.$$

Рассмотрим консольную балку DE . Реакцию Y_D прикладываем в точке D с противоположным знаком. Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов с учётом Y_D .

В точке D : $Q_D = -4,16 \text{ кН}, M_D = 0,$

В точке E : $Q_E = -45,16 + 16 \cdot 4,6 = 28,44 \text{ кН},$

$$M_E = -45,16 \cdot 4,6 + 16 \cdot 4,6 \cdot 2,3 = -38,46 \text{ кНм}.$$

Определим величину изгибающих моментов в точках K и M (в данных точках эпюра поперечных сил меняет знак, рис.33):

$$z_K = a + \frac{Q_B}{q} = 2,2 + \frac{36,04}{16} = 4,45 \text{ м},$$

$$M_K = -36,04 \cdot 4,45 + -24 - 16 \cdot \frac{2,25^2}{2} = 95,88 \text{ кНм},$$

$$z_M = \frac{Q_E}{q} = \frac{28,44}{16} = 1,78 \text{ м},$$

$$M_M = -45,16 \cdot (4,6 - 1,78) + 16 \cdot \frac{(4,6 - 1,78)^2}{2} = -63,73 \text{ кНм}.$$

Проверим прочность балки по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Для двутавра № 30 из сортамента (Приложение 1) выпишем значение момента сопротивления: $W_x = 472 \text{ см}^3.$

Из эпюры изгибающих моментов: $M_{\max} = 95,88 \text{ кНм}.$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{95,88 \cdot 10^3}{472 \cdot 10^{-6}} = 203,13 \cdot 10^6 \text{ Па} = 203,13 \text{ МПа} < [\sigma] = 210 \text{ МПа}.$$

Недогрузка составляет:

$$\frac{210 - 203,13}{210} \cdot 100\% = 3,3\%.$$

Проверим прочность балки по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^{\text{отс}}}{J_x b} \leq [\tau], \quad Q_{\max} = 45,16 \text{ кН}.$$

Геометрические характеристики для двутавра № 30 выбираем из Приложения 1: $J_x = 7080 \text{ см}^4$, $S_x^{\text{отс}} = 268 \text{ см}^3$, $b = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

$$\tau_{\max} = \frac{45,16 \cdot 10^3 \cdot 268 \cdot 10^{-6}}{7080 \cdot 10^{-8} \cdot 6,5 \cdot 10^{-3}} = 26,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 26,3 \text{ МПа} < 130 \text{ МПа}.$$

Прочность двутавровой балки по нормальным и касательным напряжениям обеспечена.

Пример 16.

Для заданной балки (рис.34) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и проверить прочность. Поперечное сечение балки – двутавр № 24, $[\sigma] = 210 \text{ МПа}$, $[\tau] = 130 \text{ МПа}$.

Решение.

Данная шарнирная балка может рассматриваться как сочетание балки AD , лежащей на двух опорах и подвесной двухопорной балки DE .

Рассмотрим равновесие подвесной балки DE . Определим реакции опор:

$$\sum M_D = 0; \Rightarrow -Y_E \cdot a + q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + m = 0,$$

$$-Y_E \cdot 4,2 + 12 \cdot \frac{4,2^2}{2} + 10 = 0; \Rightarrow Y_E = 27,58 \text{ кН},$$

$$\sum M_E = 0; \Rightarrow Y_D \cdot a - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + m = 0,$$

$$Y_D \cdot 4,2 - 12 \cdot \frac{4,2^2}{2} + 10 = 0; \Rightarrow Y_D = 22,82 \text{ кН}.$$

Проверяем правильность определения реакций опор:

$$\sum Y = 0; \Rightarrow Y_D + Y_E - q \cdot a = 0,$$

$$22,82 + 27,58 - 12 \cdot 4,2 = 0.$$

Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов на участке DE шарнирной балки.

В точке E : $Q_E = -27,58 \text{ кН}$, $M_E = -10 \text{ кНм}$.

В точке D : $Q_D = -27,58 + 12 \cdot 4,2 = 22,82 \text{ кН}$.

$$M_D = -m + Y_E \cdot a - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = -10 + 27,58 \cdot 4,2 - 12 \cdot \frac{4,2^2}{2} = 0.$$

Определим реакции опор балки AD , приложив в точке D реакцию Y_D , взятую с обратным знаком.

$$\sum M_A = 0; \Rightarrow -Y_C \cdot (a+b) - F \cdot a + q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + Y_D \cdot (a+b+c) = 0,$$

$$-Y_C \cdot 6,4 - 20 \cdot 4,2 + 12 \cdot \frac{4,2^2}{2} + 22,82 \cdot 8,8 = 0; \Rightarrow Y_C = 34,79 \text{ кН},$$

$$\sum M_C = 0; \Rightarrow Y_A \cdot (a+b) - q \cdot a \cdot \left(\frac{a}{2} + b\right) + F \cdot b + Y_D \cdot c = 0,$$

$$Y_A \cdot 6,4 - 12 \cdot 4,2 \cdot 4,3 + 20 \cdot 2,2 + 22,82 \cdot 2,4 = 0; \Rightarrow Y_A = 18,43 \text{ кН}.$$

Проверяем правильность определения реакций опор:

$$\sum Y = Y_A + F + Y_C - q \cdot a - Y_D = 0,$$

$$18,43 + 20 + 34,79 - 12 \cdot 4,2 - 22,82 = 0.$$

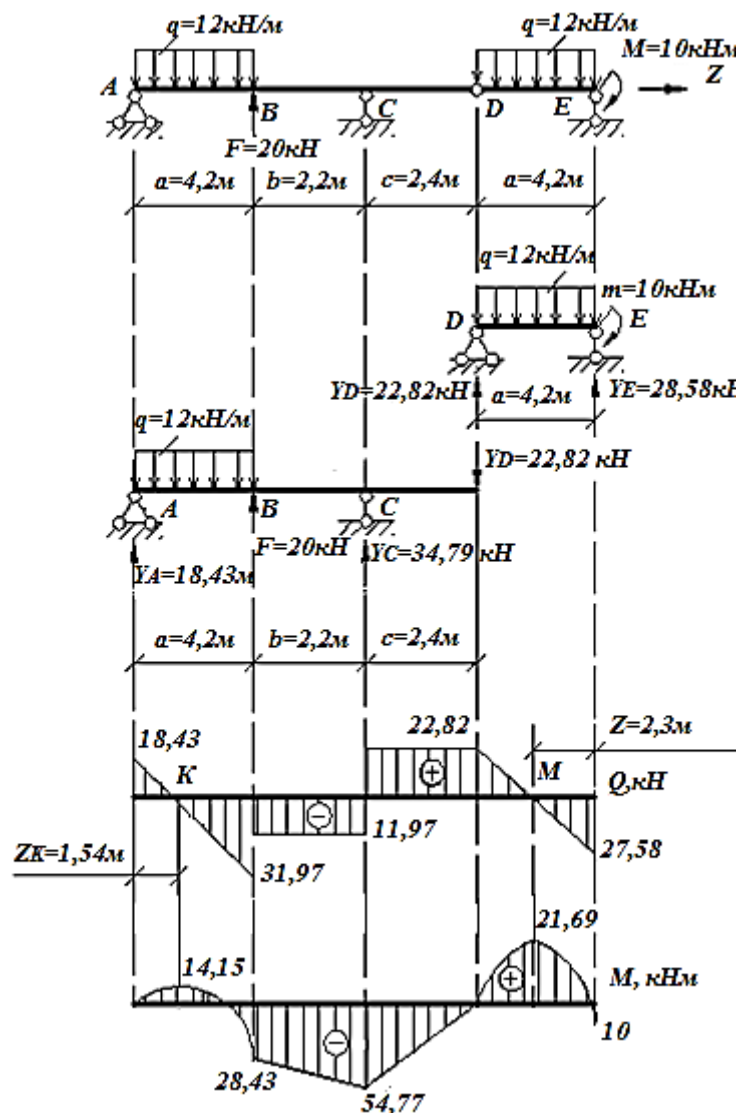


Рис. 34 – Схема шарнирной балки. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов на участке AD шарнирной балки.

В точке D : $Q_D = 22,82$ кН, $M_D = 0$.

В точке C (правее): $Q_C = 22,82$ кН, $M_C = -22,82 \cdot 2,4 = -54,77$ кНм.

В точке C (левее): $Q_C = 22,82 - 34,79 = -11,97$ кН, $M_C = -54,77$ кНм.

В точке B (правее): $Q_B = -11,97$ кН,

$$M_B = -22,82 \cdot 4,6 + 34,79 \cdot 2,2 = -28,43 \text{ кНм.}$$

В точке B (левее): $Q_B = -11,97 - 20 = -31,97$ кН, $M_B = -28,43$ кНм.

В точке A : $Q_A = -31,97 + 12 \cdot 4,2 = 18,43$ кН, $M_A = 0$.

Определим координаты точек K и M :

$$z_K = \frac{Q_K}{q} = \frac{18,43}{12} = 1,54 \text{ м}, \quad z_M = \frac{Q_E}{q} = \frac{27,58}{12} = 2,30 \text{ м.}$$

Вычислим значение изгибающих моментов в точках K и M :

$$M_K = Y_A \cdot z_K - q \cdot \frac{z_K^2}{2} = 18,43 \cdot 1,54 - 12 \cdot \frac{1,54^2}{2} = 14,15 \text{ кНм,}$$

$$M_M = Y_E \cdot z_M - q \cdot \frac{z_M^2}{2} - m = 27,58 \cdot 2,3 - 12 \cdot \frac{2,3^2}{2} - 10 = 21,69 \text{ кНм.}$$

Проверим несущую способность балки:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Для двутавра № 24 из сортамента (Приложение 1) выпишем значение момента сопротивления: $W_x = 289 \text{ см}^3$.

Из эпюры изгибающих моментов: $M_{\max} = 54,77$ кНм.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{54,77 \cdot 10^3}{289 \cdot 10^{-6}} = 189,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 189,5 \text{ МПа} < [\sigma] = 210 \text{ МПа}$$

Прочность балки по нормальным напряжениям обеспечена.

Проверим прочность балки по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^{\text{отс}}}{J_x b} \leq [\tau].$$

Для двутавра № 24 из сортамента (Приложение 1) выпишем: $J_x = 3460 \text{ см}^4$, $S_x^{\text{отс}} = 163 \text{ см}^3$, $b = 5,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

Из эпюры поперечных сил: $Q_{\max} = 27,58$ кН.

$$\tau_{\max} = \frac{31,97 \cdot 10^3 \cdot 163 \cdot 10^{-6}}{3460 \cdot 10^{-8} \cdot 5,6 \cdot 10^{-3}} = 26,9 \cdot 10^6 \text{ Па} = 26,9 \text{ МПа} < 130 \text{ МПа.}$$

Прочность балки по касательным напряжениям обеспечена.

Пример 17.

Для заданной шарнирной балки (рис.35) построить эпюры внутренних усилий и проверить прочность. Поперечное сечение балки – двутавр № 24, $[\sigma] = 210 \text{ МПа}$, $[\tau] = 130 \text{ МПа}$.

Решение.

Данная балка может рассматриваться как сочетание балок EK , CE , последовательно лежащих на консоли AC .

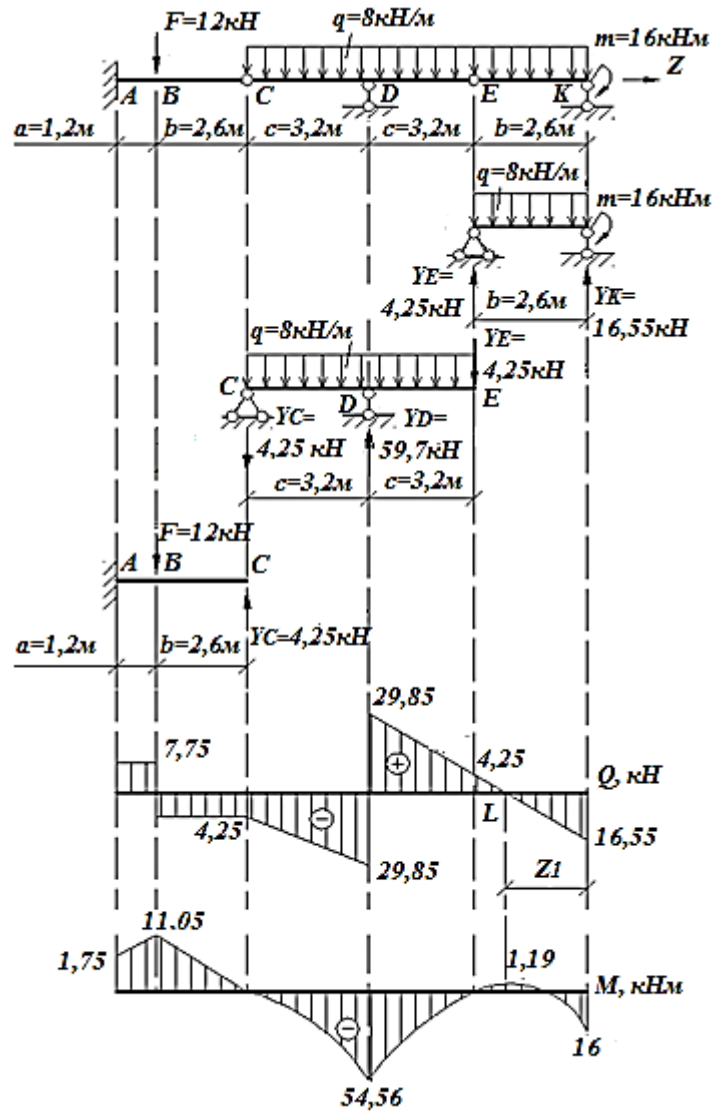


Рис. 35 – Схема шарнирной балки и эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Рассмотрим равновесие подвесной балки EK . Определим реакции опор:

$$\sum M_E = 0; \Rightarrow -Y_K \cdot b + q \cdot b \cdot \frac{b}{2} + m = 0,$$

$$-Y_K \cdot 2,6 + 8 \cdot \frac{2,6^2}{2} + 16 = 0; \Rightarrow Y_K = 16,55 \text{ кН},$$

$$\sum M_K = 0; \Rightarrow Y_E \cdot b - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} + m = 0,$$

$$Y_E \cdot 2,6 - 8 \cdot \frac{2,6^2}{2} + 16 = 0; \Rightarrow Y_E = 4,25 \text{ кН}.$$

Проверим правильность определения реакций опор:

$$\sum Y = 0; \Rightarrow 16,55 + 4,25 - 8 \cdot 2,6 = 0.$$

Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов на участке EK шарнирной балки (рис.35).

$$\text{В точке } K: Q_K = -16,55 \text{ кН}, M_K = -16 \text{ кНм}.$$

$$\text{В точке } E: Q_E = -16,55 + 8 \cdot 2,6 = 4,25 \text{ кН},$$

$$M_E = 16,55 \cdot 2,6 - 8 \cdot 2,6 \cdot \frac{2,6}{2} - 16 = 0.$$

Рассмотрим равновесие подвешенной балки CE . Определим реакции опор. Реакцию Y_E прикладываем к балке с обратным знаком.

$$\sum M_C = 0; \Rightarrow Y_E \cdot 2c + q \cdot 2c \cdot \frac{2c}{2} - Y_D \cdot c = 0,$$

$$4,25 \cdot 6,4 + 8 \cdot \frac{6,4^2}{2} - Y_D \cdot 3,2 = 0; \Rightarrow Y_D = 59,7 \text{ кН},$$

$$\sum M_D = 0; \Rightarrow -Y_C \cdot c + Y_E \cdot c = 0; \Rightarrow Y_C = Y_E = 4,25 \text{ кН}.$$

Проверяем правильность определения реакций опор:

$$\sum Y = 0; \Rightarrow Y_D - q \cdot 2c - Y_C - Y_E = 0; \Rightarrow 59,7 - 8 \cdot 6,4 - 4,25 - 4,25 = 0.$$

Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов на участке CE шарнирной балки:

$$\text{В точке } E: Q_E = 4,25 \text{ кН}, M_E = 0.$$

$$\text{В точке } D \text{ (справа): } Q_D = 4,25 + 8 \cdot 3,2 = 29,85 \text{ кН},$$

$$M_D = -4,25 \cdot 3,2 - 8 \cdot \frac{3,2^2}{2} = -54,56 \text{ кНм}.$$

$$\text{В точке } D \text{ (слева): } Q_D = 29,85 - 59,7 = -29,85 \text{ кН}, M_D = -54,56 \text{ кНм}.$$

$$\text{В точке } C: Q_C = -29,85 + 8 \cdot 3,2 = -4,25 \text{ кН},$$

$$M_C = -4,25 \cdot 6,4 - 8 \cdot \frac{6,4^2}{2} + 59,7 \cdot 3,2 = 0.$$

Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов на консольной балке AC (реакцию Y_C прикладываем с обратным знаком):

$$\text{В точке } C: Q_C = -4,25 \text{ кН}, M_C = 0.$$

$$\text{В точке } B \text{ (справа): } Q_B = -4,25 \text{ кН}, M_B = 4,25 \cdot 2,6 = 11,05 \text{ кНм}.$$

$$\text{В точке } B \text{ (слева): } Q_B = -4,25 + 12 = 7,75 \text{ кН}, M_B = 11,05 \text{ кНм}.$$

$$\text{В точке } A: Q_A = 7,75 \text{ кН}, M_A = 4,25 \cdot 3,8 - 12 \cdot 1,2 = 1,75 \text{ кНм}.$$

Определим момент в точке L (эпюра поперечных сил меняет знак):

$$z_L = \frac{Q_K}{q} = \frac{16,55}{8} = 2,07 \text{ м},$$

$$M_L = Y_K \cdot z_L - m - q \cdot \frac{z_L^2}{2} = 16,55 \cdot 2,07 - 16 - 8 \cdot \frac{2,07^2}{2} = 1,19 \text{ кНм}.$$

Проверим несущую способность балки:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Из эпюры изгибающих моментов (рис.35): $M_{\max} = 54,56 \text{ кНм}.$

Из Приложения 1: $W_x = 289 \text{ см}^3$.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{54,56 \cdot 10^3}{289 \cdot 10^{-6}} = 188,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 188,8 \text{ МПа} < [\sigma] = 210 \text{ МПа}.$$

Прочность балки по нормальным напряжениям обеспечена.

Проверим прочность балки по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^{\text{отс}}}{J_x b} \leq [\tau].$$

Из эпюры поперечных сил: $Q_{\max} = 29,85 \text{ кН}$.

Для двутавра № 24 из сортамента (Приложение 1) выпишем: $J_x = 3460 \text{ см}^4$, $S_x^{\text{отс}} = 163 \text{ см}^3$, $b = 5,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

$$\tau_{\max} = \frac{29,85 \cdot 10^3 \cdot 163 \cdot 10^{-6}}{3460 \cdot 10^{-8} \cdot 5,6 \cdot 10^{-3}} = 25,1 \cdot 10^6 \text{ Па} = 25,1 \text{ МПа} < 130 \text{ МПа}.$$

Прочность балки по касательным напряжениям обеспечена.

Пример 18.

Для заданной рамы (рис. 36) построить эпюры продольных сил, поперечных сил и изгибающих моментов.

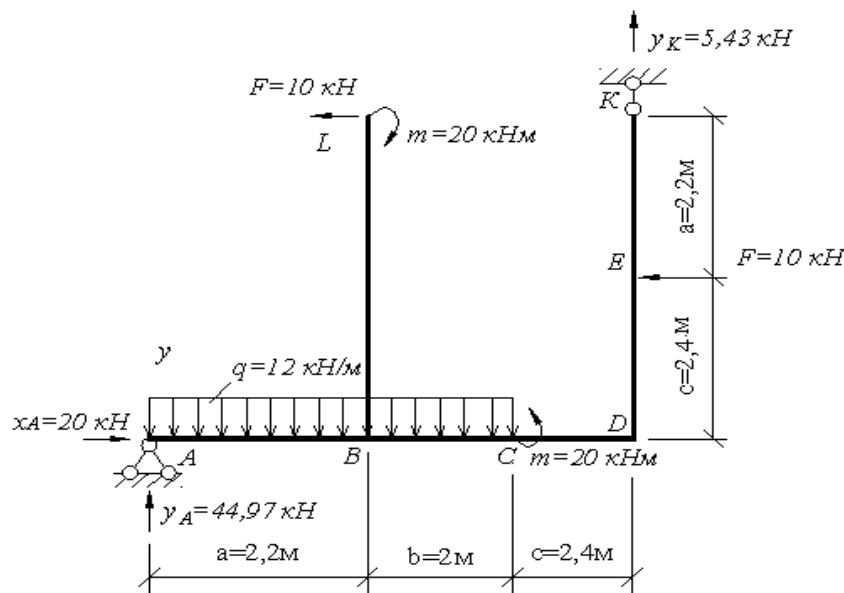


Рис. 36 – Схема рамы

Решение.

Определим реакции опор, составив уравнения равновесия:

$$\sum X = 0; \Rightarrow X_A - F - F = 0; \Rightarrow X_A = 2F = 20 \text{ кН},$$

$$\sum M_A = 0; \Rightarrow -Y_K \cdot (a + b + c) - F \cdot c - F \cdot (a + c) + m - m + q \cdot \frac{(a + b)^2}{2} = 0,$$

$$-Y_K \cdot 6,6 - 10 \cdot 2,4 - 10 \cdot 4,6 + 20 - 20 + 12 \cdot \frac{4,2^2}{2} = 0; \Rightarrow Y_K = 5,43 \text{ кН}.$$

$$\sum M_K = 0; \Rightarrow -X_A \cdot (a+c) + Y_A \cdot (a+b+c) - q \cdot (a+b) \cdot \left(\frac{a+b}{2} + c \right) + m - m + F \cdot a = 0,$$

$$-20 \cdot 4,6 + Y_A \cdot 6,6 - 12 \cdot 4,2 \cdot 4,5 + 20 - 20 + 10 \cdot 2,2 = 0; \Rightarrow Y_A = 44,97 \text{ кН}.$$

Проверим правильность определения опорных реакций:

$$\sum Y = 0; \Rightarrow -q \cdot (a+b) + Y_A + Y_K = -12 \cdot 4,2 + 44,97 + 5,43 = 0.$$

Построим эпюру продольных сил (рис.37).

Участок AB : $N_{AB} = -20 \text{ кН}$ (сжатие).

Участок BD : $N_{BD} = -20 + 10 = -10 \text{ кН}$ (сжатие).

Участок KD : $N_{KD} = 5,43 \text{ кН}$ (растяжение).

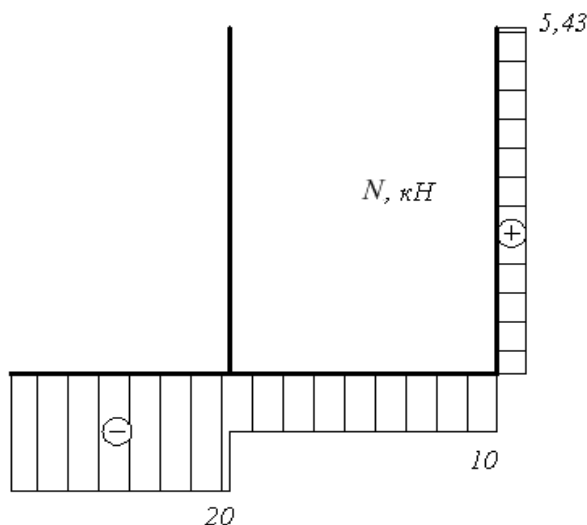


Рис. 37 – Схема рамы и эпюра продольных сил

Построим эпюры поперечных сил (рис.38).

Участок AB : $Q_A = 44,97 \text{ кН}$, $Q_B = 44,97 - 12 \cdot 2,2 = 18,57 \text{ кН}$.

Участок BD : $Q_C = 18,57 - 12 \cdot 2 = -5,43 \text{ кН}$, $Q_D = -5,43 \text{ кН}$.

Участок ED : $Q_E = -10 \text{ кН}$, $Q_D = Q_E = -10 \text{ кН}$.

Участок LB : $Q_L = -10 \text{ кН}$, $Q_B = -10 \text{ кН}$.

Построим эпюру изгибающих моментов (рис.38).

Участок AB : $M_A = 0$, $M_B = 44,97 \cdot 2,2 - 12 \cdot 2,2 \cdot \frac{2,2}{2} =$
 $= 98,934 - 29,04 = 69,894 \text{ кНм}$ (сжатые волокна сверху).

Участок LB : $M_L = 20 \text{ кНм}$ (сжатые волокна справа),

$M_B = 20 - 10 \cdot 4,6 = -26 \text{ кНм}$ (сжатые волокна слева).

Участок BC : $M_B = 69,894 - 26 = 43,894 \text{ кНм}$ (сжатые волокна сверху),

$M_C = 43,894 - 12 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} + 18,57 \cdot 2 = 57,032 \text{ кНм}$ (сжатые волокна сверху).

Участок KD : $M_K = 0$, $M_E = 0$,

$M_D = 10 \cdot 2,4 = 24 \text{ кНм}$ (сжатые волокна сверху).

Участок DC : $M_D = 24 \text{ кНм}$ (сжатые волокна сверху).

$$M_C \text{ (правее)} = 24 + 5,43 \cdot 2,4 = 37,032 \text{ кНм},$$

$$M_C \text{ (левее)} = 37,032 + 20 = 57,032 \text{ кНм (сжатые волокна сверху).}$$

Найдем значение экстремального значения момента:

$$z_0 = c + \frac{Q_C}{q} = 2,4 + \frac{5,43}{12} = 2,85 \text{ м},$$

$$M_0 = 10 \cdot 2,4 + 20 + 5,43 \cdot 2,85 - 12 \cdot \frac{0,45^2}{2} = 44 + 15,49 - 1,23 = 58,261 \text{ кНм}$$

(сжатые волокна сверху)

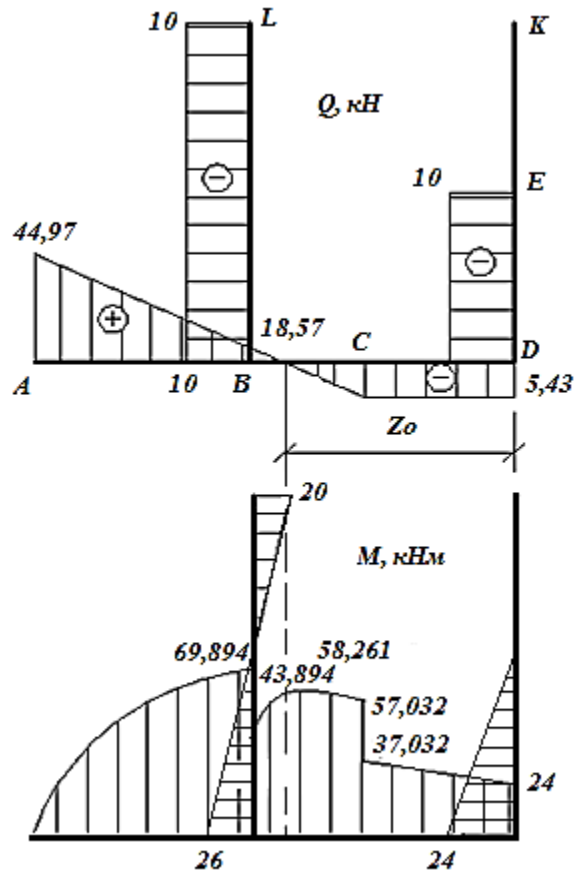
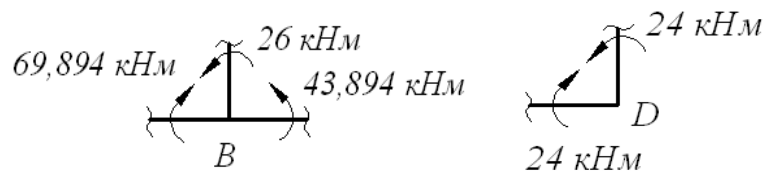


Рис. 38 – Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Проверим равновесие узлов.



Равновесие узлов выполняется.

Пример 19.

Для заданной рамы (рис 39) построить эпюры продольных сил, поперечных сил и изгибающих моментов.

Решение.

Определим реакции опор:

$$\sum M_A = 0; \Rightarrow -M_A + q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - F \cdot a + m - m + q \cdot b \cdot \left(\frac{b}{2} + a\right) + F \cdot c = 0,$$

$$M_A = 10 \cdot 4 \cdot 2 - 20 \cdot 4 + 16 - 16 + 10 \cdot 2 \cdot 5 + 20 \cdot 6 = 220 \text{ кНм},$$

$$\sum Y = 0; \Rightarrow Y_A - q \cdot a + F - q \cdot b = 0; \Rightarrow Y_A = 10 \cdot 4 - 20 + 10 \cdot 2 = 40 \text{ кН},$$

$$\sum X = 0; \Rightarrow X_A - F = 0; \Rightarrow X_A = F = 20 \text{ кН}.$$

Построим эпюру продольных сил (рис.39).

Участок ED: $N_E = N_D = 0$.

Участок DC: $N_D = N_C = q \cdot b = 10 \cdot 2 = 20 \text{ кН}$ (растяжение).

Участок AC: $N_A = N_B = N_C = -X_A = -20 \text{ кН}$ (сжатие).

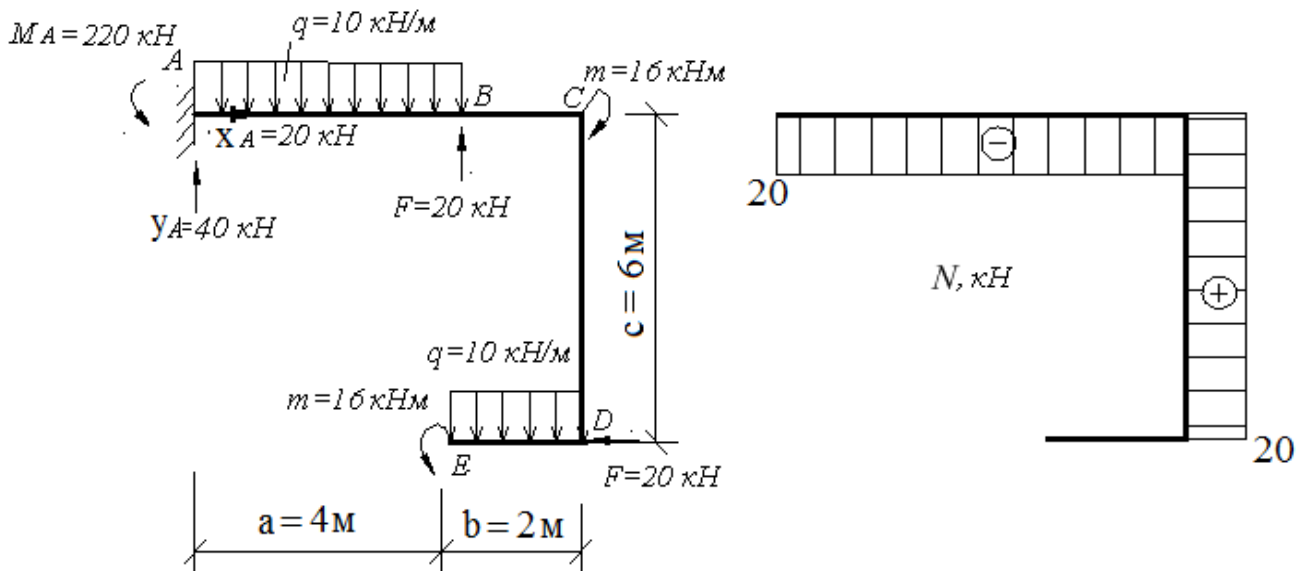


Рис. 39 – Схема рамы и эпюра продольных сил

Построим эпюру поперечных сил (рис. 40).

Участок ED: $Q_E = 0, Q_D = -q \cdot b = -10 \cdot 2 = -20 \text{ кН}$.

Участок DC: $Q_D = Q_C = F = 20 \text{ кН}$.

Участок AC: $Q_A = 0, Q_B^I = Y_A - q \cdot a = 40 - 10 \cdot 4 = 0$,

$$Q_B^{II} = Y_A - q \cdot a + F = 20 \text{ кН}, Q_C = Y_A - q \cdot a + F = 20 \text{ кН}.$$

Построим эпюру изгибающих моментов (рис.40).

Участок ED: $M_E = -m = -16 \text{ кНм}$,

$$M_D = -m - q \cdot \frac{b^2}{2} = -16 - 10 \cdot \frac{2^2}{2} = -36 \text{ кНм (сжатые волокна снизу)}.$$

Участок DC: $M_D = m + q \cdot \frac{b^2}{2} = 16 + 10 \cdot \frac{2^2}{2} = 36$ кНм (сжатые волокна справа),

$M_C = m + q \cdot \frac{b^2}{2} - F \cdot c = 16 + 10 \cdot \frac{2^2}{2} - 20 \cdot 6 = -84$ кНм (сжатые волокна слева).

Участок AC: $M_A = -M_A = -220$ кНм (сжатые волокна снизу),

$M_B = -M_A + Y_A \cdot a - q \cdot \frac{a^2}{2} = -220 + 40 \cdot 4 - 10 \cdot \frac{4^2}{2} = -140$ кНм,

$M_C = -M_A + Y_A(a+b) - q \cdot a \cdot \left(\frac{a}{2} + b\right) + F \cdot b =$
 $= -220 + 40 \cdot 6 - 10 \cdot 4 \cdot 4 + 20 \cdot 2 = -100$ кНм (сжатые волокна снизу).

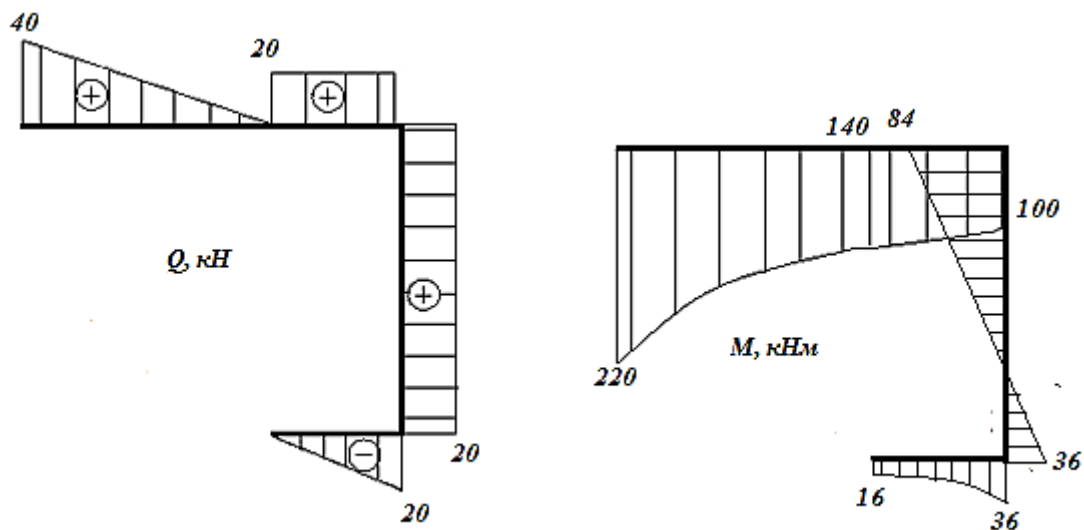
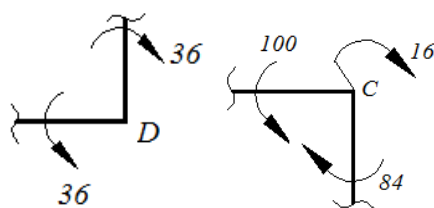


Рис. 40 – Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Проверим равновесие узлов:



Равновесие узлов выполняется.

3.5. Определение перемещений при изгибе балок

3.5.1. Метод начальных параметров

При изгибе балок возникают линейные и угловые перемещения. Составляющими перемещений вдоль оси обычно пренебрегают.

Линейным перемещением или прогибом балки называют перемещение центра тяжести поперечного сечения по нормали к недеформированной оси балки.

Угол, на который поперечное сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению, при отсутствии сдвига, называют угловым перемещением или углом поворота сечения.

Прогиб и угол поворота в любом сечении балки определяют с помощью универсального уравнения метода начальных параметров:

$$EIv_z = EIv_0 + EI\theta_0 z + \frac{M_0 z^2}{2} + \frac{Q_0 z^3}{6} + \frac{q_0 z^4}{24} + \sum_{i=1}^n \left| \begin{array}{l} z > a_i \\ z > a_i \end{array} \right. \frac{M_i (z - a_i)^2}{2} + \sum_{j=1}^n \left| \begin{array}{l} z > b_j \\ z > b_j \end{array} \right. \frac{F_j (z - b_j)^3}{6} + \sum_{k=1}^n \left| \begin{array}{l} z > c_k \\ z > c_k \end{array} \right. \frac{q_k (z - c_k)^4}{24} \quad (30)$$

$$EI\theta_z = EI\theta_0 + M_0 z + \frac{Q_0 z^2}{2} + \frac{q_0 z^3}{6} + \sum_{i=1}^n \left| \begin{array}{l} z > a_i \\ z > a_i \end{array} \right. M_i (z - a_i) + \sum_{j=1}^n \left| \begin{array}{l} z > b_j \\ z > b_j \end{array} \right. \frac{F_j (z - b_j)^2}{2} + \sum_{k=1}^n \left| \begin{array}{l} z > c_k \\ z > c_k \end{array} \right. \frac{q_k (z - c_k)^3}{6} \quad (31)$$

где v_0 , θ_0 , M_0 , Q_0 , q_0 – начальные параметры, т.е. прогиб, угол поворота, момент, поперечная сила и интенсивность распределенной нагрузки в начале координат. Начало координат всегда принимаем на левом конце балки.

Начальные параметры v_0 , и θ_0 определяются из граничных условий, т.е. из условий закрепления балки на опорах. Если начало координат совпадает с защемленным концом балки, то начальные параметры v_0 , и θ_0 равны нулю, если начало координат совпадает с шарнирной опорой, то $v_0 = 0$, а $\theta_0 \neq 0$. Начальный параметр θ_0 определяется из условия закрепления правого опорного сечения, т.е. из уравнения $EIv_{z=l} = 0$.

M_i , F_j , q_k – внешние силовые факторы в пределах балки.

z – расстояние от начала координат до сечения, в котором определяют перемещения.

a_i , b_j , c_k – расстояния от начала координат, соответственно, до момента, силы и начала распределенной нагрузки.

Знаки $\left| \begin{array}{l} z > a_i \\ z > a_i \end{array} \right.$, $\left| \begin{array}{l} z > b_j \\ z > b_j \end{array} \right.$, $\left| \begin{array}{l} z > c_k \\ z > c_k \end{array} \right.$ означают, что соответствующие силовые факторы, после которых они поставлены, необходимо учитывать при $z > a_i$, $z > b_j$ и $z > c_k$ и не надо – при $z \leq a_i$, $z \leq b_j$ и $z \leq c_k$.

Все силовые факторы подставляются в уравнения (30) и (31) с учетом знаков.

Если распределенная нагрузка не доходит до сечения, в котором определяют перемещения, то её необходимо продлить до рассматриваемого сечения и одновременно приложить такую же по величине и противоположно направленную нагрузку.

Если ось Y направлена вверх, то знак плюс прогиба свидетельствует о том, что линейное перемещение также направлено вверх.

Знак плюс угла поворота показывает, что поперечное сечение поворачивается против хода часовой стрелки.

Пример 20.

Балка нагружена расчетной нагрузкой. Материал балки – сталь с допускаемыми напряжениями $[\sigma] = 210$ МПа, $[\tau] = 130$ МПа и модулем продольной упругости $E = 200$ ГПа.

Требуется:

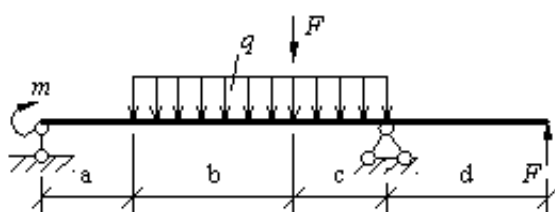
1) подобрать сечение балки двутаврового профиля и проверить прочность с учетом собственного веса;

2) в одном из сечений балки, имеющем одновременно большие значения поперечной силы Q и изгибающего момента M , определить напряжения σ и τ на уровне примыкания полки к стенке; проверить прочность, используя энергетическую теорию прочности; для сравнения выполнить проверку прочности по третьей теории прочности; выделить вокруг указанной точки элемент балки и показать на схеме нормальные, касательные и главные напряжения;

3) с использованием уравнений метода начальных параметров определить углы поворота сечений над опорами, прогибы посередине пролета и на конце консоли, построить эпюру прогибов балки.

4) проверить жесткость балки при допустимом относительном прогибе:

$$\frac{y_{\max}}{l} = \frac{1}{200}.$$



$$\begin{aligned} a &= 2 \text{ м}, \quad b = 3 \text{ м}, \\ c &= 2 \text{ м}, \quad d = 4 \text{ м}, \\ F &= 20 \text{ кН}, \\ M &= 10 \text{ кНм}, \\ q &= 12 \text{ кН/м}. \end{aligned}$$

Рис. 41 – Схема балки

Решение.

Определим опорные реакции в балке и построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Составим уравнение равновесия:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; \Rightarrow & -F \cdot (a+b+c+d) - Y_D \cdot (a+b+c) + \\ & + F \cdot (a+b) + q \cdot (b+c) \cdot \left(\frac{b+c}{2} + a \right) + m = 0, \end{aligned}$$

$$-20 \cdot 11 - Y_D \cdot 7 + 20 \cdot 5 + 12 \cdot 5 \cdot 4,5 + 10 = 0; \Rightarrow Y_D = 22,857 \text{ кН},$$

$$\sum M_D = 0; \Rightarrow Y_A \cdot (a+b+c) + m - q \cdot \frac{(b+c)^2}{2} - F \cdot c - F \cdot d = 0; \Rightarrow Y_A = 37,143 \text{ кН}.$$

Осуществляем проверку правильности определения опорных реакций:

$$\sum Y = 0; \Rightarrow Y_A + Y_D - q \cdot (b+c) - F + F = 37,143 + 22,857 - 12 \cdot 5 - 20 + 20 = 0.$$

Строим эпюру поперечных сил (рис. 42):

$$Q_A = Y_A = 37,143 \text{ кН}, \quad Q_B = Q_A = 37,143 \text{ кН},$$

$$\begin{aligned}
 Q_C \text{ (левее)} &= Q_A - q \cdot b = 37,143 - 36 = 1,143 \text{ кН}, \\
 Q_C \text{ (правее)} &= Q_C \text{ (левее)} - F = 1,143 - 20 = -18,857 \text{ кН}, \\
 Q_D \text{ (левее)} &= Q_C \text{ (правее)} - q \cdot c = -18,857 - 12 \cdot 2 = -42,857 \text{ кН}, \\
 Q_D \text{ (правее)} &= Q_D \text{ (левее)} + Y_D = -42,857 + 22,857 = -20 \text{ кН}, \\
 Q_K &= -20 \text{ кН}.
 \end{aligned}$$

Строим эпюру изгибающих моментов (рис. 42):

$$\begin{aligned}
 M_A &= m = 10 \text{ кНм}, \\
 M_B &= m + Y_A \cdot a = 10 + 37,143 \cdot 2 = 84,286 \text{ кНм}, \\
 M_C &= m + Y_A \cdot (a + b) - q \cdot \frac{b^2}{2} = 10 + 37,143 \cdot 5 - 12 \cdot \frac{3^2}{2} = 141,715 \text{ кНм}, \\
 M_D &= m + Y_A \cdot (a + b + c) - q \cdot \frac{(b + c)^2}{2} - F \cdot c = 10 + 37,143 \cdot 7 - 12 \cdot \frac{5^2}{2} - 20 \cdot 2 = 80 \text{ кНм}, \\
 M_K &= 0.
 \end{aligned}$$

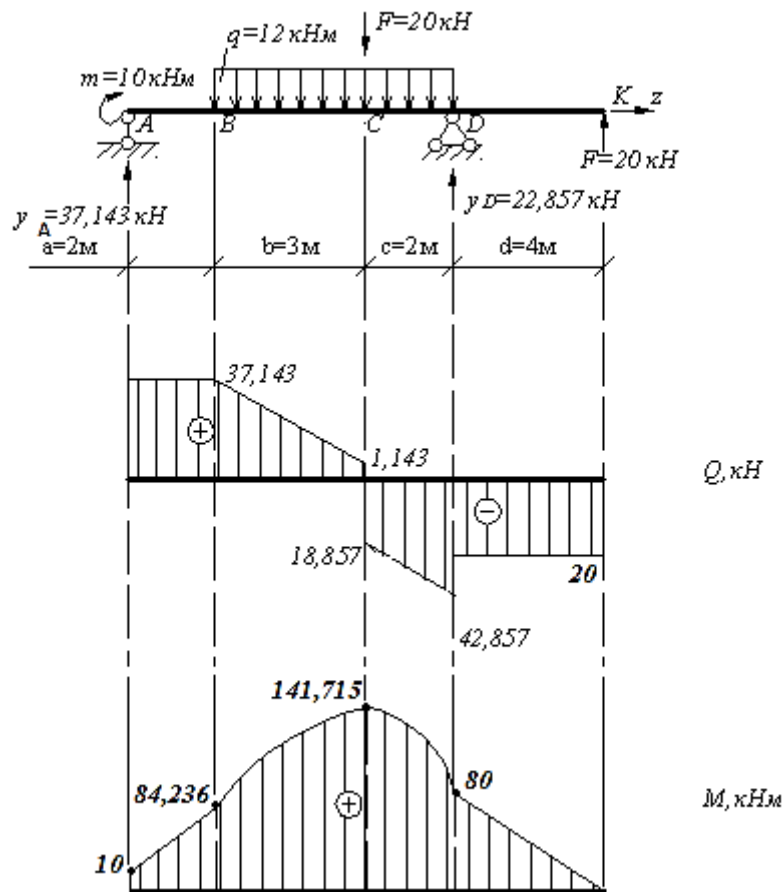


Рис. 42 – Схема балки. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Подберем сечение балки в виде двутавра, используя следующее условие прочности: $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$, откуда требуемый момент сопротивления

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{141,715 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,675 \cdot 10^3 \text{ м}^3 = 675 \text{ см}^3,$$

где $M_{\max} = 141,715$ кНм (согласно эпюре изгибающих моментов).

Пользуясь сортаментом (Приложение 1), выбираем двутавр №36:
 $W_x = 743$ см³, $I_x = 13380$ см⁴, $S_x^{\text{отс}} = 423$ см³, $q = 486 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ (собственный вес балки),
 $d = 7,5$ мм, $b = 145$ мм, $t = 12,3$ мм, $A = 61,9$ см².

Проверим прочность балки с учетом собственного веса.

Определим опорные реакции от действия собственного веса балки
 $\left(q = 486 \frac{\text{Н}}{\text{м}} \right)$.

$$\sum M_A = 0; \Rightarrow \sum M_A = -Y_D \cdot (a+b+c) + q \cdot \frac{(a+b+c+d)^2}{2} = 0,$$

$$-Y_D \cdot 7 + 0,486 \cdot \frac{11^2}{2} = 0; \Rightarrow Y_D = 4,2 \text{ кН},$$

$$\sum M_D = 0; \Rightarrow \sum M_D = Y_A \cdot (a+b+c) - q \cdot \frac{(a+b+c)^2}{2} + q \cdot \frac{d^2}{2} = 0,$$

$$Y_A \cdot 7 - 0,486 \cdot \frac{7^2}{2} + 0,486 \cdot \frac{4^2}{2} = 0; \Rightarrow Y_A = 1,146 \text{ кН},$$

$$\sum Y = q \cdot (a+b+c+d) - Y_A - Y_D = 0,486 \cdot 11 - 4,2 - 1,146 = 0.$$

Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис.43).

$$Q_A = Y_A = 1,146 \text{ кН},$$

$$Q_D \text{ (левее)} = Y_A - q \cdot (a+b+c) = 1,146 - 0,486 \cdot 7 = -2,256 \text{ кН},$$

$$Q_D \text{ (правее)} = -2,256 + Y_D = -2,256 + 4,2 = 1,944 \text{ кН},$$

$$Q_K = 0,$$

$$M_A = 0,$$

$$M_D = Y_A \cdot (a+b+c) - q \cdot \frac{(a+b+c)^2}{2} = 1,146 \cdot 7 - 0,486 \cdot \frac{7^2}{2} = 3,885 \text{ кНм},$$

$$M_K = 0,$$

$$z_N = \frac{Q_A}{q} = \frac{1,146}{0,486} = 2,358 \text{ м},$$

$$M_N = Y_A \cdot z_N - q \cdot \frac{z_N^2}{2} = 1,146 \cdot 2,358 - 0,486 \cdot \frac{2,358^2}{2} = 1,351 \text{ кНм},$$

$$M_C = Y_A \cdot (a+b) - q \cdot \frac{(a+b)^2}{2} = 1,146 \cdot 5 - 0,486 \cdot \frac{5^2}{2} = -0,345 \text{ кНм}.$$

Усилия в балке с учетом собственного веса:

$$Q_{\max} = 42,867 + 2,256 = 45,123 \text{ кН},$$

$$M_{\max} = 141,715 - 0,345 = 141,370 \text{ кНм}.$$

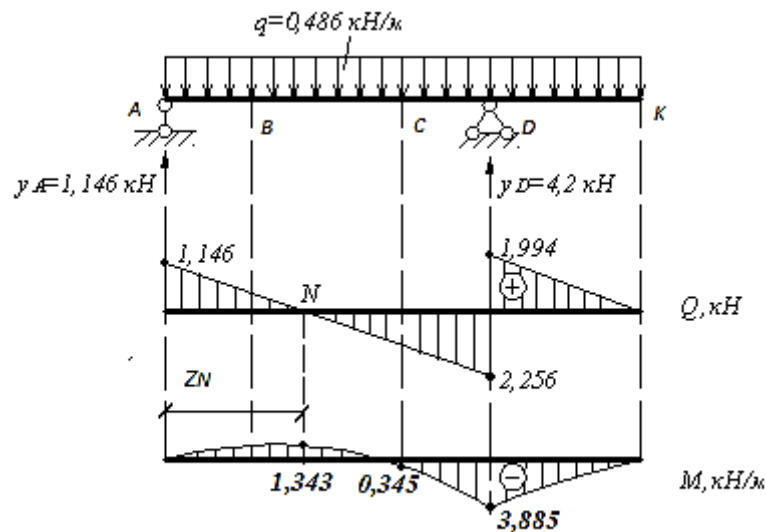


Рис. 43 – Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов от собственного веса балки

Прочность балки с учетом собственного веса:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{141,370 \cdot 10^3}{743 \cdot 10^{-6}} = 190,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 190,2 \text{ МПа} < [\sigma] = 210 \text{ МПа},$$

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x^{\text{отс}}}{b \cdot I_x} = \frac{45,123 \cdot 10^3 \cdot 423 \cdot 10^{-6}}{7,5 \cdot 10^{-3} \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = 19,02 \cdot 10^6 \text{ Па} = 19,02 \text{ МПа} < [\tau] = 130 \text{ МПа}$$

Прочность балки с учетом собственного веса обеспечена.

В точке D проведем исследование напряженного состояния:

$$M_D = 80 \text{ кНм}, Q_D = -42,857 \text{ кН}.$$

Проведем анализ сечения.

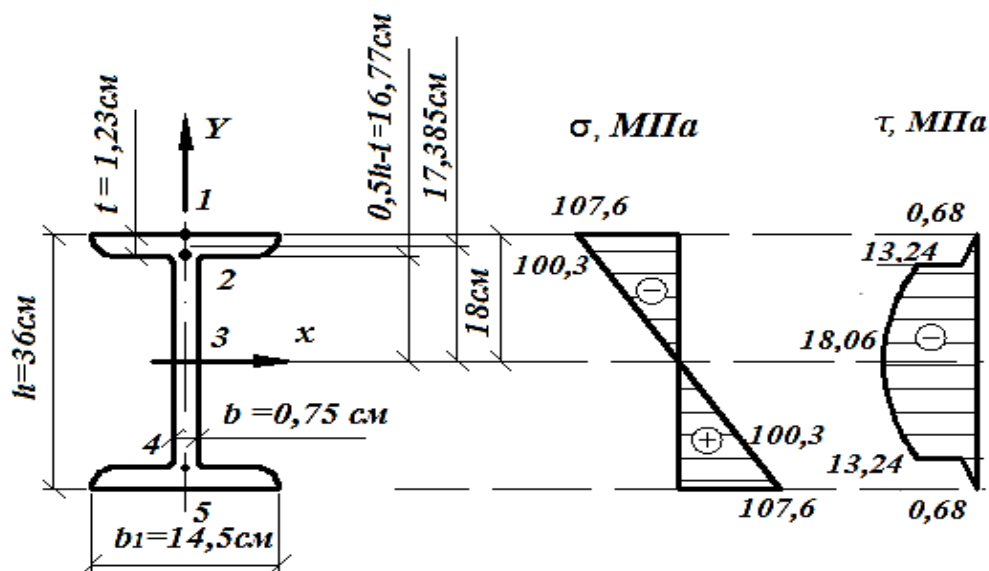


Рис. 44 – Сечение балки. Эпюры нормальных и касательных напряжений

Нормальные напряжения определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} \cdot y,$$

$$\sigma_1 = -\frac{M_D}{I_x} \cdot y_1 = -\frac{80 \cdot 10^3}{13380 \cdot 10^{-8}} \cdot 18 \cdot 10^{-2} = -107,6 \text{ МПа (сжатие)},$$

$$\sigma_2 = -\frac{M_D}{I_x} \cdot y_2 = -\frac{80 \cdot 10^3}{13380 \cdot 10^{-8}} \cdot 16,77 \cdot 10^{-2} = -100,3 \text{ МПа (сжатие)},$$

$$\sigma_3 = 0,$$

$$\sigma_4 = -\sigma_2 = 100,3 \text{ МПа (растяжение)},$$

$$\sigma_5 = -\sigma_1 = 107,6 \text{ МПа (растяжение)}.$$

Касательные напряжения определим по формуле:

$$\tau = \frac{Q_x \cdot S_x^{\text{отс}}}{I_x \cdot b},$$

$$\tau_1 = 0,$$

$$S_x^{\text{отс}} \text{ (для точки 2)} = t \cdot b_1 \cdot \left(\frac{h}{2} + \frac{t}{2} \right) = 14,5 \cdot 1,23 \cdot 17,385 = 310,06 \text{ см}^3,$$

$$\tau_2 = -\frac{42,857 \cdot 10^3 \cdot 310,06 \cdot 10^{-6}}{13380 \cdot 10^{-8} \cdot 14,5 \cdot 10^{-2}} = -0,68 \text{ МПа},$$

$$\tau_2' = -\frac{42,857 \cdot 10^3 \cdot 310,06 \cdot 10^{-6}}{13380 \cdot 10^{-8} \cdot 7,5 \cdot 10^{-3}} = -13,24 \text{ МПа},$$

$$\tau_3 = -\frac{42,857 \cdot 10^3 \cdot 423 \cdot 10^{-6}}{13380 \cdot 10^{-8} \cdot 7,5 \cdot 10^{-3}} = -18,06 \text{ МПа},$$

$$\tau_4 = \tau_2; \tau_4' = \tau_2'; \tau_5 = 0.$$

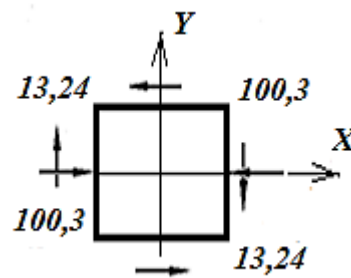


Рис. 45 – Нормальные и касательные напряжения в точке 2

Определим главные напряжения и положение главных осей в точке 2 сечения:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = -\frac{100,3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{100,3}{2}\right)^2 + 13,24^2} = -50,15 \pm 51,87 \text{ МПа},$$

$$\sigma_1 = -50,15 + 51,87 = 1,72 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = -50,15 - 51,87 = -102,02 \text{ МПа},$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{\tau}{\sigma_1} = \frac{-13,24}{1,72} = -7,69; \Rightarrow \alpha_1 = -82,6^\circ,$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{\tau}{\sigma_2} = \frac{-13,24}{-102,02} = 0,13; \Rightarrow \alpha_2 = 7,4^\circ.$$

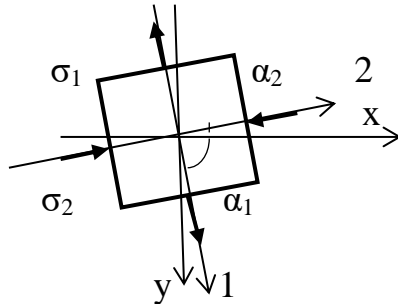


Рис. 46 – Положение главных напряжений и главных осей

Проведем проверку прочности балки по четвертой теории прочности:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sigma_1^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_2^2 \right]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[1,72^2 + (1,72 + 102,02)^2 + 102,02^2 \right]} = 102,89 \text{ МПа} < [\sigma] = 210 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Проведем проверку прочности балки, используя третью теорию прочности:

$$\sigma_0 = \sigma_1 - \sigma_2 = 1,72 + 102,02 = 103,74 \text{ МПа} < [\sigma] = 210 \text{ МПа}.$$

Построим упругую линию балки (рис. 47), используя метод начальных параметров. Обобщенное уравнение изогнутой оси имеет вид:

$$\begin{aligned} EI_x \theta &= EI_x \theta_0 + \sum m \cdot (z - a) + \sum \frac{F \cdot (z - b)^2}{2} + \sum \frac{q \cdot (z - c)^2}{6}, \\ EI_x v &= EI_x v_0 + EI_x \theta_0 z + \sum \frac{m \cdot (z - a)^2}{2} + \sum \frac{F \cdot (z - b)^3}{6} + \sum \frac{q \cdot (z - c)^4}{24}, \end{aligned}$$

где a, b, c – координаты соответствующих нагрузок.

Для определения начальных параметров v_0 и θ_0 зададимся условием, что прогиб на опоре D равен 0.

Запишем уравнение прогибов для сечения $z = 7$ м:

$$EI_x v_{(z=7 \text{ м})} = EI_x \theta_0 \cdot 7 + \frac{y_A \cdot (7-0)^3}{6} + \frac{m \cdot (7-0)^2}{2} - \frac{F \cdot (7-5)^3}{6} - \frac{q \cdot (7-2)^4}{24} = 0,$$

$$EI_x \theta_0 \cdot 7 + \frac{31,143 \cdot (7-0)^3}{6} + \frac{10 \cdot (7-0)^2}{2} - \frac{20 \cdot (7-5)^3}{6} - \frac{12 \cdot (7-2)^4}{24} = 0,$$

$$EI_x \theta_0 = -289,88.$$

Определим прогиб в середине пролета при $z = 3,5$ м:

$$EI_x v_{(z=3,5 \text{ м})} = EI_x \theta_0 \cdot 3,5 + \frac{Y_A \cdot (3,5-0)^3}{6} + \frac{m \cdot (3,5-0)^2}{2} - \frac{q \cdot (3,5-2)^4}{24} =$$

$$= -289,88 \cdot 3,5 + \frac{37,143 \cdot (3,5-0)^3}{6} + \frac{10 \cdot (3,5-0)^2}{2} - \frac{10 \cdot (3,5-2)^4}{24} = -690,44;$$

$$v_{(z=3,5 \text{ м})} = -\frac{690,44}{EI_x} = -\frac{690,44 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = -0,026 \text{ м} = -2,6 \text{ см}.$$

Определим прогиб в конце пролета при $z = 11 \text{ м}$:

$$EI_x v_{(z=11 \text{ м})} = EI_x \theta_0 \cdot 11 + \frac{y_A \cdot (11-0)^3}{6} + \frac{m \cdot (11-0)^2}{2} - \frac{F \cdot (11-5)^3}{6} -$$

$$- \frac{q \cdot (11-2)^4}{24} + \frac{q \cdot (11-7)^4}{24} + \frac{Y_D \cdot (11-7)^3}{6} =$$

$$= -289,88 \cdot 11 + \frac{37,143 \cdot (11-0)^3}{6} + \frac{10 \cdot (11-0)^2}{2} - \frac{20 \cdot (11-5)^3}{6} -$$

$$- \frac{12 \cdot (11-2)^4}{24} + \frac{12 \cdot (11-7)^4}{24} + \frac{22,857 \cdot (11-7)^3}{6} = 2027,19;$$

Так как распределенная нагрузка q действует не до конца балки, то продляем ее до точки K , приложив на участке DK q с обратным знаком.

$$v_{(z=11 \text{ м})} = \frac{2027,19}{EI_x} = \frac{2027,19 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = 0,075 \text{ м} = 7,5 \text{ см}.$$

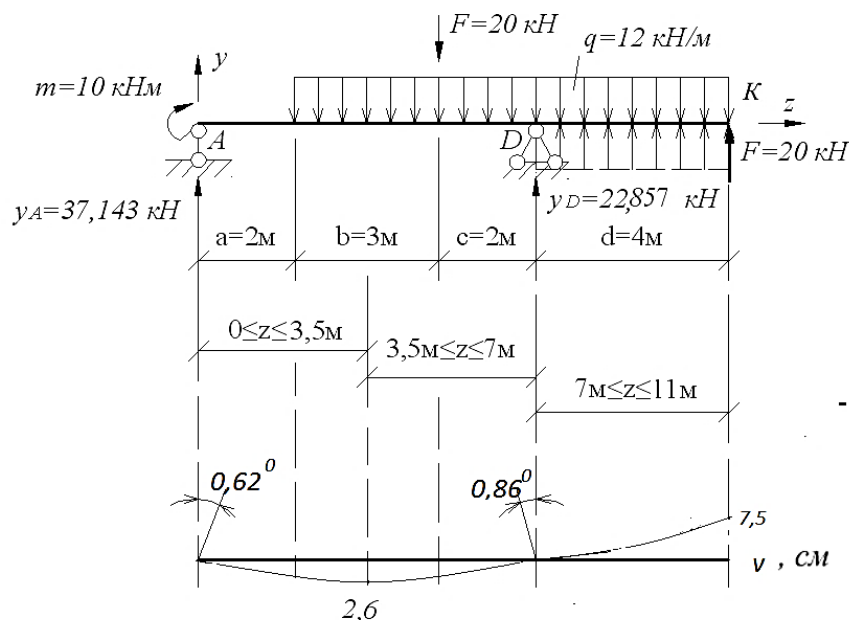


Рис. 47 – Упругая линия балки

Определим углы поворота на опорах:

$$\theta_{(z=0 \text{ м})} = \frac{-289,88 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = -0,0108 \text{ рад}.$$

Переведем в градусы, умножив на $\frac{180}{\pi}$:

$$Q_{(z=0 \text{ м})} = \frac{-0,0108 \cdot 180}{3,14} = -0,62^\circ,$$

$$EI_x \theta_{(z=7 \text{ м})} = EI_x \theta_0 + \frac{y_A \cdot (7-0)^2}{2} + \frac{m \cdot (7-0)^1}{1} - \frac{F \cdot (7-5)^2}{2} - \frac{q \cdot (7-2)^3}{6} =$$
$$= -289,88 + \frac{37,143 \cdot (7-0)^2}{2} + \frac{10 \cdot (7-0)^1}{1} - \frac{20 \cdot (7-5)^2}{2} - \frac{12 \cdot (7-2)^3}{6} = 400,12;$$

$$\theta_{(z=7 \text{ м})} = \frac{400,12 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = 0,015 \text{ рад} = \frac{0,015 \cdot 180}{3,14} = 0,86^\circ.$$

Определим максимальный относительный прогиб в пролете балки:

$$\frac{v_{\max}}{l} = \frac{2,6}{700} = \frac{1}{269} < \frac{1}{200}.$$

Условие жесткости выполняется.

3.6. Статически неопределимые балки

Статически неопределимыми называются балки, опорные реакции у которых невозможно определить при помощи одних лишь уравнений равновесия, т.к. они имеют «лишние» неизвестные реакции.

Степень статической неопределимости определяется разностью между числом неизвестных реакций и числом независимых уравнений равновесия.

Раскрытие статической неопределимости балки заключается в определении лишних неизвестных реакций путем составления к уравнениям равновесия такого количества дополнительных уравнений, сколько раз она статически неопределима.

Существует несколько методов раскрытия статической неопределимости балок. Выбор метода связан со степенью статической неопределимости. Если «лишних» неизвестных немного (одна-две), дополнительные уравнения целесообразно составить исходя из деформационных условий (прогибов) на опорах балки, используя метод начальных параметров.

У неразрезных балок степень статической неопределимости может быть высокой. В таких случаях дополнительные уравнения составляются исходя из деформационных условий (углов поворота сечений) на промежуточных опорах балки, используя метод сил.

Из совместного решения уравнений равновесия и дополнительных определяются все опорные реакции балки.

Для ведения расчета статически неопределимой балки выбирается так называемая основная система, которая получается из статически неопределимой балки путем удаления «лишних» связей. Основная система должна быть статически определимой, геометрически и кинематически неизменяемой. Она выбирается по-разному.

Расчет статически неопределимых балок на прочность и жесткость ведется также, как и статически определимых.

Пример 21.

Неразрезная балка нагружена расчетной нагрузкой (рис. 48, а). Материал балки – сталь с допускаемыми напряжениями $[\sigma] = 210$ МПа, $[\tau] = 130$ МПа и модулем продольной упругости $E = 200$ ГПа, $F = 4$ кН, $q = 3$ кН/м, $a = 2$ м.

Требуется:

- 1) построить эпюру поперечных сил и изгибающих моментов;
- 2) подобрать сечение из прокатного двутавра;
- 3) определить прогибы на концах и посередине каждого пролета балки и показать очертание ее изогнутой оси (использовать любой из известных методов определения прогибов).

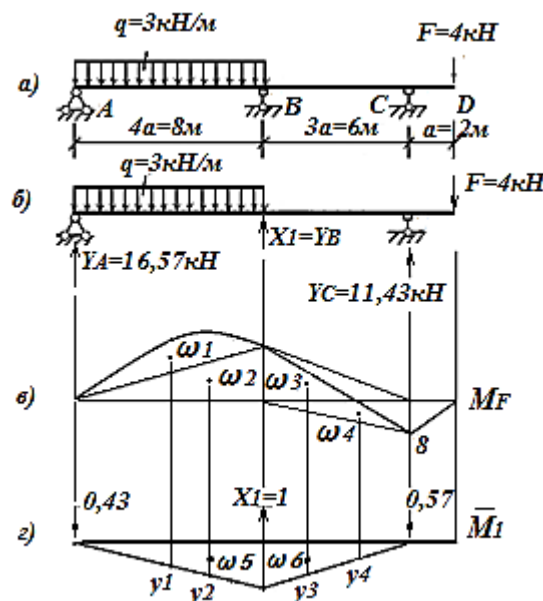


Рис. 48 – Схема балки, основная система, грузовая и единичная эпюры

Решение.

Данная схема имеет одну избыточную связь, т. е. балка один раз статически неопределима. Для образования основной системы отбросим шарнирную опору B и приложим в этом сечении неизвестную силу $X_1 = Y_B$ (рис.48, б).

Построим эпюру изгибающих моментов (M_F) в основной системе (рис.48, в), определив опорные реакции:

$$\sum M_A = 0; \Rightarrow F \cdot 8a - Y_C \cdot 7a + q \cdot 4a \cdot 2a = 0,$$

$$4 \cdot 16 - Y_C \cdot 14 + 3 \cdot 8 \cdot 4 = 0; \Rightarrow Y_C = 11,43 \text{ кН},$$

$$\sum M_C = 0; \Rightarrow Y_A \cdot 7a - q \cdot 4a \cdot 5a + F \cdot a = 0,$$

$$Y_A \cdot 7 \cdot 2 - 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 0; \Rightarrow Y_A = 16,57 \text{ кН},$$

$$\sum Y = 0; \Rightarrow Y_A + Y_C - F - q \cdot 4a = 0; \Rightarrow 16,57 + 11,43 - 4 - 3 \cdot 8 = 0,$$

$$M_A = 0; M_B = Y_A \cdot 4a - q \cdot 4a \cdot 2a = 16,57 \cdot 8 - 3 \cdot 8 \cdot 4 = 36,56 \text{ кНм},$$

$$M_C = Y_A \cdot 7a - q \cdot 4a \cdot 5a = 16,57 \cdot 14 - 3 \cdot 8 \cdot 10 = -8 \text{ кНм}.$$

Приложим в точке B вместо отброшенной связи силу $X_1 = 1$ и построим единичную эпюру (\overline{M}_1) (рис.48, г).

Определим повторно опорные реакции от единичной нагрузки:

$$\sum M_A = 0; \Rightarrow -Y_C \cdot 7a - 1 \cdot 4a = 0; \Rightarrow -Y_C \cdot 14 - 8 = 0; \Rightarrow Y_C = 0,57 \text{ кН},$$

$$\sum M_C = 0; \Rightarrow Y_A \cdot 7a + 1 \cdot 3a = 0; \Rightarrow Y_A \cdot 14 + 6 = 0; \Rightarrow Y_A = 0,43 \text{ кН},$$

$$\sum Y = 0; \Rightarrow -0,57 - 0,43 + 1 = 0,$$

$$M_A = 0; M_B = -0,43 \cdot 8 = -3,44 \text{ кНм}; M_C = 0.$$

Запишем каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

Для определения коэффициента и грузовой составляющей уравнения перемножаем грузовую (M_F) и единичную (\overline{M}_1) эпюры с использованием правила Верещагина. Предварительно разделим грузовую эпюру на простые фрагменты (рис.48, в).

Рассчитаем глубину параболы:

$$f = \frac{ql^2}{8} = \frac{3 \cdot 8^2}{8} = 24 \text{ кНм},$$

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_1}{EI} dz = \frac{1}{EI} (\omega_5 \cdot y_2 + \omega_6 \cdot y_4) =$$

$$= \frac{1}{EI} \left(\frac{3,44 \cdot 8}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,44 + \frac{3,44 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,44 \right) = \frac{55,23}{EI},$$

$$\Delta_{1F} = \int_0^l \frac{\overline{M}_1 \cdot M_F}{EI} dz = \frac{1}{EI} (-\omega_1 \cdot y_1 - \omega_2 \cdot y_2 + \omega_3 \cdot y_3 - \omega_4 \cdot y_4) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{2}{3} \cdot 24 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,44 - \right.$$

$$\left. - \frac{36,56 \cdot 8}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,44 - \frac{8 \cdot 6}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3,44 - \frac{36,56 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,44 \right) = -\frac{779,55}{EI}.$$

Решаем каноническое уравнение и определяем величину силы X_1 :

$$\frac{55,23}{EI} X_1 - \frac{779,55}{EI} = 0; \Rightarrow X_1 = 14,11 \text{ кН}.$$

Производим расчет основной системы с учетом нагрузки и найденной силы X_1 (рис. 49).

Определим опорные реакции:

$$\sum M_A = 0; \Rightarrow F \cdot 8a - Y_C \cdot 7a + q \cdot 4a \cdot 2a - Y_B \cdot 4a = 0,$$

$$4 \cdot 16 - Y_C \cdot 14 + 3 \cdot 8 \cdot 4 - 14,11 \cdot 8 = 0; \Rightarrow Y_C = 3,37 \text{ кН},$$

$$\sum M_C = 0; \Rightarrow Y_A \cdot 7a - q \cdot 4a \cdot 5a + Y_B \cdot 3a + F \cdot a = 0,$$

$$Y_A \cdot 7 \cdot 2 - 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 + 14,11 \cdot 6 + 4 \cdot 2 = 0; \Rightarrow Y_A = 10,52 \text{ кН},$$

$$\sum Y = 0; \Rightarrow Y_A + Y_C + Y_B - F - q \cdot 4a = 0; \Rightarrow 10,52 + 3,37 + 14,11 - 4 - 3 \cdot 8 = 0.$$

Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис.49, б и 49, в):

$$Q_A = 10,52 \text{ кН}; Q_{B(I)} = 10,52 - 3 \cdot 8 = -13,48 \text{ кН}; Q_{B(II)} = -13,48 + 14,11 = 0,63 \text{ кН},$$

$$Q_{C(I)} = 0,63 \text{ кН}; Q_{C(II)} = 0,63 + 3,37 = 4 \text{ кН},$$

$$M_A = 0; M_B = 10,52 \cdot 8 - 3 \cdot 8 \cdot 4 = 11,48 \text{ кНм},$$

$$M_C = 10,52 \cdot 14 - 3 \cdot 8 \cdot 10 + 14,11 \cdot 6 = -8 \text{ кНм}; M_D = 0,$$

$$Z_K = \frac{10,52}{3} = 3,5 \text{ м}; \Rightarrow M_K = 10,52 \cdot 3,5 - 3 \cdot 3,5 \cdot \frac{3,5}{2} = 18,45 \text{ кНм}.$$

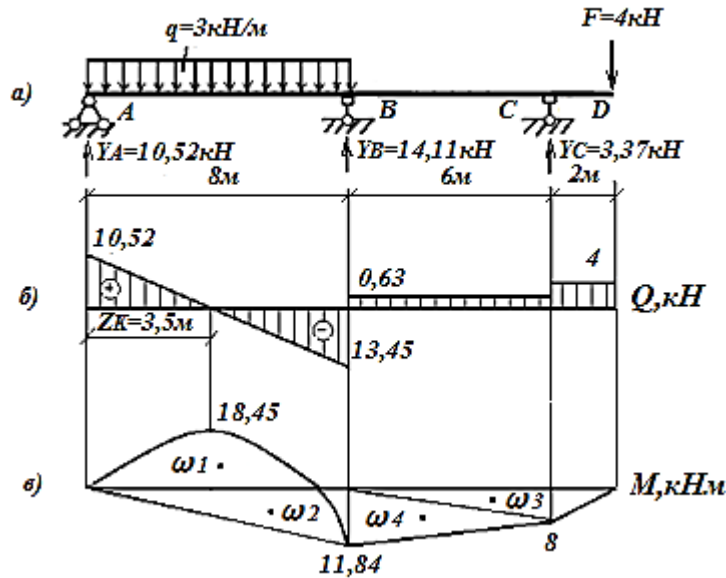


Рис. 49 – Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в исходной схеме балки

Произведем кинематическую проверку правильности решения. Для этого перемножаем конечную эпюру M на единичную \bar{M}_1 .

$$v_B = \frac{1}{EI} (-\omega_1 \cdot y_1 + \omega_2 \cdot y_2 + \omega_3 \cdot y_3 + \omega_4 \cdot y_4) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{2}{3} \cdot 24 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,44 + \right.$$

$$\left. + \frac{11,84 \cdot 8}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,44 + \frac{11,84 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,44 + \frac{8 \cdot 6}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3,44 \right) = -\frac{2,5}{EI}.$$

Ошибка: $\left| \frac{2,5}{220,16} \cdot 100\% \right| = 1,1\%$, что допустимо.

Прогиб в сечении B равен нулю, что соответствует условию его деформации. Подберем сечение балки из условия:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]; \Rightarrow W_x = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{18,45 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 87,9 \text{ см}^3.$$

Из таблицы (Приложение 1) выбираем двутавр №16 с $W_x = 109 \text{ см}^3$, $I_x = 873 \text{ см}^4$.

Определим прогибы в сечениях балки и построим упругую линию. Приложим единичные силы посреди пролетов и на конце балки, построим единичные эпюры изгибающих моментов на каждом из участков, рассматривая их отдельно (рис. 50).

Участок AB (рис. 50, а):

Предварительно разделим грузовую эпюру на простые фрагменты. Определим значения изгибающего момента посередине пролета ($z = 4$ м):

$$M_{(z=4)} = Y_A \cdot 2a - q \cdot 2a \cdot a = 10,52 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \cdot 2 = -18,08 \text{ кНм}.$$

Рассчитаем глубину параболы: $f = \frac{ql^2}{8} = \frac{3 \cdot 4^2}{8} = 6 \text{ кНм}.$

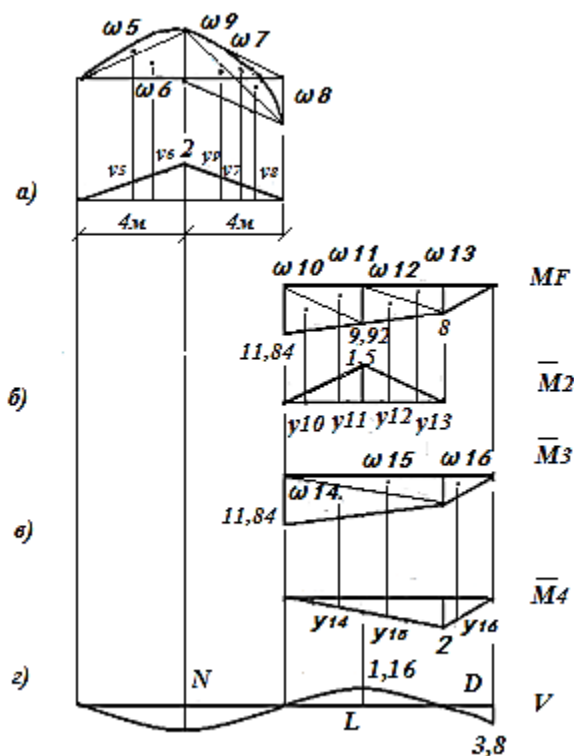


Рис. 50 – Грузовые и единичные эпюры на участках AB, BC и BD. Эпюра прогибов балки

Перемножим грузовую и единичную эпюры:

$$v_N = \frac{1}{EI} (\omega_5 \cdot y_5 + \omega_6 \cdot y_6 + \omega_7 \cdot y_7 + \omega_9 \cdot y_9 - \omega_8 \cdot y_8) = \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{18,08 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{18,08 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{11,84}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \right) = \frac{112,63}{EI}.$$

Участок BC (рис.50, б):

Определим изгибающий момент посередине пролета:

$$M_{(z=3)} = \frac{11,84 + 8}{2} = 9,92 \text{ кНм}.$$

(на участке BC эпюра изгибающих моментов линейная).

Перемножим грузовую и единичную эпюры:

$$v_L = \frac{1}{EI} (-\omega_{10} \cdot y_{10} - \omega_{11} \cdot y_{11} - \omega_{12} \cdot y_{12} - \omega_{13} \cdot y_{13}) = \frac{1}{EI} \left(\frac{11,84 \cdot 1,5}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,5 + \frac{9,92 \cdot 1,5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 + \frac{9,92 \cdot 1,5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 + \frac{8 \cdot 1,5}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,5 \right) = -\frac{20,32}{EI}.$$

Знак «минус» показывает, что направление прогиба обратно действию единичной силы.

Участок CD (рис.50, в)

Приложим единичную силу в точке D и построим единичный момент. Перемножим грузовую и единичную эпюры:

$$v_D = \frac{1}{EI} (\omega_{14} \cdot y_{14} + \omega_{15} \cdot y_{15} + \omega_{16} \cdot y_{16}) =$$

$$= \frac{1}{EI} \left(\frac{11,84 \cdot 6}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{8 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{8 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = \frac{66,34}{EI}.$$

Построим эпюру прогибов балки (рис. 50, г):

$$v_N = \frac{112,63 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = 7,23 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 7,23 \text{ мм},$$

$$v_L = -\frac{20,32 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = -1,16 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -1,16 \text{ мм},$$

$$v_D = \frac{66,34 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = 3,8 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 3,8 \text{ мм}.$$

Пример 22.

Балка нагружена расчетной нагрузкой. Материал балки – сталь с допускаемыми напряжениями $[\sigma] = 210 \text{ МПа}$, $[\tau] = 130 \text{ МПа}$ и модулем продольной упругости $E = 200 \text{ ГПа}$, $q = 12 \text{ кН/м}$, $m = 6 \text{ кНм}$, $a = 1 \text{ м}$.

Требуется:

- 1) построить эпюру поперечных сил и изгибающих моментов;
- 2) подобрать сечение из прокатного двутавра;
- 3) определить прогибы на концах и посередине каждого пролета балки и показать очертание ее изогнутой оси (использовать любой из известных методов определения прогибов).

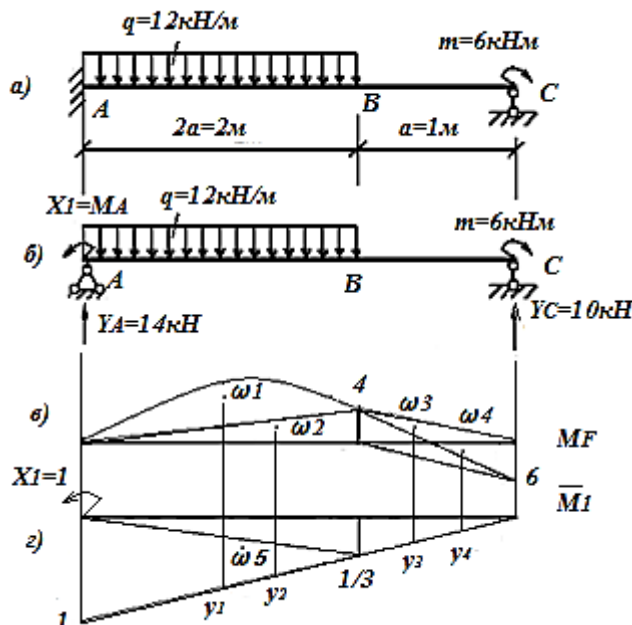


Рис. 51 – Схема балки, основная система, грузовая и единичная эпюры

Решение.

Данная схема имеет одну избыточную связь, т. е. балка один раз статически неопределима (рис.51, а). Для образования основной системы левую опору заменим на шарнирную и приложим неизвестный момент $X_1 = M_A$ (рис.51, б).

Построим эпюру изгибающих моментов (M_F) в основной системе (рис.51, в), определив опорные реакции:

$$\begin{aligned}\sum M_A = 0; & \Rightarrow -Y_C \cdot 3a + m + q \cdot 2a \cdot a = 0, \\ & -Y_C \cdot 3 + 6 + 12 \cdot 2 \cdot 1 = 0; \Rightarrow Y_C = 10 \text{ кН}, \\ \sum M_C = 0; & \Rightarrow Y_A \cdot 3a + m - q \cdot 2a \cdot 2a = 0, \\ & Y_A \cdot 3 + 6 - 12 \cdot 2 \cdot 2 = 0; \Rightarrow Y_A = 14 \text{ кН}, \\ \sum Y = 0; & \Rightarrow Y_A + Y_C - q \cdot 2a = 0; \Rightarrow 10 + 14 - 12 \cdot 2 = 0, \\ M_A = 0; & M_B = Y_A \cdot 2a - q \cdot 2a \cdot a = 14 \cdot 2 - 12 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \text{ кНм}, \\ & M_C = Y_A \cdot 3a - q \cdot 2a \cdot 2a = 14 \cdot 3 - 12 \cdot 2 \cdot 2 = -6 \text{ кНм}.\end{aligned}$$

В точке A приложим единичный момент $X_1 = 1$ и построим единичную эпюру (\overline{M}_1) (рис.51, г).

Запишем каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

Для определения коэффициента и грузовой составляющей уравнения перемножаем грузовую (M_F) и единичную (\overline{M}_1) эпюры с использованием правила Верещагина. Рассчитаем глубину параболы:

$$\begin{aligned}f &= \frac{ql^2}{8} = \frac{12 \cdot 2^2}{8} = 6 \text{ кНм}, \\ \delta_{11} &= \int_0^l \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_1}{EI} dz = \frac{1}{EI} (\omega_5 \cdot y_5) = \frac{1}{EI} \left(\frac{1 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{1}{EI}, \\ \Delta_{1F} &= \int_0^l \frac{\overline{M}_1 \cdot M_F}{EI} dz = \frac{1}{EI} (-\omega_1 \cdot y_1 - \omega_2 \cdot y_2 - \omega_3 \cdot y_3 + \omega_4 \cdot y_4) = \\ &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) - \frac{4 \cdot 2}{2} \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) - \frac{4 \cdot 1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6 \cdot 1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) = -\frac{7,67}{EI}.\end{aligned}$$

Решаем каноническое уравнение и определяем величину момента X_1 :

$$\frac{1}{EI} X_1 - \frac{7,67}{EI} = 0; \Rightarrow X_1 = 7,67 \text{ кНм}.$$

Производим расчет основной системы с учетом нагрузки и найденного момента $X_1 = M_A$ (рис. 52).

Определим повторно опорные реакции:

$$\begin{aligned}\sum M_A = 0; & \Rightarrow -Y_C \cdot 3a + m + q \cdot 2a \cdot a - M_A = 0, \\ & -Y_C \cdot 3 + 6 + 12 \cdot 2 \cdot 1 - 7,67 = 0; \Rightarrow Y_C = 7,44 \text{ кН}, \\ \sum M_C = 0; & \Rightarrow Y_A \cdot 3a + m - q \cdot 2a \cdot 2a - M_A = 0, \\ & Y_A \cdot 3 + 6 - 12 \cdot 2 \cdot 2 - 7,67 = 0; \Rightarrow Y_A = 16,56 \text{ кН},\end{aligned}$$

$$\sum Y = 0; \Rightarrow Y_A + Y_C - q \cdot 2a = 0; \Rightarrow 7,44 + 16,56 - 12 \cdot 2 = 0,$$

$$Q_A = 16,56 \text{ кН}; Q_C = 16,56 - 12 \cdot 2 = -7,44 \text{ кН}; Q_B = -7,44 \text{ кН},$$

$$M_A = -7,67 \text{ кНм}; M_C = -7,67 - 12 \cdot 2 \cdot 1 + 16,56 \cdot 2 = 1,45 \text{ кНм},$$

$$Z_K = \frac{16,56}{12} = 1,38 \text{ м},$$

$$M_K = 16,56 \cdot 1,38 - 7,67 - 12 \cdot 1,38 \cdot \frac{1,38}{2} = 3,76 \text{ кНм}.$$

Произведем кинематическую проверку правильности решения. Для этого перемножаем конечную эпюру M_F на единичную \bar{M}_1 .

$$v_A = \frac{1}{EI} (-\omega_1 \cdot y_1 - \omega_2 \cdot y_2 + \omega_6 \cdot y_6 + \omega_4 \cdot y_4 - \omega_3 \cdot y_3) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 2 \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) - \frac{1,45 \cdot 2}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{7,67 \cdot 2}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) + \frac{6 \cdot 1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1,45 \cdot 2}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) = -\frac{0,03}{EI}.$$

$$\text{Ошибка: } \left| \frac{0,03}{6,39} \cdot 100\% \right| = 0,5\%, \text{ что допустимо.}$$

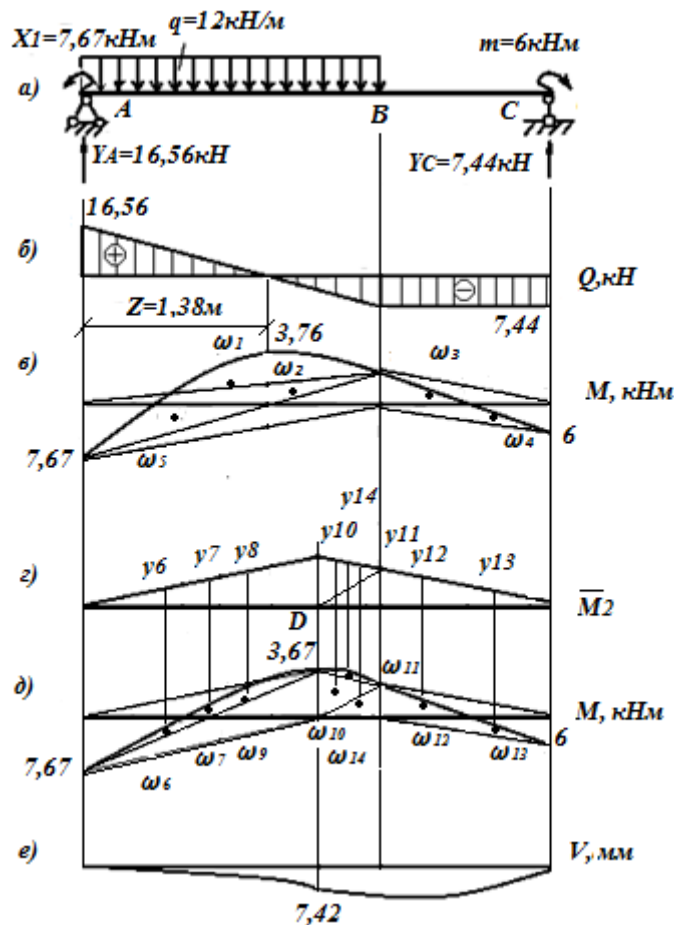


Рис. 52 – Эпюры поперечных сил, изгибающих моментов, единичная эпюра. Эпюра прогибов балки

Прогиб в сечении А равен нулю, что соответствует условию ее деформации. Подберем сечение балки из условия:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]; \Rightarrow W_x = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{7,67 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 36,5 \text{ см}^3.$$

Из таблицы (Приложение 1) выбираем двутавр №10 с $W_x = 39,7 \text{ см}^3$, $I_x = 198 \text{ см}^4$.

Определим прогиб посередине пролета, приложив там единичную силу, и построим единичную эпюру изгибающих моментов (рис.52, г). Данную эпюру разделим для перемножения иначе (рис.52, д). Дополнительно определим значение изгибающего момента в точке D :

$$M_D = 16,56 \cdot 1,5 - 7,67 - 12 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = 3,67 \text{ кНм},$$

$$\begin{aligned} v_D &= \frac{1}{EI} (\omega_7 \cdot y_7 - \omega_8 \cdot y_8 + \omega_9 \cdot y_9 + \omega_{10} \cdot y_{10} + \omega_{11} \cdot y_{11} + \omega_{12} \cdot y_{12} + \omega_{13} \cdot y_{13}) = \\ &= \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 1,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,75 - \frac{7,67 \cdot 1,5}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,75 + \frac{3,67 \cdot 1,5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,75 + \right. \\ &+ \frac{3,67 \cdot 0,5}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,5 \right) + \frac{1,45 \cdot 0,5}{2} \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0,5 \right) + \frac{1,45 \cdot 1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 - \frac{6 \cdot 1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,5 \Big) = \\ &= \frac{2,94}{EI}. \end{aligned}$$

Построим упругую линию балки (рис.52, е), определив прогиб в точке D :

$$v_D = \frac{2,94 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 198 \cdot 10^{-8}} = 7,42 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 7,42 \text{ мм}.$$

3.7. Сложное сопротивление

Сложным сопротивлением называется такое нагружение стержня, когда в его поперечном сечении возникают несколько внутренних силовых факторов, существенно влияющих на напряженное состояние.

В зависимости от наличия тех или иных внутренних факторов сложное сопротивление бывает нескольких видов.

3.7.1. Внецентренное растяжение или сжатие

Внецентренным растяжением-сжатием называется случай, когда равнодействующая сил, приложенных к стержню, направлена параллельно продольной оси, но точка приложения её не совпадает с центром тяжести поперечного сечения.

В поперечном сечении стержня возникают три компоненты внутренних усилий: продольное усилие N , два изгибающих момента относительно главных центральных осей поперечного сечения M_x и M_y .

Используя принцип независимости действия сил, нормальные напряжения в произвольно выбранной точке поперечного сечения определяются по формуле:

$$\sigma_{(x,y)} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x, \quad (33)$$

В случае действия одной силы F формула (33) приводится к виду:

$$\sigma_{(x,y)} = \pm \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F y}{i_x^2} + \frac{x_F x}{i_y^2} \right), \quad (34)$$

где y_F, x_F – координаты, в главных осях, точки приложения силы F ; y, x – координаты точки поперечного сечения стержня, в которой определяется нормальное напряжение; $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$ и $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$ – радиусы инерции поперечного сечения бруса относительно главных центральных осей.

Перед скобкой \pm – это знак нагрузки; если внецентренно приложена растягивающая сила F , то перед скобкой оставляют знак плюс, если же сила сжимающая, то – минус.

Для выполнения проверки на прочность необходимо вычислять максимальные нормальные напряжения. Этот вопрос решается с помощью нулевой линии. Нулевая линия – линия, в каждой точке которой нормальные напряжения равны нулю.

Положение нулевой линии определяется отрезками a_x, a_y , которые она отсекает на главных центральных осях:

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_F}; \quad a_y = -\frac{i_x^2}{y_F}. \quad (35)$$

Нулевая линия (или нейтральная) может делить поперечное сечение на две части, в одной возникают растягивающие напряжения (положительные), в другой сжимающие (отрицательные).

Максимальные нормальные напряжения того или иного знака возникают в точках, наиболее удаленных от нулевой линии.

В некоторых случаях появление в поперечном сечении нормальных напряжений разных знаков нежелательно. Добиться появления в поперечном сечении нормальных напряжений одного знака можно, используя понятие ядра сечения.

Ядром сечения называется некоторая область вокруг центра тяжести поперечного сечения, которая обладает следующим свойством: если нагрузка приложена в этой области или на её границе, то во всем поперечном сечении стержня возникают напряжения одного знака.

Граничные точки ядра сечения определяются по формулам:

$$x_{я} = -\frac{i_y^2}{x_F}; \quad y_{я} = -\frac{i_x^2}{y_F} \quad (36)$$

Для построения ядра сечения необходимо заданное поперечное сечение очертить касательными нулевыми линиями.

Пример 23.

Колонна заданного поперечного сечения сжимается расчетной силой F , направленной параллельно продольной оси и приложенной к точке, показанной на сечении (рис. 53).

Расчетные сопротивления для материала колонны: на растяжение $[\sigma_p] = 1,4$ МПа; на сжатие – $[\sigma_c] = 22$ МПа $[\sigma_c] = 22$ МПа.

Требуется:

- 1) найти положение нейтральной (нулевой) линии;
- 2) вычислить наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения, построить эпюру напряжений, дать заключение о прочности колонны;
- 3) построить ядро сечения.

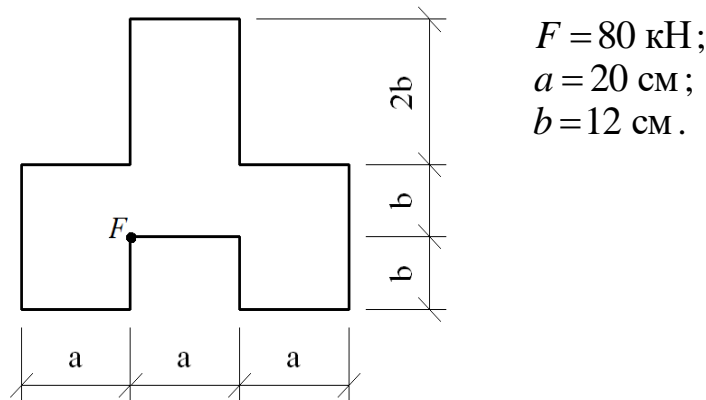


Рис. 53 – Схема поперечного сечения колонны

Решение.

Определим координаты тяжести сечения. Поперечное сечение колонны имеет ось симметрии y_c , следовательно, центр тяжести лежит на этой оси и для отыскания координаты y_c относительно вспомогательной оси OX , сложное сечение разбиваем на три прямоугольника.

$$y_c = \frac{\sum S_{xi}}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 - A_3 \cdot y_3}{A_1 + A_2 - A_3},$$

где y_1 , y_2 и y_3 – координаты центров тяжести прямоугольников относительно вспомогательной оси OX , а A_1 , A_2 и A_3 – площади их поперечных сечений.

$$y_c = \frac{20 \cdot 24 \cdot 36 + 60 \cdot 24 \cdot 12 - 20 \cdot 12 \cdot 6}{20 \cdot 24 + 60 \cdot 24 - 20 \cdot 12} = \frac{33120}{1680} = 19,7 \text{ см.}$$

Определим геометрические характеристики сечения. Для вычисления главных центральных моментов инерции воспользуемся зависимостью между моментами инерции при параллельном переносе осей.

$$I_{xc} = \sum (I_{xi} + A_i \cdot a_i^2) = \frac{20 \cdot 24^3}{12} + 20 \cdot 24 \cdot 16,3^2 + \frac{60 \cdot 24^3}{12} + 60 \cdot 24 \cdot (-7,7)^2 - \left(\frac{20 \cdot 12^3}{12} + 20 \cdot 12 \cdot (-13,7)^2 \right) = 257143,2 \text{ см}^4,$$

$$I_{y_c} = \sum I_{yi} = \frac{24 \cdot 20^3}{12} + \frac{24 \cdot 60^3}{12} - \frac{12 \cdot 20^3}{12} = 440000 \text{ см}^4.$$

Определим квадраты радиусов инерции:

$$i_x^2 = \frac{I_{x_c}}{A} = \frac{257143,2}{1680} = 153,1 \text{ см}^2,$$

$$i_y^2 = \frac{I_{y_c}}{A} = \frac{440000}{1680} = 261,9 \text{ см}^2.$$

Координаты точки приложения силы F : $x_F = -10 \text{ см}$, $y_F = -7,7 \text{ см}$.

Положение нулевой линии:

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{261,9}{-10} = 26,2 \text{ см},$$

$$a_y = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{153,1}{-7,7} = 19,9 \text{ см}.$$

По найденным отрезкам, отсекаемых на осях координат, проводим нулевую линию (рис. 54).

Определим наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения. Наиболее удаленными от нулевой линии точками являются точки A и B . Их координаты: $x_A = -30 \text{ см}$, $y_A = -19,7 \text{ см}$, $x_B = 10 \text{ см}$, $y_B = 28,3 \text{ см}$.

Напряжения в этих точках определяются по формуле:

$$\sigma = -\frac{N}{A} \left(1 + \frac{y_F}{i_x^2} \cdot y_{(A,B)} + \frac{x_F}{i_y^2} \cdot x_{(A,B)} \right).$$

Знак минус перед формулой показывает, что сила, приложенная к колонне, является сжимающей.

Нулевая линия делит сечение на зоны сжатия (область приложения силы F) и растяжения.

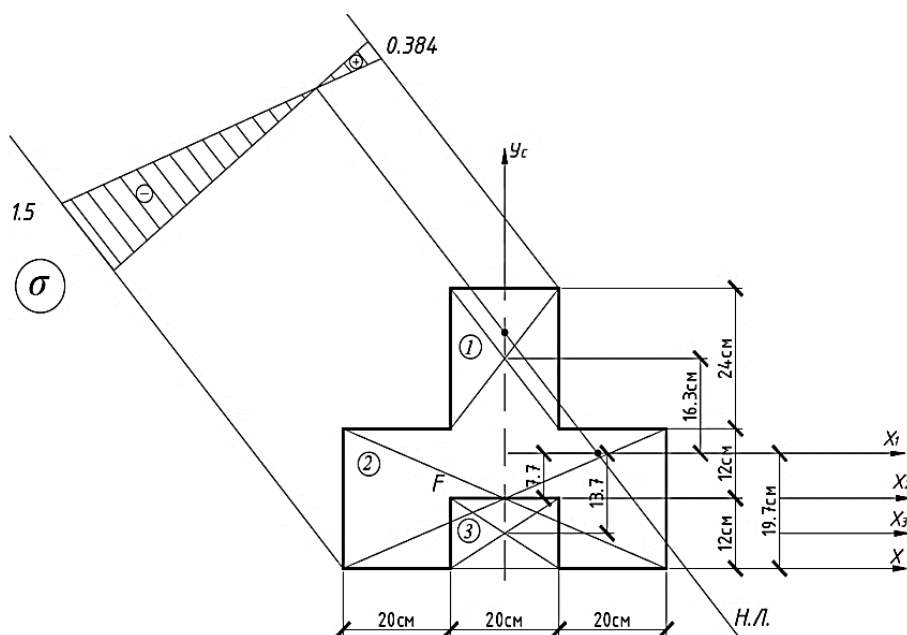


Рис. 54 – Положение центра тяжести и нулевой линии. Эпюра напряжений

Растягивающее напряжение:

$$\sigma_B = -\frac{80 \cdot 10^3}{1680 \cdot 10^{-4}} \cdot \left(1 + \frac{-7,7 \cdot 10^{-2}}{153,1 \cdot 10^{-4}} \cdot 28,3 \cdot 10^{-2} + \frac{-10 \cdot 10^{-2}}{261,9 \cdot 10^{-4}} \cdot 10 \cdot 10^{-2} \right) =$$

$$= 0,38 \text{ МПа} < [\sigma_p] = 1,4 \text{ МПа.}$$

Сжимающие напряжения:

$$\sigma_B = -\frac{80 \cdot 10^3}{1680 \cdot 10^{-4}} \cdot \left(1 + \frac{-7,7 \cdot 10^{-2}}{153,1 \cdot 10^{-4}} \cdot (-19,7) \cdot 10^{-2} + \frac{-10 \cdot 10^{-2}}{261,9 \cdot 10^{-4}} \cdot (-30) \cdot 10^{-2} \right) =$$

$$= -1,5 \text{ МПа} < [\sigma_c] = 22 \text{ МПа.}$$

Прочность колонны обеспечена.

По результатам расчета напряжений σ_A и σ_B строим эпюру σ (рис. 54).

Построим ядро сечения (рис. 55). Чтобы получить очертание ядра сечения, необходимо рассмотреть все возможные положения касательных к контуру сечения и, предполагая, что эти касательные являются нулевыми линиями, вычислить координаты граничных точек ядра относительно главных центральных осей сечения. Соединяя затем эти точки, получим очертание ядра сечения.

Касательная 1-1:

$$x_0 = \infty; y_0 = -19,7 \text{ см,}$$

$$x_1 = 0; y_1 = -\frac{i_x^2}{y_0} = -\frac{153,1}{-19,7} = 7,8 \text{ см.}$$

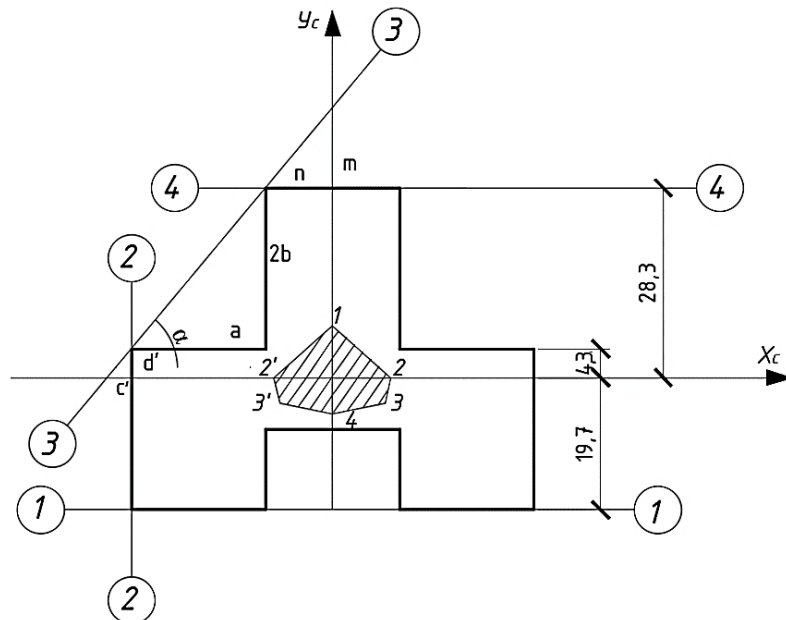


Рис. 55 – Ядро сечения

Касательная 2-2:

$$x_0 = -30 \text{ см; } y_0 = \infty,$$

$$x_2 = -\frac{i_y^2}{x_0} = -\frac{261,9}{-30} = 8,73 \text{ см; } y_2 = 0.$$

Касательная 3-3:

Определим координаты точек пересечения касательной 3-3:

$$\frac{2b}{a} = \frac{d}{c}; c = \frac{a \cdot d}{2b} = \frac{20 \cdot 4,3}{24} = 3,6 \text{ см},$$
$$\frac{2b}{a} = \frac{m}{n}; m = \frac{2b \cdot n}{a} = \frac{24 \cdot 10}{20} = 12 \text{ см},$$
$$x_0 = -(30 + 3,6) = -33,6 \text{ см}; y_0 = 28,3 + 12 = 40,3 \text{ см},$$
$$x_3 = -\frac{i_y^2}{x_0} = -\frac{261,9}{-33,6} = 7,8 \text{ см}; y_3 = -\frac{i_x^2}{y_0} = -\frac{153,1}{40,3} = -3,8 \text{ см}.$$

Касательная 4-4:

$$x_0 = \infty; y_0 = 28,3 \text{ см},$$
$$x_4 = 0; y_4 = -\frac{i_x^2}{y_0} = -\frac{153,1}{28,3} = -5,4 \text{ см}.$$

Поскольку сечение имеет ось симметрии y_c , то все определенные координаты переносим симметрично этой оси (рис. 55).

3.7.2. Косой изгиб

Косым изгибом называется случай сложного сопротивления, когда плоскость действия изгибающего момента не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции.

Косой изгиб можно рассматривать как одновременно действие двух плоских прямых изгибов в главных плоскостях инерции стержня.

Под главными плоскостями инерции понимают плоскости, проходящие через геометрическую ось бруса и главные оси инерции сечения.

Таким образом, в каждом сечении стержня балки одновременно действуют два независимых изгибающих момента M_x, M_y .

Для определения напряжений от каждого момента в отдельности, можно воспользоваться формулой плоского изгиба.

Согласно принципу независимости действия сил, полное напряжение будет равно сумме составляющих:

$$\sigma = \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x. \quad (37)$$

По формуле (37) можно определить напряжение в любой точке поперечного сечения.

Для выполнения проверки на прочность необходимо найти опасное сечение по длине балки.

Опасное сечение – сечение, в котором возникают максимальные напряжения.

В опасном поперечном сечении определяют точки, где имеют место максимальные нормальные напряжения.

Опасные точки определяются с помощью нулевой линии, которая при косом изгибе проходит через центр тяжести поперечного сечения, но не совпадает с главными осями инерции.

Направление нулевой линии определяют по формуле:

$$\tan \alpha_0 = -\frac{I_x M_y}{I_y M_x}, \quad (38)$$

где α_0 – угол между осью x и нулевой линией.

Максимальные напряжения возникают в наиболее удаленных точках от нулевой прямой.

Для выполнения проверки на жесткость необходимо уметь вычислять величины прогибов.

Полный прогиб произвольного сечения равен геометрической сумме двух перемещений вдоль оси x и y .

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}. \quad (39)$$

Направление полного прогиба определяется выражением:

$$\tan \alpha_f = \frac{f_y}{f_x}, \quad (40)$$

где α_f – угол между осью x и направлением полного прогиба.

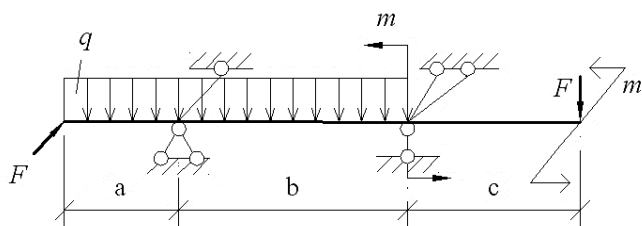
Перемещения f_x и f_y определяются методом Мора, используя правило Верещагина.

Пример 24.

Балка нагружена в главных плоскостях расчетной нагрузкой (рис. 56). Материал балки – сталь с допускаемым напряжением $[\sigma] = 210$ МПа.

Требуется:

- 1) построить эпюры изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях;
- 2) определить опасное сечение и подобрать двутавр, приняв $W_x / W_y = 8$;
- 3) определить положение нейтральной оси в одном сечении и построить эпюру нормальных напряжений.



$$\begin{aligned} a &= 2 \text{ м}; m = 6 \text{ кНм}, \\ b &= 4 \text{ м}; F = 8 \text{ кН}, \\ c &= 3 \text{ м}; q = 10 \text{ кН/м}. \end{aligned}$$

Рис. 56 – Схема балки

Решение.

Определим вертикальные и горизонтальные опорные реакции и построим эпюры изгибающих моментов M_x и M_y (рис. 57).

Вертикальная плоскость:

$$\sum M_A = 0; \Rightarrow \sum M_A = -y_B \cdot b + F \cdot (b + c) - m + q \cdot b \cdot \frac{b}{2} - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = 0,$$

$$-y_B \cdot 4 + 8 \cdot 7 - 6 + 10 \cdot \frac{4^2}{2} - 10 \cdot \frac{2^2}{2} = 0; \Rightarrow y_B = 27,5 \text{ кН},$$

$$\sum M_B = 0; \Rightarrow \sum M_B = y_A \cdot b - q \cdot \frac{(a+b)^2}{2} - m + F \cdot c = 0,$$

$$y_A \cdot 4 - 10 \cdot \frac{6^2}{2} - 6 + 8 \cdot 3 = 0; \Rightarrow y_A = 40,5 \text{ кН},$$

$$\sum Y = 0; \Rightarrow 27,5 + 40,5 - 8 - 10 \cdot 6 = 0.$$

Горизонтальная плоскость:

$$\sum M_A = 0; \Rightarrow \sum M_A = m - x_B \cdot b + F \cdot a = 0,$$

$$6 - x_B \cdot 4 + 8 \cdot 2 = 0; \Rightarrow x_B = 5,5 \text{ кН},$$

$$\sum M_B = 0; \Rightarrow \sum M_B = F \cdot (a + b) - x_A \cdot b + m = 0,$$

$$8 \cdot (2 + 4) - x_A \cdot 4 + 6 = 0; \Rightarrow x_A = 13,5 \text{ кН},$$

$$\sum X = 0; \Rightarrow \sum X = 8 - 13,5 + 5,5 = 0.$$

Выберем наиболее опасное сечение. Максимальные моменты в плоскости оси X и Y находятся в точке A : $M_x = 20$ кНм, $M_y = 16$ кНм.

Определим требуемый момент сопротивления, приняв $W_x / W_y = 8$, т.е. $W_x = 8W_y$.

Условие прочности при косом изгибе для балок из материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, имеет следующий вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{M_x}{8W_y} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma], \text{ откуда}$$

$$W_y \geq \frac{\frac{M_x}{8} + M_y}{[\sigma]} = \frac{\frac{20 \cdot 10^3}{8} + 16 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,0881 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 88,1 \text{ см}^3.$$

По сортаменту (Приложение 1) принимаем двутавр №40: $W_x = 953 \text{ см}^3$, $I_x = 19062 \text{ см}^4$, $W_y = 86 \text{ см}^3$, $I_y = 667 \text{ см}^4$.

Проверяем прочность балки:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{20 \cdot 10^3}{953 \cdot 10^{-6}} + \frac{16 \cdot 10^3}{86 \cdot 10^{-6}} = 20,98 + 186,05 = 207,03 \leq [\sigma] = 210 \text{ МПа}.$$

Прочность балки обеспечена.

Недогрузка балки составляет: $\frac{210 - 207,03}{210} \cdot 100\% = 1,4\%$.

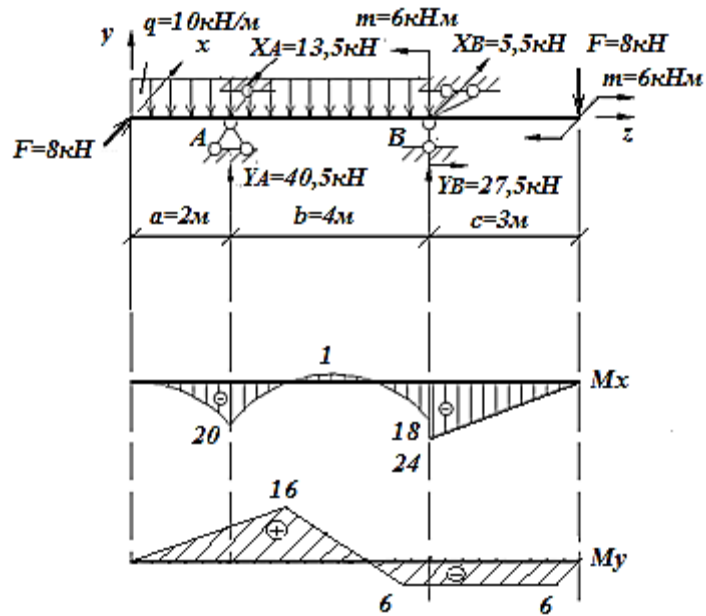


Рис. 57 – Эпюры изгибающих моментов относительно осей X и Y

Определяем угол наклона нулевой линии к оси OX :

$$\tan \alpha_0 = \frac{I_x \cdot M_y}{I_y \cdot M_x} = -\frac{19062 \cdot 10^{-8} \cdot 16 \cdot 10^3}{667 \cdot 10^{-8} \cdot 20 \cdot 10^3} = 22,86; \Rightarrow \alpha_0 = 87^\circ 30'.$$

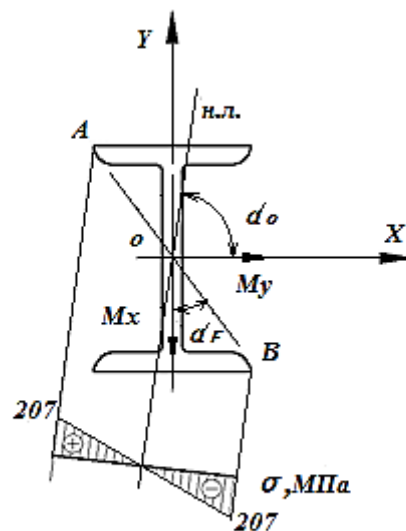


Рис. 58 – Положение нулевой линии. Эпюра напряжений

Для построения эпюры σ угол α_0 откладываем против часовой стрелки от оси OX . Наибольшие напряжения будут действовать в угловых точках сечения, причем в точке A они будут растягивающими, а в B – сжимающими.

Угол наклона силовой линии (рис. 58):

$$\tan \alpha_F = \frac{M_y}{M_x} = \frac{16 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^3} = 0,8; \Rightarrow \alpha_F = 38^\circ 30'.$$

3.7.3. Расчет на прочность пространственного бруса

В сечении участков ломаного бруса в общем случае могут возникать шесть внутренних силовых факторов: нормальная сила N , изгибающие моменты M_x , M_y относительно главных центральных осей инерции поперечного сечения, крутящий момент M_z и две поперечные силы Q_x и Q_y . Первые три фактора связаны с нормальными напряжениями, а вторые три фактора – с касательными напряжениями.

В случае плоского напряженного состояния, когда одновременно действуют значительные по величине и нормальное σ и касательное τ напряжения, проверка прочности требует объяснения механизма разрушения материала.

В настоящее время в технике приняты две теории прочности, объясняющие этот механизм. Хронологически они называются *III* и *IV* теории прочности.

Согласно *III* теории прочности разрушение материала наступает в тот момент, когда величина максимального касательного напряжения в окрестности точки достигает опасного уровня для данного материала, определенного в опытах на растяжение-сжатие.

В случае плоского напряженного состояния согласно *III* теории прочности определяется расчетное напряжение по формуле $\sigma_{\text{расч}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$, которое должно быть не больше расчетного напряжения $[\sigma]$, определяемого для каждого материала:

$$\sigma_{\text{расч}}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (41)$$

Согласно *IV* теории прочности разрушение материала наступает в тот момент, когда величина удельной потенциальной энергии изменения формы в окрестности точки достигает опасного уровня для данного материала, определенного в опытах на растяжение и сжатие.

В случае плоского напряженного состояния по *IV*-ой теории прочности, проверка прочности производится по формуле

$$\sigma_{\text{расч}}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (42)$$

Пример 25.

Пространственная система (рис. 59), состоящая из трех стержней, жестко соединенных между собой под прямым углом, нагружена расчетной нагрузкой в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Стержни системы имеют одинаковые длины l и диаметры поперечных сечений D . Материал стержней – сталь с допускаемыми напряжениями $[\sigma_p] = 210$ МПа и $[\sigma_c] = 130$ МПа, $m = 4$ кНм, $l = 0,8$ м, $q = 8$ кН/м, $d = 10$ см, $F = 6$ кН.

Требуется:

- 1) построить эпюры внутренних усилий;
- 2) установить вид сопротивления для каждого участка стержня;
- 3) определить опасное сечение и дать заключение о прочности конструкции.

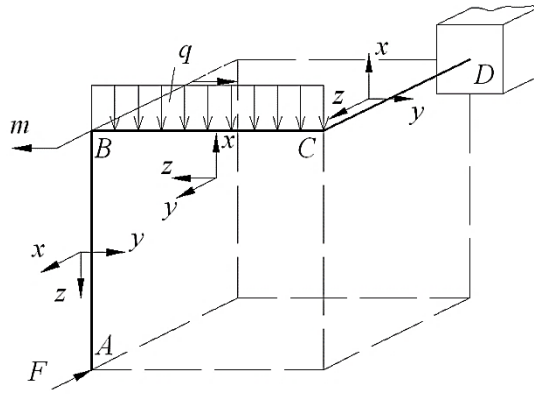


Рис. 59 – Схема пространственной системы

Решение. Построим эпюру продольных сил. На участках AB и BC отсутствуют продольные силы.

Участок CD :

Продольной силой для данного участка является сила F . $N = -F = -6$ кН (сжатие) (рис. 60).

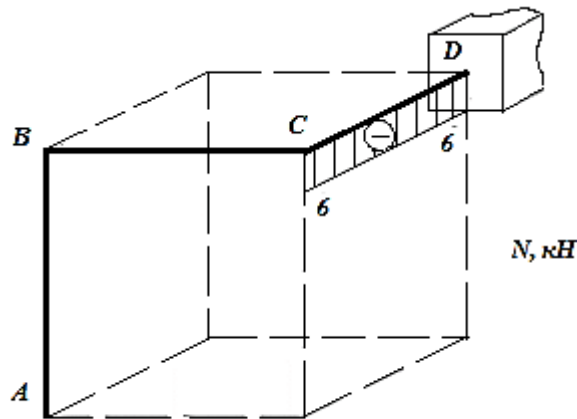


Рис. 60 – Эпюра продольных сил

Построим эпюру поперечных сил (рис. 61).

Участок AB :

$$Q_{A_x} = -F = -6 \text{ кН}; Q_{B_x} = -F = -6 \text{ кН}.$$

Участок BC :

$$Q_{B_x} = F = 6 \text{ кН}; Q_{C_y} = F = 6 \text{ кН},$$

$$Q_{C_x} = -q \cdot l = -8 \cdot 0,8 = -6,4 \text{ кН}.$$

Участок CD :

$$Q_{C_x} = -q \cdot l = -8 \cdot 0,8 = -6,4 \text{ кН},$$

$$Q_{D_x} = -6,4 \text{ кН}.$$

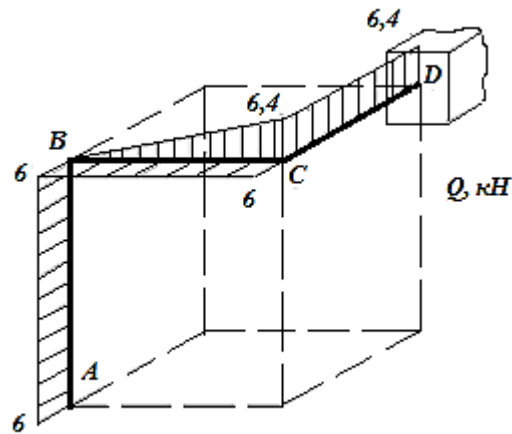


Рис. 61 – Эпюра поперечных сил

Построим эпюру изгибающих моментов. Для этого последовательно построим эпюры от каждого вида нагрузки.

Сила F (рис. 62):

Участок AB :

$$M_{A_y} = 0; M_{B_y} = F \cdot l = 6 \cdot 0,8 = 4,8 \text{ кНм}.$$

Участок BC :

$$M_{C_x} = F \cdot l = 6 \cdot 0,8 = 4,8 \text{ кНм}.$$

Участок CD :

$$M_{C_x} = 4,8 \text{ кНм}; M_D = 4,8 \text{ кНм}, \\ M_{C_y} = M_D = 4,8 \text{ кНм}.$$

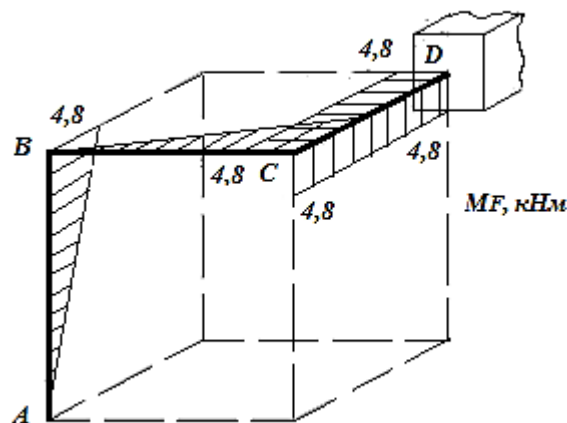


Рис. 62 – Эпюра изгибающих моментов от действия силы F

Изгибающий момент m (рис. 63):

Участок BC :

$$M_{B_x} = M_{C_x} = 4 \text{ кНм}.$$

Участок CD :

$$M_{C_x} = M_{D_x} = 4 \text{ кНм}.$$

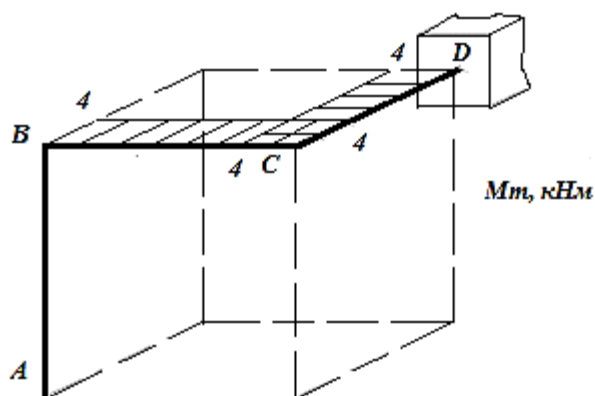


Рис. 63 – Эпюры изгибающих моментов от действия изгибающего момента m

Распределенная нагрузка q (рис. 64):

Участок BC:

$$M_{B_y} = 0; M_{C_y} = \frac{q \cdot l^2}{2} = \frac{8 \cdot 0,8^2}{2} = 2,56 \text{ кНм.}$$

Участок CD:

$$M_{C_y} = 0; M_{D_y} = q \cdot l \cdot l = 8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 5,12 \text{ кНм.}$$

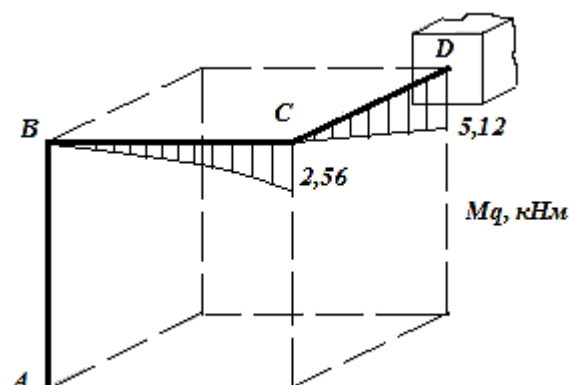


Рис. 64 – Эпюры изгибающих моментов от действия равномерно распределенной нагрузки q

Просуммируем изгибающие моменты от всех видов нагрузки (рис. 65).

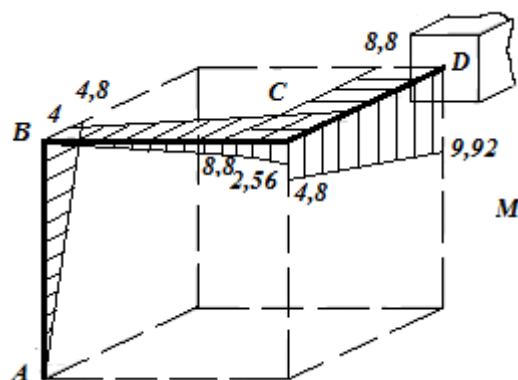


Рис. 65 – Суммарная эпюра изгибающих моментов от действия всех видов нагрузки

Построим эпюру крутящих моментов.

Участок AB:

$$T = 0.$$

Участок BC:

$$T = F \cdot l = 6 \cdot 0,8 = 4,8 \text{ кНм}.$$

Участок CD:

$$T = q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 8 \cdot 0,8 \cdot \frac{0,8}{2} = 2,56 \text{ кНм}.$$

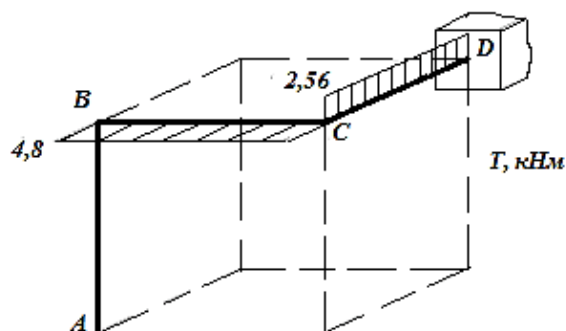


Рис. 66 – Эпюра крутящих моментов

Установим вид сопротивления для каждого участка системы, который определяется по эпюрам.

На участке *AB* действует поперечная сила Q_x и изгибающий момент M_y (поперечный изгиб).

На участке *BC* действует поперечная сила Q_x , Q_y , крутящий момент T и изгибающие моменты M_x и M_y (косой изгиб с кручением).

На участке *CD* действует поперечная сила Q_x , крутящий момент T , изгибающие моменты M_x , M_y и продольная сила N (косой изгиб с кручением и сжатием).

Определим максимальные напряжения в опасном сечении каждого участка от внутренних усилий M_x , M_y , T , N (касательными напряжениями от поперечных сил Q_x и Q_y можно пренебречь).

Участок AB: Опасная точка *B*: $Q_x = 6 \text{ кН}$, $M_y = 4,8 \text{ кНм}$.

$$\sigma_B = \frac{M_u}{W_u} = \frac{4,8 \cdot 10^3}{98,13 \cdot 10^{-6}} = 48,9 \text{ МПа},$$

$$W_u = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 10^3}{32} = 98,13 \text{ см}^3.$$

Участок BC: Опасная точка *C*: $Q_y = 6 \text{ кН}$, $Q_x = 6,4 \text{ кН}$, $M_x = 8,8 \text{ кНм}$, $M_y = 2,56 \text{ кНм}$, $T = 4,8 \text{ кНм}$.

Определим суммарный изгибающий момент:

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{8,8^2 + 2,56^2} = 9,16 \text{ кНм},$$

$$\sigma = \frac{M_u}{W_u} = \frac{9,16 \cdot 10^3}{98,13 \cdot 10^{-6}} = 93,35 \text{ МПа}.$$

При кручении круглого стержня возникают касательные напряжения:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} = \frac{4,8 \cdot 10^3}{196,26 \cdot 10^{-6}} = 24,5 \text{ МПа},$$

$$W_p = 2W_u = 2 \cdot 98,13 = 196,26 \text{ см}^3.$$

Участок CD: Опасная точка D: $Q_x = 6,4 \text{ кН}$, $M_x = 8,8 \text{ кНм}$, $M_y = 9,92 \text{ кНм}$, $N = 6 \text{ кН}$, $T = 2,56 \text{ кНм}$.

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{6 \cdot 10^3}{78,5 \cdot 10^{-4}} = 0,764 \text{ МПа},$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 10^2}{4} = 78,5 \text{ см}^2,$$

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{8,8^2 + 9,92^2} = 13,26 \text{ кНм},$$

$$\sigma = \frac{M_u}{W_u} = \frac{13,26 \cdot 10^3}{98,13 \cdot 10^{-6}} = 135,14 \text{ МПа},$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} = \frac{2,56 \cdot 10^3}{196,26 \cdot 10^{-6}} = 13,04 \text{ МПа}.$$

Проверим прочность системы при расчетном сопротивлении $[\sigma] = 210 \text{ МПа}$.

Расчетное напряжение по третьей теории прочности для плоского напряженного состояния определяется по формуле:

$$\sigma_{\text{расч}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Участок AB:

$$\tau = 0; \sigma_{\text{расч}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2} = 48,9 \text{ МПа} < 210 \text{ МПа}.$$

Участок BC:

$$\sigma_{\text{расч}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{93,35^2 + 4 \cdot 24,5^2} = 105,43 \text{ МПа} < 210 \text{ МПа}.$$

Участок CD:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_u}{W_u} = 0,764 + 135,14 = 135,9 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\text{расч}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{135,9^2 + 4 \cdot 13,04^2} = 138,38 \text{ МПа} < 210 \text{ МПа}.$$

Прочность стержней системы на всех участках обеспечена.

3.7.4. Изгиб с кручением

Изгиб в сочетании с кручением является наиболее распространенным видом нагружения круглых валов. Данный вид сопротивления вызывают силы, передаваемые валу шкивами или зубчатыми колесами.

Момент на шкиве и окружное усилие будут равны:

$$M = 9,736 \cdot \frac{P}{n}; t = \frac{2m}{d}, \quad (43)$$

где натяжение ведущей ветви ремня – $2t$, ведомой – t , P – передаваемая мощность, кВт, n – частота вращения, об/мин.

Силы давления на вал:

$$F = 2t + t = 3t. \quad (44)$$

Момент M будет вызывать кручение вала, а сила F – его изгиб.

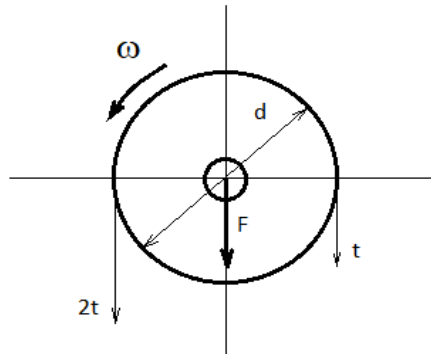


Рис. 67 – Шкив ременной передачи

При совместном действии изгиба и кручения в поперечных сечениях вала будут действовать следующие внутренние силовые факторы: крутящий момент M_K , изгибающий момент M_H и поперечная сила Q , которой можно пренебречь, т.к. касательные напряжения, которые ей вызваны, намного меньше касательных напряжений от крутящего момента.

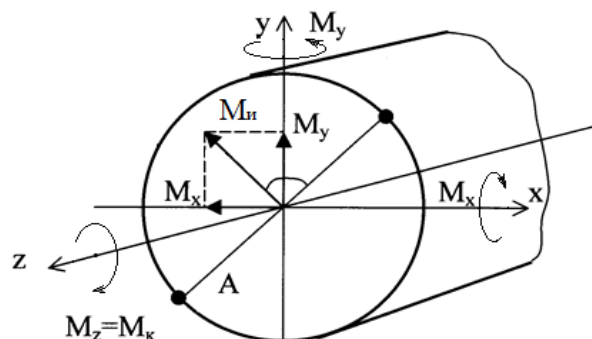


Рис. 68 – Схема действия нагрузок

Для круглого сечения наиболее напряжённой точкой является крайняя точка A (рис. 68), в которой оба напряжения – нормальное и касательное от крутящего момента – достигают наибольших значений, которые определяются по формулам:

$$\sigma_H = \frac{M_H}{W_x} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_x}, \quad (45)$$

$$\tau_K = \frac{M_K}{W_p}. \quad (46)$$

Осевой момент сопротивления определяется по формуле: $W_x = \frac{\pi d^3}{32} = 0,1d^3$,

полярный момент сопротивления – $W_p = \frac{\pi d^3}{16} = 2W_x$.

Расчетные напряжения определяются по третьей и четвертой теории прочности с использованием формул (41) и (42).

Пример 26.

Шкив диаметром D_1 и с углом наклона ветвей ремня к горизонту α_1 делает n оборотов в минуту и передает мощность P кВт. Два других шкива имеют одинаковый диаметр D_2 и одинаковые углы наклона ветвей ремня к горизонту α_2 , и каждый из них передает мощность $P/2$ кВт (рис. 69).

Требуется: 1) определить моменты, приложенные к шкивам по заданным P и n ; 2) построить эпюры крутящих моментов M_k ; 3) определить окружные усилия (t_1 и t_2), действующие на шкивы по найденным моментам и заданным диаметрам шкивов D_1 и D_2 ; 4) определить давления на вал, принимая их равными трем окружным усилиям; 5) определить силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях (вес шкивов и вала не учитывать); 6) построить эпюры изгибающих моментов от горизонтальных сил $M_{гор}$ и от вертикальных сил $M_{верт}$; 7) построить эпюру суммарных изгибающих моментов, пользуясь формулой $M_{и} = \sqrt{M_{гор}^2 + M_{верт}^2}$, при построении эпюры надо учесть, что для некоторых участков вала она не будет прямолинейной; 8) при помощи эпюр M_k и $M_{и}$ найти опасное сечение и определить максимальный расчетный момент (по третьей теории прочности; 9) подобрать диаметр вала D при $[\sigma] = 70$ МПа и округлить его значение до ближайшего стандартного, если дано: $P = 20$ кВт; $n = 500$ об/мин; $c = 1,3$ м; $a = 1,5$ м; $b = 1,2$ м; $D_1 = 1,2$ м; $D_2 = 1,5$ м; $\alpha_1 = 20^\circ$; $\alpha_2 = 50^\circ$.

Решение.

Определяем крутящие моменты, приложенные к шкивам, по заданным P и n

$$M = 9,736 \cdot \frac{P}{n}, \text{ кНм},$$

тогда
$$M_1 = 9,736 \cdot \frac{20}{500} = 0,38 \text{ кНм},$$

$$M_2 = 9,736 \cdot \frac{10}{500} = 0,19 \text{ кНм}.$$

Определяем окружные усилия, приложенные к шкивам (рис. 70):

$$M_1 = t_1 \frac{D_1}{2}; \Rightarrow t_1 = \frac{2M_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 0,38}{1,2} = 0,63 \text{ кН},$$

$$M_2 = t_2 \frac{D_2}{2}; \Rightarrow t_2 = \frac{2M_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 0,19}{1,5} = 0,25 \text{ кН}.$$

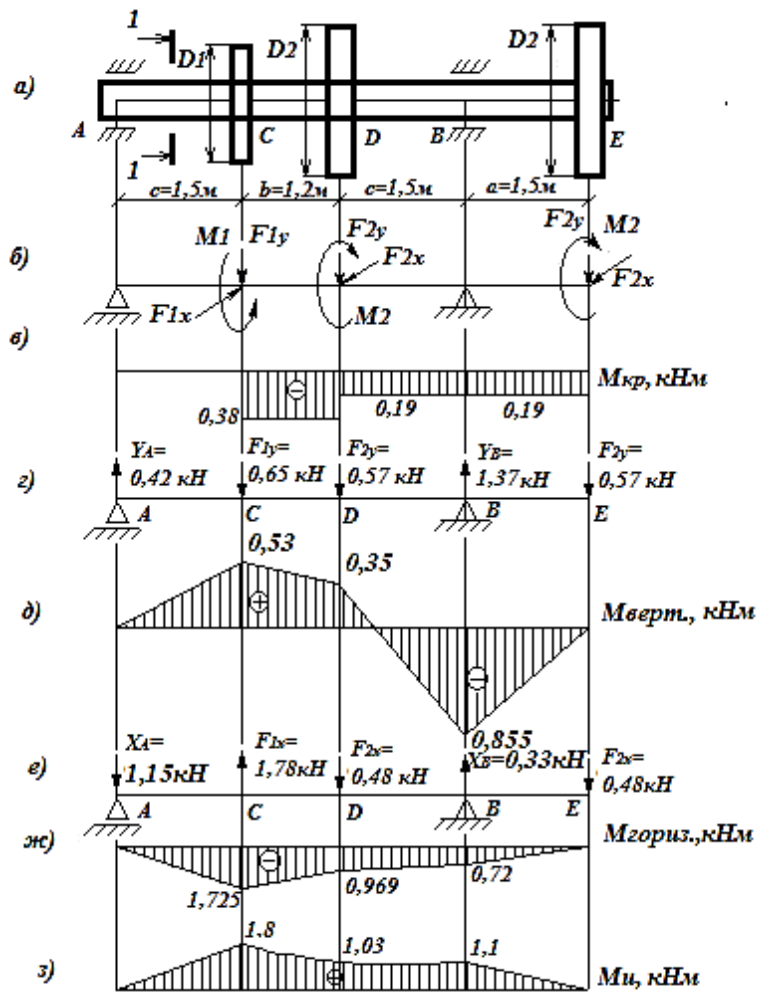


Рис. 69 – Заданная схема (а), расчётная схема (б), эпюра крутящих моментов (в), схема сил, действующих в вертикальной плоскости (г), эпюра $M_{\text{верт}}$ (д), схема сил, действующих в горизонтальной плоскости (е), эпюра $M_{\text{гор}}$ (ж), эпюра $M_{\text{ц}}$ (з)

СЕЧЕНИЕ I-I

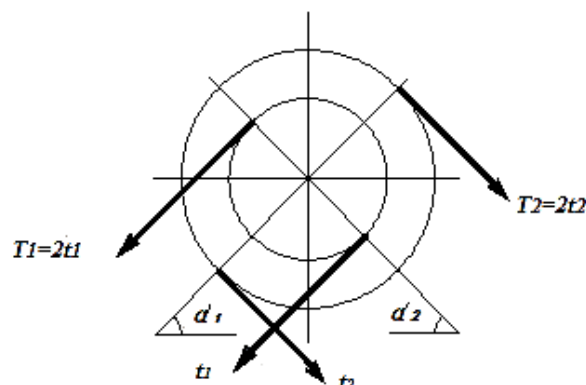


Рис. 70 – Схема сил, действующих на шкивы

Определим давления на вал, принимая их равными трём окружным усилиям:

$$F_1 = 3t_1 = 3 \cdot 0,63 = 1,89 \text{ кН},$$

$$F_2 = 3t_2 = 3 \cdot 0,25 = 1,75 \text{ кН}.$$

Найдём проекции сил F_1 и F_2 на горизонтальное и вертикальное направления (X, Y) (рис.69, б):

$$\begin{aligned} F_{1x} &= F_1 \cos \alpha_1 = 1,89 \cos 20^\circ = 1,78 \text{ кН}, \\ F_{2x} &= F_2 \cos \alpha_2 = 0,75 \cos 50^\circ = 0,48 \text{ кН}, \\ F_{1y} &= F_1 \sin \alpha_1 = 1,89 \sin 20^\circ = 0,65 \text{ кН}, \\ F_{2y} &= F_2 \sin \alpha_2 = 0,75 \sin 50^\circ = 0,57 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Построим эпюру крутящих моментов, для чего нагрузим вал только скручивающими моментами (рис. 69, в):

$$\begin{aligned} M_{K_{AC}} &= 0, \\ M_{K_{CD}} &= M_1 = 0,38 \text{ кНм}, \\ M_{K_{DB}} &= M_1 - M_2 = 0,38 - 0,19 = 0,19 \text{ кНм}, \\ M_{K_{BE}} &= M_{K_{DB}} = 0,19 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Эпюра крутящих моментов приведена на рис. 69, в. Построим эпюру изгибающих моментов от сил, действующих в вертикальной плоскости (рис.69, д). Определяем опорные реакции:

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0, \\ Y_B \cdot 4,2 - F_{2y} \cdot 5,7 - F_{2y} \cdot 2,7 - F_{1y} \cdot 1,5 &= 0, \\ Y_B &= \frac{0,57 \cdot 5,7 + 0,57 \cdot 2,7 + 0,65 \cdot 1,5}{4,2} = 1,37 \text{ кН}, \\ \sum M_B &= 0, \\ -Y_A \cdot 4,2 + F_{1y} \cdot 2,7 + F_{2y} \cdot 1,5 - F_{2y} \cdot 1,5 &= 0, \\ Y_A &= \frac{0,65 \cdot 2,7 + 0,57 \cdot 1,5 - 0,57 \cdot 1,5}{4,2} = 0,42 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} \sum Y &= 0, \\ Y_A + Y_B - F_{1y} - 2F_{2y} &= 0, \\ 0,42 + 1,37 - 0,65 - 2 \cdot 0,57 &= 0. \end{aligned}$$

Определяем изгибающие моменты $M_{\text{верт}}$:

$$\begin{aligned} M_{\text{верт}_A} &= 0, \\ M_{\text{верт}_C} &= 1,5Y_A = 1,5 \cdot 0,42 = 0,63 \text{ кНм}, \\ M_{\text{верт}_D} &= 2,7Y_A - 1,2F_{1y} = 2,7 \cdot 0,42 - 1,2 \cdot 0,65 = 0,35 \text{ кНм}, \\ M_{\text{верт}_B} &= -1,5F_{2y} = -1,5 \cdot 0,57 = -0,855 \text{ кНм}, \\ M_{\text{верт}_E} &= 0. \end{aligned}$$

Эпюра $M_{\text{верт}}$ показана на рис. 69, д.

Построим эпюру изгибающих моментов от сил, действующих в горизонтальной плоскости $M_{\text{гор}}$ (рис. 69, ж). Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0; \Rightarrow X_B \cdot 4,2 - F_{2x} \cdot 5,7 - F_{2x} \cdot 2,7 - F_{1x} \cdot 1,5 = 0,$$

$$X_B = \frac{0,48 \cdot 0,57 + 0,48 \cdot 2,7 + 1,78 \cdot 1,5}{4,2} = 0,33 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0; \Rightarrow X_A \cdot 4,2 - F_{1x} \cdot 2,7 + F_{2x} \cdot 1,5 - F_{2x} \cdot 1,5 = 0,$$

$$X_A = \frac{1,78 \cdot 2,7 - 0,48 \cdot 1,5 + 0,48 \cdot 1,5}{4,2} = 1,15 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum X = 0,$$

$$-X_A - 2F_{2x} + F_{1x} + X_B = 0,$$

$$-1,15 - 2 \cdot 0,48 + 1,78 + 0,33 = 0.$$

Определяем изгибающие моменты $M_{гор}$:

$$M_{горA} = 0,$$

$$M_{горC} = -1,5X_A = -1,5 \cdot 1,15 = -1,725 \text{ кНм},$$

$$M_{горD} = -2,7X_A + 1,2F_{1x} = -1,5 \cdot 1,15 + 1,2 \cdot 1,78 = -0,969 \text{ кНм},$$

$$M_{горB} = -1,5F_{2x} = -1,5 \cdot 0,48 = -0,72 \text{ кНм},$$

$$M_{горE} = 0.$$

Эпюра $M_{гор}$ показана на рис. 69, ж.

Построим эпюру суммарных изгибающих моментов $M_{и}$:

$$M_{и} = \sqrt{M_{гор}^2 + M_{верт}^2},$$

$$M_{иA} = 0,$$

$$M_{иC} = \sqrt{0,53^2 + 1,725^2} = 1,8 \text{ кНм},$$

$$M_{иD} = \sqrt{0,35^2 + 0,969^2} = 1,03 \text{ кНм},$$

$$M_{иB} = \sqrt{0,855^2 + 0,72^2} = 1,12 \text{ кНм}.$$

Эпюра $M_{и}$ приведена на рис. 69, з.

Анализируя эпюры $M_{к}$ и $M_{и}$, видим, что опасным будет сечение C, где действует изгибающий момент $M_{и} = 1,8 \text{ кНм}$ и крутящий момент $M_{к} = 0,38 \text{ кНм}$.

По третьей теории прочности найдём расчётный момент:

$$M_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{и}^2 + M_{к}^2} = \sqrt{1,8^2 + 0,38^2} = 1,83 \text{ кНм}.$$

Определим диаметр вала.

Условие прочности:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}}}{W_x} \leq [\sigma],$$

где

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} = 0,1d^3,$$

тогда

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}}}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{1,83}{0,1 \cdot 70 \cdot 10^3}} = 0,0639 \text{ м}.$$

Принимаем $d = 71 \text{ мм}$ согласно ГОСТ 6636-69 (Приложение 7).

3.7.5. Расчет цилиндрических винтовых пружин

В общем случае винтовая пружина может рассматриваться как пространственно изогнутый брус с осью, изогнутой по винтовой линии. В зависимости от вида нагружения винтовые пружины делятся на пружины растяжения и сжатия. Цилиндрическая винтовая пружина определяется следующими параметрами: d – диаметр сечения проволоки, D – средний диаметр витка пружины, n – число витков, t_0 – зазор между витками, α – угол подъема винтовой линии, S – шаг пружины, связанный с углом подъема соотношением: $S = \pi D \tan \alpha$.

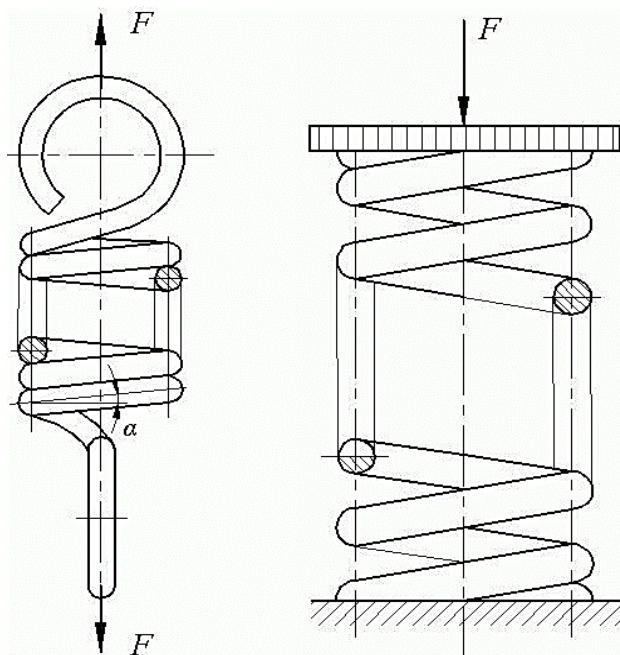


Рис. 71 – Пружины растяжения и сжатия

Проволока пружины работает на кручение и сдвиг. Расчет пружин растяжения и сжатия на прочность и жесткость одинакова, но для пружин сжатия при $H/D \geq 2,6$ (H – высота пружины в свободном состоянии; D – ее средний диаметр) возникает опасность потери устойчивости. Угол наклона витков пружины будем считать небольшим ($\leq 15^\circ$).

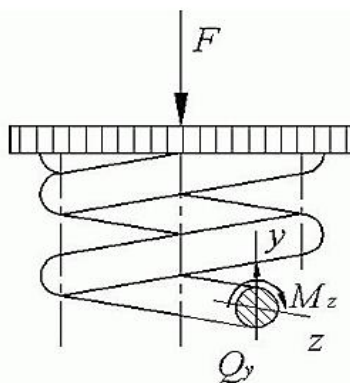


Рис. 72 – Внутренние силовые факторы в сечении витка пружины

В поперечном сечении витка пружины возникают только касательные напряжения (от крутящего момента M_z и поперечной силы Q_y). Максимальное их значение будет действовать в точках, ближайших к оси пружины.

$$M_z = M_K = F \cdot \frac{D}{2}; Q_y = F,$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_p} + \frac{Q_y}{A} = \frac{8FD}{\pi d^3} + \frac{4F}{\pi d^2} = \frac{8FD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{2D}\right).$$

Поскольку величина в скобках изменяется в пределах $1/20 - 1/40$, то ей можно пренебречь, тогда

$$\tau_{\max} = \frac{8FD}{\pi d^3}. \quad (47)$$

В случае, когда диаметр проволоки соизмерим с диаметром витка, необходимо вводить поправку, учитывающую влияние кривизны витка на величину и распределение касательных напряжений. Тогда максимальные касательные напряжения будут определяться по формуле:

$$\tau_{\max} = k \frac{8FD}{\pi d^3}, \quad (48)$$

где k – поправочный коэффициент, зависящий от индекса пружины D/d . Значение поправочного коэффициента можно вычислить по формуле (49) или выбрать из таблицы 3.1.

$$k = \frac{4 \frac{D}{d} + 1}{4 \frac{D}{d} - 1} \quad (49)$$

Таблица 3.1

D/d	3	4	5	6	7	8	9	10
k	1,58	1,40	1,31	1,25	1,21	1,18	1,16	1,14

Условие прочности для пружин следующее:

$$\tau_{\max} = k \frac{8FD}{\pi d^3} \leq [\tau], \quad (50)$$

где $[\tau]$ – допускаемое напряжение на сдвиг (200-800 МПа).

Потенциальная энергия деформации при кручении равна:

$$U = \frac{M_K^2 \cdot l}{2GI_p} = \frac{4F^2 D^3 n}{GD^4}, \quad (51)$$

где $l = \pi Dn$ – длина проволоки, а G – модуль сдвига.

Работа внешней силы пружины на перемещении λ будет равна:

$$W = \frac{F\lambda}{2}.$$

Приравнявая $U = W$, получим:

$$\frac{F\lambda}{2} = \frac{4F^2 D^3 n}{GD^4}, \text{ откуда } \lambda = \frac{8FD^3 n}{GD^4}. \quad (52)$$

Усилие F , при котором перемещение равно единице (1 мм, 1 см и т.д.) называется жесткостью пружины (C), которая выражается в Н/мм или Н/см:

$$C = \frac{GD^4}{8D^3n}. \quad (53)$$

Пример 27.

Подобрать сечение и число витков цилиндрической пружины, сжимаемой силой $F = 12$ кН. Отношение среднего диаметра D витков к диаметру проволоки d , из которой изготовлена пружина, $D/d = 8$. Осадка пружины под нагрузкой не более $\lambda = 100$ мм. Определить также высоту пружины h_0 в свободном состоянии, если минимальный зазор между витками под нагрузкой должен быть не менее $t_0 = 4$ мм. Допускаемое напряжение $[\tau] = 280$ МПа, модуль упругости $G = 0,85 \cdot 10^5$ МПа.

Решение.

Определяем диаметр проволоки пружины из условия прочности (50):

$$k \frac{8FD}{\pi d^3} \leq [\tau].$$

Для отношения $D/d = 8$ из табл. 3.1 находим значение поправочного коэффициента $k = 1,18$.

Подставляя значения величин в формулу, получим

$$1,18 \cdot \frac{8 \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot 8}{3,14 \cdot d^2} = 28000.$$

Откуда

$$d = \sqrt{\frac{1,18 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot 8}{3,14 \cdot 28000}} = 3,2 \text{ см.}$$

Средний диаметр витка пружины

$$D = 3,2 \cdot 8 = 25,6 \text{ см.}$$

Число витков пружины находим по формуле для осадки (52):

$$n = \frac{\lambda \cdot G \cdot d^4}{8F \cdot D^3} = \frac{10 \cdot 0,85 \cdot 10^7 \cdot 3,2^4}{8 \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot 25,6^3} = 5,5.$$

Число витков пружины с учетом заделки концов будет

$$n = 5,5 + 1,5 = 7.$$

Для определения высоты пружины в свободном состоянии найдем осадку одного витка λ_0 :

$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{n} = \frac{8FD^3}{Gd^4} = \frac{8 \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot 25,6^3}{0,85 \cdot 10^7 \cdot 3,2^4} = 1,8 \text{ см.}$$

Шаг пружины в свободном состоянии:

$$S = d + \lambda_0 + t_0 = 3,2 + 1,8 + 0,4 = 5,4 \text{ см.}$$

Высота пружины в свободном состоянии: $h_0 = S \cdot n = 5,4 \cdot 7 = 37,8 \approx 38$ см.

Пример 28.

Определить наибольшее касательное напряжение в пружине клапанного механизма, а также начальное усилие F_0 , с которым клапан прижимается к седлу. Средний диаметр витков пружины $D=6$ см, диаметр проволоки пружины $d=1,2$ см, число витков $n=12$. Клапан открывается при сжатии пружины на 1,0 см; предварительное сжатие пружины при закрытом клапане 1,8 см. В свободном состоянии зазор между витками пружины равен 0,6 см.

Решение.

Осадка пружины при начальном условии F_0 равна $\lambda_0=1,8$ см. Из формулы (52) для осадки пружины найдем:

$$F_0 = \frac{\lambda_0 G d^4}{8 D^3 \cdot n} = \frac{1,8 \cdot 0,85 \cdot 10^7 \cdot 1,2^4}{8 \cdot 6^3 \cdot 12} = 1527 \text{ Н.}$$

Осадка пружины при открытии клапана

$$\lambda = 1,8 + 1,0 = 2,8 \text{ см.}$$

Усилие F , сжимающее пружину, будет

$$F = \frac{\lambda G d^4}{8 D^3 \cdot n} = \frac{2,8 \cdot 0,85 \cdot 10^7 \cdot 1,2^4}{8 \cdot 6^3 \cdot 12} = 2377 \text{ Н.}$$

Наибольшее касательное напряжение

$$\tau_{\max} = k \frac{8 F D}{\pi d^3} = 1,31 \cdot \frac{8 \cdot 2376 \cdot 6}{3,14 \cdot 1,2^3} = 24535 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 245 \text{ МПа.}$$

Зазор между витками пружины после открытия клапана

$$t = \frac{0,6 \cdot 12 - 1,8 - 1,0}{12} = 0,37 \text{ см} = 3,7 \text{ мм.}$$

Пример 29.

Цилиндрическая винтовая пружина имеет следующие размеры: число витков $n=10$, средний диаметр витка $D=30$ см, диаметр проволоки $d=4$ см, полная осадка пружины до соприкосновения витков $\lambda=40$ см. Определить нагрузку F , сжимающую пружину при осадке $\lambda=32$ см. Проверить прочность пружины, если допустимое касательное напряжение $[\tau]=500$ МПа. Определить высоту пружины в свободном состоянии.

Решение.

Находим силу F , сжимающую пружину при соприкосновении витков:

$$F_1 = \frac{\lambda G d^4}{8 D^3 \cdot n} = \frac{40 \cdot 0,8 \cdot 10^7 \cdot 4^4}{8 \cdot 30^3 \cdot 10} = 37926 \text{ Н.}$$

Определим нагрузку F , сжимающую пружину при осадке $\lambda=32$ см. Из условия пропорциональности находим:

$$F = \frac{37926 \cdot 32}{40} = 30341 \text{ Н.}$$

Для проверки прочности пружины определим индекс пружины и по табл. 3.1 найдем поправочный коэффициент k :

$$\frac{D}{d} = \frac{30}{4} = 7,7; \Rightarrow k \approx 1,2,$$

$$\tau_{\max} = k \frac{8FD}{\pi d^3} = 1,2 \cdot \frac{8 \cdot 30341 \cdot 30}{3,14 \cdot 4^3} = 435 \text{ МПа} < [\tau] = 500 \text{ МПа}.$$

Прочность пружины обеспечена.

Вычислим шаг пружины S в свободном состоянии:

$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{n} = \frac{8FD^3}{Gd^4} = \frac{8 \cdot 30341 \cdot 30^3}{0,8 \cdot 10^7 \cdot 256} = 3,2 \text{ см}.$$

Зазор между витками под нагрузкой:

$$t_0 = \frac{40 - 32}{10} = 0,8 \text{ см}; S = d + \lambda_0 + t_0 = 4 + 3,2 + 0,8 = 8,0 \text{ см}.$$

Высота пружины: $h_0 = S \cdot n = 8 \cdot 10 = 80 \text{ см}.$

3.8. Продольный изгиб стержней

В механике твердого тела различают следующие формы равновесия твердого тела: устойчивая, безразличная и неустойчивая. Эти три формы присущи сжатым гибким (длинным, тонким) стержням.

При незначительной сжимающей силе F , меньше некоторого критического значения $F_{\text{кр}}$, первоначальная прямолинейная форма стержня является устойчивой, при $F = F_{\text{кр}}$ сжатый стержень находится в состоянии безразличного равновесия, когда возможны как первоначальная прямолинейная форма равновесия, так и несколько близких к ней криволинейных. Если $F > F_{\text{кр}}$, первоначальная форма стержня становится неустойчивой, происходит интенсивное нарастание деформации изгиба (прогиб).

Устойчивость – способность стержня под действием сжимающей нагрузки находиться в состоянии упругого равновесия и сохранять первоначальную форму.

Критическая сила – значение осевой сжимающей нагрузки, при которой стержень будет в состоянии безразличного равновесия (критическое состояние), а малейшее превышение ее приведет к интенсивному росту прогибов (к потере устойчивости).

Критическая нагрузка является опасной и считается разрушающей. Разрушение происходит внезапно.

Критическая нагрузка для сжатого прямолинейного стержня постоянного поперечного сечения определяется по формуле Эйлера:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}. \quad (54)$$

где E – модуль упругости материала стержня; I_{\min} – минимальный момент инерции сечения относительно главных центральных осей; μ – коэффициент приведения длины, который зависит от условий закрепления стержня.

Формула Эйлера была выведена в предположении упругих деформаций, когда

$$\sigma_{кр} < \sigma_{пл} . \quad (55)$$

Для одинаковых закреплений в двух главных плоскостях нужно брать минимальный момент инерции I_{\min} .

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{(\mu l)^2} . \quad (56)$$

Здесь введено обозначение минимального радиуса инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} .$$

Обычно вводится понятие максимальной гибкости стержня

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu l}{i_{\min}} . \quad (57)$$

Гибкость – величина геометрическая. Теперь можно записать

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\max}^2} . \quad (58)$$

Таким образом, формулу Эйлера для величины критической силы можно применить, если

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\max}^2} < \sigma_{пл} .$$

Отсюда можно найти условия для λ_{\max}

$$\lambda_{\max} > \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пл}}} . \quad (59)$$

Введем обозначение для предельной гибкости

$$\lambda_{\text{пред}} > \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пл}}} . \quad (60)$$

Эта величина зависит от физических свойств материала стержня. Условие (59) перепишем в виде

$$\lambda_{\max} > \lambda_{\text{пред}} . \quad (61)$$

Окончательно, если наибольшая гибкость больше предельной для данного материала, то стержень будет терять устойчивость при напряжениях меньше предела пропорциональности $\sigma_{пл}$, а если условие (61) не удовлетворяется и $\lambda_{\max} < \lambda_{\text{пред}}$, то стержень будет терять устойчивость при упруго-пластических деформациях. В этом случае для критической силы применяется эмпирическая формула Ясинского-Тетмайера

$$F_{кр} = A(a - b\lambda_{\max}) , \quad (62)$$

где a и b – коэффициенты, зависящие от материала и приводимые в справочниках.

При этом

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda_{\max} . \quad (63)$$

Таким образом, критические напряжения в любой стадии деформации зависят от гибкости

$$\sigma_{кр} = \sigma_{кр}(\lambda_{max}): \quad (64)$$

в упругой – по формуле (58) – гипербола Эйлера, в упруго-пластической – по формуле (63) – прямая Ясинского.

При некотором значении гибкости, которое можно обозначить через λ_0 , величина критических напряжений становится равной предельному напряжению сжатия (либо пределу текучести, либо пределу прочности). Это значение гибкости будет границей применимости формулы Ясинского. Таким образом, критические напряжения вычисляются по формуле Ясинского тогда, когда гибкость стержня меньше $\lambda_{пред}$, но не ниже λ_0 .

Если рассчитываемый стержень оказался малой гибкости $\lambda < \lambda_0$, то опасность потери устойчивости меньше опасности разрушения, и такой стержень надо рассчитывать на прочность, а не на устойчивость.

Для стержней большой гибкости $\lambda > \lambda_{пред}$ расчет ведется по формуле Эйлера, поэтому зависимость $\sigma_{кр}$ от λ – гиперболическая. Стержни средней гибкости $\lambda_0 \geq \lambda > \lambda_{пред}$ рассчитываются по формуле Ясинского. Для них зависимость $\sigma_{кр}$ от λ – линейная. Для стержней малой гибкости нет надобности в расчете на устойчивость. Для них критическое напряжение считается постоянным и равным для пластичных материалов пределу текучести при сжатии, а для хрупких – пределу прочности при сжатии.

Вычислив значение $\sigma_{кр}$ и умножив его на рассчитанную нами ранее площадь поперечного сечения стойки, получим величину критической силы $F_{кр}$:

$$F_{кр} = \sigma_{кр} A.$$

После этого можно определить коэффициент безопасности по устойчивости

$$n_y = \frac{F_{кр}}{F}.$$

Инженерный расчет сжатых стержней на устойчивость формально можно поставить в соответствие расчету на простое сжатие, принимая в качестве расчетного сопротивления некоторую часть от критического напряжения:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma]_y,$$

где $[\sigma]_y = \sigma_{кр} / n_y$ – допускаемое напряжение на устойчивость.

Обычно $[\sigma]_y$ выражают через допускаемое напряжение на сжатие для данного материала:

$$[\sigma]_y = \varphi [\sigma]_{сж}. \quad (65)$$

Здесь $\varphi \leq 1,0$ – коэффициент снижения допускаемого напряжения на сжатие или коэффициент продольного изгиба; $[\sigma]_{сж}$ – допускаемое напряжение на сжатие, то есть установленное без учета продольного изгиба.

Величина коэффициента φ зависит от материала стержня и его гибкости (Приложение 5).

При выполнении расчетов на устойчивость по коэффициентам φ исходная зависимость имеет следующий вид:

$$\sigma = \frac{F}{\varphi A} \leq [\sigma]_{\text{сж}}. \quad (66)$$

Пример 30.

Стальной стержень сжимается продольной расчетной нагрузкой F . Допускаемое напряжение материала стержня $[\sigma]_{\text{сж}} = 200$ МПа, модуль продольной упругости $E = 200$ ГПа. Требуется:

- 1) подобрать размеры поперечного сечения стержня из условия устойчивости;
- 2) определить значение коэффициента безопасности по устойчивости.

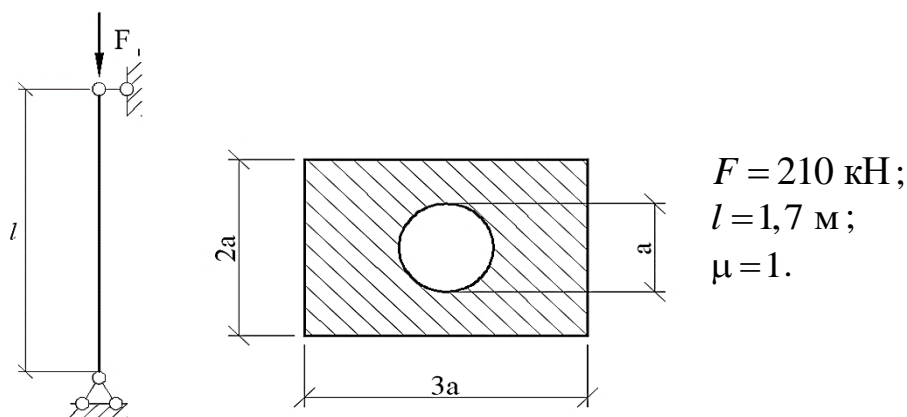


Рис. 73 – Схема стержня и его поперечное сечение

Решение.

Размеры поперечного сечения определим исходя из условия устойчивости:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi [\sigma]_{\text{сж}},$$

где φ – коэффициент снижения допускаемого напряжения на сжатие (коэффициент продольного изгиба).

В расчетной формуле имеются две неизвестные величины – коэффициент φ и искомая площадь A . Поэтому при подборе сечения необходимо использовать метод последовательных приближений.

Выразим геометрические характеристики через величину a .

Так как потеря устойчивости происходит в плоскости наименьшей жесткости, определяем минимальный момент инерции:

$$I_{\min} = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3a(2a)^3}{12} - \frac{\pi a^4}{64} = 1,95a^4,$$

тогда площадь поперечного сечения:

$$A = 3a \cdot 2a - \frac{\pi a^2}{4} = 5,21a^2; \quad a = \sqrt{\frac{A}{5,21}} = 0,44\sqrt{A},$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{1,95a^4}{5,21a^2}} = 0,61a.$$

Приближение 1. В первом приближении коэффициент продольного изгиба принимают $\varphi_1 = 0,5$. Тогда требуемая площадь сечения равна

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_1 \cdot [\sigma]_{\text{сж}}} = \frac{210 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 200 \cdot 10^6} = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2,$$

$$a_1 = 0,44\sqrt{2,1 \cdot 10^{-3}} = 0,0201 \text{ м} = 2,01 \text{ см},$$

$$i_{\min_1} = 0,61a_1 = 0,61 \cdot 0,0201 = 0,0123 \text{ м}.$$

Расчетная гибкость стержня:

$$\lambda_1 = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min_1}} = \frac{1 \cdot 1,7}{0,0123} = 138,21.$$

По таблице (Приложение 5) определяем значение коэффициента φ соответствующего гибкости $\lambda_1 = 138,21$:

$$\lambda = 130 \rightarrow \varphi = 0,425,$$

$$\lambda = 140 \rightarrow \varphi = 0,376.$$

Путем линейной интерполяции получим:

$$\varphi'_1 = 0,425 - \frac{0,425 - 0,376}{10} \cdot (138,21 - 130) = 0,385.$$

Проверим выполнение условия устойчивости в первом приближении:

$$\sigma_1 = \frac{F}{A_1} = \frac{210 \cdot 10^3}{2,1 \cdot 10^{-3}} = 100 \cdot 10^6 \text{ Па} = 100 \text{ МПа},$$

$$\varphi'_1 \cdot [\sigma]_{\text{сж}} = 0,385 \cdot 200 = 77 \text{ МПа}; \quad \sigma_1 > \varphi'_1 \cdot [\sigma]_{\text{сж}}.$$

Перенапряжение составляет $\frac{100 - 77}{77} \cdot 100\% = 29,8\% > 5\%$, что недопустимо.

Необходимо уточнение размеров.

Приближение 2. За новое значение коэффициента φ_2 принимаем среднее арифметическое первых двух:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,385}{2} = 0,443, \text{ тогда площадь сечения}$$

$$A_2 = \frac{F}{\varphi_2 \cdot [\sigma]_{\text{сж}}} = \frac{210 \cdot 10^3}{0,443 \cdot 200 \cdot 10^6} = 2,37 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2,$$

$$a_2 = 0,44\sqrt{2,37 \cdot 10^{-3}} = 0,021 \text{ м} = 2,1 \text{ см},$$

$$i_{\min_2} = 0,61a_2 = 0,61 \cdot 0,021 = 12,81 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Определим гибкость стержня

$$\lambda_2 = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min_2}} = \frac{1 \cdot 1,7}{12,81 \cdot 10^{-3}} = 132,7.$$

Коэффициент φ'_2 рассчитываем для гибкости $\lambda_2 = 132,7$:

$$\lambda = 130 \rightarrow \varphi = 0,425,$$

$$\lambda = 140 \rightarrow \varphi = 0,376,$$

$$\varphi'_2 = 0,425 - \frac{0,425 - 0,376}{10} \cdot (132,7 - 130) = 0,412.$$

Проверим выполнение условий устойчивости:

$$\sigma_2 = \frac{F}{A_2} = \frac{210 \cdot 10^3}{2,37 \cdot 10^{-3}} = 88,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 88,6 \text{ МПа},$$

$$\varphi'_2 \cdot [\sigma]_{\text{сж}} = 0,412 \cdot 200 = 82,4 \text{ МПа}; \sigma_2 > \varphi'_2 \cdot [\sigma]_{\text{сж}}.$$

Перенапряжение составляет: $\frac{88,6 - 82,4}{82,4} \cdot 100\% = 7,52\% > 5\%$, что

недопустимо.

Приближение 3.

Определим коэффициент продольного изгиба:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0,443 + 0,412}{2} = 0,428.$$

Площадь поперечного сечения

$$A_3 = \frac{F}{\varphi_3 \cdot [\sigma]_{\text{сж}}} = \frac{210 \cdot 10^3}{0,428 \cdot 200 \cdot 10^6} = 2,45 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2,$$

$$a_3 = 0,44 \sqrt{2,45 \cdot 10^{-3}} = 0,022 \text{ м} = 2,2 \text{ см},$$

радиус инерции $i_{\min_3} = 0,61 a_3 = 0,61 \cdot 0,022 = 1,34 \cdot 10^{-2} \text{ м},$

гибкость колонны $\lambda_3 = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min_3}} = \frac{1 \cdot 1,7}{1,34 \cdot 10^{-2}} = 126,9.$

Определим значение коэффициента φ'_3 :

$$\lambda = 120 \rightarrow \varphi = 0,479,$$

$$\lambda = 130 \rightarrow \varphi = 0,425,$$

$$\varphi'_3 = 0,479 - \frac{0,479 - 0,425}{10} \cdot (126,9 - 120) = 0,442.$$

Проверим выполнение условий устойчивости:

$$\sigma_3 = \frac{F}{A_3} = \frac{210 \cdot 10^3}{2,45 \cdot 10^{-3}} = 85,71 \cdot 10^6 \text{ Па} = 85,71 \text{ МПа},$$

$$\varphi'_3 \cdot [\sigma]_{\text{сж}} = 0,442 \cdot 200 = 88,4 \text{ МПа}; \sigma_3 < \varphi'_3 \cdot [\sigma]_{\text{сж}}.$$

Недонапряжение составляет $\frac{88,4 - 85,71}{88,4} \cdot 100\% = 3,04\% < 5\%$, что

допустимо.

Окончательно принимаем ($a = 22 \text{ мм}$) и размеры сечения $44 \times 66 \text{ мм}.$

$$I_{\min} = 1,95 \cdot a^4 = 1,95 \cdot 2,2^4 = 45,68 \text{ см}^4,$$

$$i_{\min} = 0,61 \cdot 2,2 = 1,342 \text{ см},$$

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 1,7}{1,342 \cdot 10^{-2}} = 126,7.$$

Находим величину критической силы. Так как $\lambda > \lambda_{\text{пред}}$, т.е. $126,7 > 100$, то используем формулу Эйлера для определения критической силы:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 45,68 \cdot 10^{-8}}{(1 \cdot 1,7)^2} = 311,69 \cdot 10^3 \text{ Н} = 311,69 \text{ кН}.$$

Определим коэффициент безопасности по устойчивости:

$$n_y = \frac{F_{\text{кр}}}{F} = \frac{311,69}{210} = 1,48.$$

Пример 31.

Стальной стержень сжимается продольной расчетной нагрузкой F . Допускаемое напряжение материала стержня $[\sigma]_{\text{сж}} = 200 \text{ МПа}$, модуль продольной упругости $E = 200 \text{ ГПа}$. Требуется:

- 1) подобрать размеры поперечного сечения стержня из условия устойчивости;
- 2) определить значение коэффициента безопасности по устойчивости.

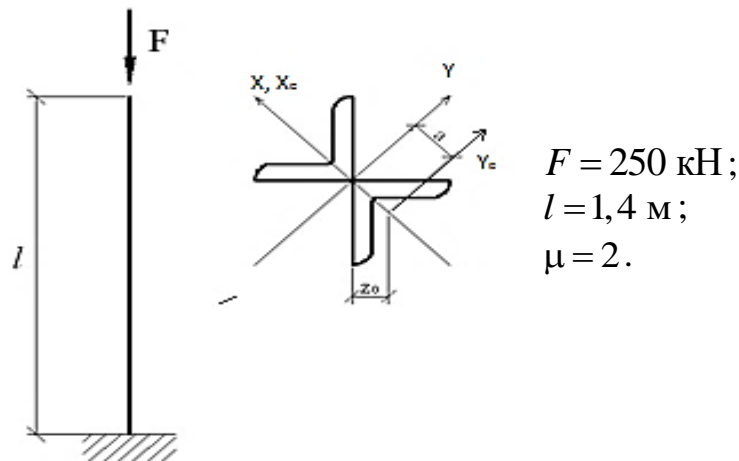


Рис. 74 – Схема стержня

Решение.

Определим размеры поперечного сечения исходя из условия устойчивости:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi [\sigma]_{\text{сж}}.$$

Для расчета используем метод последовательных приближений.

Приближение 1.

В первом приближении примем коэффициент продольного изгиба $\varphi_1 = 0,5$,

тогда

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_1 \cdot [\sigma]_{\text{сж}}} = \frac{250 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 200 \cdot 10^6} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 25 \text{ см}^2.$$

Площадь одного уголка составит:

$$A_{\text{ур}} = \frac{A_1}{2} = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ см}^2.$$

Из сортамента прокатной стали (Приложение 3) выбираем уголок $100 \times 100 \times 7$ с площадью $A_{\text{гр}} = 13,75 \text{ см}^2$, моментами инерции $I_{x_0} = 207 \text{ см}^4$, $I_{y_0} = 54,16 \text{ см}^4$, $x_0 = y_0 = 2,71 \text{ см}$.

$$a = \frac{x_c}{\cos 45^\circ} = \frac{2,71}{0,707} = 3,83 \text{ см}.$$

Определим моменты инерции данного сечения относительно главных центральных осей x и y , которые являются осями симметрии сечения:

$$I_x = 2I_{x_0} = 2 \cdot 207 = 414 \text{ см}^4,$$

$$I_y = 2(I_{y_0} + a^2 A) = 2(54,16 + 3,83^2 \cdot 13,75) = 511,72 \text{ см}^4.$$

Момент инерции относительно оси X меньше, поэтому принимаем его равным I_{\min} .

Минимальный радиус инерции будет равен:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{414}{2 \cdot 13,75}} = 3,88 \text{ см}.$$

Определим гибкость стержня:

$$\lambda_1 = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 1,4}{3,88 \cdot 10^{-2}} = 72,16.$$

По таблице (Приложение 5) определяем значение коэффициента ϕ'_1 , соответствующего гибкости $\lambda_1 = 72,16$:

$$\lambda = 70 \rightarrow \phi = 0,782,$$

$$\lambda = 80 \rightarrow \phi = 0,734,$$

путем линейной интерполяции получим:

$$\phi'_1 = 0,782 - \frac{0,782 - 0,734}{10} \cdot (72,16 - 70) = 0,771.$$

Проверим выполнение условия устойчивости в первом приближении:

$$\sigma_1 = \frac{F}{2A_1} = \frac{250 \cdot 10^3}{2 \cdot 13,75 \cdot 10^{-4}} = 90,91 \cdot 10^6 \text{ Па} = 90,91 \text{ МПа},$$

$$\phi'_1 \cdot [\sigma]_{\text{сж}} = 0,771 \cdot 200 = 154,2 \text{ МПа}; \sigma_1 < \phi'_1 \cdot [\sigma]_{\text{сж}}.$$

Недонапряжение составляет $\frac{154,2 - 90,91}{154,2} \cdot 100\% = 33,3\% \gg 5\%$, что

недопустимо.

Необходимо уменьшить поперечное сечение.

Приближение 2. За новое значение коэффициента ϕ_2 принимаем среднее арифметическое первых двух:

$$\phi_2 = \frac{\phi_1 + \phi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,771}{2} = 0,636, \text{ тогда площадь сечения}$$

$$A_2 = \frac{F}{\phi_2 \cdot [\sigma]_{\text{сж}}} = \frac{250 \cdot 10^3}{0,636 \cdot 200 \cdot 10^6} = 19,65 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 19,65 \text{ см}^2,$$

$$A_{\text{гр}} = \frac{A_2}{2} = \frac{19,65}{2} = 9,83 \text{ см}^2.$$

В сортаменте выбираем уголок $90 \times 90 \times 6$, $A_{\text{гр}} = 10,61 \text{ см}^2$;

$$I_x = 2I_{x_0} = 2 \cdot 130 = 260 \text{ см}^4,$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{260}{2 \cdot 10,61}} = 3,5 \text{ см}.$$

Определяем гибкость стержня:

$$\lambda_2 = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 1,4}{3,5 \cdot 10^{-2}} = 80.$$

Из таблицы для $\lambda = 80$ выберем значение $\varphi'_2 = 0,734$.

Проверим выполнение условий устойчивости:

$$\sigma_2 = \frac{F}{2A_2} = \frac{250 \cdot 10^3}{2 \cdot 10,61 \cdot 10^{-4}} = 117,81 \cdot 10^6 \text{ Па} = 117,81 \text{ МПа},$$

$$\varphi'_2 \cdot [\sigma]_{\text{сж}} = 0,734 \cdot 200 = 146,8 \text{ МПа}; \sigma_2 < \varphi'_2 \cdot [\sigma]_{\text{сж}}.$$

Недонапряжение составит $\frac{146,8 - 117,8}{146,8} \cdot 100\% = 19,8\% > 5\%$, что

неприемлемо.

Приближение 3. За новое значение коэффициента φ_3 принимаем среднее арифметическое первых двух.

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0,636 + 0,734}{2} = 0,685,$$

$$A_3 = \frac{F}{\varphi_3 \cdot [\sigma]_{\text{сж}}} = \frac{250 \cdot 10^3}{0,685 \cdot 200 \cdot 10^6} = 18,24 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 18,24 \text{ см}^2,$$

$$A_{\text{гр}} = \frac{A_3}{2} = \frac{18,24}{2} = 9,12 \text{ см}^2.$$

В сортаменте выбираем уголок $80 \times 80 \times 6$, $A_{\text{гр}} = 9,38 \text{ см}^2$;

$$I_x = 2I_{x_0} = 2 \cdot 90,4 = 180,8 \text{ см}^4,$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{180,8}{2 \cdot 9,38}} = 3,10 \text{ см}.$$

Определяем гибкость стержня:

$$\lambda_3 = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 1,4}{3,10 \cdot 10^{-2}} = 90,32.$$

Из таблицы для $\lambda_3 = 90,32$ выберем значение φ :

$$\lambda = 90 \rightarrow \varphi = 0,665,$$

$$\lambda = 100 \rightarrow \varphi = 0,599,$$

$$\varphi'_3 = 0,665 - \frac{0,665 - 0,599}{10} \cdot (90,32 - 90) = 0,663.$$

Проверим выполнение условий устойчивости:

$$\sigma_3 = \frac{F}{2A_3} = \frac{250 \cdot 10^3}{2 \cdot 9,38 \cdot 10^{-4}} = 133,26 \cdot 10^6 \text{ Па} = 133,26 \text{ МПа},$$

$$\phi'_3 \cdot [\sigma]_{\text{сж}} = 0,663 \cdot 200 = 132,6 \text{ МПа}; \sigma_3 > \phi'_3 \cdot [\sigma]_{\text{сж}}.$$

Перенапряжение составит $\frac{133,26 - 132,6}{132,6} \cdot 100\% = 0,5\% < 5\%$, что допустимо.

Окончательно принимаем сечение в виде двух уголков $80 \times 80 \times 6$, $I_{\text{min}} = 180,8 \text{ см}^4$.

Находим величину критической силы. Так как $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$, т.е. $90,32 < 100$, то используем формулу Ясинского (Приложение 6) для определения критического напряжения:

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda = 310 - 1,14 \cdot 90,32 = 207,04 \text{ МПа}.$$

Тогда критическая сила будет равна:

$$F_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} \cdot 2A_{\text{уг}} = 207,04 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 9,38 \cdot 10^{-4} = 388,4 \cdot 10^3 \text{ Н} = 388,4 \text{ кН}.$$

Коэффициент безопасности по устойчивости будет равен:

$$n_y = \frac{F_{\text{кр}}}{F} = \frac{388,4}{250} = 1,55.$$

3.9. Динамическое действие нагрузки

При статическом действии на конструкцию нагрузка возрастает медленно и плавно от нуля до конечного значения, оставаясь постоянной, или изменяется также медленно. Образующиеся при этом силы инерции ничтожно малы.

При динамическом действии нагрузка возрастает быстро, с ускорением, или внезапно; может изменить свою величину и направление, а также длительность действия. Все это приводит к возникновению больших инерционных сил.

К числу динамических относятся нагрузки в элементах конструкций (деталях машин),двигающиеся с ускорением, а также ударного и вибрационного воздействия.

Физические условия работы элемента конструкции при динамическом действии нагрузки являются более сложными, чем при статическом. Для выработки расчетных условий требуется привлечение более сложных математических методов. Многие факторы еще недостаточно изучены. Поэтому на практике пользуются упрощенными методами расчета, основанными на ряде допущений. В частности, допускается, что в пределах упругих деформаций при динамических нагрузках верен закон Гука, т.е. напряжения и деформации связаны линейной зависимостью ($\sigma = E\varepsilon$).

Установлено, что практически во всех случаях силы динамического воздействия пропорциональны статическим. Поэтому расчеты на прочность при динамических нагрузках выполняются по методам, разработанным для статических нагрузок, но с введением динамического коэффициента.

Однако вследствие ряда принятых допущений расчетные формулы при динамических нагрузках являются более приближенными, чем при статических.

Различают следующие простейшие динамические задачи: расчет на действие сил инерции, расчет на ударную нагрузку и расчет на колебательную (вибрационную) нагрузку.

Для всех этих видов расчета принимается принцип Даламбера.

3.9.1. Расчет на действие сил инерции

Инерционной нагрузке подвержены элементы подъемников, лифтов, транспортеров, деталей машин и механизмов, движение которых происходит с ускорением (рис. 75, а).

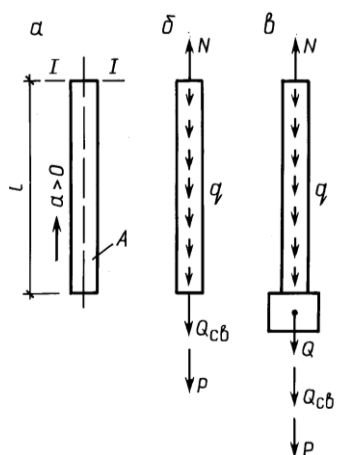


Рис. 75 – Расчетные схемы элементов

Сила инерции P численно равна произведению массы движущегося элемента m на ускорение движения a ($P = ma$) и направлена противоположно ускорению. Ускорение a возникает в период разгона, при подъеме груза и торможении, при его опускании. При равномерном перемещении ускорение a и сила инерции равны нулю.

Для случая, показанного на рис. 75, б, на рассматриваемую часть стержня действуют собственный вес этой части $Q_{св} = ql$, где q – вес погонного метра стержня (линейная плотность), и сила инерции $P = ma$, где m – масса части стержня.

В случае наличия груза Q (рис. 75, в) на рассматриваемую часть стержня действуют вес груза Q , собственный вес части стержня $Q_{св}$ и сила инерции $P = m'a$, где m' – масса груза и части стержня.

Напряжение в стержне, движущимся с ускорением:

$$\sigma_d = \sigma_{ст} \cdot K_d, \quad (67)$$

где σ_d – динамическое напряжение; $\sigma_{ст}$ – напряжение от статического действия собственного веса (груза); K_d – динамический коэффициент, показывающий во сколько раз увеличится статическое напряжение от воздействия сил инерции.

Для случая (рис. 75, б)
$$\sigma_{ст} = \frac{Q_{св}}{A} = \frac{ql}{A}.$$

Для случая (рис. 75, в)
$$\sigma_{ст} = \frac{Q + Q_{св}}{A} = \frac{Q + ql}{A}.$$

Динамический коэффициент определяется по формуле

$$K_d = 1 + \frac{a}{g}, \quad (68)$$

где a – ускорение движения; g – ускорение силы тяжести (свободного падения).

Условие прочности при учете сил инерции имеет вид

$$\sigma_d = \sigma_{ст} \cdot K_d \leq [\sigma]. \quad (69)$$

При значительном весе груза Q и небольшой длине стержня (троса), собственным весом его можно пренебречь.

3.9.2. Расчет на ударную нагрузку

Ударной называется нагрузка, которая за короткий промежуток времени достигает значительной величины.

Поскольку продолжительность удара измеряется долями секунды, образующиеся большие ускорения приводят к большой инерционной силе, воздействующей на элемент конструкции, воспринимающий удар.

В зависимости от характера деформации ударяемого тела различают продольный (сжимающий или растягивающий), поперечный (изгибающий) и скручивающий удары. Во всех этих случаях степень воздействия ударной нагрузки зависит от массы и скоростей (в момент удара) обоих соударяющихся тел. Массой ударяемого элемента можно пренебречь, если она значительно меньше массы ударяющего тела.

В случае сжимающего или растягивающего удара (рис.76), коэффициент динамичности определяется по формуле

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta l_{ст}}}, \quad (70)$$

где H – высота падения груза; $\Delta l_{ст}$ – деформация стержня от статического действия ударяющей силы $\Delta l_{ст} = \frac{Fl}{EA}$; A – площадь поперечного сечения; E – модуль продольной упругости материала стержня.

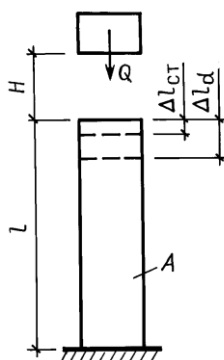


Рис. 76 – Схема элемента, работающего на продольный удар

В случае изгибающего удара (рис. 77) динамический коэффициент определяется по формуле

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{v_{ст}}}, \quad (71)$$

где H – высота падения груза; $v_{ст}$ – прогиб балки в ударяемом сечении от статического действия ударяющей силы.

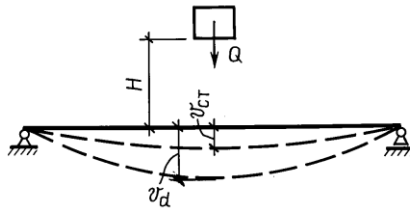


Рис. 77 – Схема элемента, работающего на поперечный удар

Например, при ударе посередине длины балки $v_{ст} = \frac{Fl^3}{48EI}$, при ударе на конце консоли $v_{ст} = \frac{Fl^3}{3EI}$.

Анализ формул для определения K_d показывает, что при внезапном приложении нагрузки ($H=0$) коэффициент динамичности $K_d = 2$. Если высота падения груза H значительно больше $\Delta l_{ст}(v_{ст})$, единицей под корнем, в названных формулах, можно пренебречь.

Если известна скорость падения груза V в начале удара, то коэффициент динамичности можно определить по формуле

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g \cdot \delta_{ст}}}, \quad (72)$$

где $\delta_{ст} = \Delta l_{ст}$ или $v_{ст}$ в зависимости от вида удара (продольный или поперечный).

Условие прочности по методу предельных состояний при ударном действии нагрузки имеет вид

$$\sigma_{д, \max} = \sigma_{ст, \max} \cdot K_d \leq [\sigma], \quad (73)$$

где $\sigma_{д, \max}$ – максимальное динамическое напряжение; $\sigma_{ст, \max}$ – максимальное статическое напряжение; K_d – динамический коэффициент, зависящий от вида динамического воздействия (70), (71).

Деформация элемента конструкции

$$\delta_d = \delta_{ст} \cdot K_d, \quad (74)$$

где δ_d – деформация от динамического действия силы ($\Delta l_d, v_d$), $\delta_{ст}$ – деформация от статического действия силы ($\Delta l_{ст}, v_{ст}$).

В теории курса доказывается, что величина динамических напряжений зависит от объема подвергающегося удару элемента конструкции (стержня, балки, вала) и качества его материала.

Чем больше объем и чем меньше модуль упругости, тем меньше динамические напряжения в элементе конструкции.

Для снижения динамических напряжений нужно увеличить податливость (деформативность) элемента путем увеличения, например, его длины или замены материала с более низким модулем упругости. Применимы и амортизирующие устройства (прокладки, пружины).

Изложенный выше способ расчета на действие ударной нагрузки не учитывает массу элемента конструкции, который подвергается удару. Вследствие этого формулы (67-74) дают несколько преувеличенное значение определяемых параметров, что идет в запас прочности и жесткости.

Приведем формулу для вычисления динамического коэффициента с учетом массы ударяемого элемента конструкции

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta l_{ст}} \cdot \frac{1}{1 + \alpha \frac{Q_{св}}{Q}}}, \quad (75)$$

где α – коэффициент приведения массы ударяемого элемента к месту удара; $Q_{св}$ – собственный вес ударяемого элемента; Q – вес ударяющего груза.

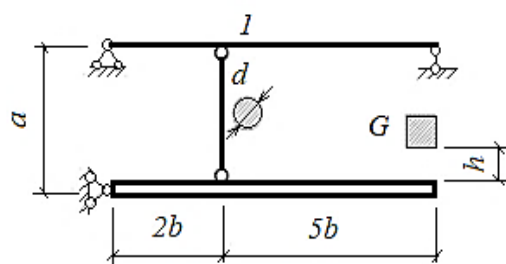
Пример 32.

На упругую систему падает груз G с высоты h . Материал стержней – сталь. Допускаемое напряжение при статической нагрузке $[\sigma] = 210$ МПа, $E = 200$ ГПа.

Требуется:

- 1) определить величины максимальных динамических напряжений в элементах системы;
- 2) определить величину динамического перемещения точки приложения груза.

Массу конструкции не учитывать.



$$\begin{aligned} G &= 400 \text{ Н}, \\ b &= 0,4 \text{ м}, \\ d &= 4 \text{ см}, \\ a &= 1,4 \text{ м}, \\ &\text{двутавр №18}, \\ h &= 5 \text{ см}. \end{aligned}$$

Рис. 78 – Схема стержневой системы

Решение.

Рассчитаем стержневую систему на статическую нагрузку. Определим статическое усилие в стержне.

Составим уравнение равновесия

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; \Rightarrow \sum M_A = -N \cdot 2b + G \cdot 7b = 0, \\ N = \frac{G \cdot 7b}{2b} = 3,5G = 3,5 \cdot 400 = 1400 \text{ Н}. \end{aligned}$$

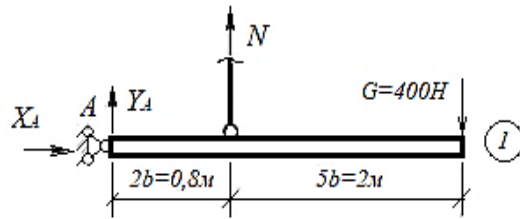


Рис. 79 – Схема элемента 1

Рассчитаем опорные реакции в балке BC:

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0; & \Rightarrow Y_C \cdot 7b - N \cdot 2b = 0, \\ Y_C \cdot 2,8 & = 1400 \cdot 0,8 = 0; \Rightarrow Y_C = 400 \text{ Н}, \\ \sum M_C = 0; & \Rightarrow Y_B \cdot 7b - N \cdot 5b = 0, \\ Y_B \cdot 2,8 & = 1400 \cdot 2 = 0; \Rightarrow Y_B = 1000 \text{ Н}, \\ \sum Y & = 400 + 1000 - 1400 = 0. \end{aligned}$$

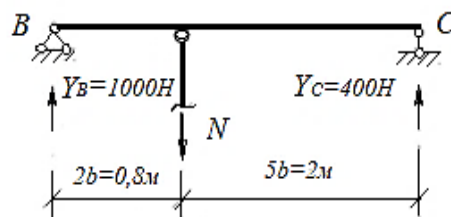


Рис. 80 – Схема балки

Построим эпюру изгибающих моментов в балке BC:

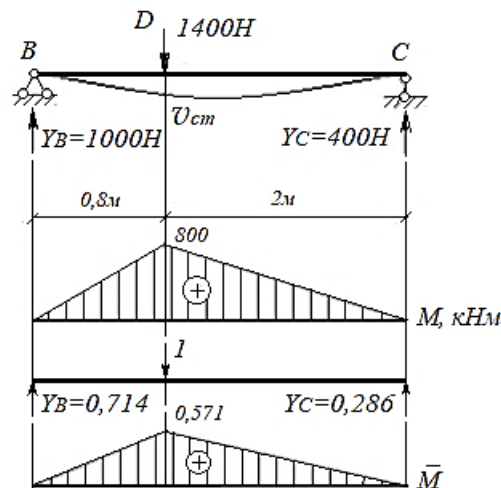


Рис. 81 – Эпюры изгибающих моментов и единичная эпюра балки BC

Определим удлинение стержня:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 4^2}{4} = 12,56 \text{ см}^2,$$

$$\Delta l_{ст} = \frac{Nl}{EA} = \frac{1400 \cdot 1,4}{200 \cdot 10^9 \cdot 12,56 \cdot 10^{-4}} = 0,78 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,008 \text{ мм}.$$

Определим напряжение в стержне от статической нагрузки.

$$\sigma_{ст(1)} = \frac{N}{A} = \frac{1400}{12,56 \cdot 10^{-4}} = 111,5 \cdot 10^4 \text{ Па} = 1,12 \text{ МПа}.$$

Определим напряжение в балке BC от статической нагрузки:

$$\sigma_{ст(BC)} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{800}{143 \cdot 10^{-6}} = 5,59 \cdot 10^6 \text{ Па} = 5,59 \text{ МПа},$$

$$W_x = 143 \text{ см}^3 \text{ (выпишем из сортамента, Приложение 1)}.$$

Определим прогиб балки в точке D от статического действия нагрузки методом сил. Для этого приложим в точке единичную силу и построим эпюру изгибающих моментов от этой силы.

$$Y_B = \frac{1 \cdot 0,8}{2,8} = 0,286; Y_C = \frac{1 \cdot 2}{2,8} = 0,714; M_D = 0,571,$$

$$v_{D_{ст}} = \frac{1}{EI_x} \left(800 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,571 + 800 \cdot 0,8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,571 \right) = \frac{426,3}{EI_x}.$$

Выпишем из сортамента (Приложение 1) значение момента инерции для двутавра №18: $I_x = 1290 \text{ см}^4$.

Прогиб в точке D от статической нагрузки составит:

$$v_{D_{ст}} = \frac{426,3}{200 \cdot 10^9 \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 0,17 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,17 \text{ мм}.$$

Определим прогиб в точке падения груза от статической нагрузки.

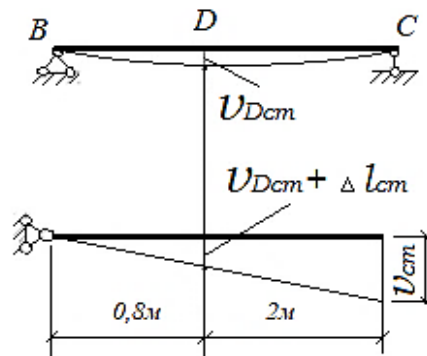


Рис. 82 – Схема прогибов балки от статической нагрузки

$$\frac{v_{ст}}{7b} = \frac{v_{D_{ст}} + \Delta l_{ст}}{2b}$$

$$v_{ст} = \frac{7(v_{D_{ст}} + \Delta l_{ст})}{2} = \frac{7 \cdot (0,17 + 0,008)}{2} = 0,62 \text{ мм}.$$

Определим динамический коэффициент:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{v_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 50}{0,62}} = 13,7.$$

Определим максимальные динамические напряжения в стержне и балке.

$$\sigma_{д(стр)} = \sigma_{ст(стр)} \cdot K_d = 1,12 \cdot 13,7 = 15,34 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 210 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{д(б)} = \sigma_{ст(б)} \cdot K_d = 5,59 \cdot 13,7 = 76,6 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 210 \text{ МПа}.$$

Прочность системы обеспечена.

Определим прогиб в точке падения груза от динамической нагрузки:

$$v_d = v_{ст} \cdot K_d = 0,62 \cdot 13,7 = 8,5 \text{ мм}.$$

3.10. Напряженно-деформированное состояния в точке

Чтобы охарактеризовать напряженное состояние в произвольной точке тела, находящегося в равновесном состоянии в общем случае нагружения, выделим в ее окрестности некоторый объем в виде элементарного параллелепипеда, грани которого перпендикулярны координатным осям (рис. 83). В пределе ($dx, dy, dz \rightarrow 0$) все грани параллелепипеда пройдут через рассматриваемую точку и напряжения на соответствующих плоскостях параллелепипеда могут рассматриваться как напряжения в исследуемой точке.

Полное напряжение, возникающее на площадке параллелепипеда может быть разложено на три составляющие, одну по нормали к площадке и две в ее плоскости. Нормальное и касательное напряжение обозначаются через σ и τ , соответственно, с индексами: $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zx}$. Первый индекс при касательном напряжении соответствует координатной оси, перпендикулярной к площадке, на которой оно действует, а второй – оси, вдоль которой оно направлено. Правило знаков принимают следующее: если внешняя нормаль к площадке совпадает по направлению с положительным направлением соответствующей оси, то напряжение считается положительным, если оно направлено вдоль положительного направления оси, вдоль которой оно действует. Так, на рис. 83 все напряжения положительные.

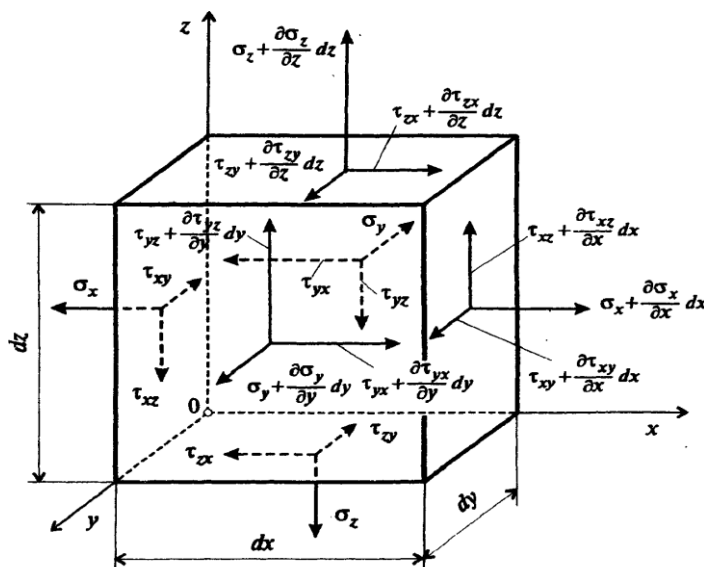


Рис. 83 – Напряженное состояние в точке упругого тела

Из трех условий равновесия параллелепипеда в виде суммы моментов относительно координатных осей получаем, что

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}; \tau_{zx} = \tau_{xz}; \tau_{xy} = \tau_{yx}. \quad (76)$$

Отсюда следует закон парности касательных напряжений: на двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательных напряжений, перпендикулярные к общему ребру, равны по величине и направлены обе либо к ребру, либо от него.

Рассматривая равновесие параллелепипеда в виде суммы сил по направлениям координатных осей, и отбрасывая величины второго порядка малости, получаем дифференциальные уравнения его равновесия:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \gamma_x = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \gamma_y = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \gamma_z = 0; \end{cases} \quad (77)$$

где $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ – составляющие объемных сил вдоль координатных осей.

С учетом закона парности касательных напряжений (76), уравнения (77) содержат шесть неизвестных напряжений: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$. Поскольку количество уравнений равновесия статики меньше, чем количество неизвестных напряжений, то в общем случае задача определения напряженного состояния в произвольной точке сплошной среды нагруженного тела, является статически неопределимой.

Главные оси и главные напряжения. Из напряженного тела в окрестности произвольной точки выделим элементарный объем в виде тетраэдра (рис. 84).

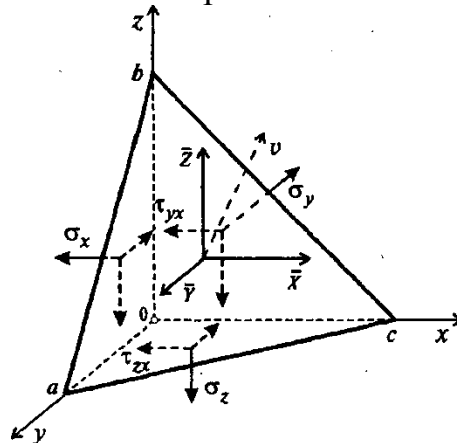


Рис. 84 – Элементарный объем в виде тетраэдра

Ориентация площадки в пространстве задается направляющими косинусами нормали v к ней – $l = \cos(x, v)$, $m = \cos(y, v)$, $n = \cos(z, v)$.

Вектор полного напряжения на произвольной площадке abc спроецируем на оси x, y и z . Обозначим эти проекции через $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$. Обозначая площадь

треугольников abc , $a0b$, $b0c$, $a0c$ через dF , dF_x , dF_y , dF_z , соответственно будем иметь:

$$dF_x = dF \cdot l; dF_y = dF \cdot m; dF_z = dF \cdot n. \quad (78)$$

Проецируя все силы, действующие на выделенный элемент, последовательно на оси x , y , z и с учетом (76) получим:

$$\begin{cases} X = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n; \\ Y = \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{zy} \cdot n; \\ Z = \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n; \end{cases} \quad (79)$$

Выразим нормальное напряжение σ_v на наклонной площадке через X , Y , Z :

$$\sigma_v = X \cdot l + Y \cdot m + Z \cdot n. \quad (80)$$

Отсюда с учетом (79) получим

$$\sigma_v = \sigma_x \cdot l^2 + \sigma_y \cdot m^2 + \sigma_z \cdot n^2 + 2\tau_{yz} \cdot m \cdot n + 2\tau_{zx} \cdot n \cdot l + 2\tau_{xy} \cdot l \cdot m. \quad (81)$$

Рассмотрим множество секущих площадок произвольной ориентации, проходящих через исследуемую точку. По нормали к каждой площадке отложим отрезок $r = f(\sigma_v)$, координаты конца вектора которого будут следующими:

$$x = r \cdot l; y = r \cdot m; z = r \cdot n.$$

Исключая из (81) направляющие косинусы, получим

$$\sigma_v \cdot r^2 = \sigma_x \cdot x^2 + \sigma_y \cdot y^2 + \sigma_z \cdot z^2 + 2\tau_{yz} \cdot y \cdot z + 2\tau_{zx} \cdot z \cdot x + 2\tau_{xy} \cdot x \cdot y. \quad (82)$$

Принимая обозначение

$$r^2 = \frac{k}{|\sigma_v|},$$

где k – произвольная постоянная, из (82) получим:

$$\sigma_x \cdot x^2 + \sigma_y \cdot y^2 + \sigma_z \cdot z^2 + 2\tau_{yz} \cdot y \cdot z + 2\tau_{zx} \cdot z \cdot x + 2\tau_{xy} \cdot x \cdot y = k. \quad (83)$$

Выражение (83) представляет собой уравнение поверхности второго порядка в системе координат x , y , z . Следовательно, путем поворота системы координат уравнение (83) можно преобразовать таким образом, чтобы попарные произведения исчезли, т. е. коэффициенты попарных произведений принимали нулевые значения. Это значит, что в произвольной точке напряженного тела существует такое положение системы координат x , y , z в которой касательные напряжения τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} равны нулю. Такие оси называются главными осями. Соответствующие им взаимно перпендикулярные площадки называются главными площадками, а нормальные напряжения на них – главными напряжениями. Принимаются такие обозначения: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Если в окрестности рассматриваемой точки определены положение главных площадок и главные напряжения, то существенно упрощается система уравнений (79). Она принимает вид:

$$\begin{cases} X = \sigma_1 \cdot l; \\ Y = \sigma_2 \cdot m; \\ Z = \sigma_3 \cdot n; \end{cases}$$

Так как $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, то получим:

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} = \frac{y^2}{\sigma_2^2} = \frac{z^2}{\sigma_3^2} = 1.$$

Следовательно, геометрическое место концов вектора полного напряжения $P(X, Y, Z)$ образует эллипсоид, полуосям которого являются главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Величины главных напряжений в произвольной системе координат x, y, z определяются через заданные значения шести компонентов напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ (рис. 84).

Предположим, что наклонная площадка (рис.84) является главной. Обозначая полное напряжение на этой площадке через S можем записать:

$$X = S \cdot l; Y = S \cdot m; Z = S \cdot n. \quad (84)$$

Соотношения (79) преобразуются к виду:

$$\begin{cases} S \cdot l = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n; \\ S \cdot m = \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{zy} \cdot n; \\ S \cdot n = \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n; \end{cases} \quad (85)$$

или

$$\begin{cases} (\sigma_x - S) \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n = 0; \\ \tau_{yx} \cdot l + (\sigma_y - S) \cdot m + \tau_{zy} \cdot n = 0; \\ \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + (\sigma_z - S) \cdot n = 0; \end{cases} \quad (86)$$

Так как $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, следовательно, l, m, n одновременно не могут быть равны нулю. Для того, чтобы система однородных уравнений (84) относительно l, m, n имела бы решение, отличное от нулевого, необходимо, чтобы определитель этой системы был равен нулю.

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - S & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - S & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - S \end{vmatrix} = 0. \quad (87)$$

Отсюда $S^3 - S^2 \cdot I_1 + S \cdot I_2 - I_3 = 0,$ (88)

где $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;$ (89)

$$I_2 = \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y - \tau_{yx}^2 - \tau_{zy}^2 - \tau_{zx}^2;$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Все три корня уравнения (88) являются вещественными и определяют значения главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Коэффициенты I_1, I_2, I_3 называются инвариантами напряженного состояния и их значения не зависят от выбранной системы координат x, y, z .

Для определения положения главных площадок необходимо вычислить значения направляющих косинусов следующим образом. В два из трех уравнений системы (87) подставляются значения главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, а в качестве третьего используется равенство $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

Если $I_3 = 0$, то один из корней уравнения (86) также будет равен нулю. В этом случае напряженное состояние является плоским или двухосным. В частности, напряженное состояние чистого сдвига представляет собой двухосное напряженное состояние, для которого имеется: $\sigma_1 = -\sigma_3, \sigma_2 = 0$.

Если $I_1 = I_2 = 0$, то из уравнения (88) очевидно, что только одно из главных напряжений отлично от нуля. Напряженное состояние в этом случае называется одноосным и имеет место при простом сжатии или растяжении бруса или при чистом изгибе.

При сложном напряженном состоянии для выполнения расчетов на прочность можно выразить напряжения, действующие на произвольной площадке, проходящей через данную точку, через главные напряжения.

Эти выражения можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha; \\ \tau &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha.\end{aligned}\tag{90}$$

Рассматривая совместно полученные выражения для σ и τ , можно получить следующие выражения:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2.\tag{91}$$

В системе координат σ, τ это уравнение окружности. Полученный круг называется кругом Мора или круговой диаграммой напряженного состояния. В заключение заметим, что при $\alpha = \pi/4$ имеет место:

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Деформированное состояние в точке. Происходящие при нагружении тела перемещения его точек можно задать при помощи совокупности трех функций: $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$, определяющих перемещения вдоль координатных осей x, y и z , соответственно. Деформации (линейные и угловые) выражаются через функции перемещений:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x};\end{aligned}\tag{92}$$

где ε_i – линейная деформация вдоль i -той оси координат; γ_{ij} – угловая деформация в плоскости $i0j$ ($i, j = x, y, z$).

Правило знаков принимается следующее: для линейных деформаций – растяжению соответствует положительная деформация; для угловых деформаций положительное ее значение соответствует уменьшению прямого угла между положительными направлениями осей. По аналогии с напряженным состоянием, здесь также имеются главные деформации и главные площадки деформирования, которые являются инвариантами, независимыми от осей координат.

Шесть компонентов деформаций выражаются через три функции перемещений, и между ними существует связь в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}; \end{aligned} \quad (93)$$

В каждой точке среды деформируемого тела всегда существуют три взаимно перпендикулярные плоскости, которые не испытывают сдвигов. Координатные оси, которые образуют эти плоскости, называются главными осями деформируемого состояния. Линейные деформации по главным осям называются главными деформациями и нормируются в порядке $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ с учетом их знака, причем знак «плюс» относится к тем деформациям, которые вызваны в результате растяжения, и наоборот, знак «минус» относится к деформациям сжатия. Для изотропного тела, свойства которого не зависят от направлений координатных осей, главные оси напряжений и деформаций совпадают.

Обобщенный закон Гука. При малых деформациях действие касательных напряжений вызывает только формоизменение, а от действия нормальных напряжений происходит изменение линейных размеров выделенного элемента. Для трех угловых деформаций получаем:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad (94)$$

где G – модуль сдвига материала, $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$.

Линейная деформация по оси x , обусловленная напряжением σ_x , будет равна $\frac{\sigma_x}{E}$. Напряжениями σ_y и σ_z соответствуют деформации по оси x обратного знака, равные $-\mu\frac{\sigma_y}{E}$ и $-\mu\frac{\sigma_z}{E}$, соответственно (здесь μ – коэффициент Пуассона). Следовательно,

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_z}{E}.$$

Аналогично можно определить относительные удлинения ребер параллелепипеда, перпендикулярных осям y и z . Записывая для ε_y и ε_z аналогичные уравнения окончательно получим:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)];\end{aligned}\tag{95}$$

Отсюда, получим выражение для объемной деформации

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).\tag{96}$$

Полученные соотношения (94-95) являются аналитическим выражением обобщенного закона Гука для упругого изотропного тела.

Потенциальная энергия деформации. В соответствии с законом сохранения энергии потенциальная энергия деформации элементарного параллелепипеда равна работе внешних сил, приложенных к его граням. Полная удельная потенциальная энергия элементарного объема определяется по формуле:

$$dU = \frac{1}{2} dx dy dz (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{xy} \gamma_{xy}).\tag{97}$$

Разделив dU на первоначальный объем параллелепипеда $V = dx dy dz$, получим удельную потенциальную энергию U_0 . Выразим в соответствии с законом Гука деформации через напряжения:

$$U_0 = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y)] + \frac{1}{2G} (\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2).\tag{98}$$

Удельная потенциальная энергия в главных напряжениях:

$$U_0 = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_2)].\tag{99}$$

Общая потенциальная энергия U_0 делится на две составляющих: потенциальную энергию изменения объема $U_0^{об}$ и потенциальную энергию изменения формы U_0^ϕ , тогда $U_0 = U_0^{об} + U_0^\phi$.

$$U_0^{об} = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)^2,\tag{100}$$

$U_0^\phi = U_0 - U_0^{об}$, после преобразования получим:

$$U_0^\phi = \frac{1+\mu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]. \quad (101)$$

Пример 33.

Напряженное состояние в точке задано шестью компонентами $\sigma_x = 50$ МПа, $\sigma_y = -20$ МПа, $\sigma_z = 30$ МПа, $\tau_{xy} = -10$ МПа, $\tau_{yz} = 10$ МПа, $\tau_{zx} = 10$ МПа, $E = 200$ ГПа, $\mu = 0,35$.

Требуется определить:

- 1) главные напряжения;
- 2) максимальные касательные напряжения;
- 3) направляющие косинусы главных площадок;
- 4) значения главных относительных деформаций;
- 5) относительное изменение объема;
- 6) удельную потенциальную энергию изменения объема и формы;
- 7) полную удельную потенциальную энергию.

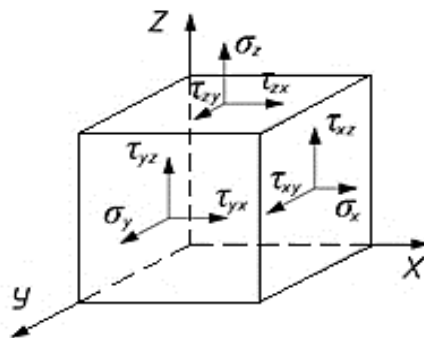


Рис. 85 – Элементарный параллелепипед в общем случае нагружения

Решение.

Определим инварианты напряженного состояния:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 50 - 20 + 30 = 60 \text{ МПа};$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{yx}^2 - \tau_{zy}^2 - \tau_{zx}^2 = 50 \cdot (-20) + (-20) \cdot 30 + 30 \cdot 50 - (-10)^2 - 10^2 - 10^2 = -1000 - 600 + 1500 - 100 - 100 - 100 = -400 \text{ МПа};$$

$$I_3 = \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z - \sigma_z \cdot \tau_{xy}^2 - \sigma_x \cdot \tau_{yz}^2 - \sigma_y \cdot \tau_{zx}^2 + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{zx} =$$

$$= 50 \cdot (-20) \cdot 30 - 30 \cdot (-10)^2 - 50 \cdot 10^2 - (-20) \cdot 10^2 + 2 \cdot (-10) \cdot 10 \cdot 10 =$$

$$= -30000 - 3000 - 5000 + 2000 - 2000 = -38000 \text{ МПа}.$$

Определим главные напряжения, решая кубическое уравнение любым из известных способов:

$$\sigma^3 - I_1 \cdot \sigma^2 + I_2 \cdot \sigma - I_3 = 0,$$

$$\sigma^3 - 60 \cdot \sigma^2 - 400 \cdot \sigma + 38000 = 0.$$

Получим три корня уравнения и, с учетом условия $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, запишем

$$\sigma_1 = 54,57 \text{ МПа}; \sigma_2 = 29,24 \text{ МПа}; \sigma_3 = -23,81 \text{ МПа}.$$

Проверим правильность вычисления главных напряжений. Так как I_1 , I_2 , I_3 – инварианты, то их значения постоянны.

Определим значения инвариантов в главной системе координат:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 54,57 + 29,24 - 23,81 = 60 \text{ МПа},$$

$$I_2 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1 = 54,57 \cdot 29,24 - 29,24 \cdot 23,81 - 23,81 \cdot 54,57 = \\ = 1595,63 - 696,20 - 1299,31 = -399,88 \text{ МПа},$$

$$I_3 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 = 54,57 \cdot 29,24 \cdot (-23,81) = -37991,87 \text{ МПа}.$$

Результаты вычислений I_1 , I_2 , I_3 соответствуют полученным в заданной системе координат. Находим максимальные касательные напряжения:

$$\tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{54,57 + 23,81}{2} = 39,19 \text{ МПа},$$

$$\tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{29,24 + 23,81}{2} = 26,52 \text{ МПа},$$

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{54,57 - 29,24}{2} = 12,67 \text{ МПа},$$

$$\tau_{\max} = \tau_{13} = 39,19 \text{ МПа}.$$

Определим направляющие косинусы главных площадок. Для этого необходимо подставить последовательно значения σ_i ($i=1,2,3$) в любые два уравнения системы (третье является линейно зависимым):

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma) \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n = 0; \\ \tau_{yx} \cdot l + (\sigma_y - \sigma) \cdot m + \tau_{zy} \cdot n = 0; \\ \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + (\sigma_z - \sigma) \cdot n = 0; \end{cases}$$

и решить их совместно с уравнением $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

Выражения для l_i , m_i , n_i можно получить, используя известные из математики формулы Крамера:

$$l_i = \frac{\Delta_{1i}}{D_i}; m_i = \frac{\Delta_{2i}}{D_i}; n_i = \frac{\Delta_i}{D_i};$$

$$\Delta_{1i} = -(\sigma_y - \sigma_i) \cdot \tau_{xz} + \tau_{xy} \cdot \tau_{yz};$$

$$\Delta_{2i} = -(\sigma_x - \sigma_i) \cdot \tau_{yz} + \tau_{xy} \cdot \tau_{zx};$$

$$\Delta_i = (\sigma_x - \sigma_i) \cdot (\sigma_y - \sigma_i) - \tau_{xy}^2;$$

$$D_i = \sqrt{\Delta_{1i}^2 + \Delta_{2i}^2 + \Delta_i^2}.$$

Система уравнений для определения l_1 , m_1 , n_1 будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} (50 - 54,57) \cdot l_1 - 10 \cdot m_1 + 10 \cdot n_1 = 0; \\ -10 \cdot l_1 - (20 + 54,57) \cdot m_1 + 10 \cdot n_1 = 0; \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1; \end{cases}$$

$$\Delta_{11} = -(\sigma_y - \sigma_1) \cdot \tau_{xz} + \tau_{xy} \cdot \tau_{yz} = -(-20 - 54,57) \cdot 10 + (-10) \cdot 10 = 645,7;$$

$$\Delta_{21} = -(\sigma_x - \sigma_1) \cdot \tau_{yz} + \tau_{xy} \cdot \tau_{zx} = -(50 - 54,57) \cdot 10 + (-10) \cdot 10 = -54,3;$$

$$\Delta_1 = (\sigma_x - \sigma_1) \cdot (\sigma_y - \sigma_1) - \tau_{xy}^2 = (50 - 54,57) \cdot (-20 - 54,57) - (-10)^2 = 240,78.$$

$$D_1 = \sqrt{\Delta_{11}^2 + \Delta_{21}^2 + \Delta_1^2} = \sqrt{645,7^2 + (-54,3)^2 + 240,78^2} = 691,268;$$

$$l_1 = \frac{\Delta_{11}}{D_1} = \frac{645,7}{691,268} = 0,9341;$$

$$m_1 = \frac{\Delta_{21}}{D_1} = -\frac{54,3}{691,268} = -0,0786;$$

$$n_1 = \frac{\Delta_1}{D_1} = \frac{240,78}{691,268} = 0,3483.$$

Условие проверки выполняется:

$$0,9341^2 + (-0,0786)^2 + 0,3483^2 = 1.$$

Аналогично определим l_2, m_2, n_2 :

$$\Delta_{12} = -(\sigma_y - \sigma_2) \cdot \tau_{xz} + \tau_{xy} \cdot \tau_{yz} = -(-20 - 29,24) \cdot 10 + (-10) \cdot 10 = 392,4;$$

$$\Delta_{22} = -(\sigma_x - \sigma_2) \cdot \tau_{yz} + \tau_{xy} \cdot \tau_{zx} = -(50 - 29,24) \cdot 10 + (-10) \cdot 10 = -307,6;$$

$$\Delta_2 = (\sigma_x - \sigma_2) \cdot (\sigma_y - \sigma_2) - \tau_{xy}^2 = (50 - 29,24) \cdot (-20 - 29,24) - (-10)^2 = -1122,2;$$

$$D_2 = \sqrt{\Delta_{12}^2 + \Delta_{22}^2 + \Delta_2^2} = \sqrt{392,4^2 + (-307,6)^2 + (-1122,2)^2} = 1227,98;$$

$$l_2 = \frac{\Delta_{12}}{D_2} = \frac{392,4}{1227,98} = 0,3195;$$

$$m_2 = \frac{\Delta_{22}}{D_2} = -\frac{307,6}{1227,98} = -0,2505;$$

$$n_2 = \frac{\Delta_2}{D_2} = -\frac{1122,2}{1227,98} = -0,9139.$$

Условие проверки выполняется:

$$0,3195^2 + (-0,2505)^2 + (-0,9139)^2 = 1.$$

Определим l_3, m_3, n_3 :

$$\Delta_{13} = -(\sigma_y - \sigma_3) \cdot \tau_{xz} + \tau_{xy} \cdot \tau_{yz} = -(-20 + 23,81) \cdot 10 + (-10) \cdot 10 = -138,1;$$

$$\Delta_{23} = -(\sigma_x - \sigma_3) \cdot \tau_{yz} + \tau_{xy} \cdot \tau_{zx} = -(50 + 23,81) \cdot 10 + (-10) \cdot 10 = -838,1;$$

$$\Delta_3 = (\sigma_x - \sigma_3) \cdot (\sigma_y - \sigma_2) - \tau_{xy}^2 = (50 + 23,81) \cdot (-20 - 29,24) - (-10)^2 = 181,21;$$

$$D_3 = \sqrt{\Delta_{13}^2 + \Delta_{23}^2 + \Delta_3^2} = \sqrt{(-138,1)^2 + (-838,1)^2 + 181,21^2} = 868,52;$$

$$l_3 = \frac{\Delta_{13}}{D_3} = -\frac{138,1}{868,52} = -0,159;$$

$$m_3 = \frac{\Delta_{23}}{D_3} = -\frac{838,1}{868,52} = -0,965;$$

$$n_3 = \frac{\Delta_3}{D_3} = \frac{181,21}{868,52} = 0,2086.$$

Условие проверки выполняется:

$$(-0,159)^2 + (-0,965)^2 + 0,2086^2 = 1.$$

Определим значения главных относительных деформаций, используя закон Гука:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [54,57 - 0,35 \cdot (29,24 - 23,81)] = 26,33 \cdot 10^{-5} -$$

(растяжение)

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [29,24 - 0,35 \cdot (-23,81 + 54,57)] = 9,24 \cdot 10^{-5} -$$

(растяжение)

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [-23,81 - 0,35 \cdot (29,24 + 54,57)] = -26,54 \cdot 10^{-5} -$$

(сжатие).

Определим относительное изменение объема:

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (26,33 + 9,23 - 26,51) \cdot 10^{-5} = 9,05 \cdot 10^{-5}.$$

Определим удельную потенциальную энергию изменения объема:

$$U_0^{o6} = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) = \frac{1-2 \cdot 0,35}{6 \cdot 2 \cdot 10^5} \cdot (54,57 + 29,24 - 23,81)^2 = 90 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}.$$

Определим удельную потенциальную энергию изменения формы:

$$U_0^{\phi} = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1+0,35}{6 \cdot 2 \cdot 10^5} \cdot [(54,57 - 29,24)^2 + (29,24 + 23,81)^2 + (54,57 + 23,81)^2] = 1079,9 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}.$$

Определим полную удельную потенциальную энергию деформации:

$$U_0 = U_0^{o6} + U_0^{\phi} = (1079,9 + 90) \cdot 10^{-5} = 1169,9 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}.$$

4. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Задача 4.1.

Ступенчатый стержень находится под действием внешних сил F . Материал стержня – сталь с модулем продольной упругости $E = 200$ ГПа.

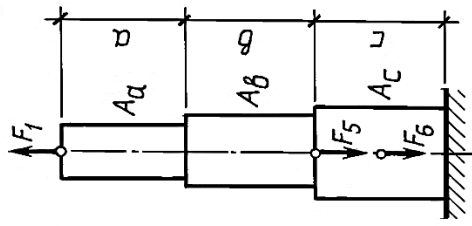
Требуется:

Построить эпюры продольных сил, напряжений и перемещений.

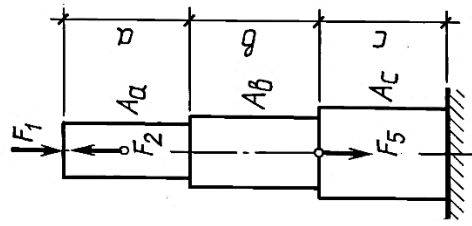
Данные взять из таблицы 4.1.

Таблица 4.1

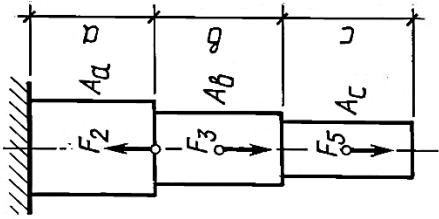
№ п/п	Длина участка, см			Площадь поперечн. сечения, см ²			Нагрузка, кН					
	a	b	c	A _a	A _b	A _c	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	F ₅	F ₆
1	80	50	20	12	6	10	60	20	40	60	50	100
2	60	20	70	10	8	6	100	40	140	80	60	120
3	20	80	60	6	8	10	80	90	100	110	40	80
4	50	70	40	6	10	12	160	110	40	60	80	90
5	70	40	80	8	10	14	150	40	90	60	70	110
6	30	60	50	12	8	10	200	120	60	180	40	100
7	80	40	50	16	12	10	110	180	140	50	80	120
8	60	30	50	10	14	12	80	190	50	60	120	100
9	70	60	80	8	12	14	100	50	110	80	90	120
10	50	30	60	10	14	12	60	120	80	160	200	90



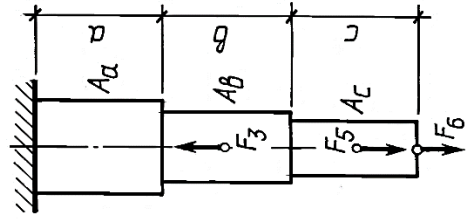
④



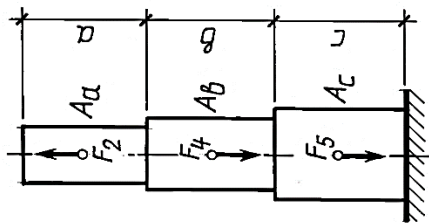
⑧



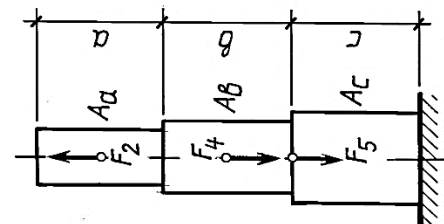
③



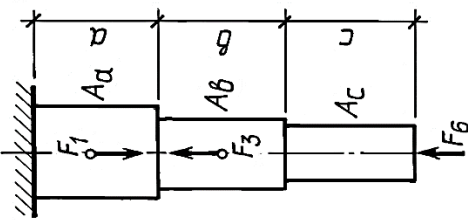
⑦



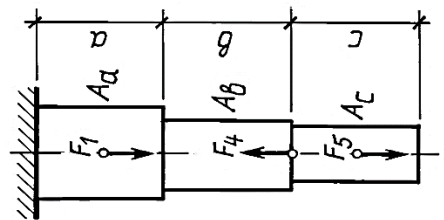
②



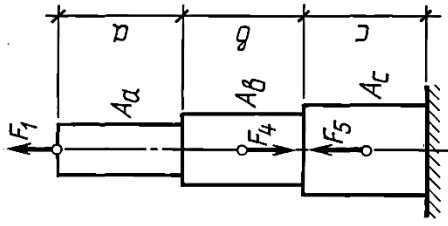
⑥



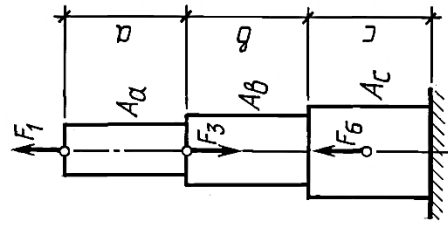
①



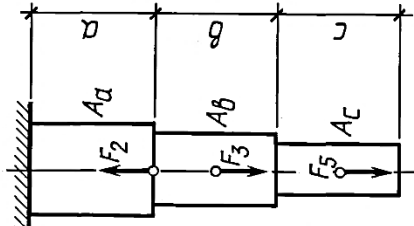
⑤



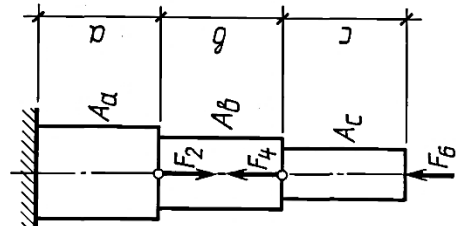
12



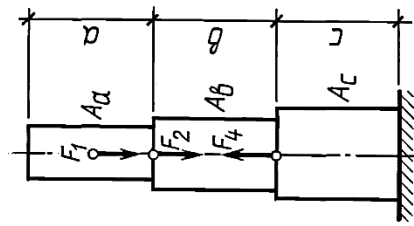
16



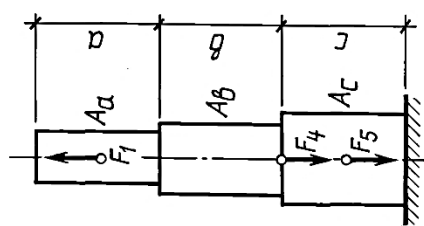
11



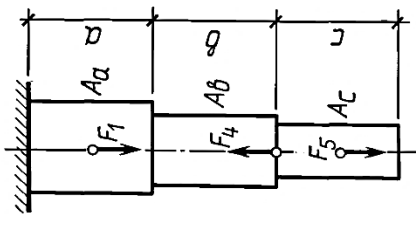
15



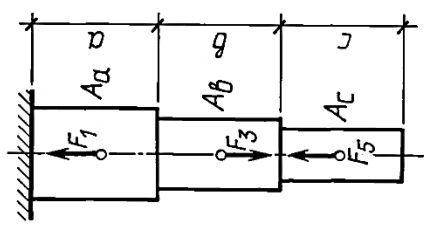
10



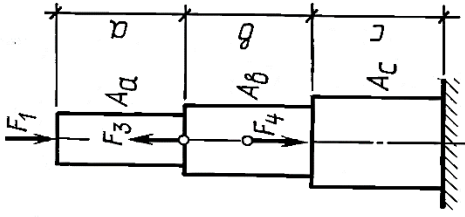
14



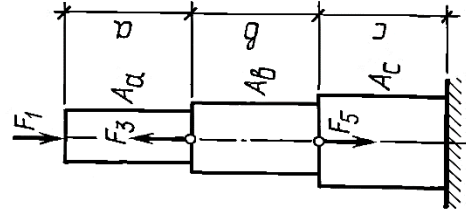
9



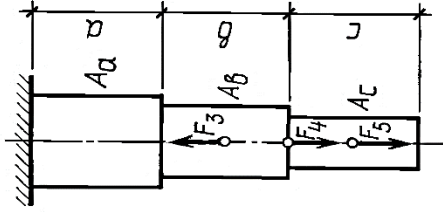
13



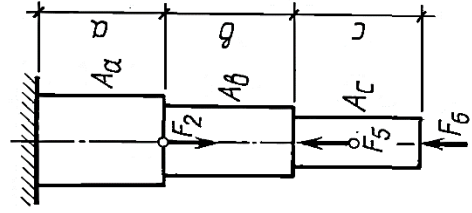
20



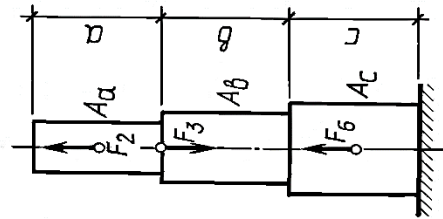
24



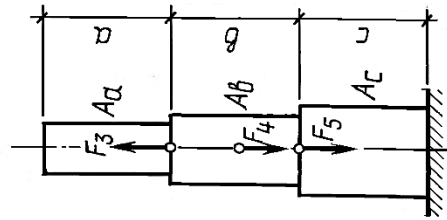
19



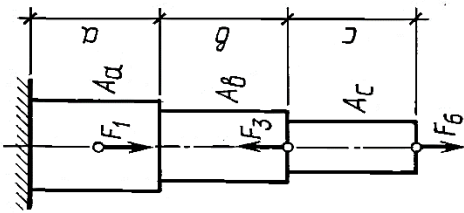
23



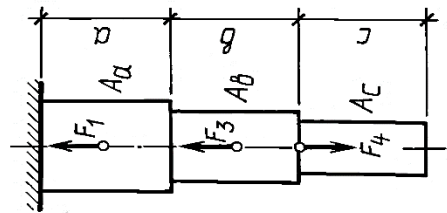
18



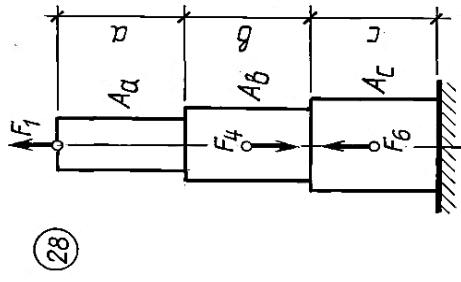
22



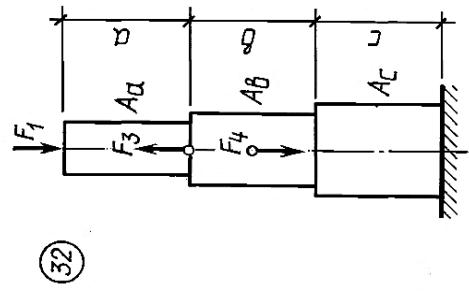
17



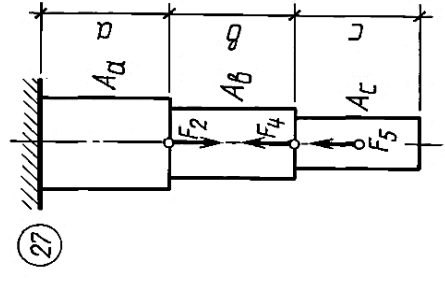
21



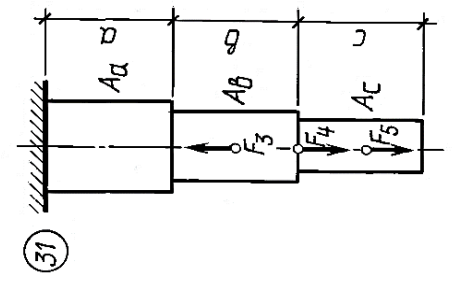
28



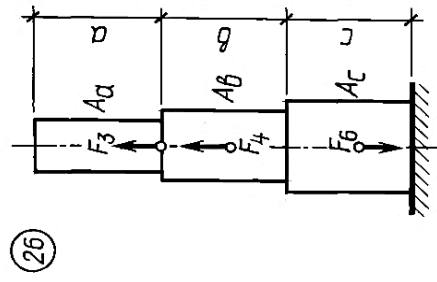
32



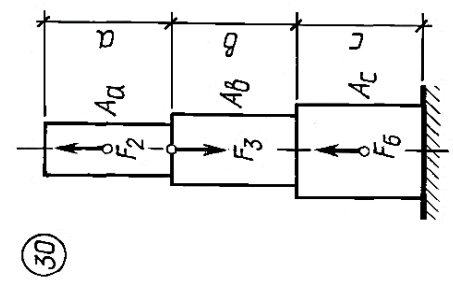
27



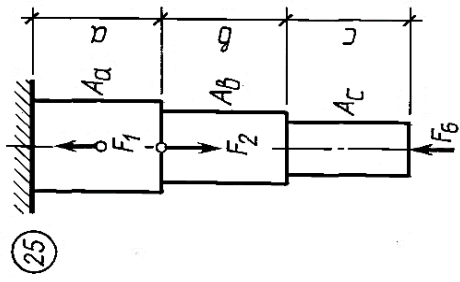
31



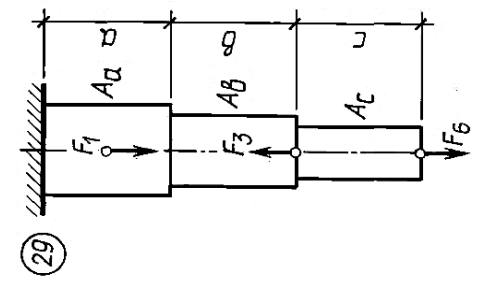
26



30



25



29

Задача 4.2.

Статически неопределимый ступенчатый стержень находится под действием внешних сил F . Материал стержня – сталь с модулем продольной упругости $E = 200$ ГПа.

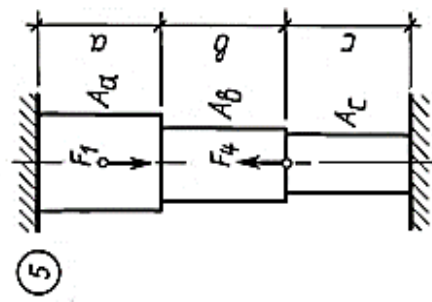
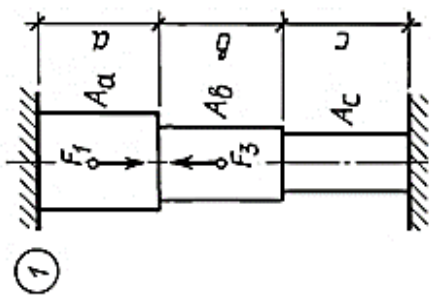
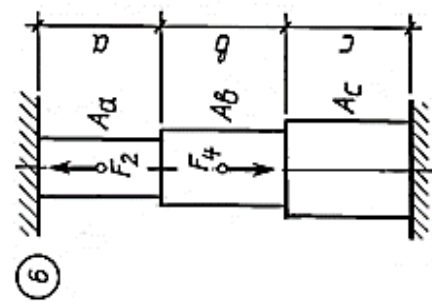
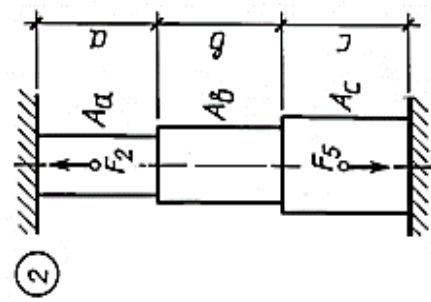
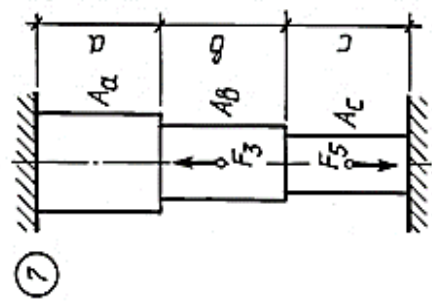
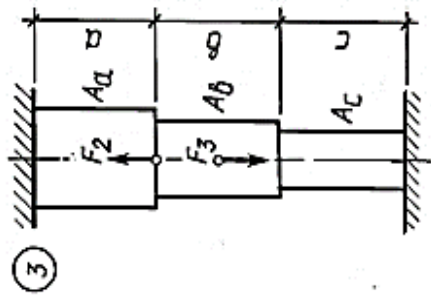
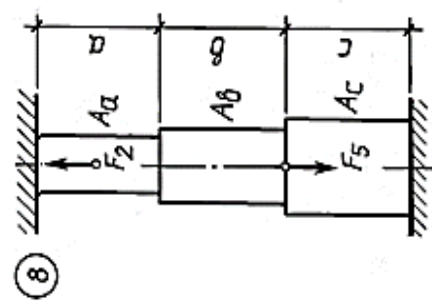
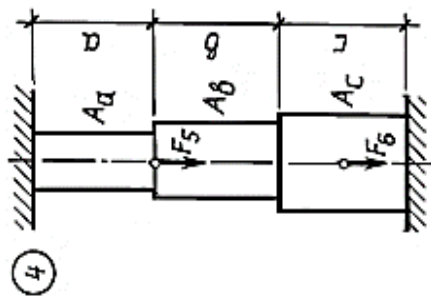
Требуется:

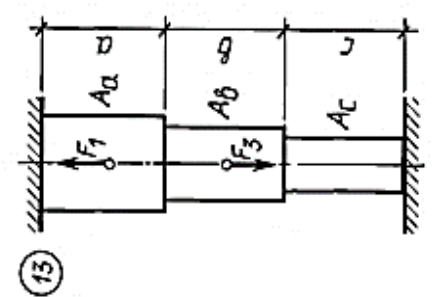
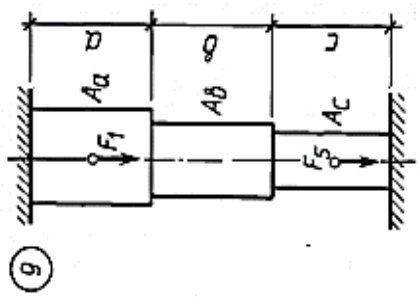
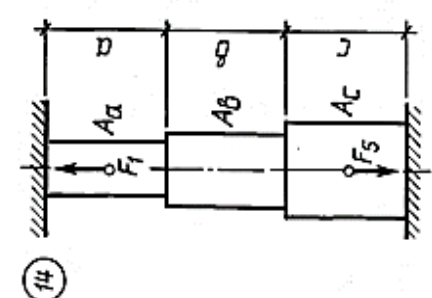
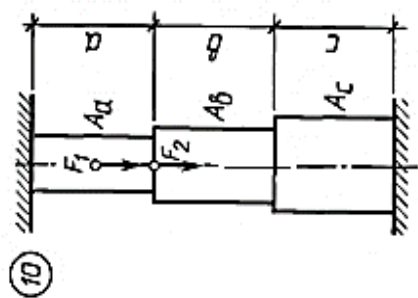
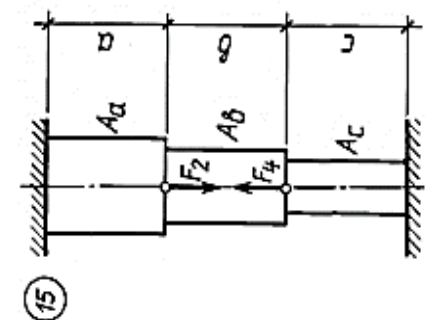
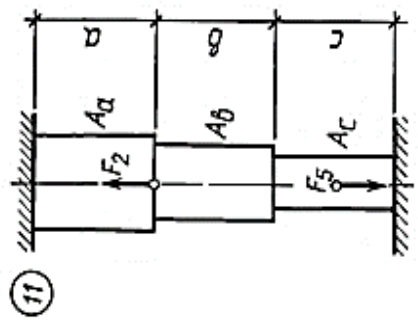
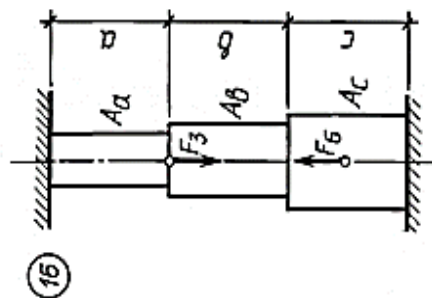
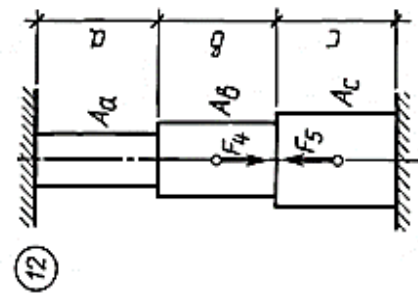
Построить эпюры продольных сил, напряжений и перемещений.

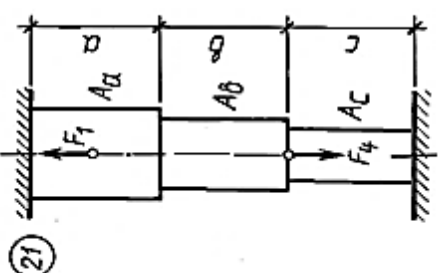
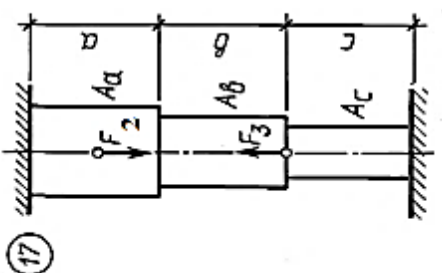
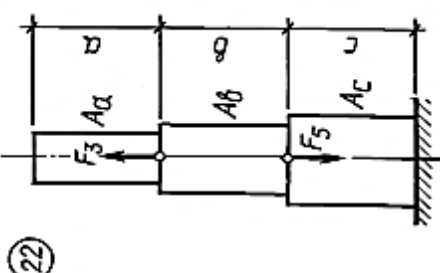
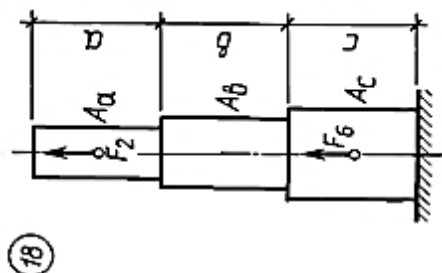
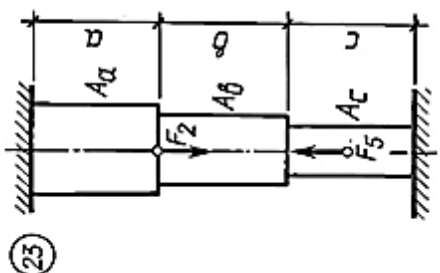
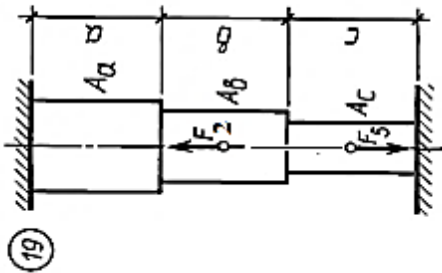
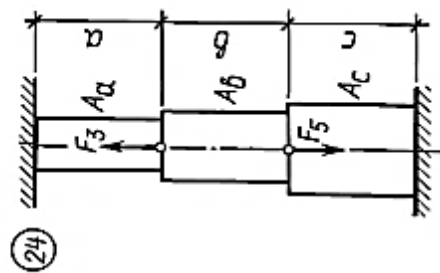
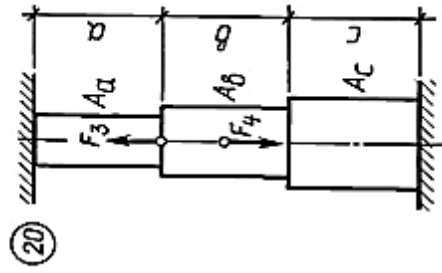
Данные взять из таблицы 4.2.

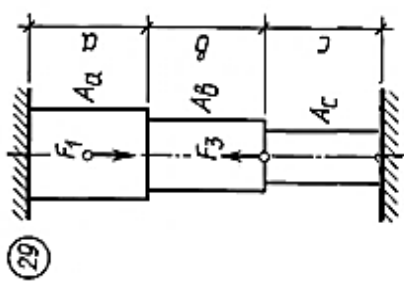
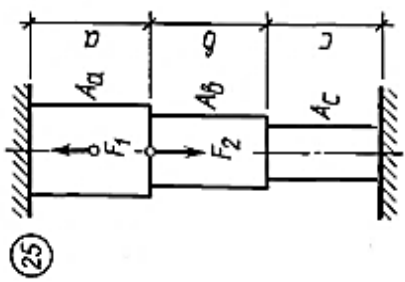
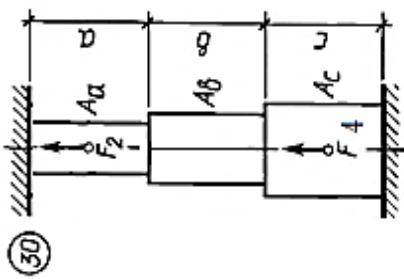
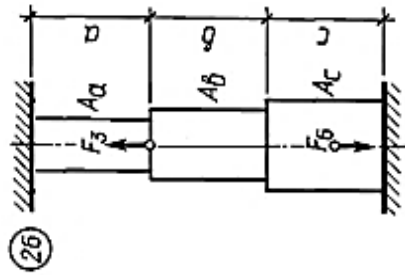
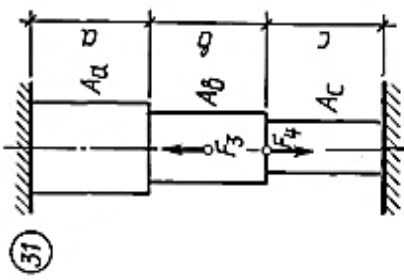
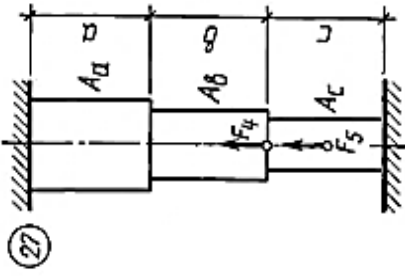
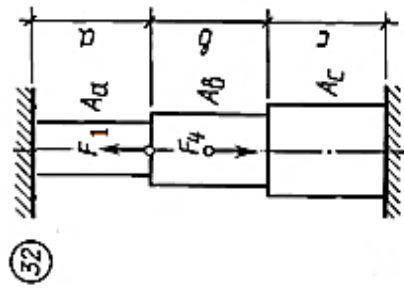
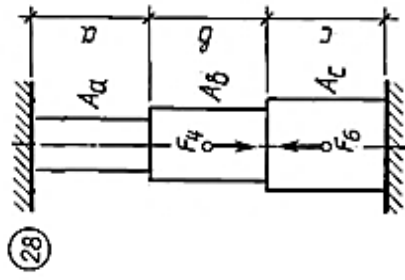
Таблица 4.2

№ п/п	Длина участка, см			Площадь поперечн. сечения, см ²			Нагрузка, кН					
	a	b	c	A _a	A _b	A _c	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	F ₅	F ₆
1	80	50	20	12	6	10	60	20	40	60	50	100
2	60	20	70	10	8	6	100	40	140	80	60	120
3	20	80	60	6	8	10	80	90	100	110	40	80
4	50	70	40	14	10	12	160	110	40	60	80	90
5	70	40	80	8	10	14	150	40	90	60	70	110
6	30	60	50	12	8	10	200	120	60	180	40	100
7	80	40	50	16	12	10	110	180	140	50	80	120
8	60	30	50	10	14	12	80	190	50	60	120	100
9	70	60	80	8	12	14	100	50	110	80	90	120
10	50	30	60	10	14	12	60	120	80	160	200	90









Задача 4.3.

Конструкция, состоящая из элементов большой жёсткости и двух стальных стержней с допускаемым напряжением $[\sigma] = 200$ МПа и модулем продольной упругости $E = 200$ ГПа загружена нагрузкой.

Требуется:

1) подобрать диаметр стержней; округлив до большего значения с шагом 0,5 см;

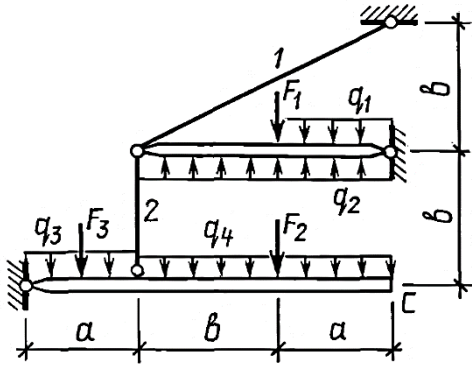
2) выполнить проверочный расчёт жёсткости, если перемещение точки “с” не должно превышать 2 см ($\delta \leq 2$ см).

Данные взять из таблицы 4.3.

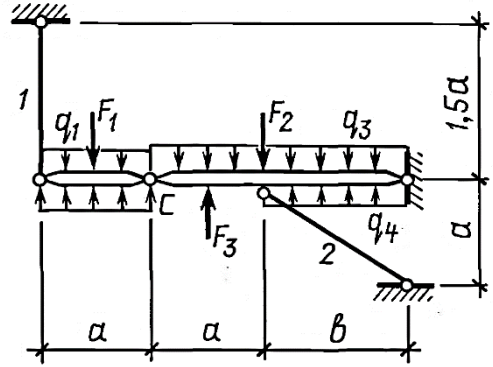
Таблица 4.3

№ п/п	Нагрузка							Длина, м	
	кН			кН/м					
	F ₁	F ₂	F ₃	q ₁	q ₂	q ₃	q ₄	a	b
1	10	-	-	-	-	15	-	1,0	1,5
2	30	-	-	-	-	-	20	1,5	2,0
3	20	-	-	-	-	30	-	1,0	2,0
4	60	-	30	-	-	-	-	2,0	3,0
5	40	20	-	-	-	-	-	2,0	3,0
6	-	60	-	-	10	-	-	3,0	4,0
7	-	-	60	-	20	-	-	2,0	3,0
8	-	-	40	10	-	-	-	2,0	4,0
9	-	-	-	30	-	-	20	1,0	2,0
10	-	-	-	30	-	20	-	1,0	2,0

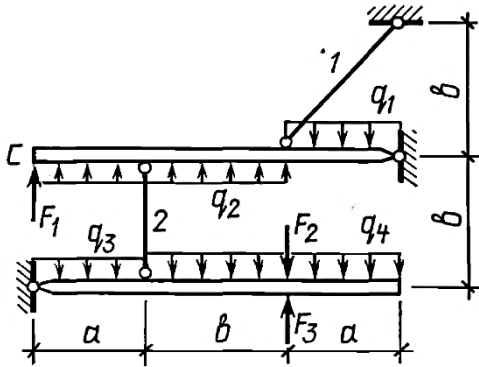
1



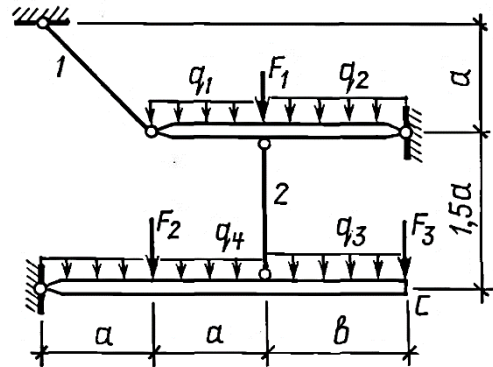
2



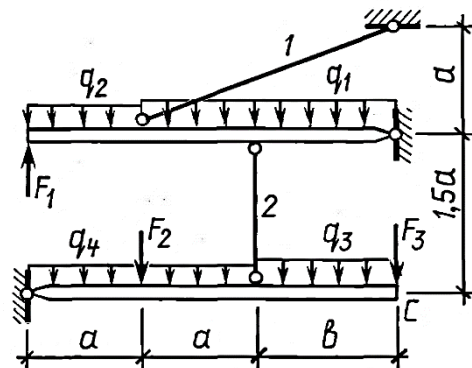
3



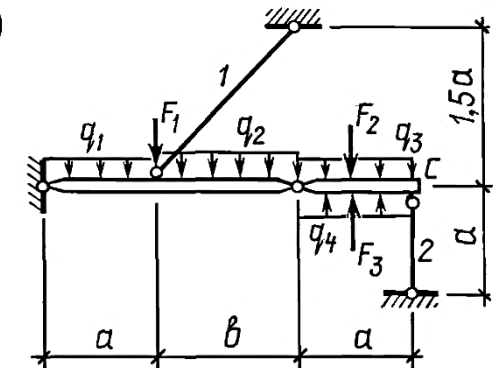
4



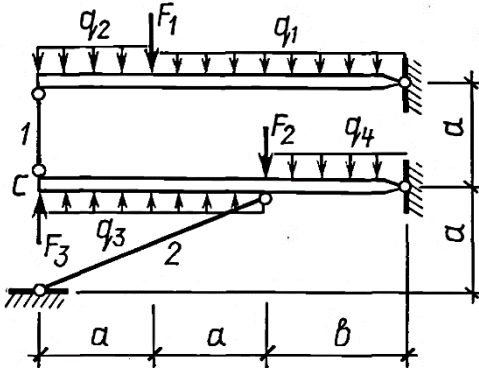
5



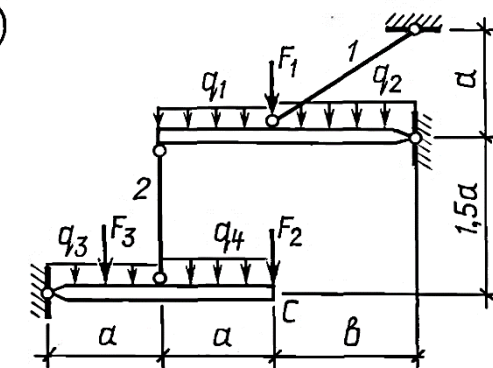
6

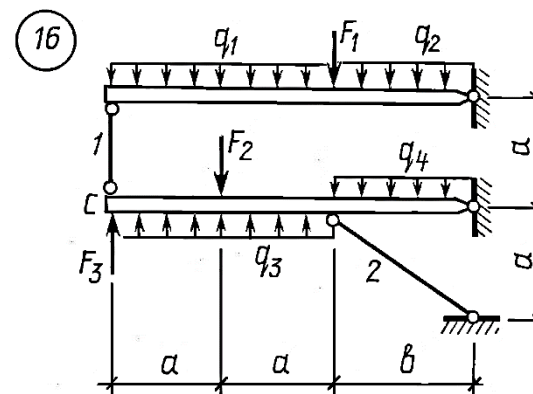
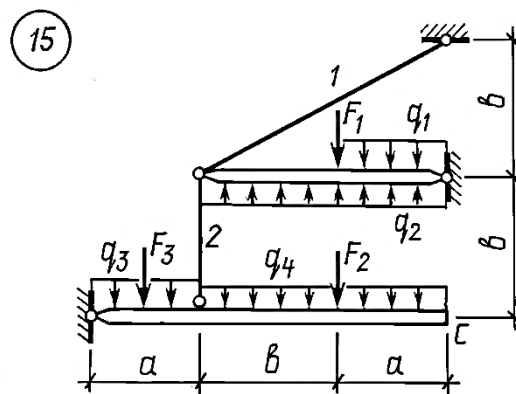
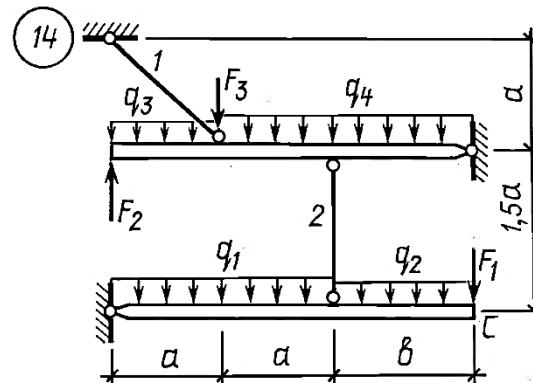
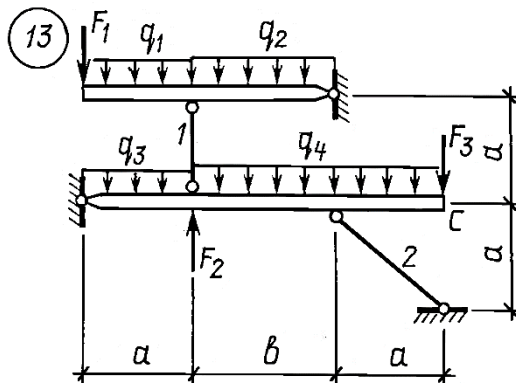
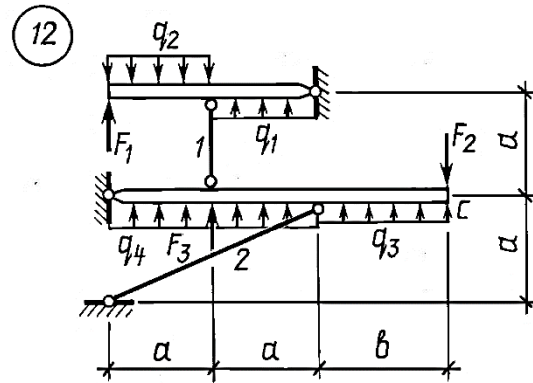
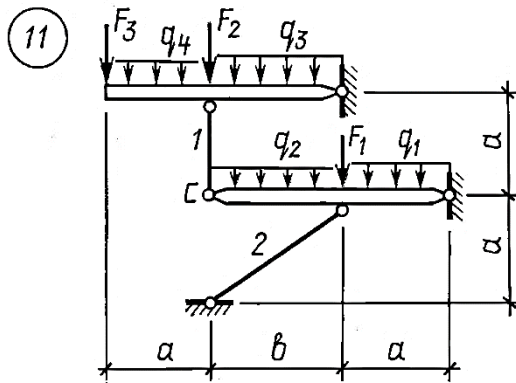
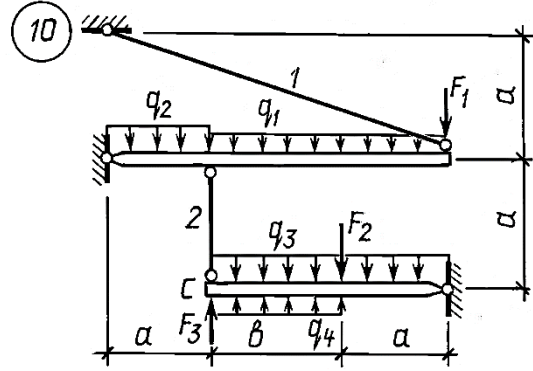
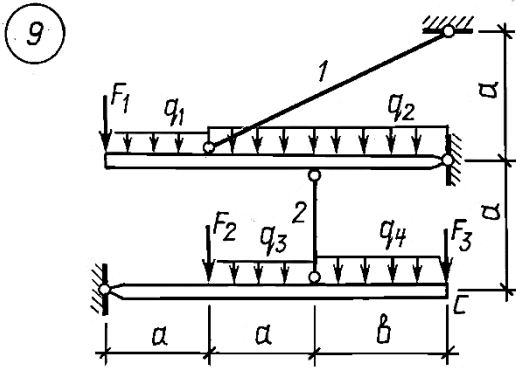


7

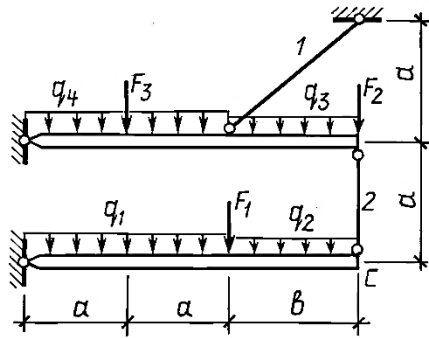


8

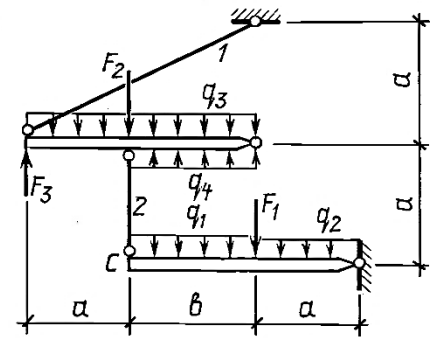




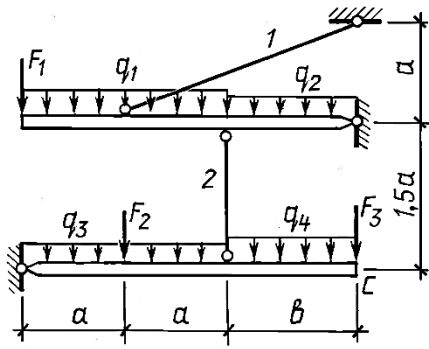
17



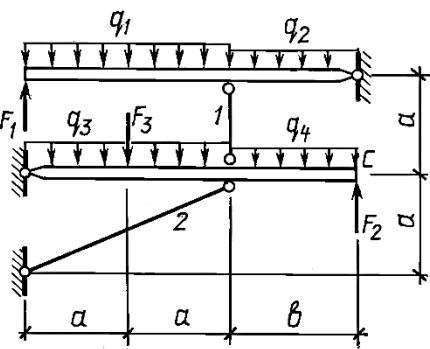
18



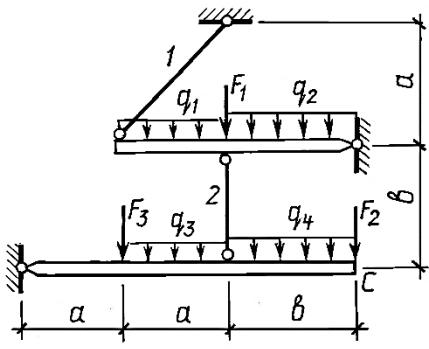
19



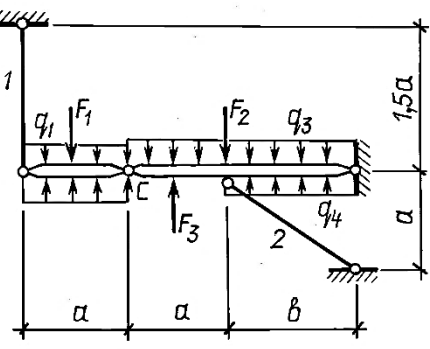
20



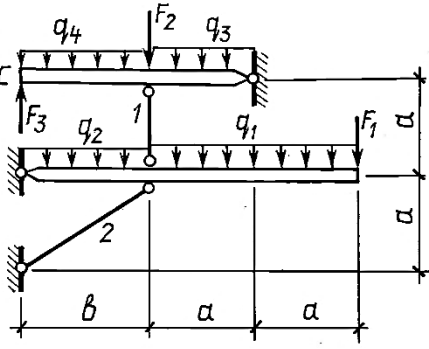
21



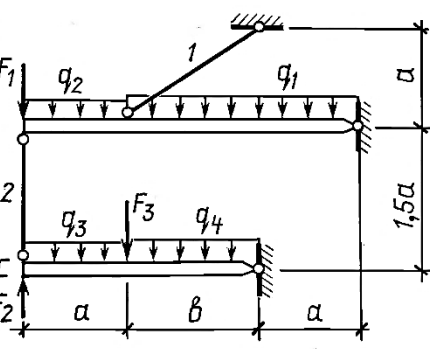
22

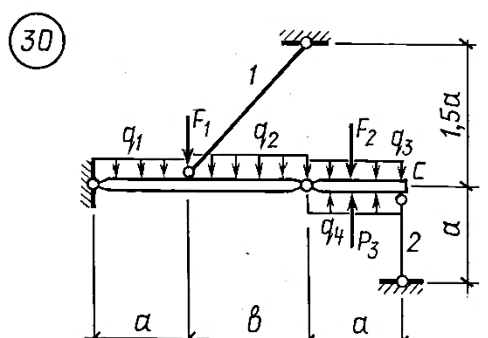
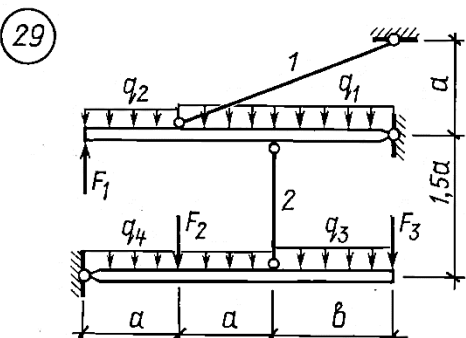
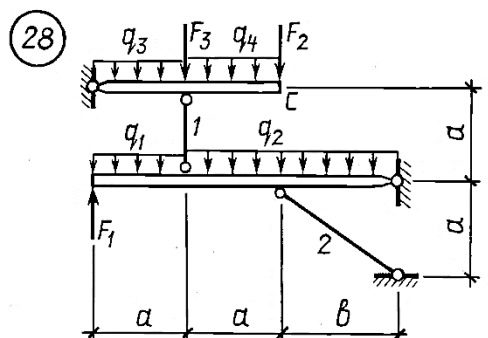
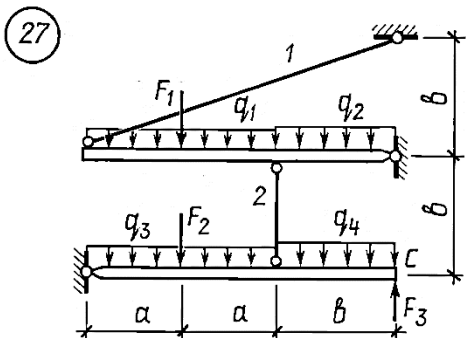
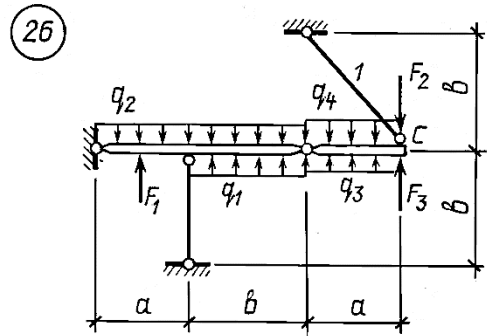
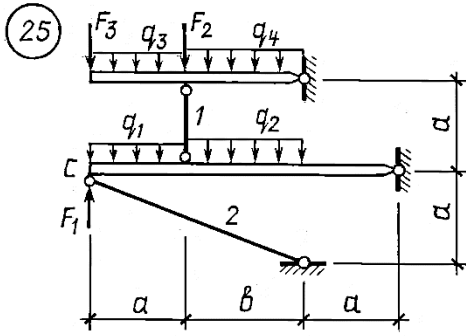


23



24





Задача 4.4.

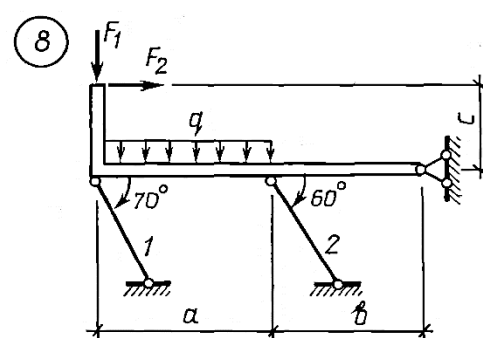
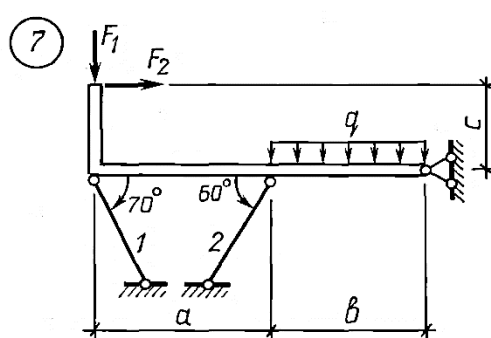
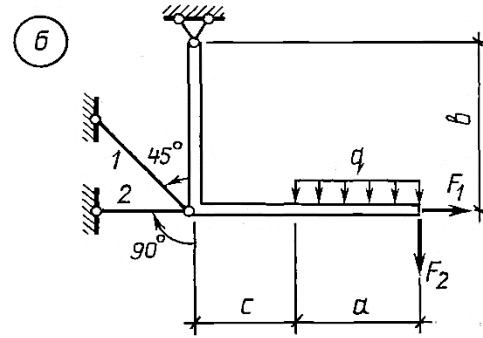
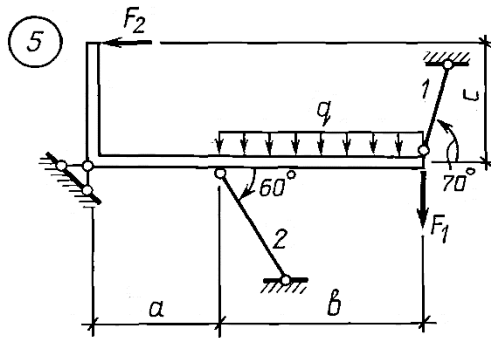
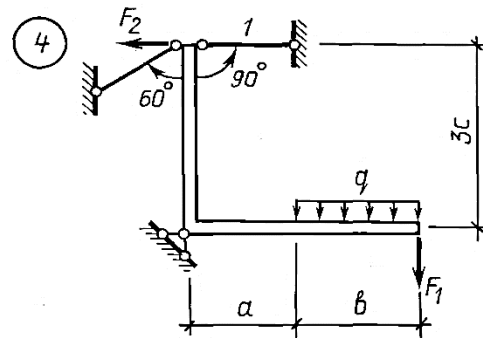
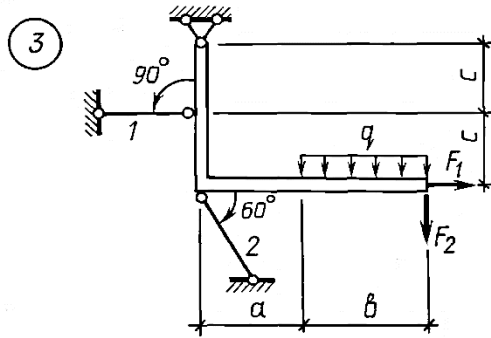
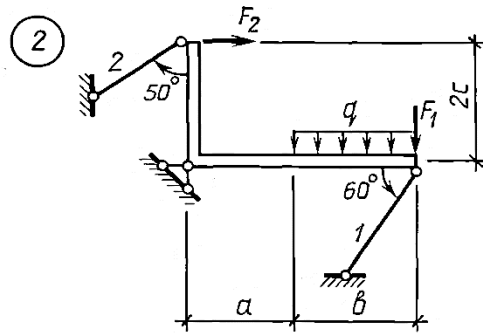
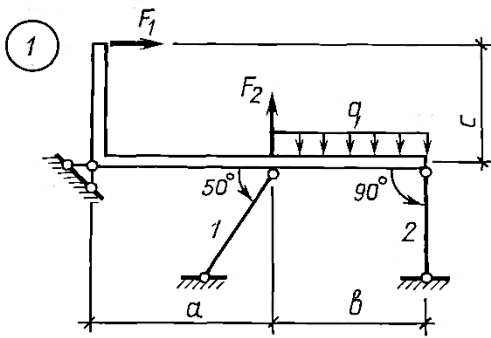
Система, состоящая из элементов большой жёсткости и двух стальных стержней, загружена расчётной нагрузкой. Допускаемое напряжение материала стержней $[\sigma] = 210 \text{ МПа}$, модуль продольной упругости $E = 200 \text{ ГПа}$.

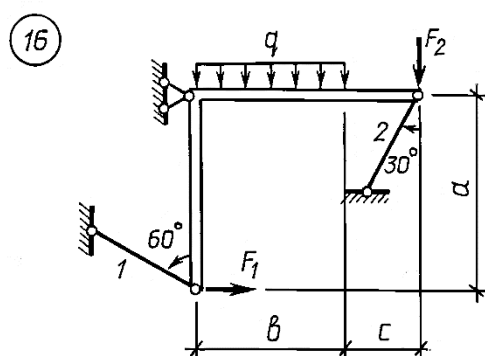
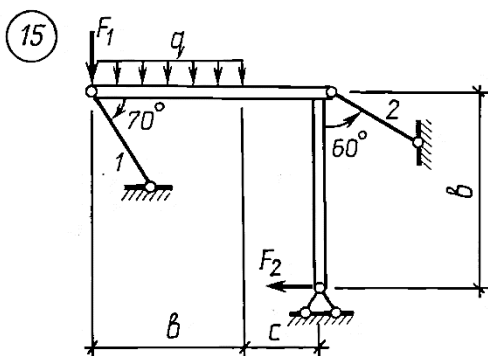
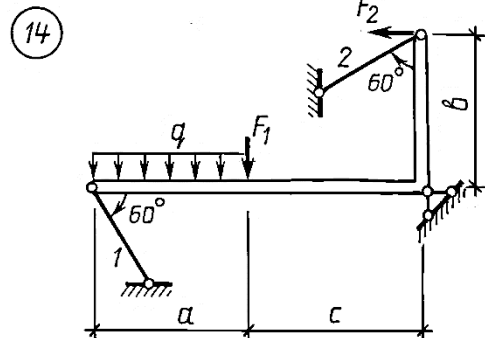
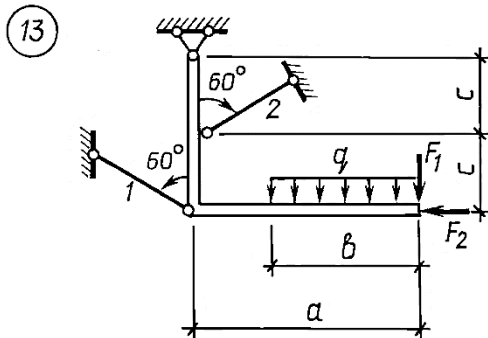
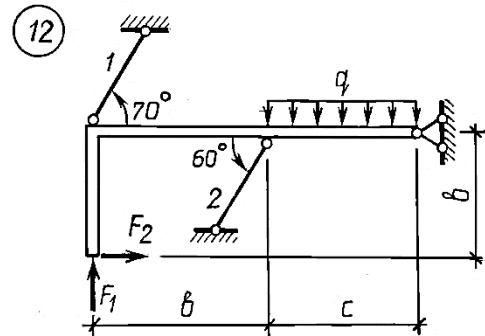
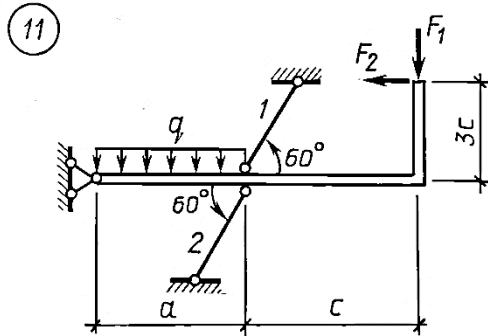
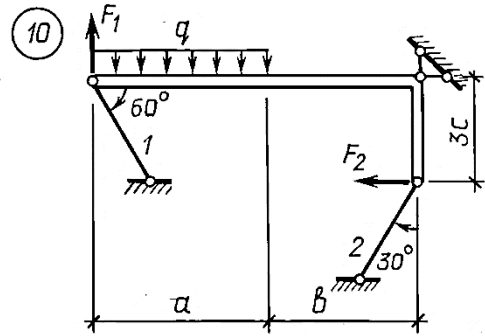
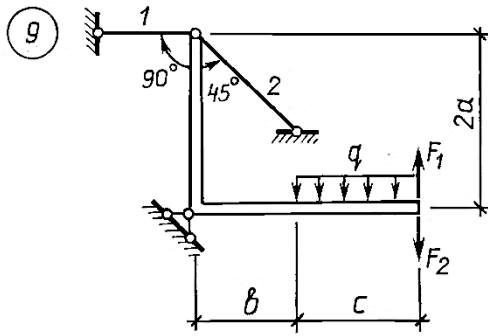
Требуется: проверить прочность стержней.

Данные взять из таблицы 4.4.

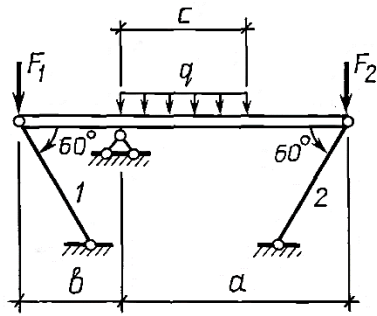
Таблица 4.4

№ п/п	Нагрузка			Длины, м					Площадь сечений, см ²	
	кН		кН/м	a	b	c	l ₁	l ₂	A ₁	A ₂
	F ₁	F ₂	q							
1	10	-	-	4,4	2,6	1,8	1,0	1,2	5	10
2	-	20	-	4,6	2,4	1,2	1,4	1,4	8	9
3	-	-	10	4,8	2,6	1,2	1,6	1,2	7	8
4	20	-	-	4,4	2,8	1,8	1,2	1,0	8	11
5	-	10	-	4,8	2,6	1,6	1,8	1,2	8	7
6	-	-	12	5,0	2,8	0,8	1,0	1,2	10	6
7	15	-	-	5,2	3,2	0,9	0,8	1,1	11	5
8	-	40	-	5,4	3,8	1,6	1,6	1,4	7	6
9	-	-	15	5,2	2,6	1,2	1,2	1,4	9	4
10	30	-	-	4,6	2,8	1,2	1,8	1,2	8	8

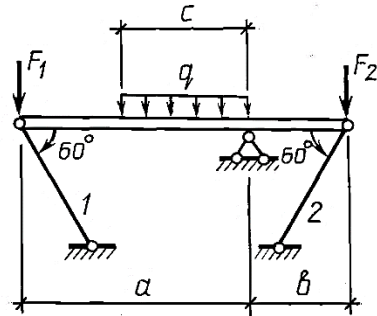




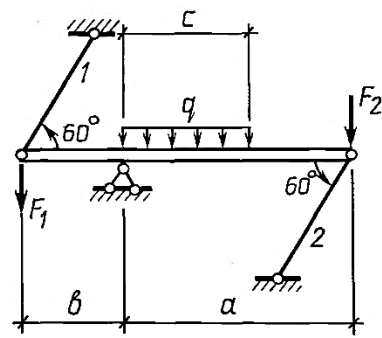
17



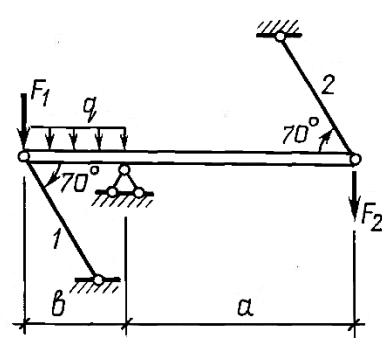
18



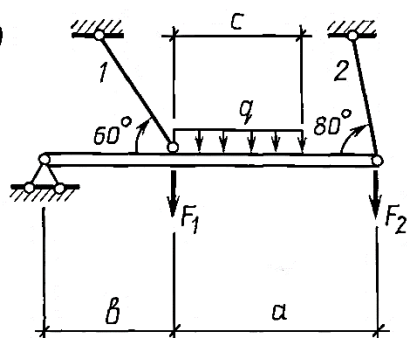
19



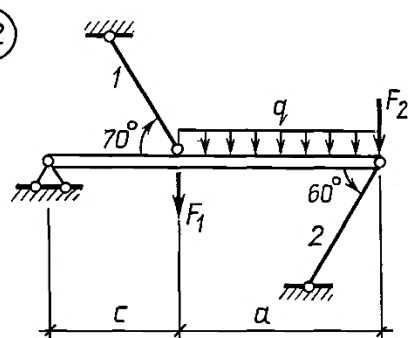
20



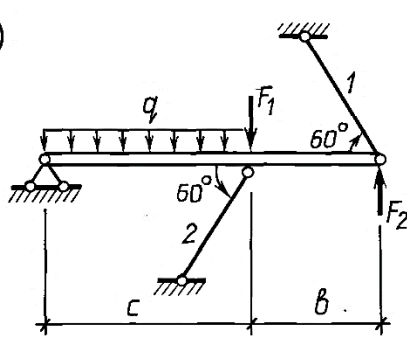
21



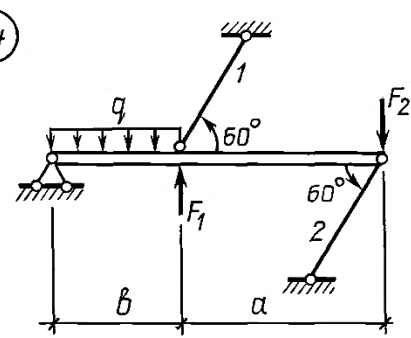
22

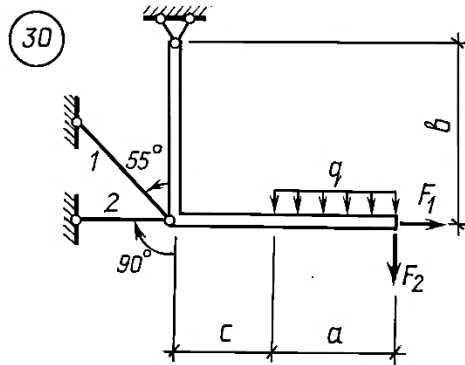
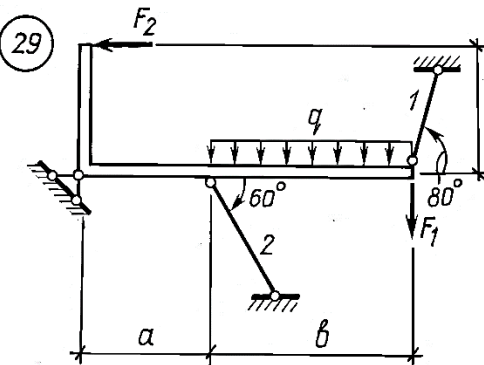
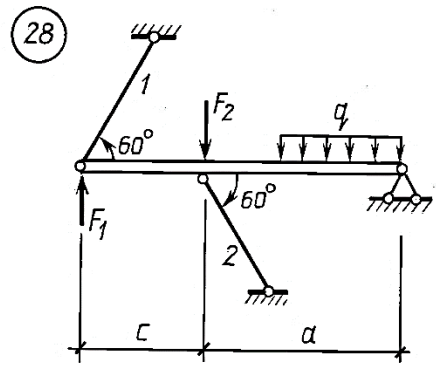
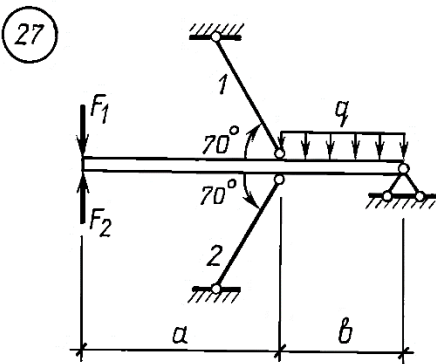
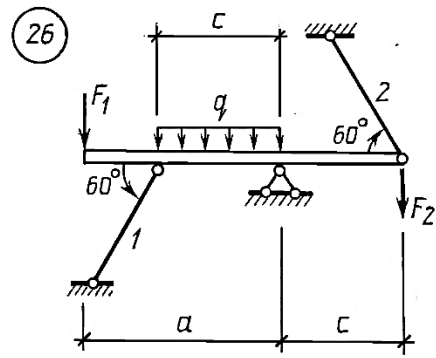
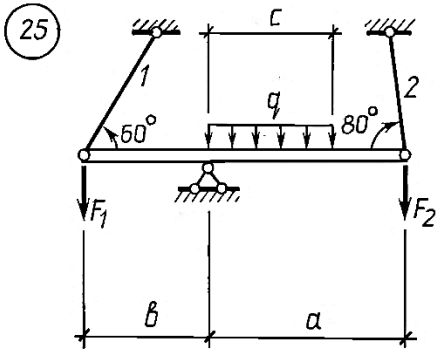


23



24





Задача 4.5.

Для заданного сечения, состоящего из листа и прокатных профилей требуется:

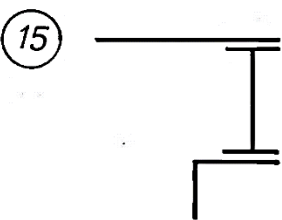
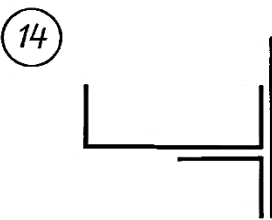
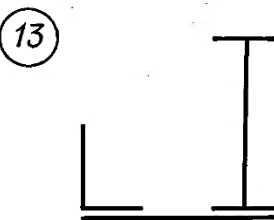
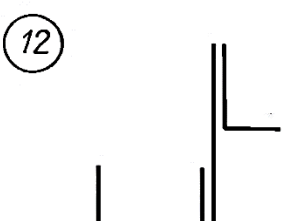
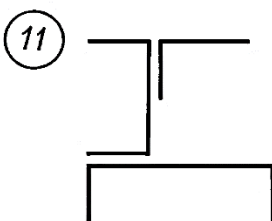
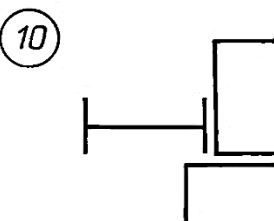
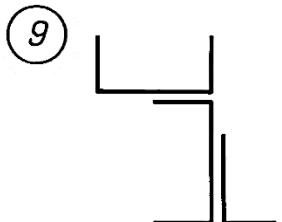
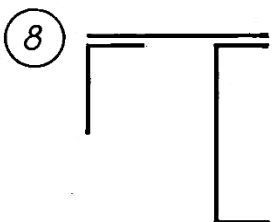
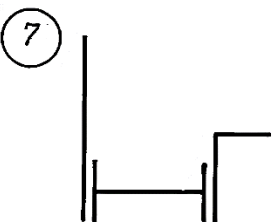
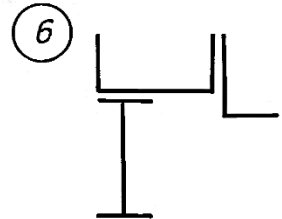
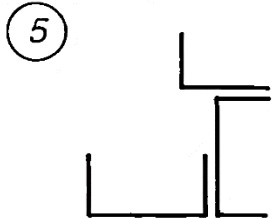
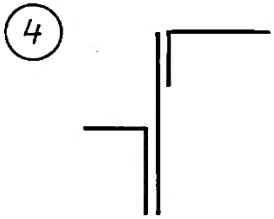
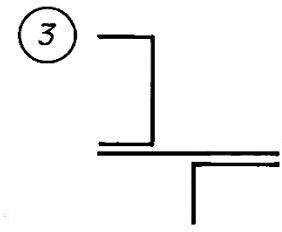
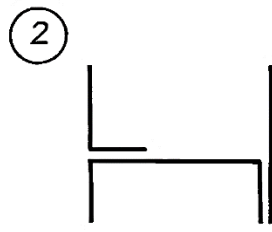
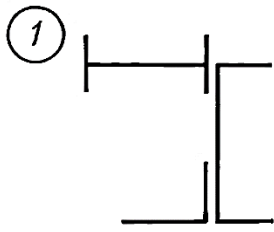
1) вычислить главные центральные моменты инерции, определить их положение;

2) вычертить сечение в масштабе 1:2, показать все оси и размеры.

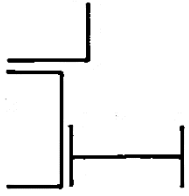
Данные взять из таблицы 4.5.

Таблица 4.5

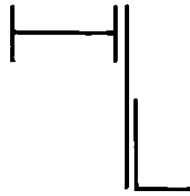
№ п/п	Лист		Уголок равнобокий	Уголок неравнобокий	Двутавр	Швеллер
	h	b				
	см		мм			
1	18	1,4	80x80x6	-	16	22
2	18	1,6	-	90x56x6	18	22
3	20	1,8	100x100x8	-	18	20
4	22	2,0	-	125x80x8	20	20
5	24	2,2	125x125x10	-	20	18
6	16	2,4	-	100x63x7	22	18
7	18	1,4	90x90x7	-	22	16
8	20	1,6	-	110x70x8	24	18
9	22	1,8	110x110x8	-	24	18
10	24	2,0	-	125x80x10	16	20



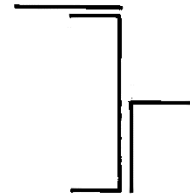
16



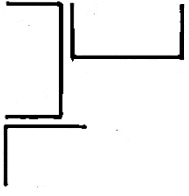
17



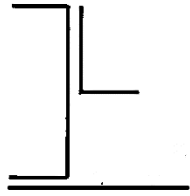
18



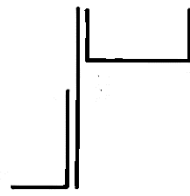
19



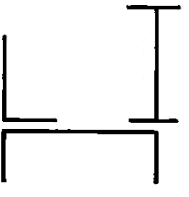
20



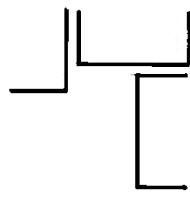
21



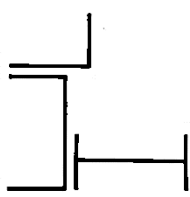
22



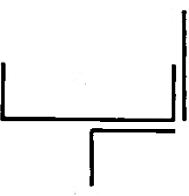
23



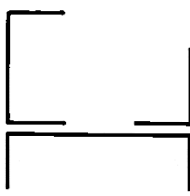
24



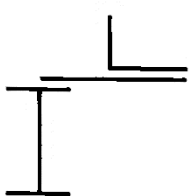
25



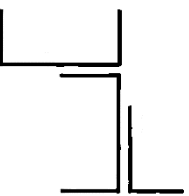
26



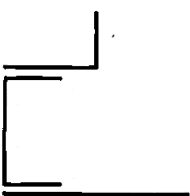
27



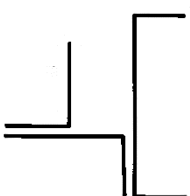
28



29



30



Задача 4.6.

Стальной вал круглого поперечного сечения нагружен скручивающими моментами. Допускаемые касательные напряжения материала вала $[\tau] = 130$ МПа, модуль сдвига $G = 80$ ГПа.

Требуется:

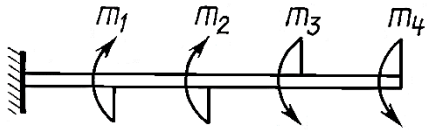
- 1) построить эпюру крутящих моментов;
- 2) подобрать диаметр вала, округлив его до большего размера с шагом 0,5 см;
- 3) построить эпюру напряжений;
- 4) построить эпюру углов закручивания;
- 5) построить эпюру относительных углов закручивания.

Данные взять из таблицы 4.6.

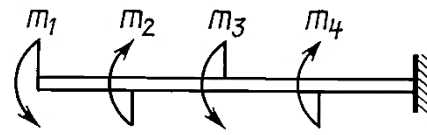
Таблица 4.6

№ п/п	Длина участков, м			Моменты, кНм				[Θ], градус
	a	b	c	m ₁	m ₂	m ₃	m ₄	
1	1,1	1,6	0,8	10	14	9	26	2,0
2	1,2	1,4	0,9	33	6	25	7	1,5
3	1,4	0,8	1,1	7	18	8	25	1,1
4	1,4	1,8	0,8	6	9	24	8	2,5
5	1,5	0,9	0,7	9	19	10	24	2,1
6	0,6	1,8	1,2	32	9	23	8	1,6
7	0,7	1,7	0,9	12	18	10	27	2,7
8	0,8	0,5	1,6	13	10	22	7	3,0
9	0,9	1,2	1,6	4	20	9	26	1,2
10	1,0	0,8	1,8	30	12	23	8	2,2

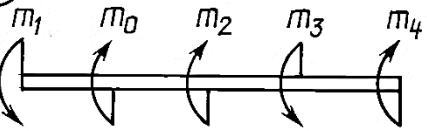
1



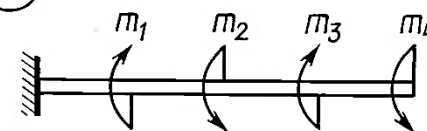
2



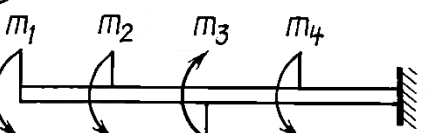
3



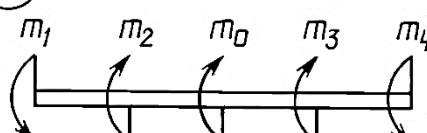
4



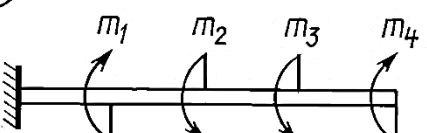
5



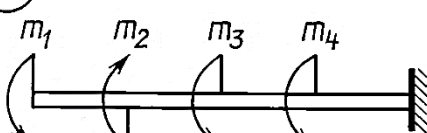
6



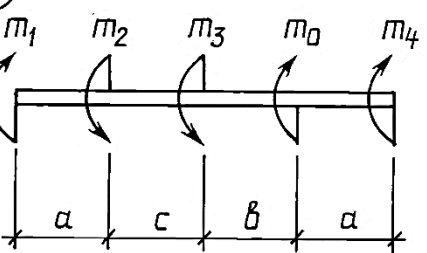
7



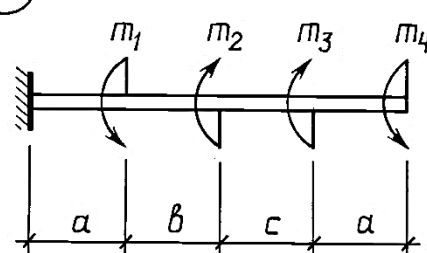
8

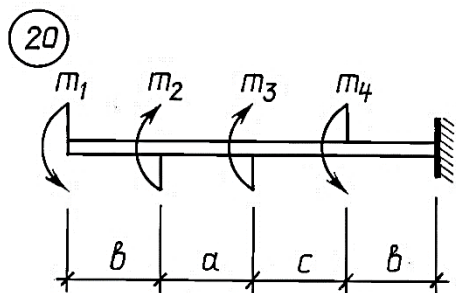
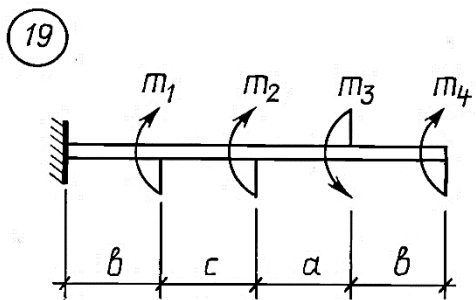
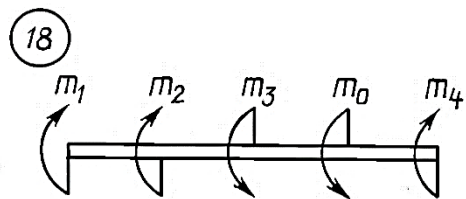
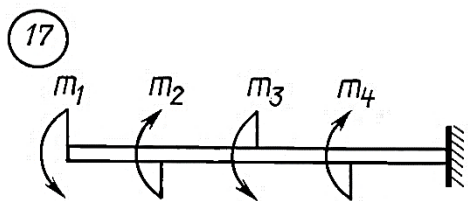
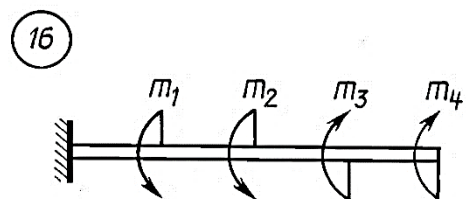
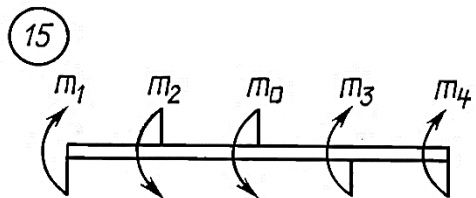
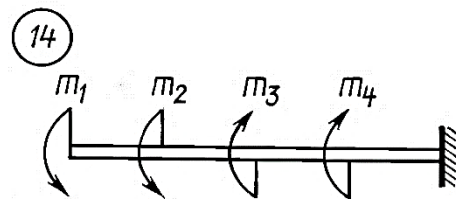
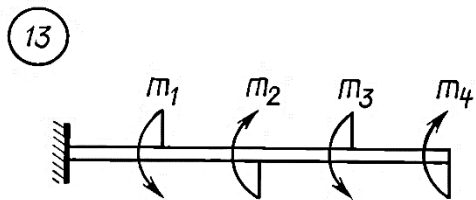
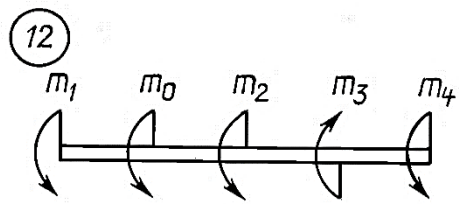
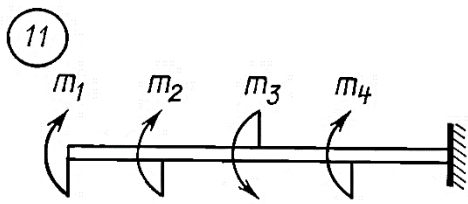


9

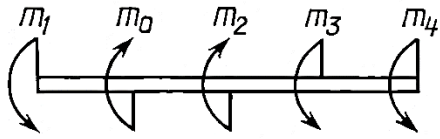


10

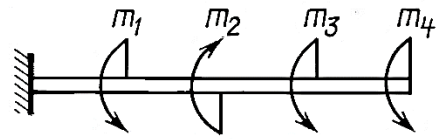




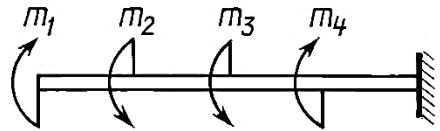
21



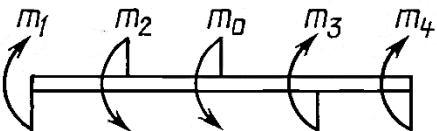
22



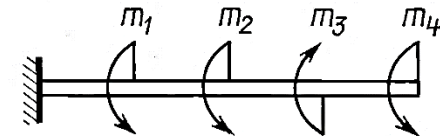
23



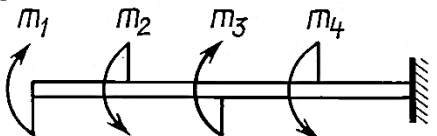
24



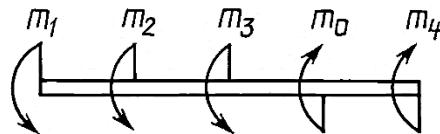
25



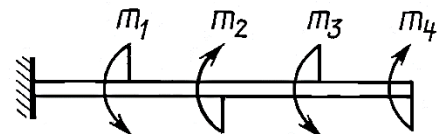
26



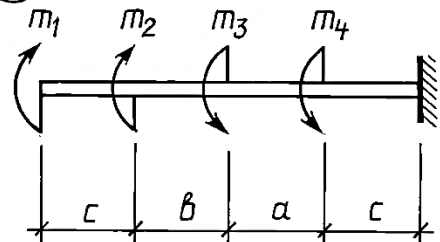
27



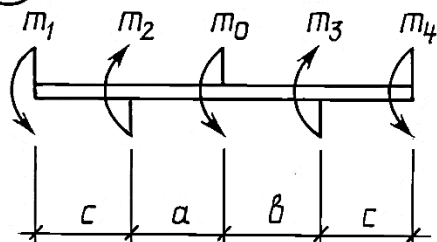
28



29



30



Задача 4.7.

Статически неопределимый стальной вал круглого поперечного сечения (рис. 86) нагружен скручивающими моментами. Допускаемые касательные напряжения материала вала $[\tau] = 130$ МПа, модуль сдвига $G = 80$ ГПа.

Требуется:

- 1) построить эпюру крутящих моментов;
- 2) построить эпюру напряжений;
- 3) построить эпюру углов закручивания.

Данные взять из таблицы 4.7.

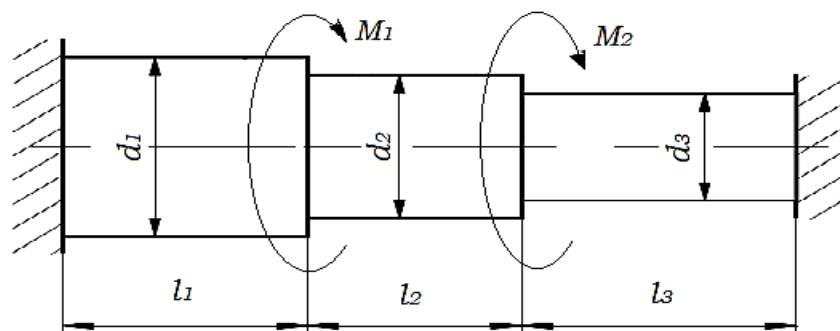


Рис. 86 – Схема вала

Таблица 4.7

№ п/п	Длина участков, м			Моменты, кНм		Диаметр валов, мм			№ п/п	Длина участков, м			Моменты, кНм		Диаметр валов, мм		
	l_1	l_2	l_3	M_1	M_2	d_1	d_2	d_3		l_1	l_2	l_3	M_1	M_2	d_1	d_2	d_3
1	0,4	0,7	0,5	10	14	70	90	60	16	0,4	0,5	0,7	8	24	60	70	70
2	0,5	0,8	0,7	-33	6	75	95	70	17	0,5	0,7	0,8	-10	11	70	75	75
3	0,6	0,9	0,8	7	-18	80	70	90	18	0,6	0,8	0,9	12	-25	90	80	80
4	0,7	0,4	0,9	16	-9	85	75	95	19	0,7	0,9	0,4	14	6	95	85	85
5	0,8	0,5	0,4	-9	-19	90	80	70	20	0,8	0,4	0,5	-20	-24	70	90	90
6	0,9	0,6	0,5	32	9	95	85	75	21	0,9	0,5	0,6	17	34	75	95	95
7	0,4	0,7	0,6	-12	18	100	90	80	22	0,4	0,6	0,7	-15	25	80	100	100
8	0,5	0,8	0,6	13	10	70	95	85	23	0,5	0,6	0,8	22	-11	85	70	70
9	0,6	0,9	0,9	4	-20	75	100	90	24	0,6	0,9	0,9	21	31	90	75	75
10	0,7	0,4	0,5	-30	12	80	70	95	25	0,7	0,5	0,4	-9	-32	95	80	80
11	0,8	0,5	0,6	23	11	85	75	100	26	0,8	0,6	0,5	11	18	100	85	85
12	0,9	0,6	0,7	-22	14	90	80	70	27	0,9	0,7	0,6	-18	20	70	90	90
13	0,4	0,5	0,8	27	-8	95	85	75	28	0,4	0,8	0,5	24	-11	75	95	95
14	0,5	0,7	0,9	-11	-18	100	90	80	29	0,5	0,9	0,7	20	29	80	100	100
15	0,6	0,8	0,4	32	-10	70	95	85	30	0,6	0,4	0,8	-16	-31	85	70	70

Задача 4.8.

Для заданных схем требуется:

1) построить эпюры внутренних усилий: (поперечных сил и изгибающих моментов); для рамы (д) дополнительно построить эпюру продольных сил;

2) для балок выполнить расчет на прочность:

- для консольной балки (а) подобрать двутавровое сечение из прокатных профилей;

- для простой балки (б) подобрать сечение из двух швеллеров из прокатных профилей;

- для одноконсольной балки (в) подобрать круглое сечение из древесины ($d_{\max} = 28 \text{ см}$);

- для двухконсольной балки (г) подобрать прямоугольное сечение из древесины при соотношении сторон $h/b = 1,4$;

- для составной балки (е) проверить прочность двутавра № 24.

Принять допускаемое напряжение:

для стали $[\sigma] = 210 \text{ МПа}$; $[\tau] = 130 \text{ МПа}$;

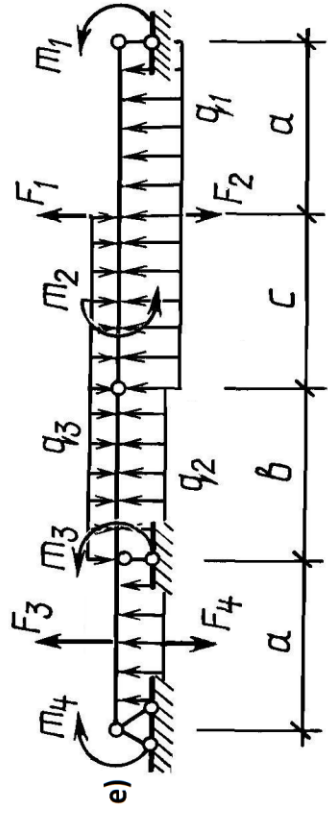
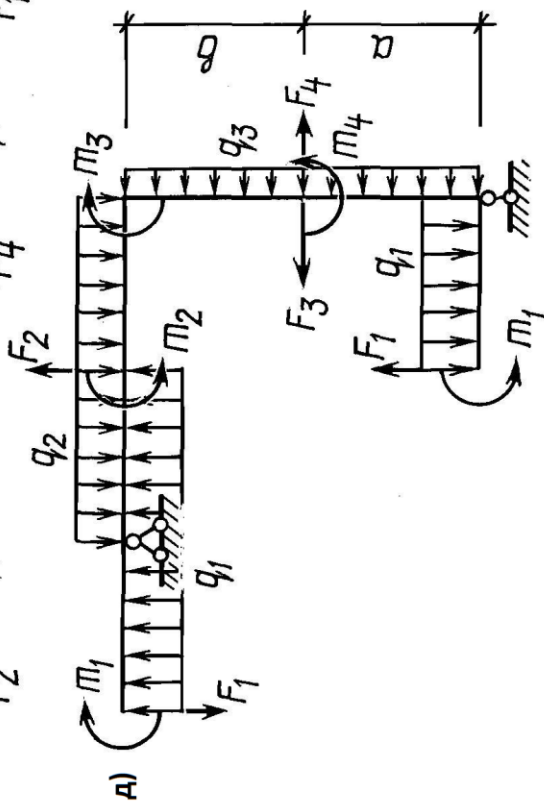
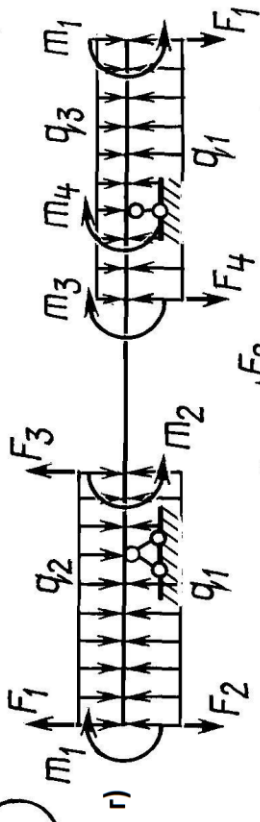
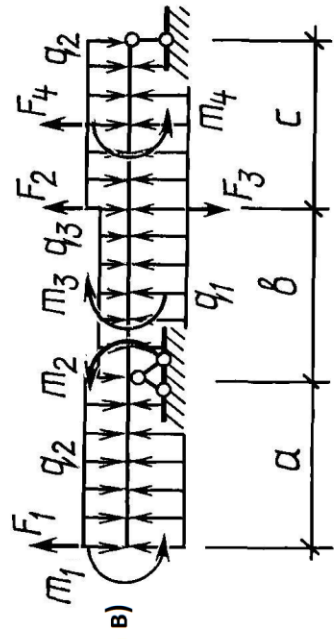
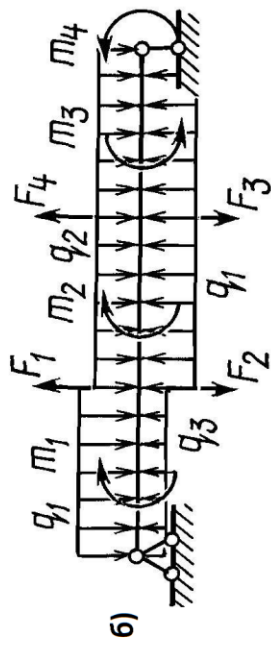
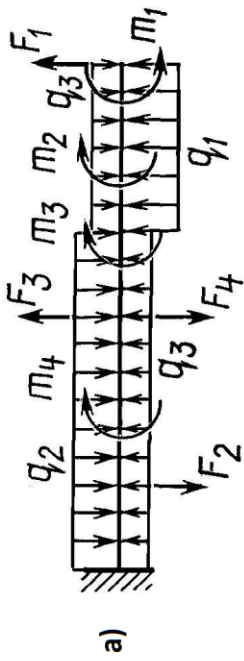
для древесины $[\sigma] = 16 \text{ МПа}$; $[\tau] = 2 \text{ МПа}$.

Данные взять из таблицы 4.8.

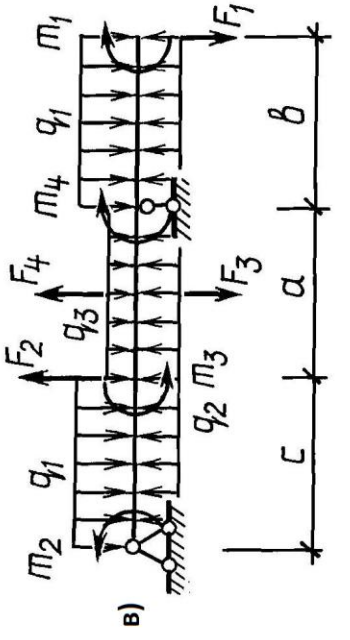
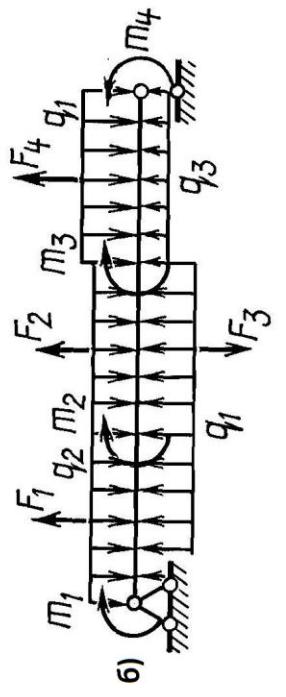
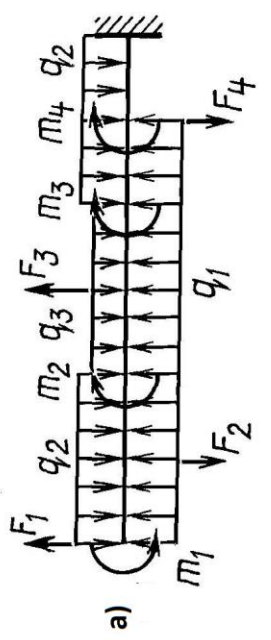
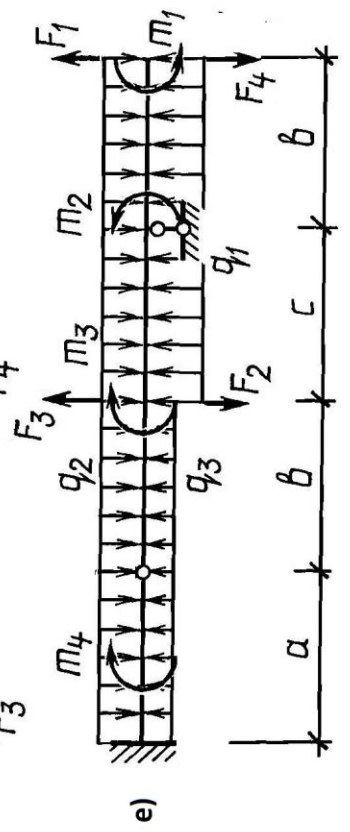
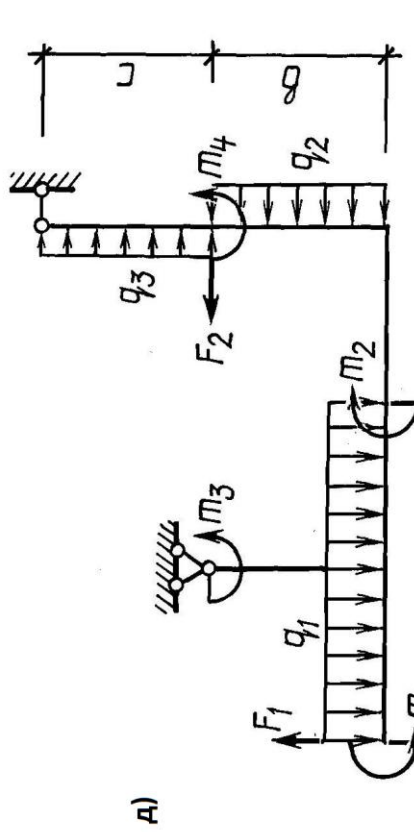
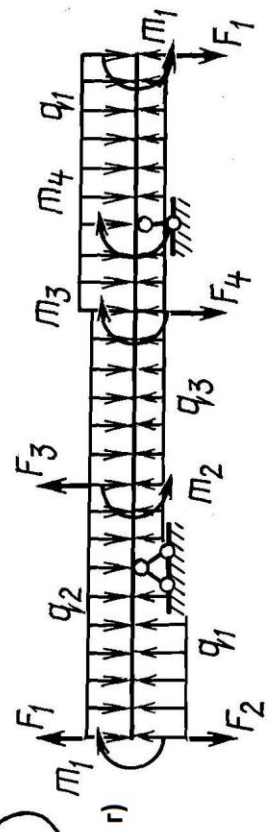
Таблица 4.8

№ п/п	Размеры			Нагрузки			Индекс нагрузки		
	a	b	c	q	F	m	q	F	m
	м			кН/м	кН	кН·м			
1	2,0	1,6	2,4	16	10	20	1	4	2
2	1,6	2,0	2,2	12	10	16	2	1	2
3	2,4	2,0	1,6	10	12	20	1	2	1
4	2,0	1,6	2,0	8	10	12	3	4	1
5	1,6	2,0	2,4	14	16	20	1	3	2
6	2,0	2,4	1,6	16	24	8	2	2	1
7	2,4	2,0	2,4	20	10	14	1	4	3
8	2,0	2,4	2,0	12	16	10	3	3	1
9	2,0	2,0	1,6	6	18	12	1	1	1
10	1,6	2,0	2,4	10	12	14	2	3	1

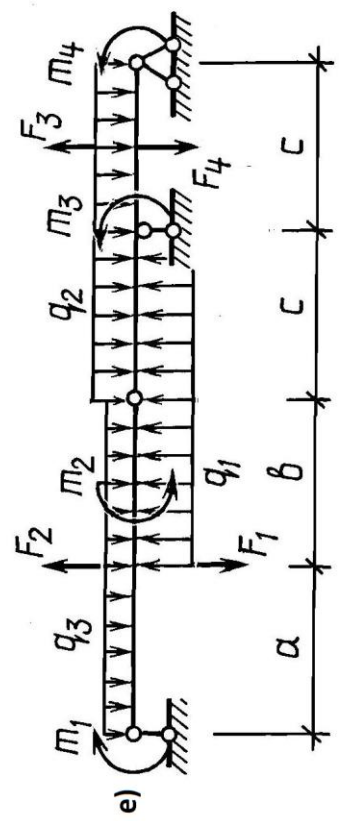
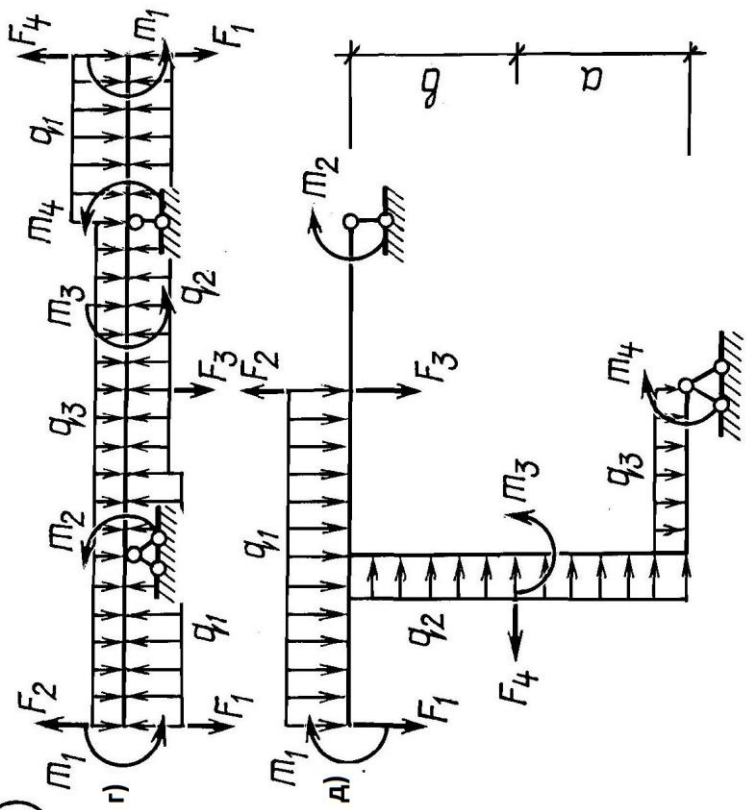
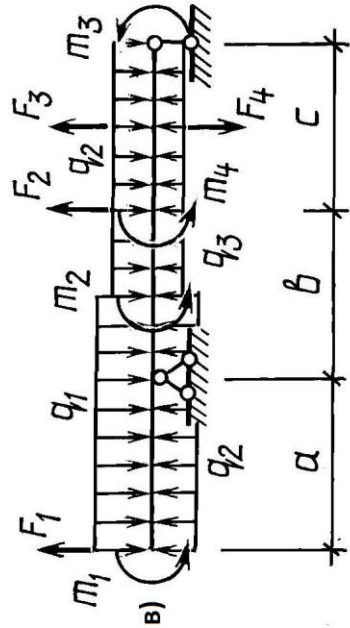
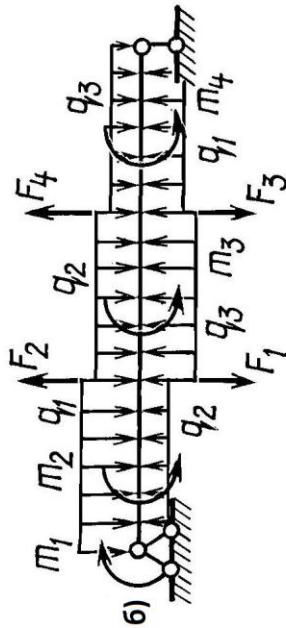
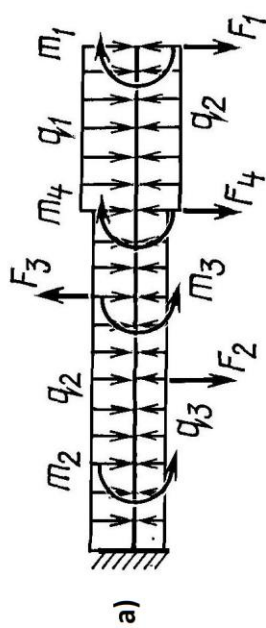
1



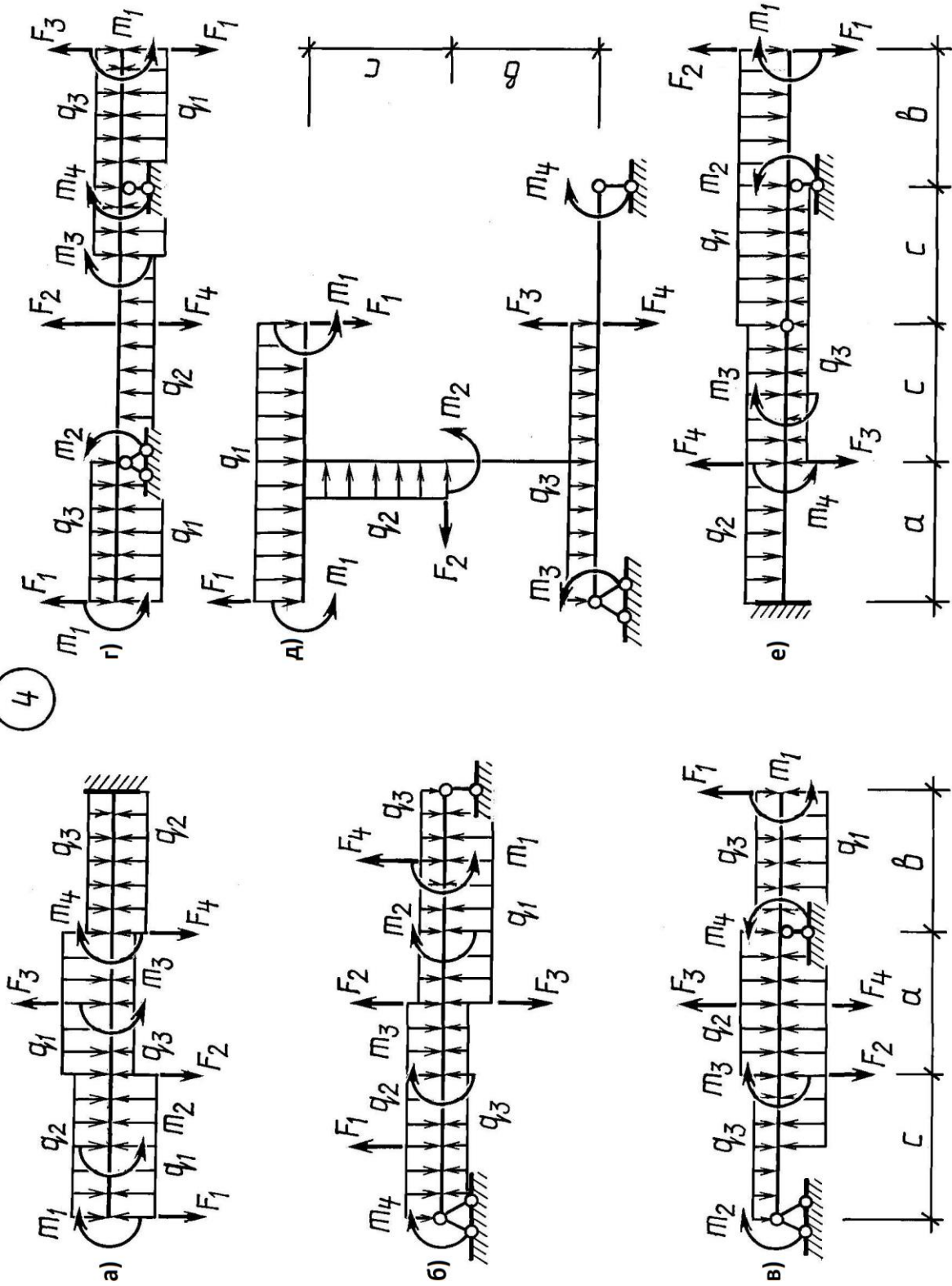
2



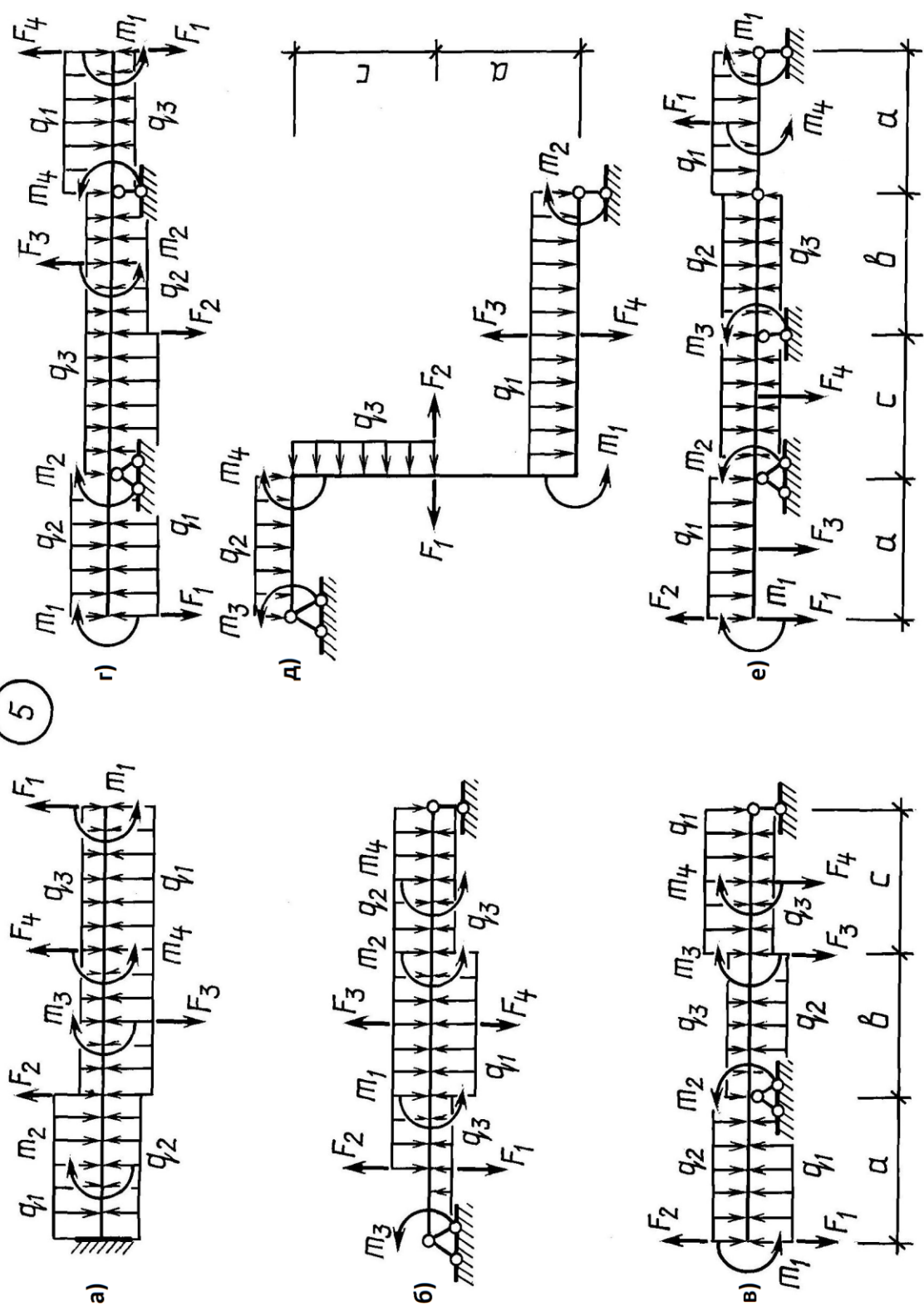
3



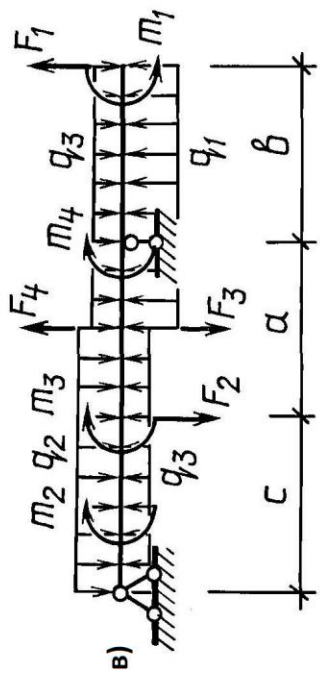
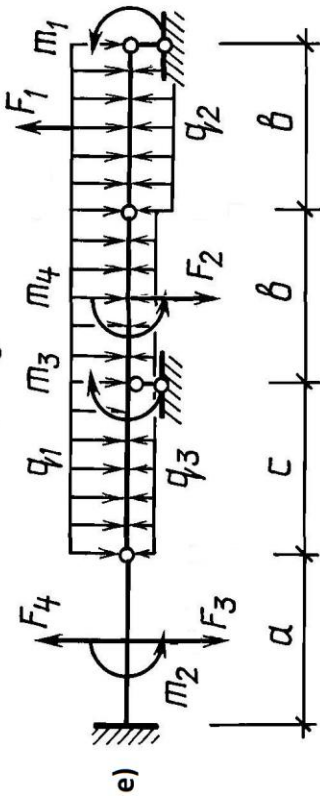
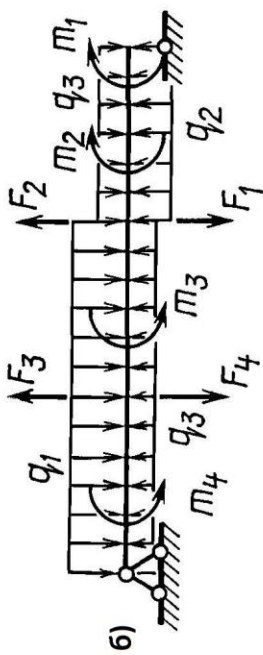
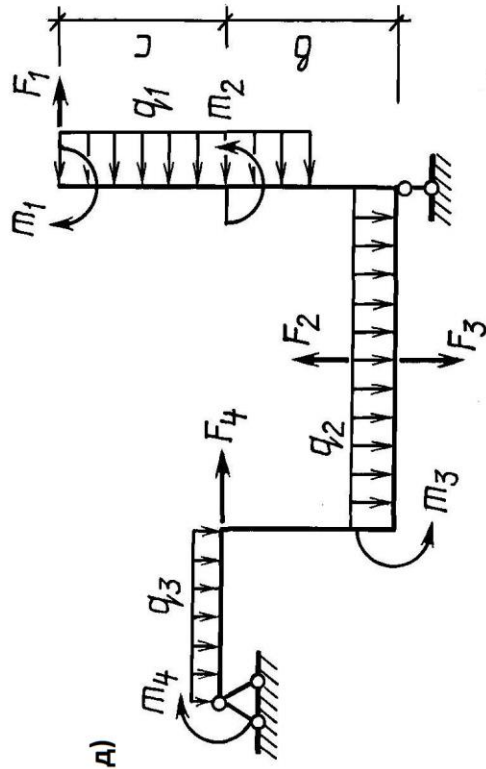
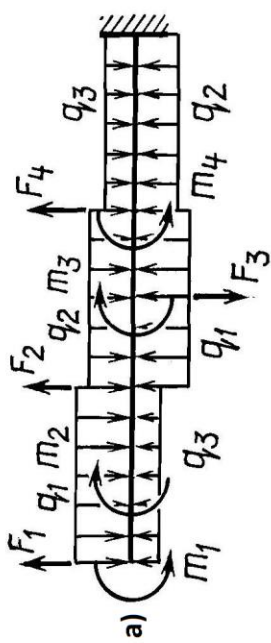
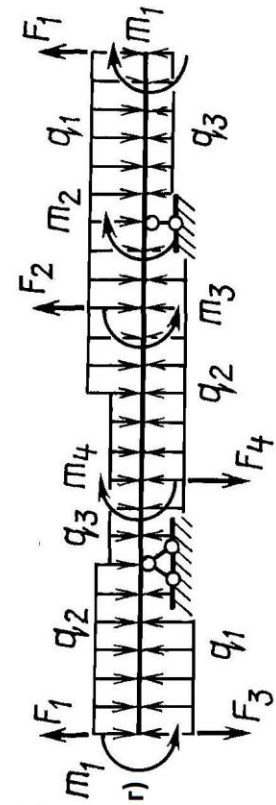
4



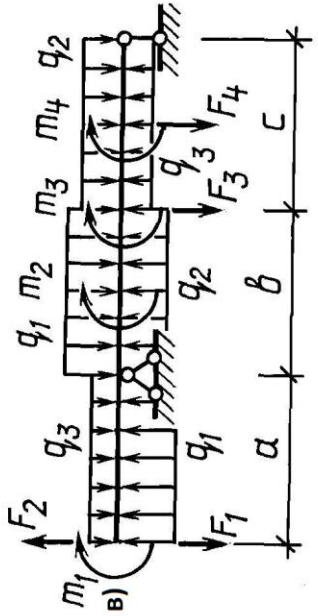
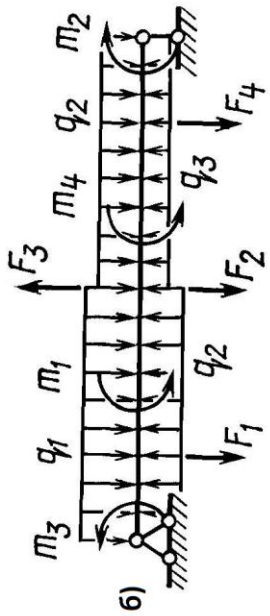
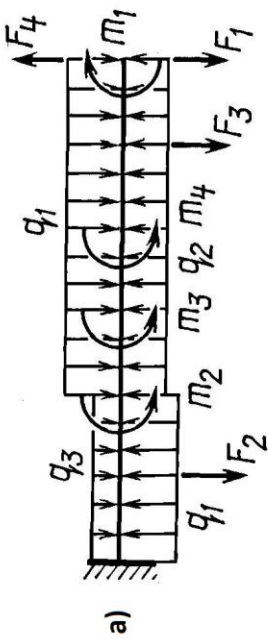
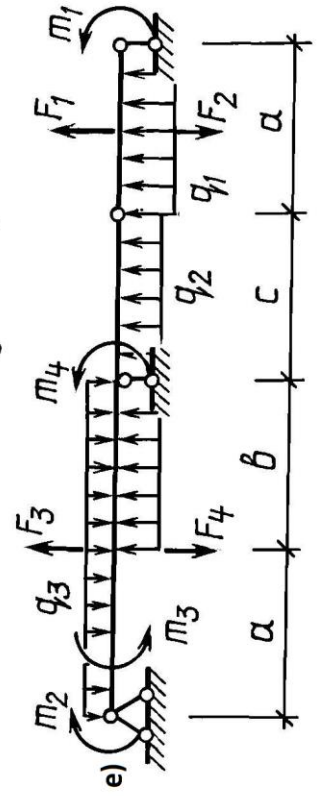
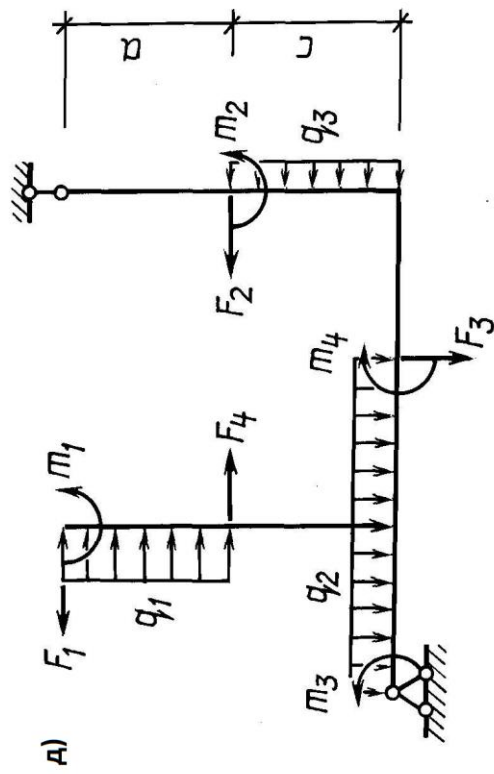
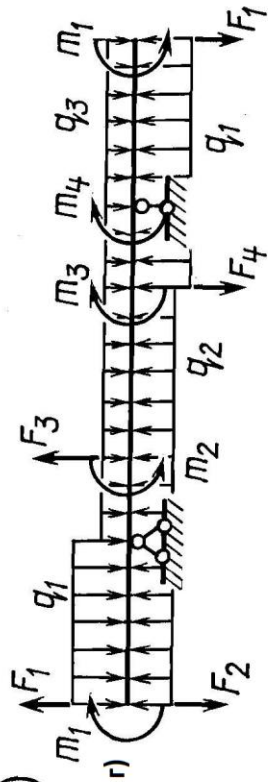
5



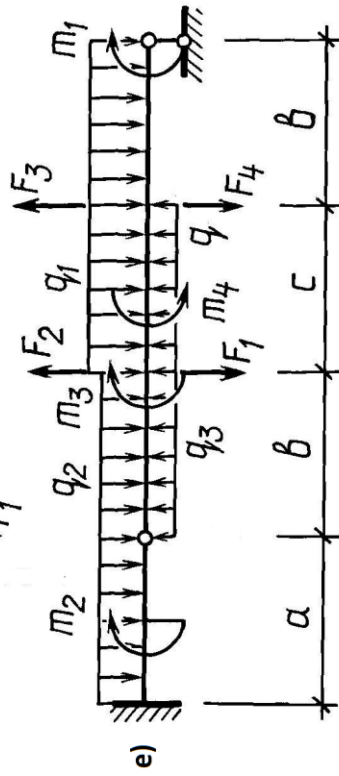
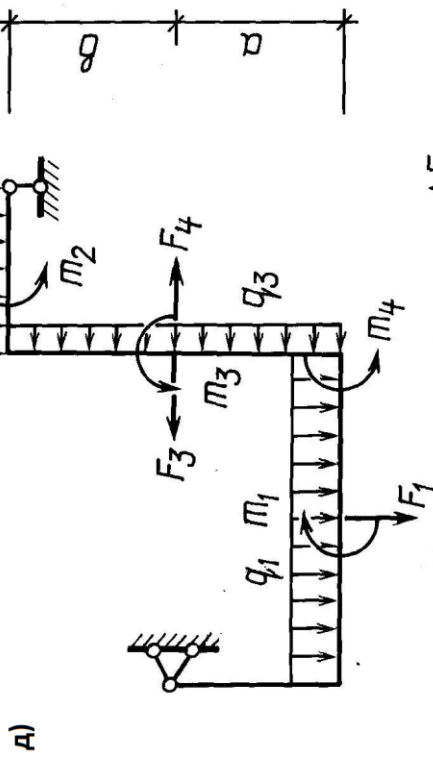
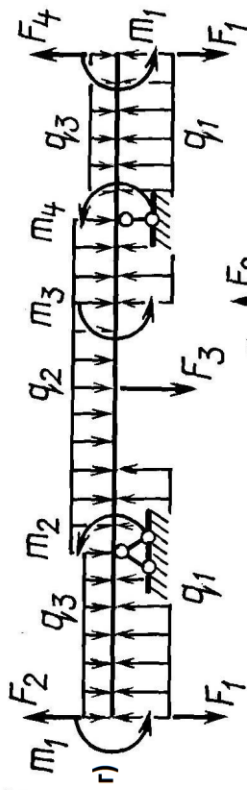
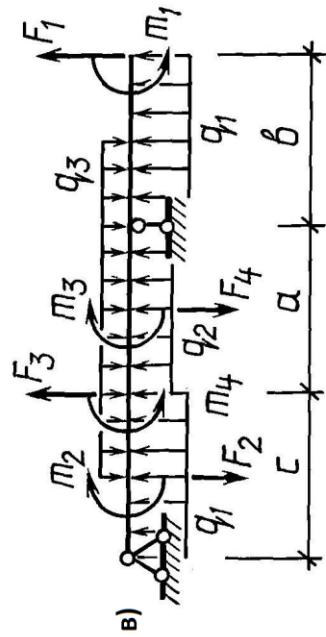
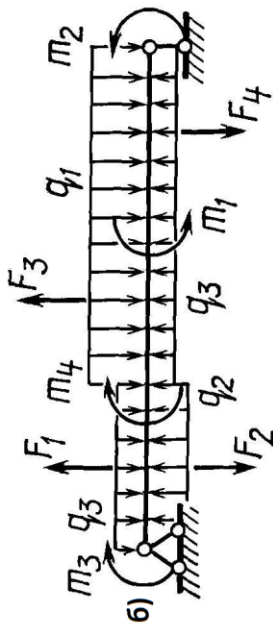
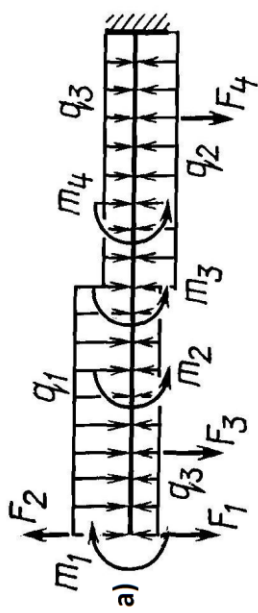
6



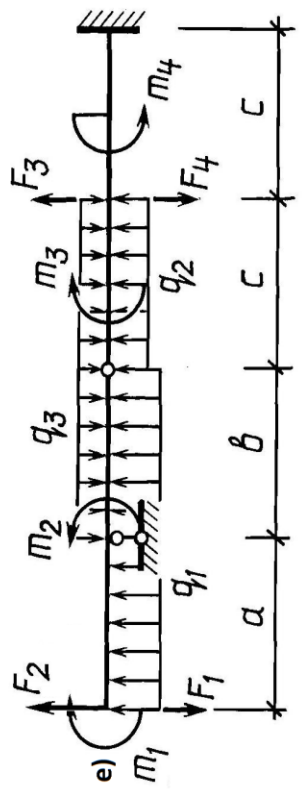
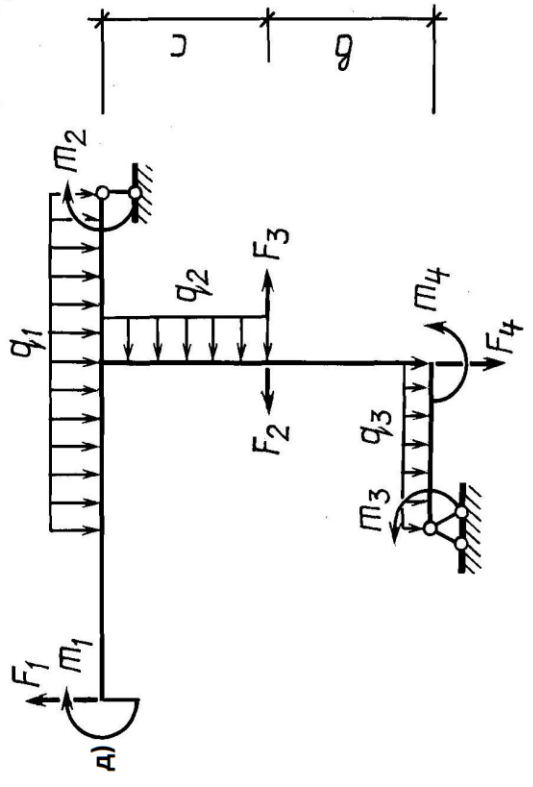
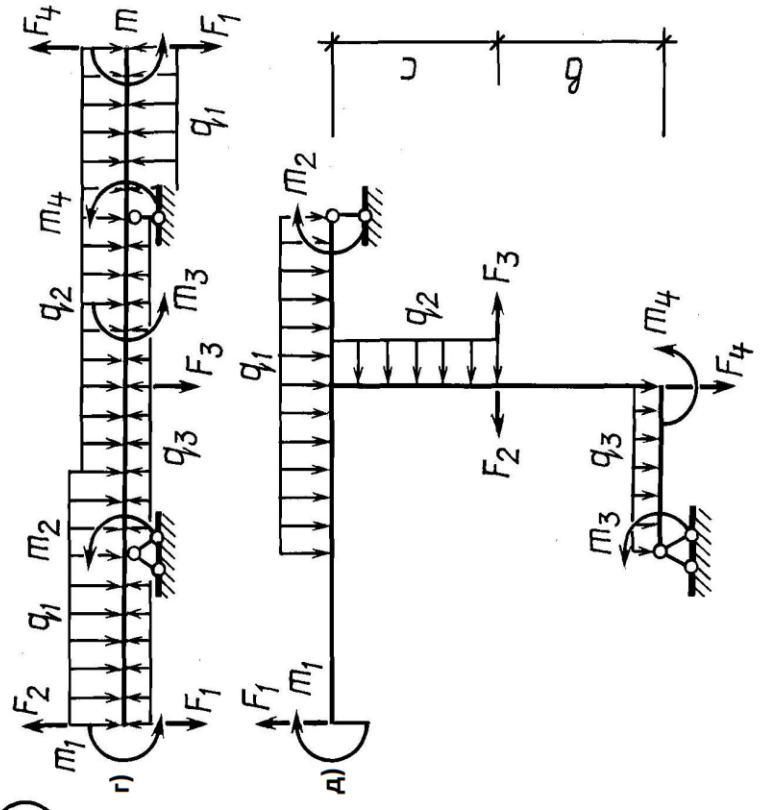
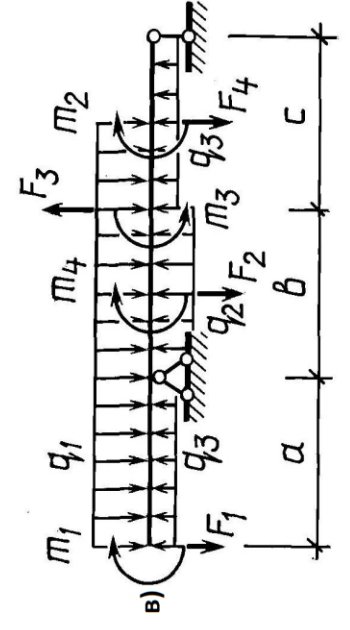
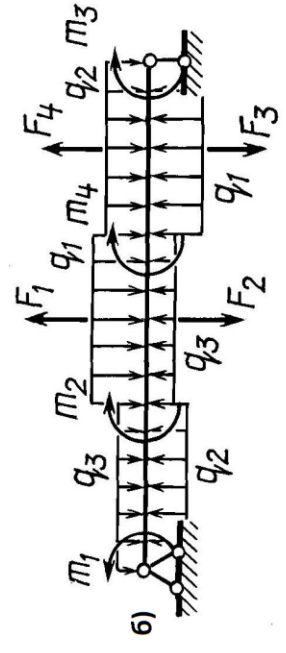
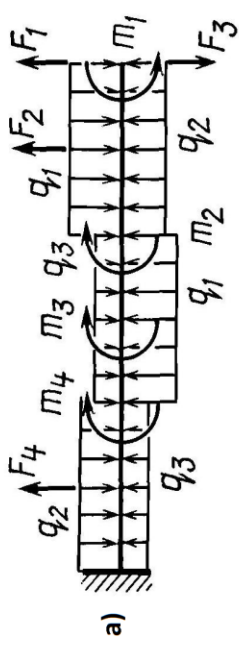
7



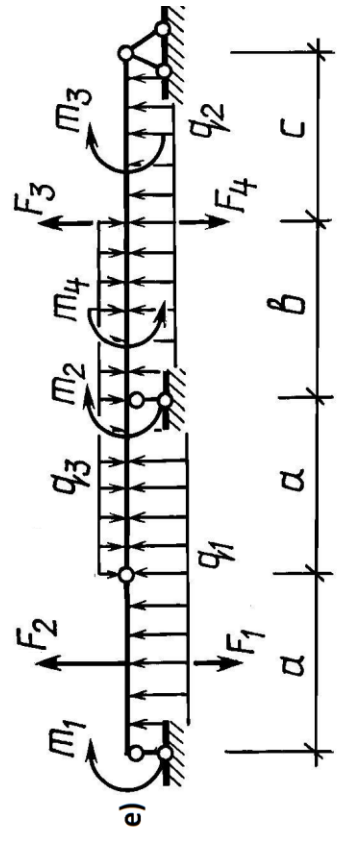
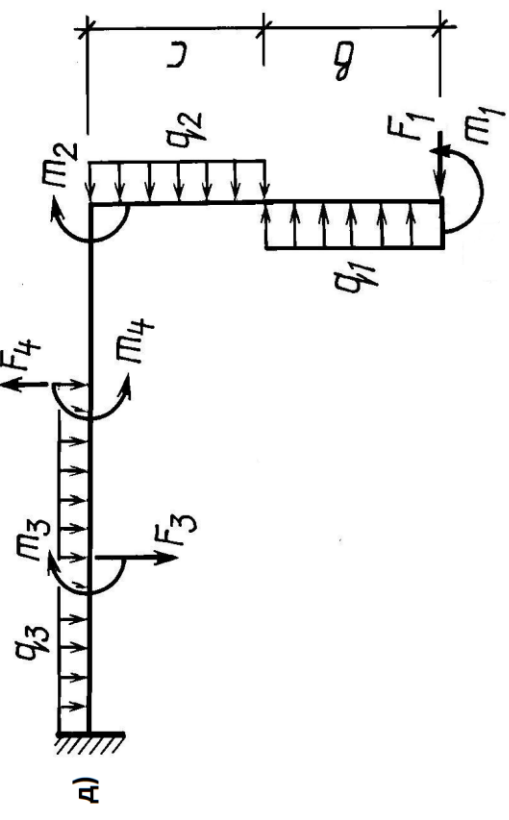
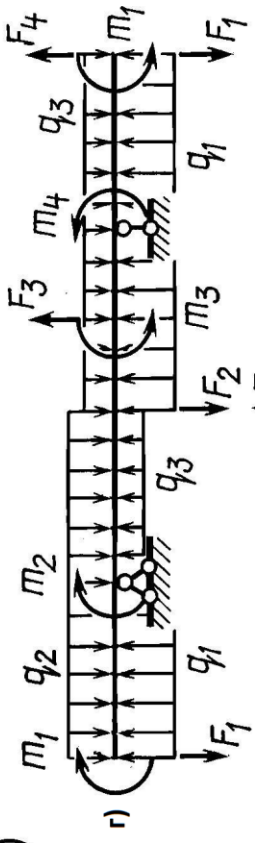
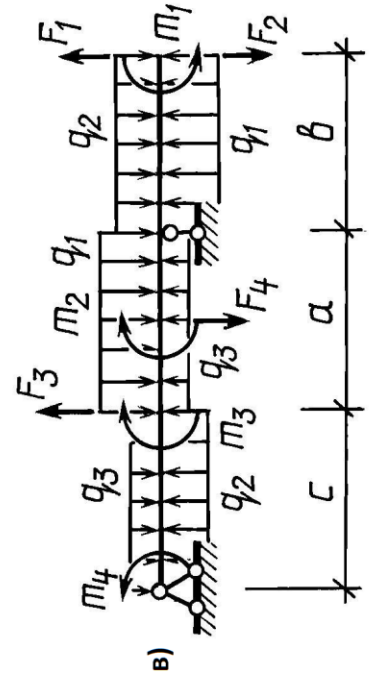
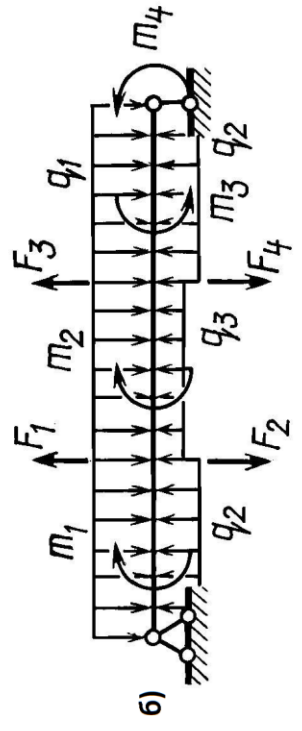
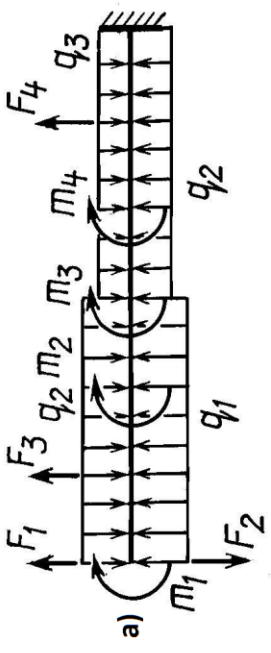
8



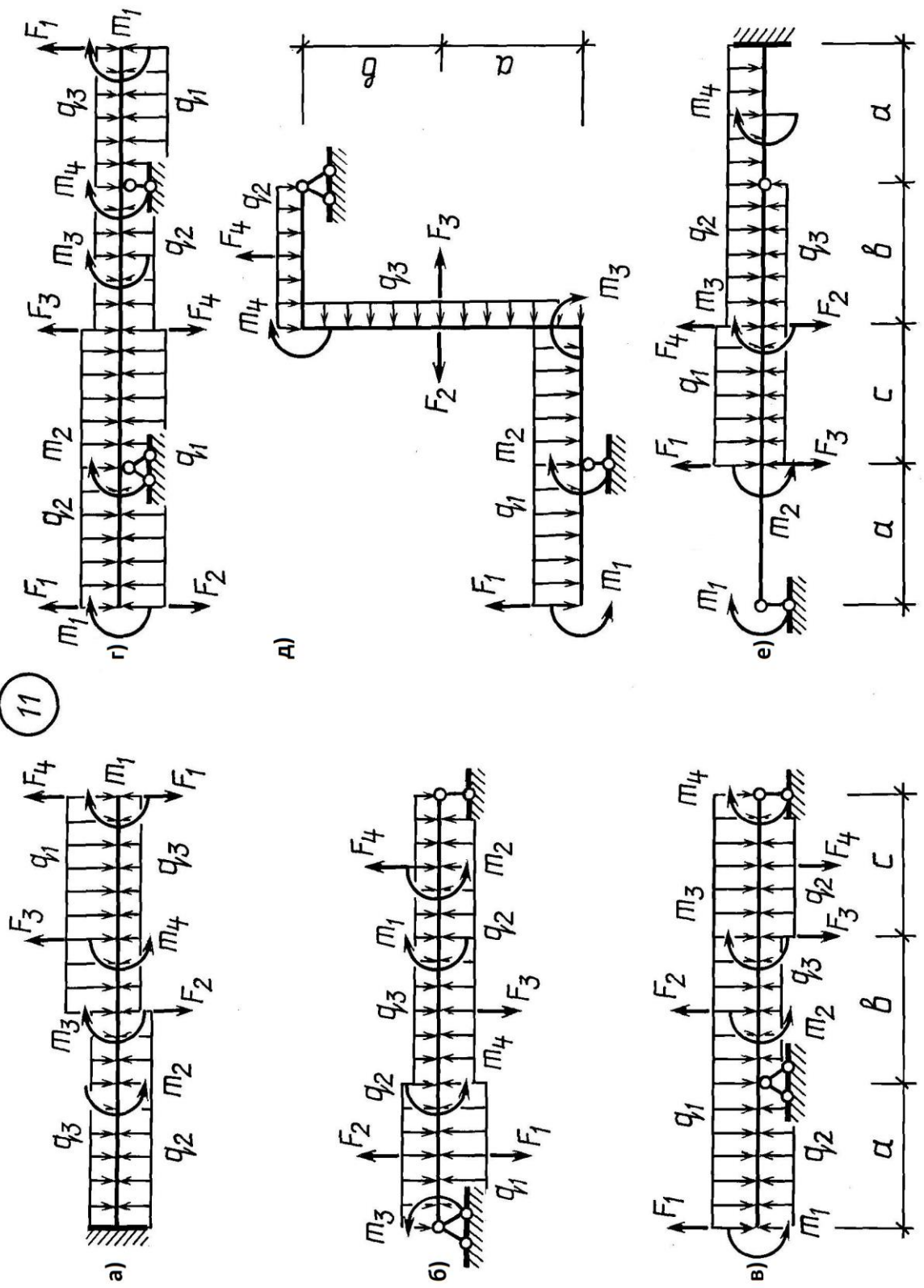
9



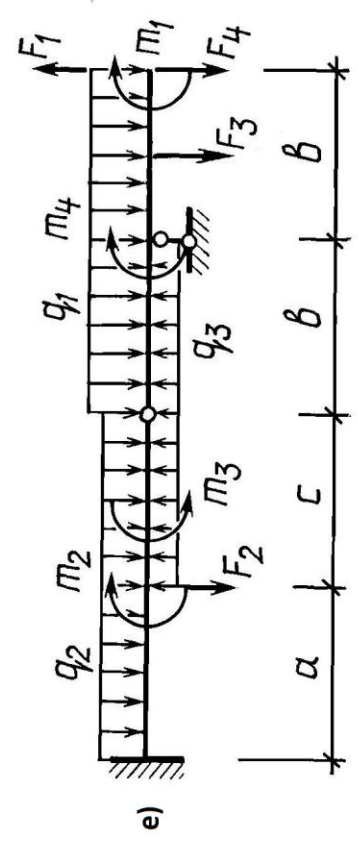
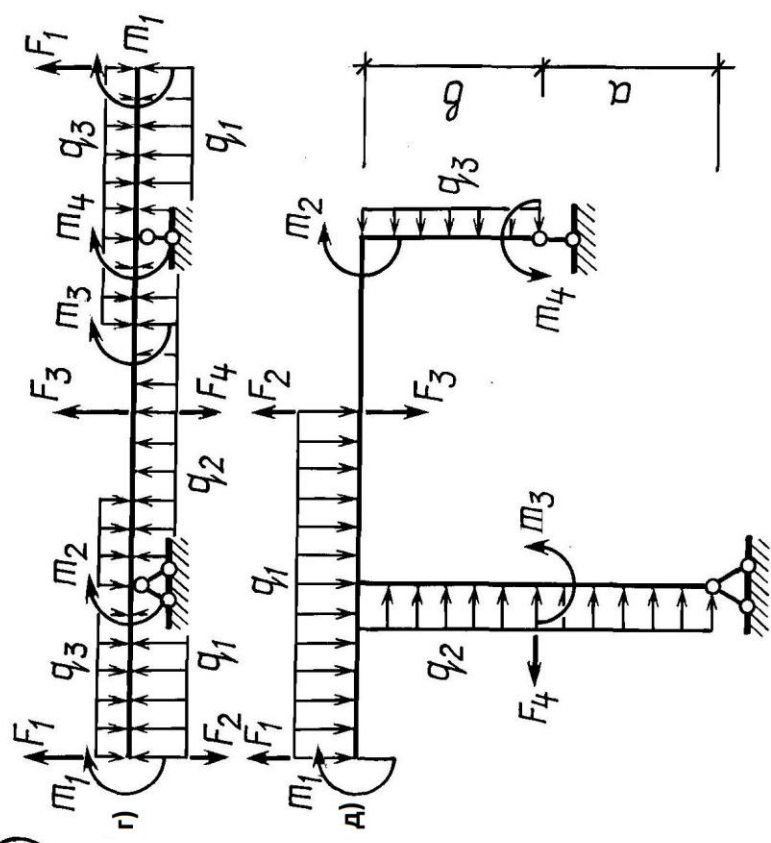
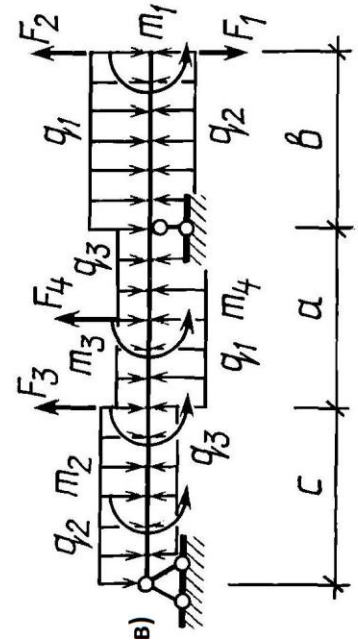
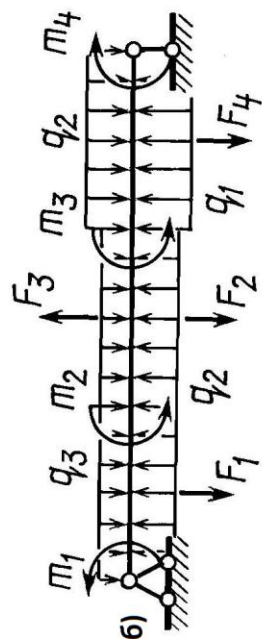
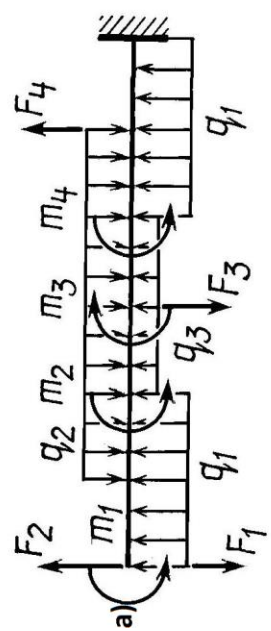
10



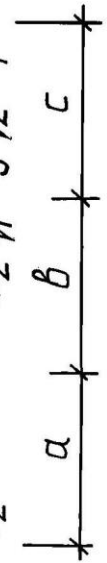
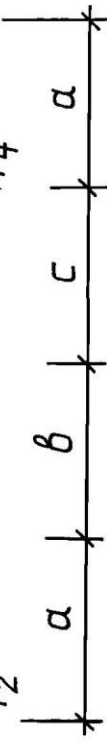
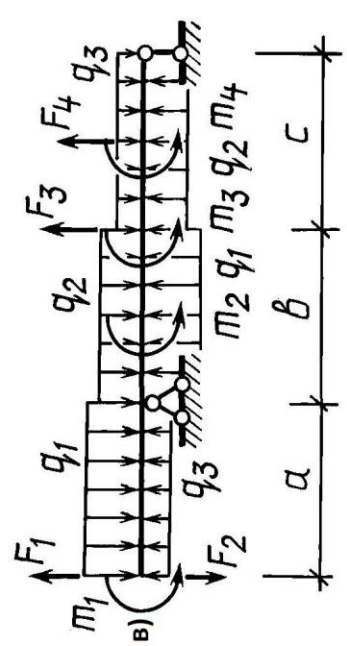
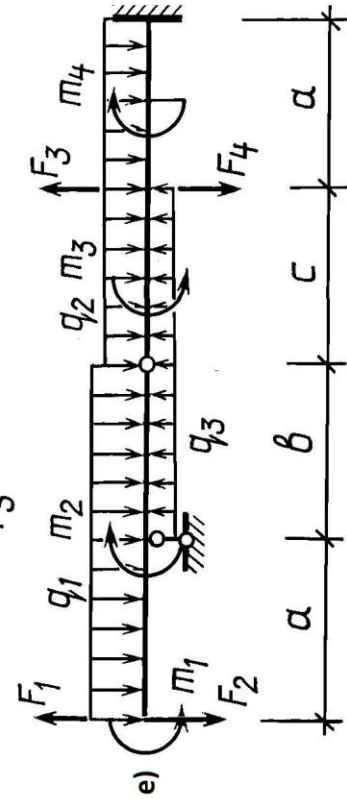
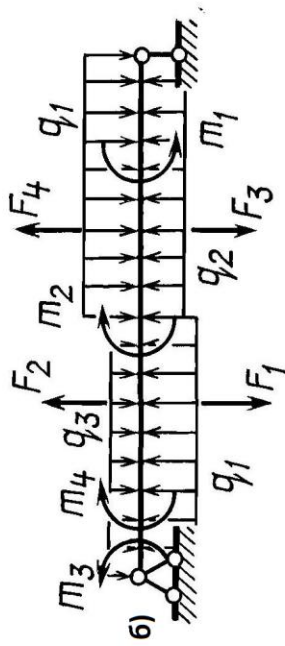
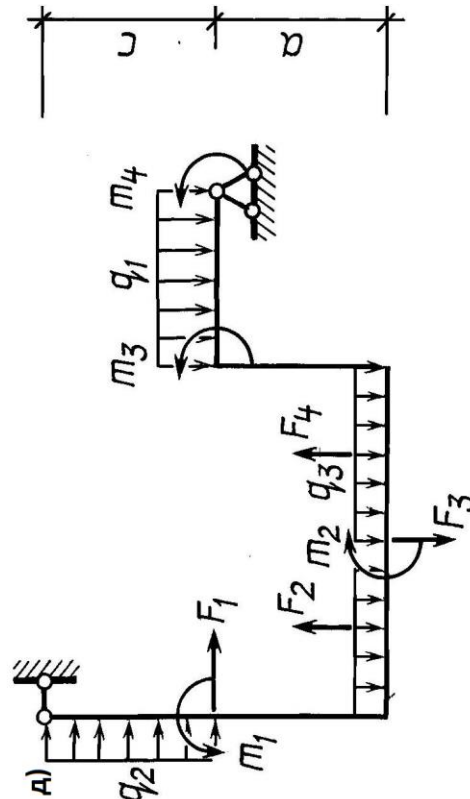
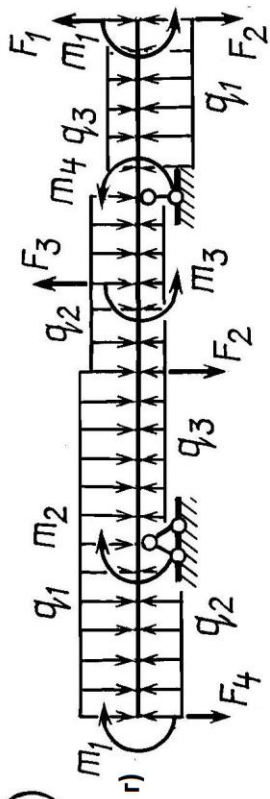
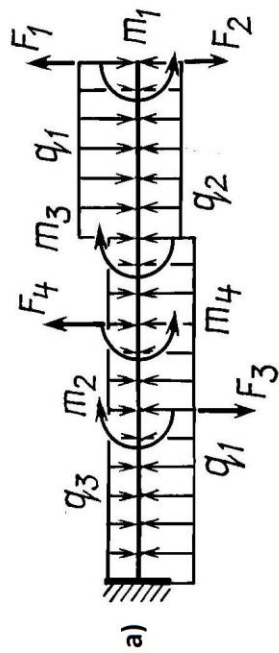
11



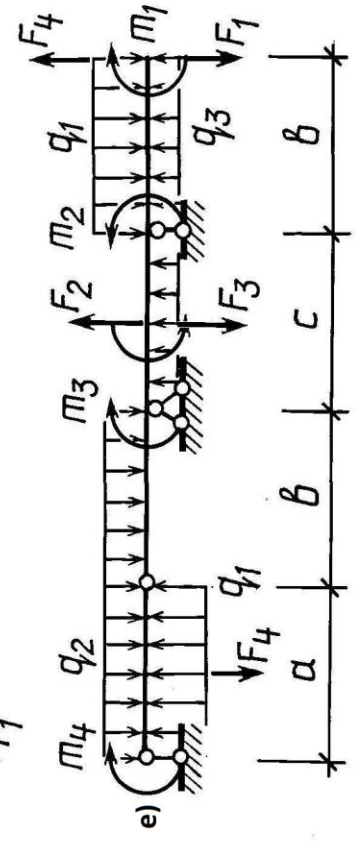
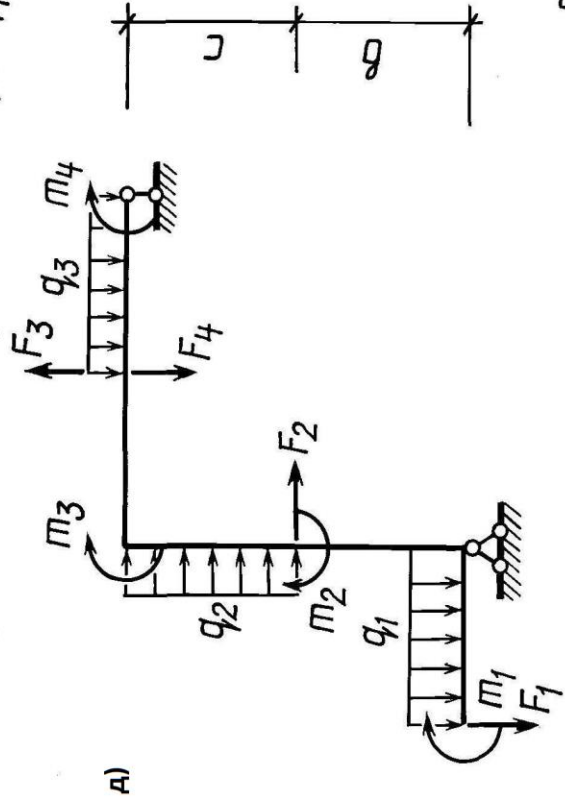
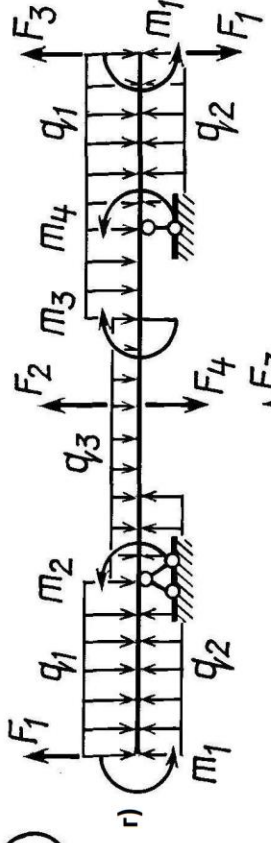
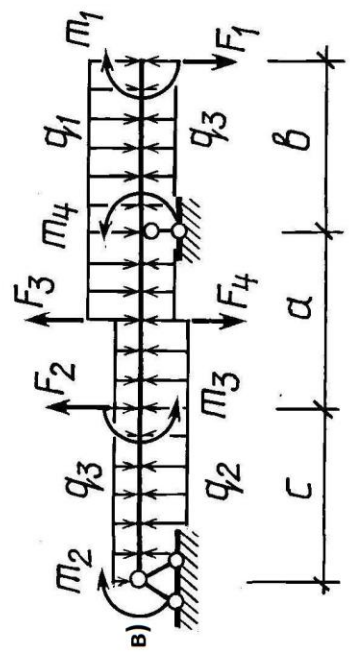
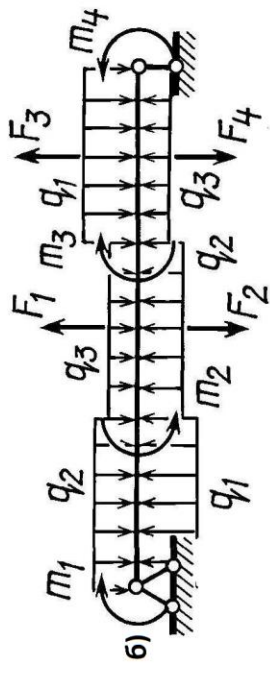
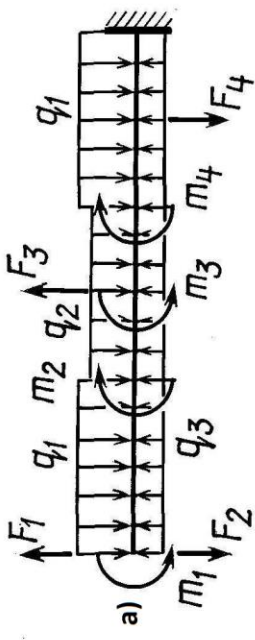
12



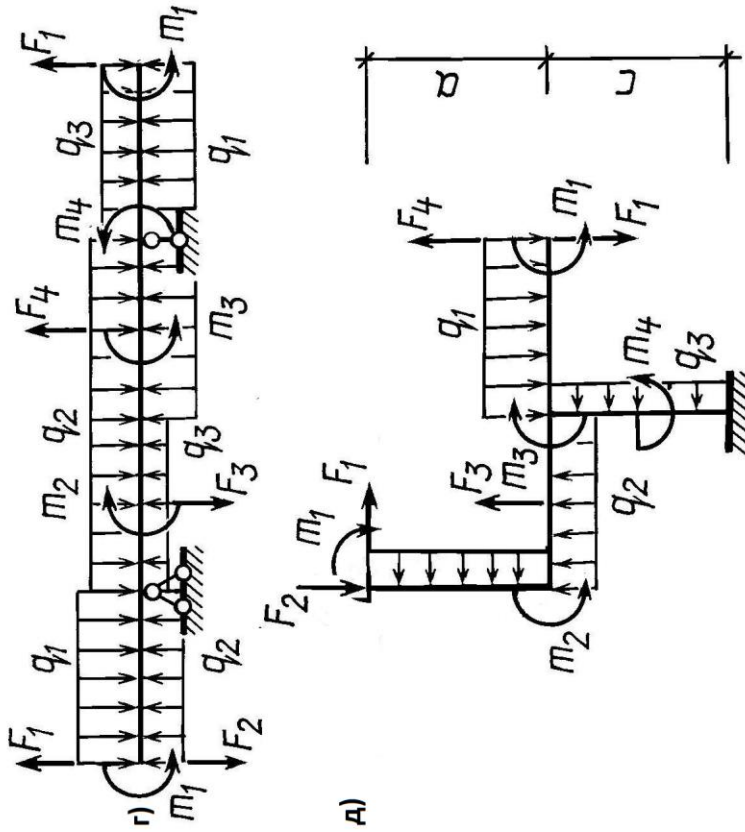
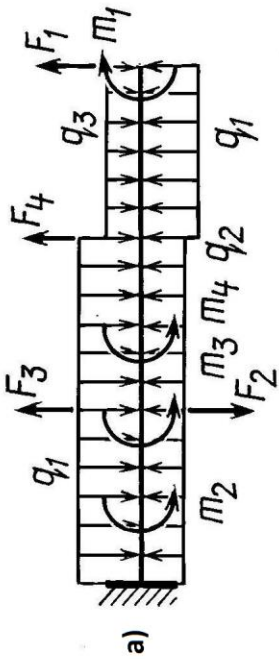
13



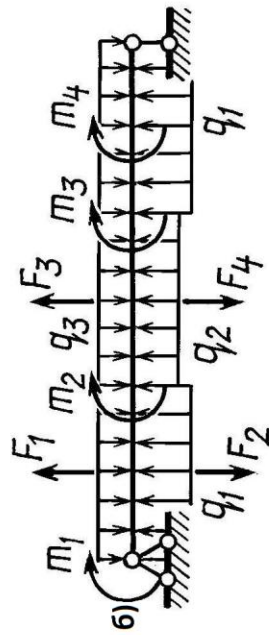
14



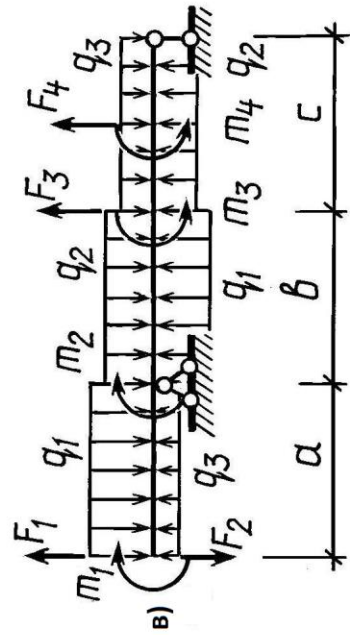
15



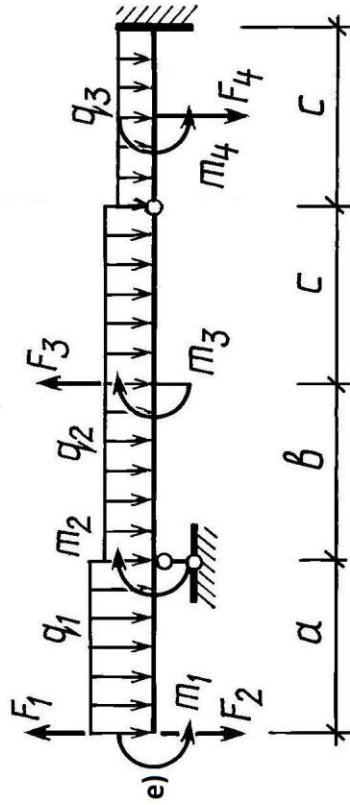
a)



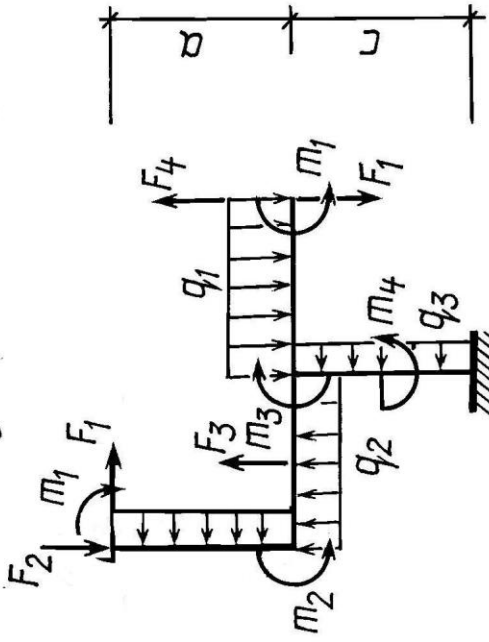
o)



b)

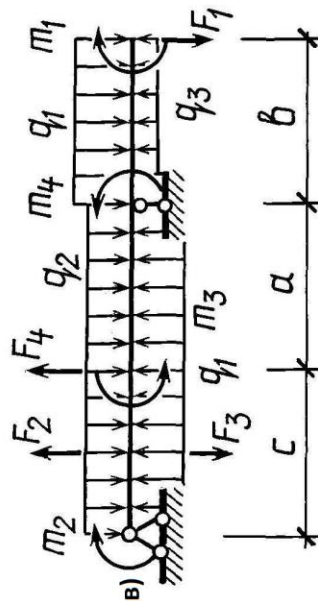
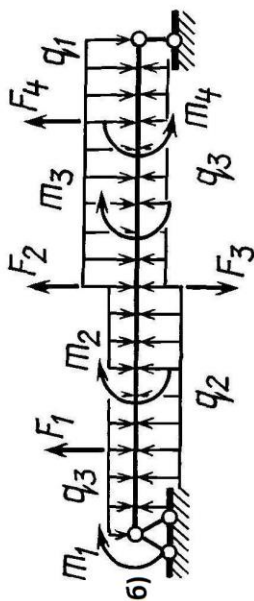
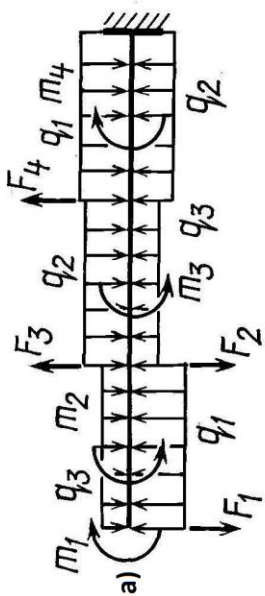
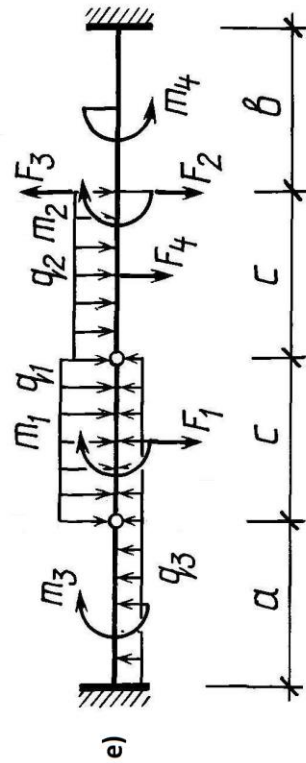
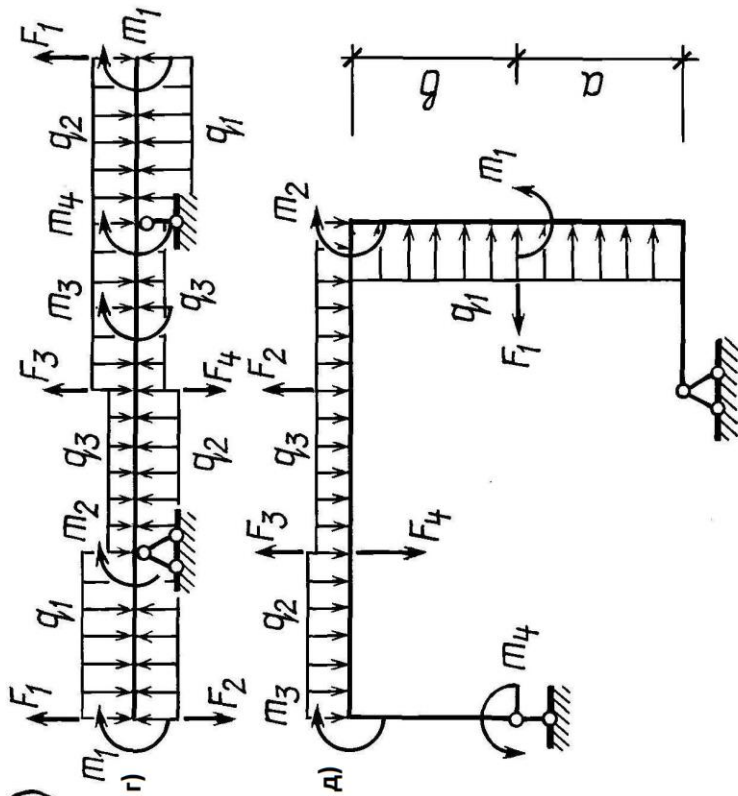


e)

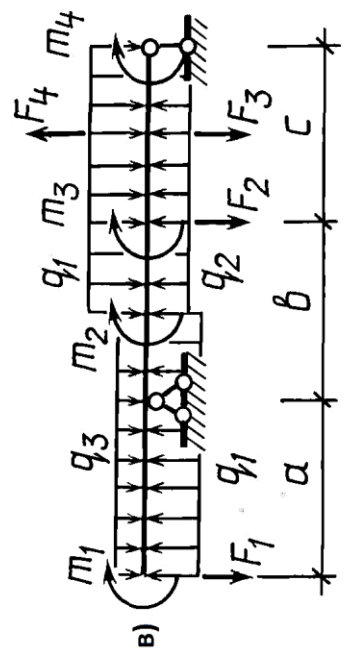
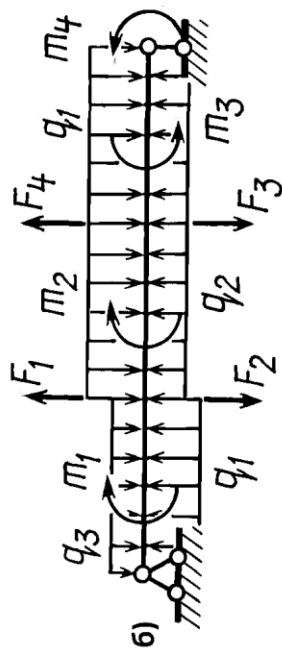
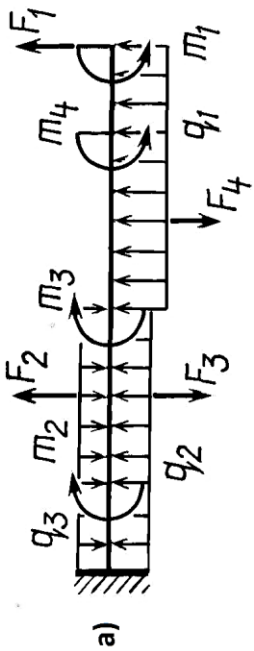
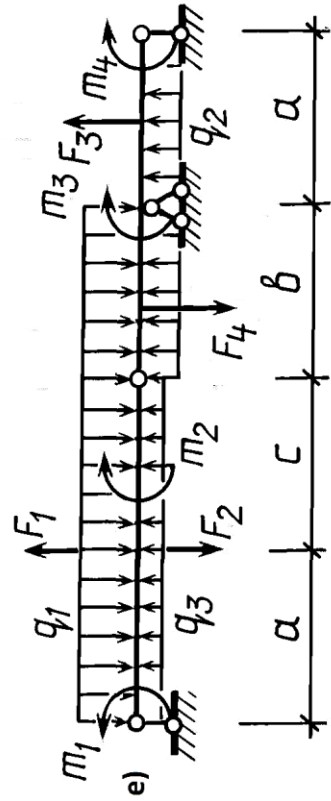
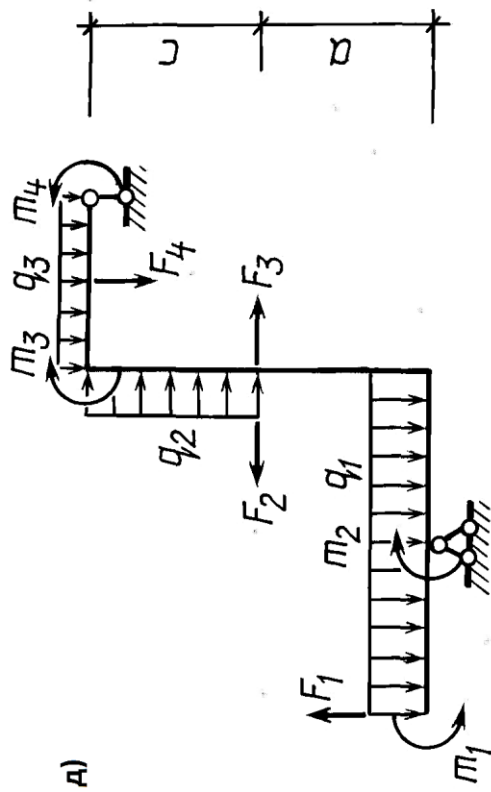
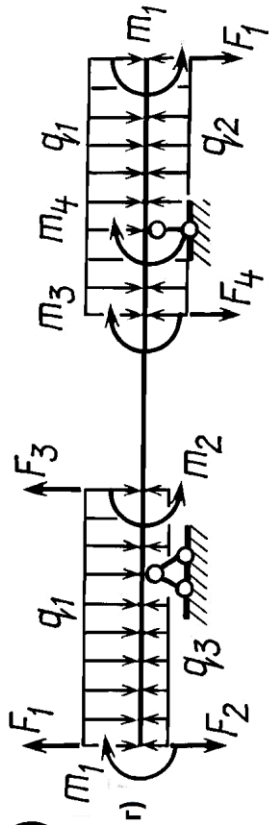


A)

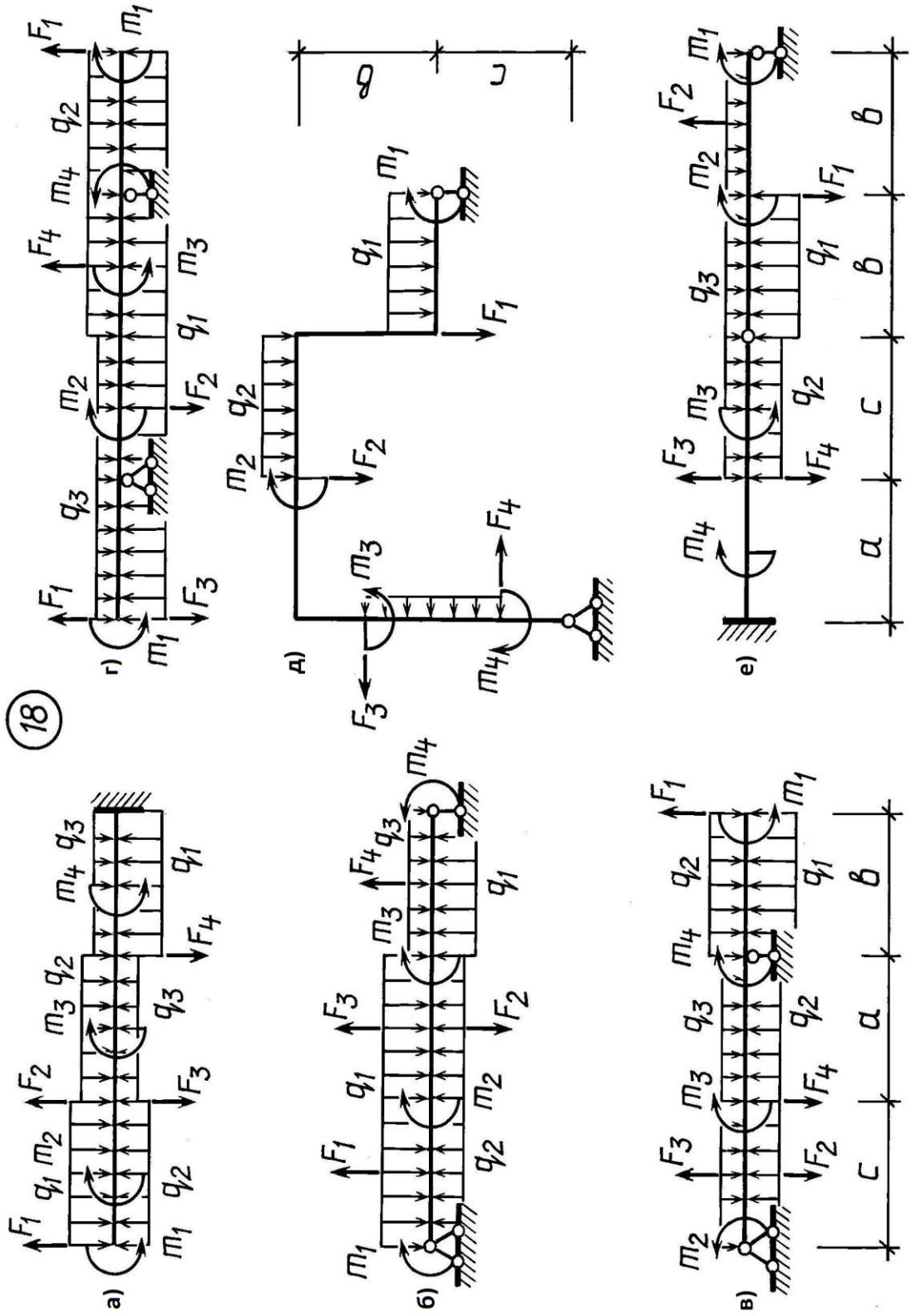
16



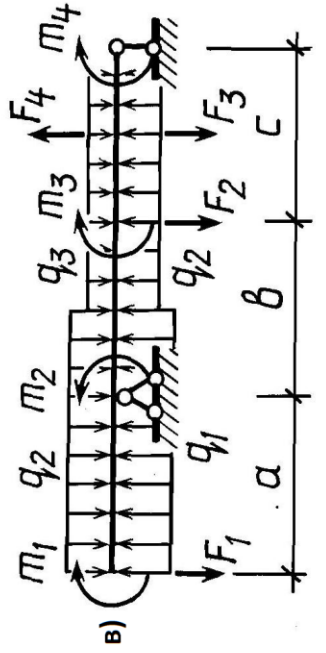
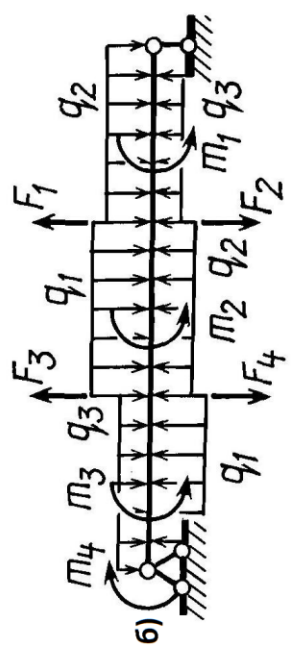
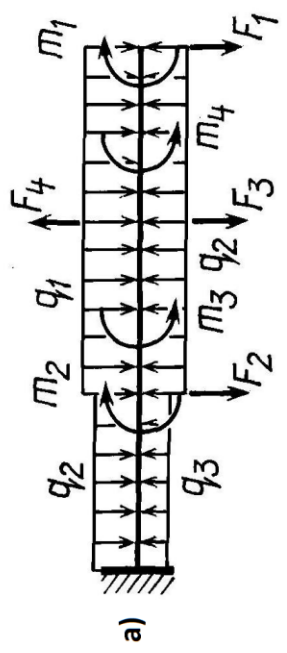
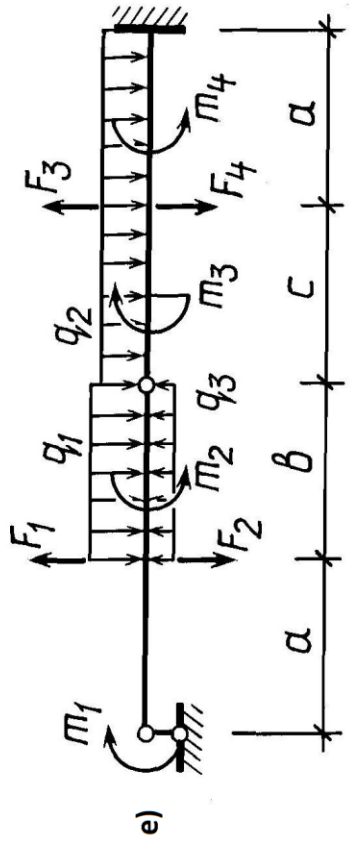
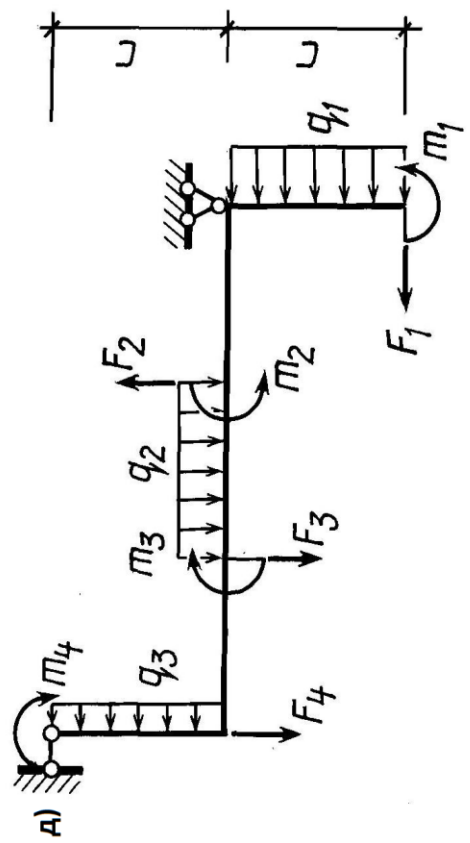
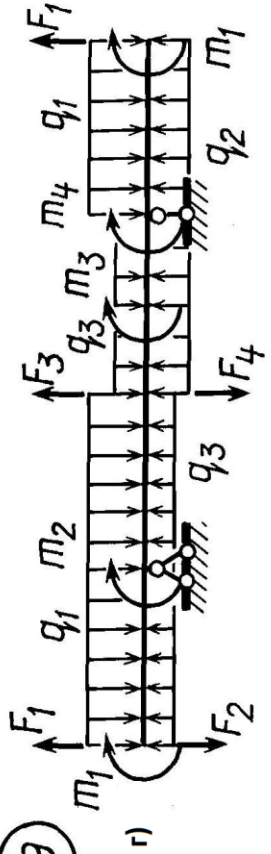
17



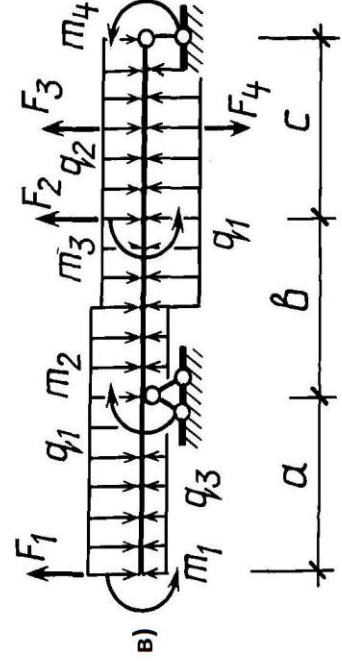
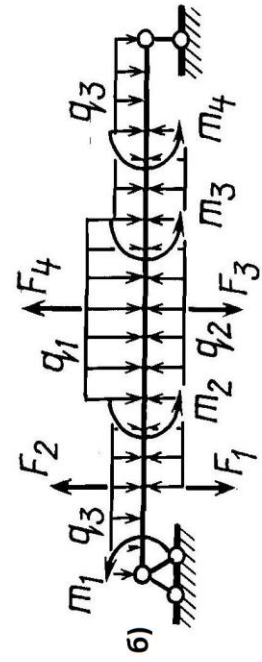
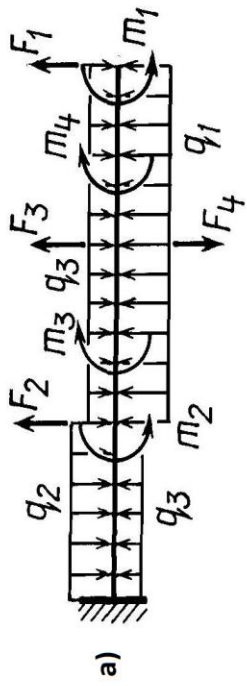
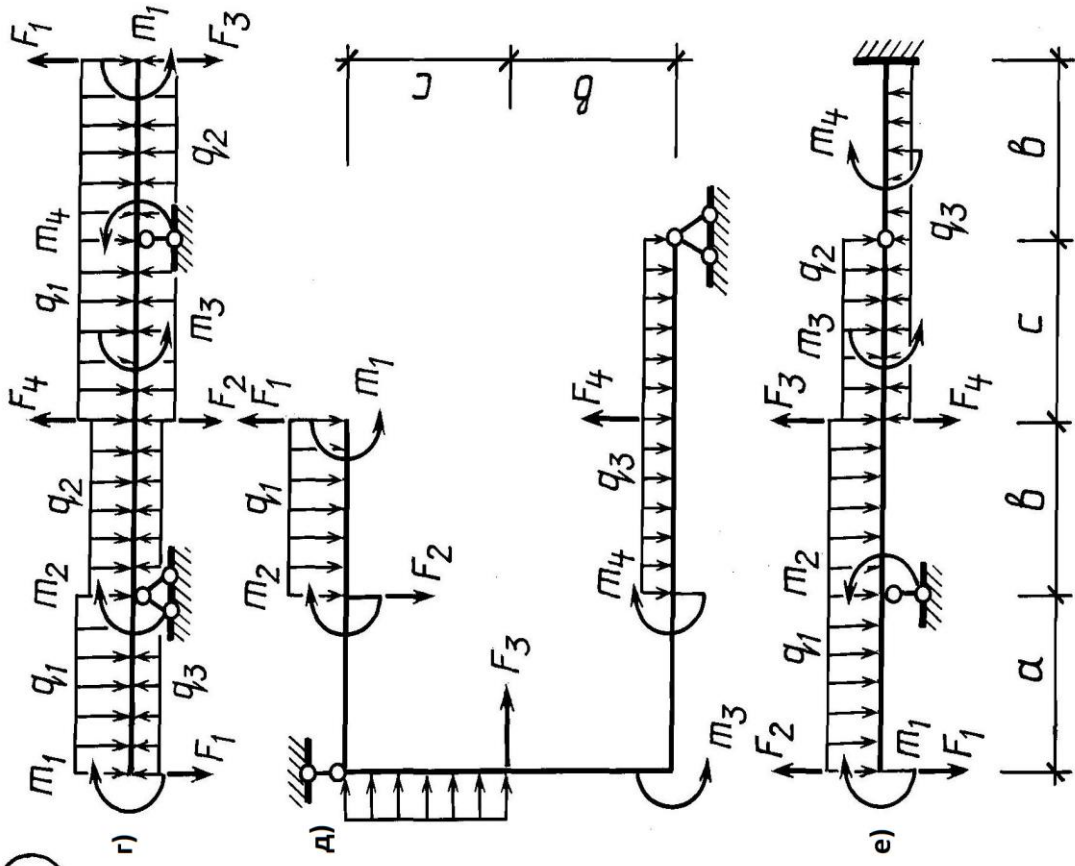
18



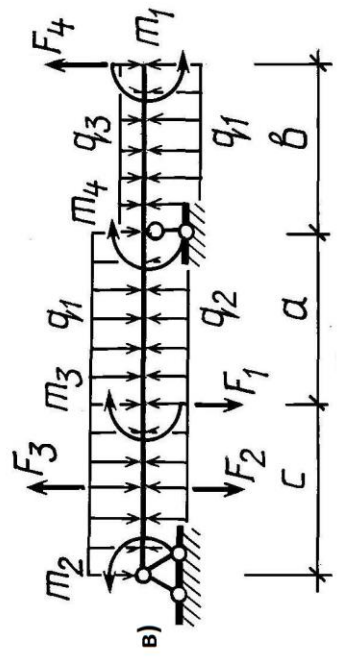
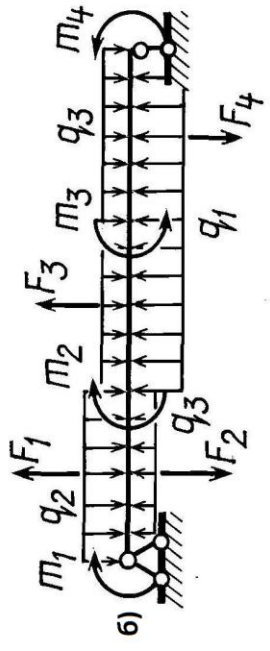
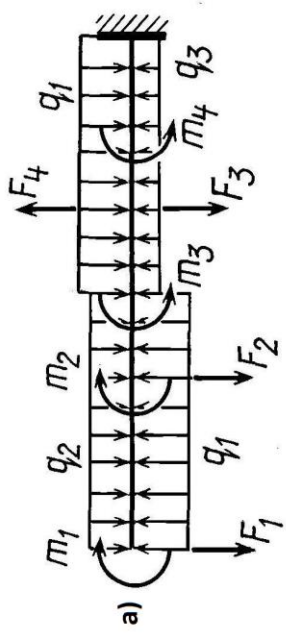
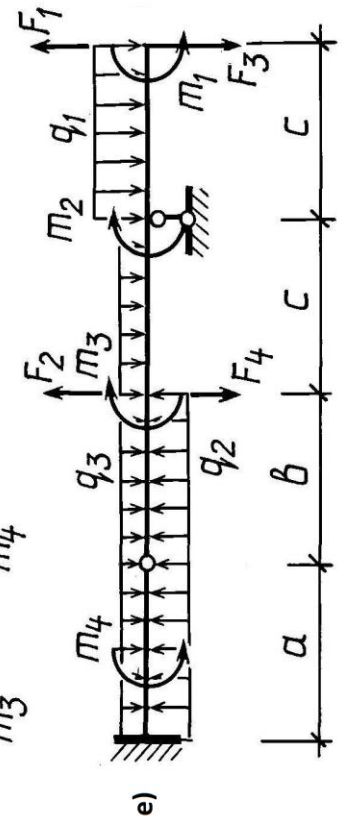
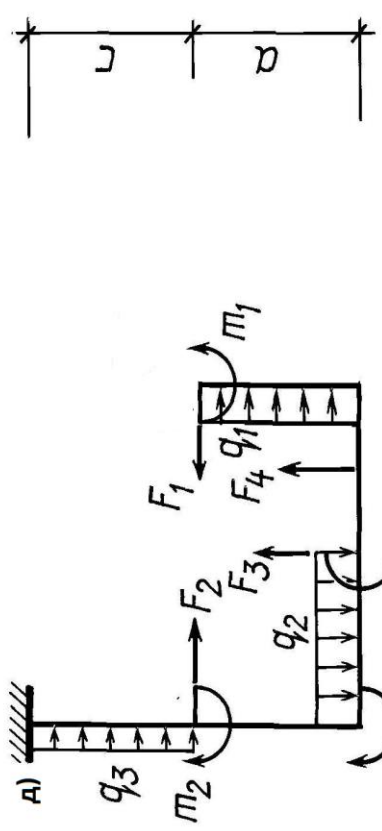
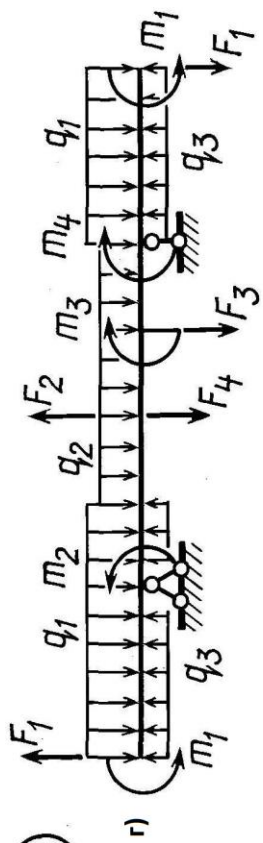
19



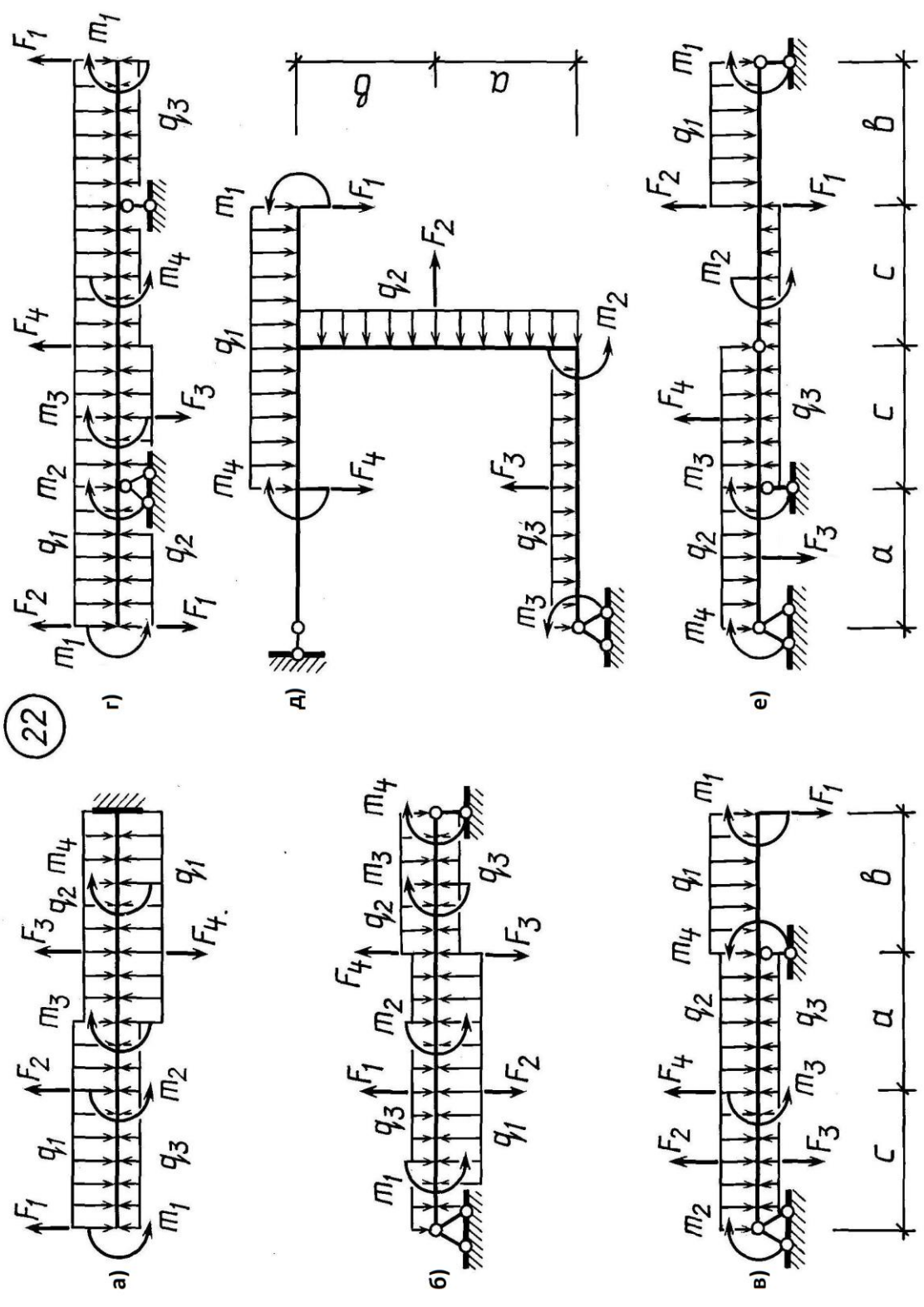
20



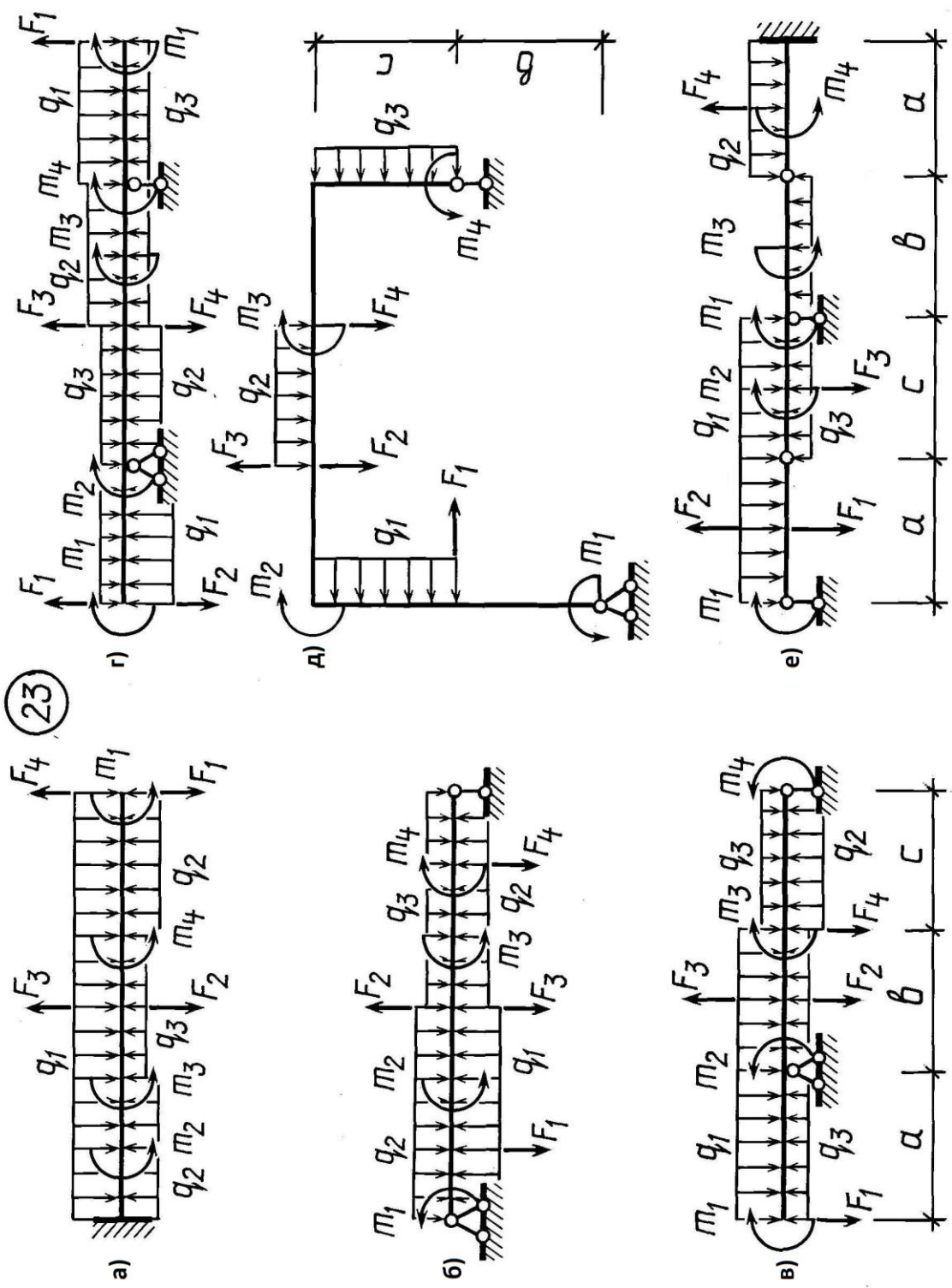
21



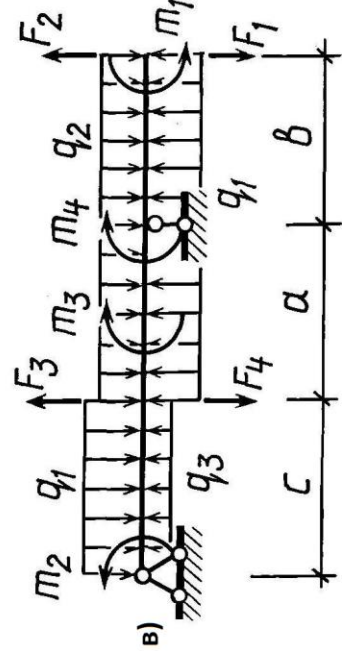
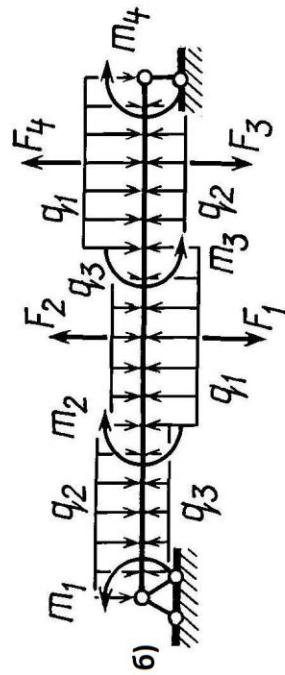
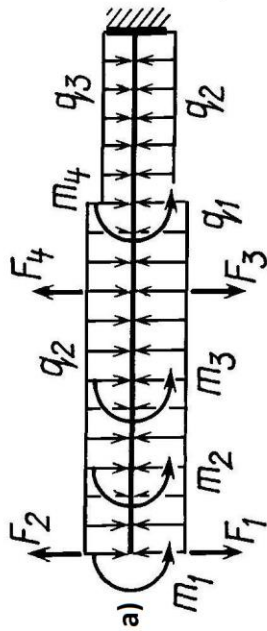
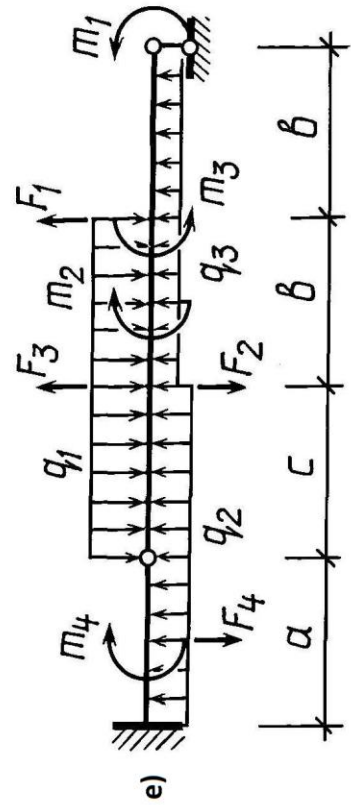
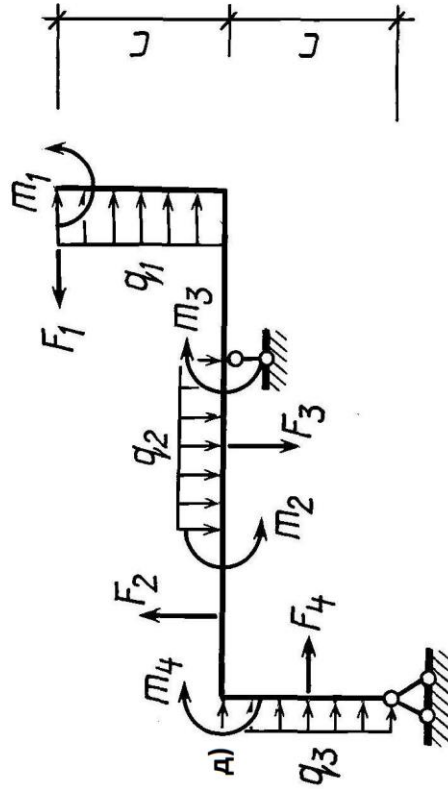
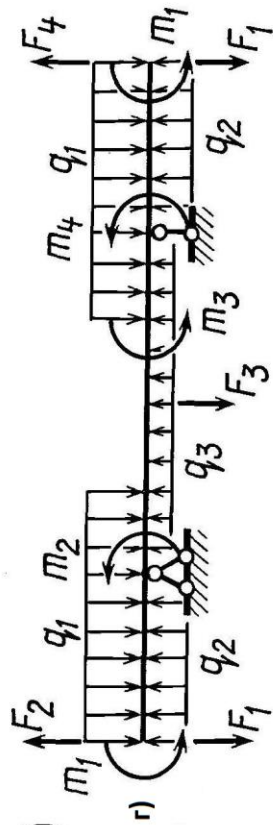
22



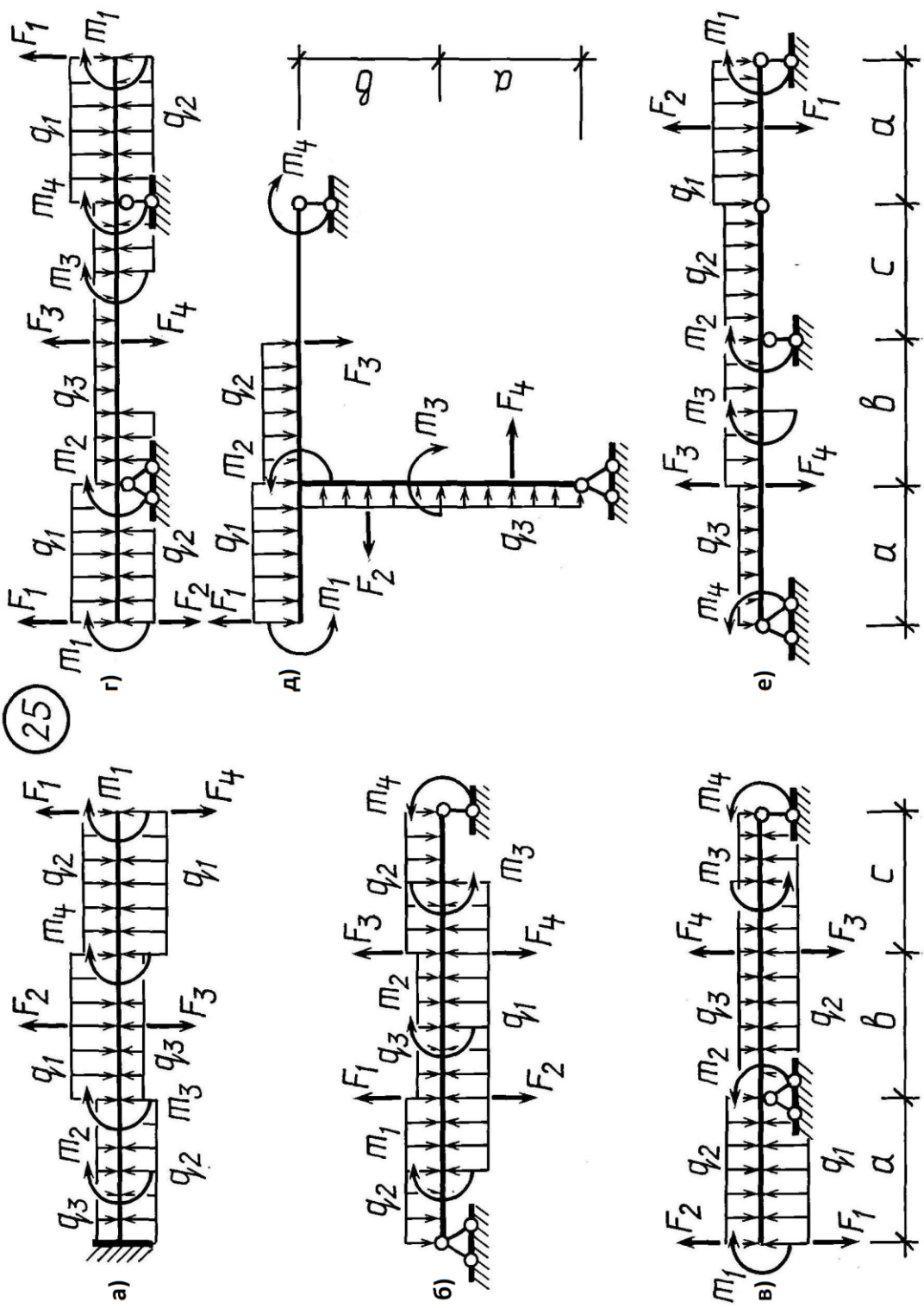
23



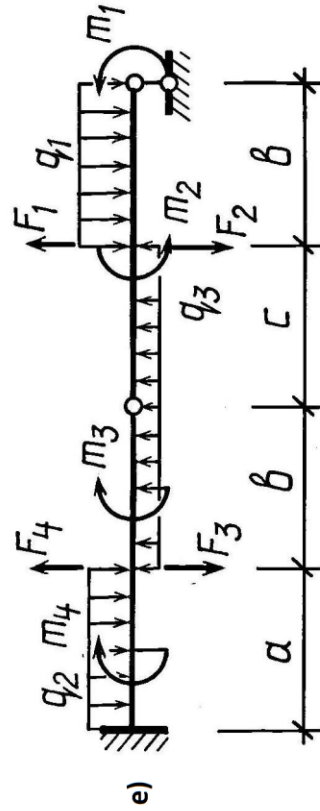
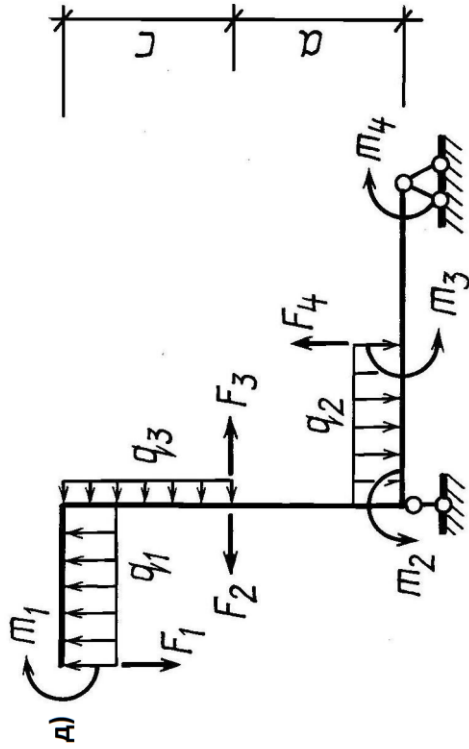
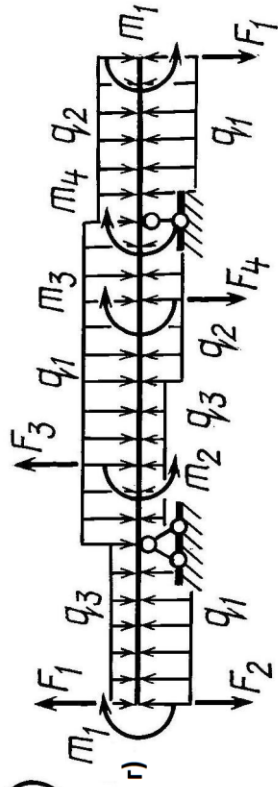
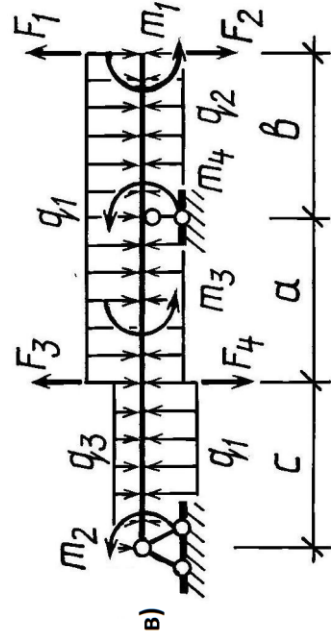
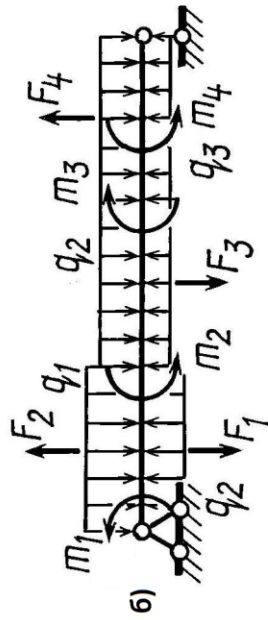
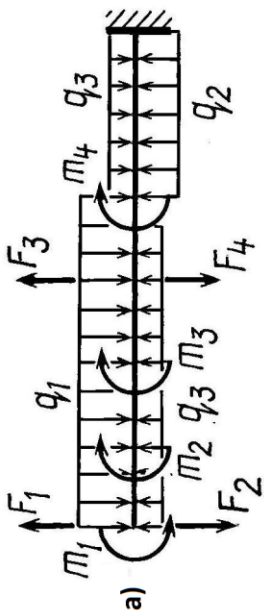
24



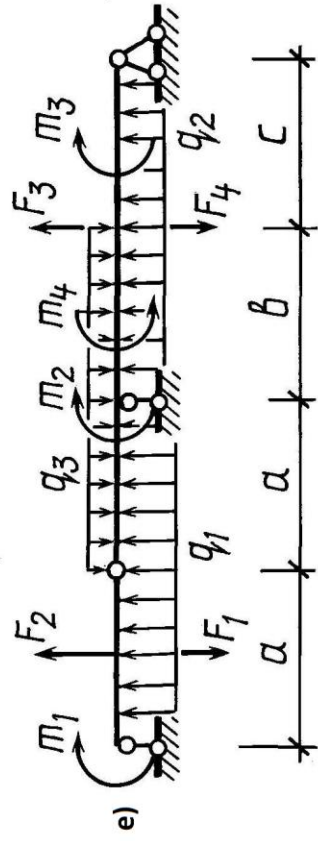
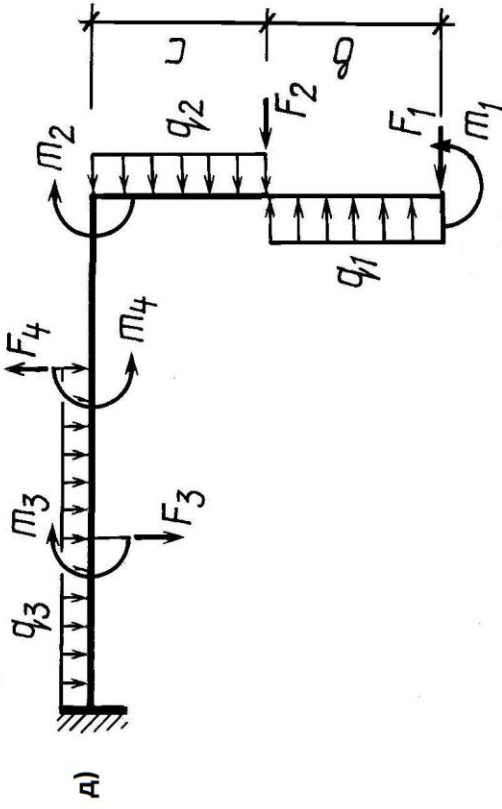
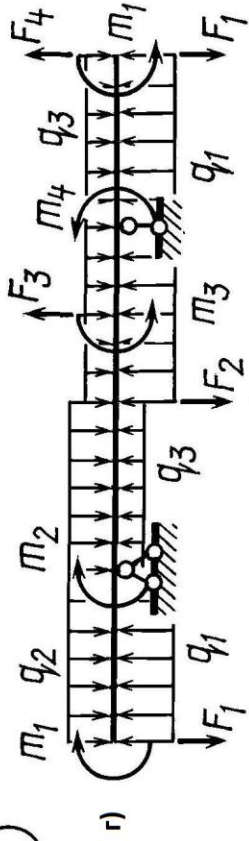
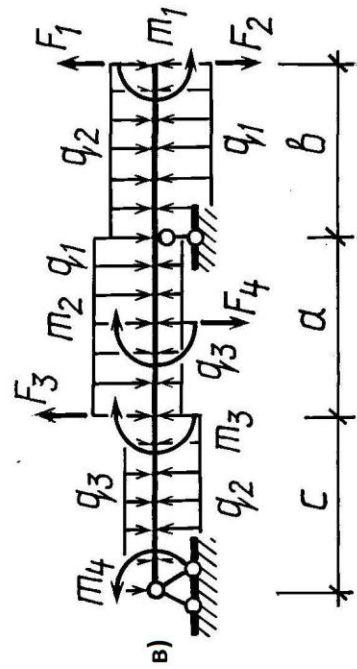
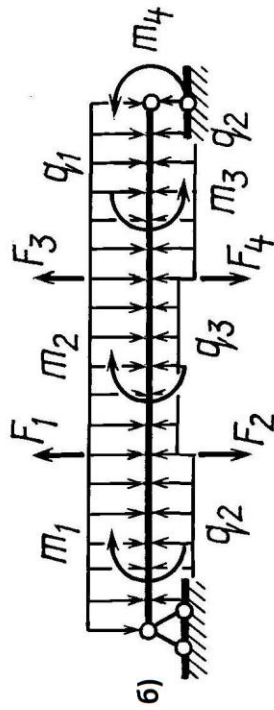
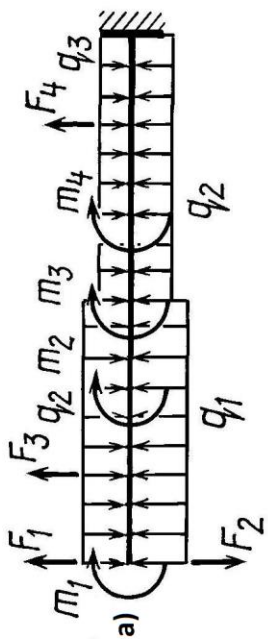
25



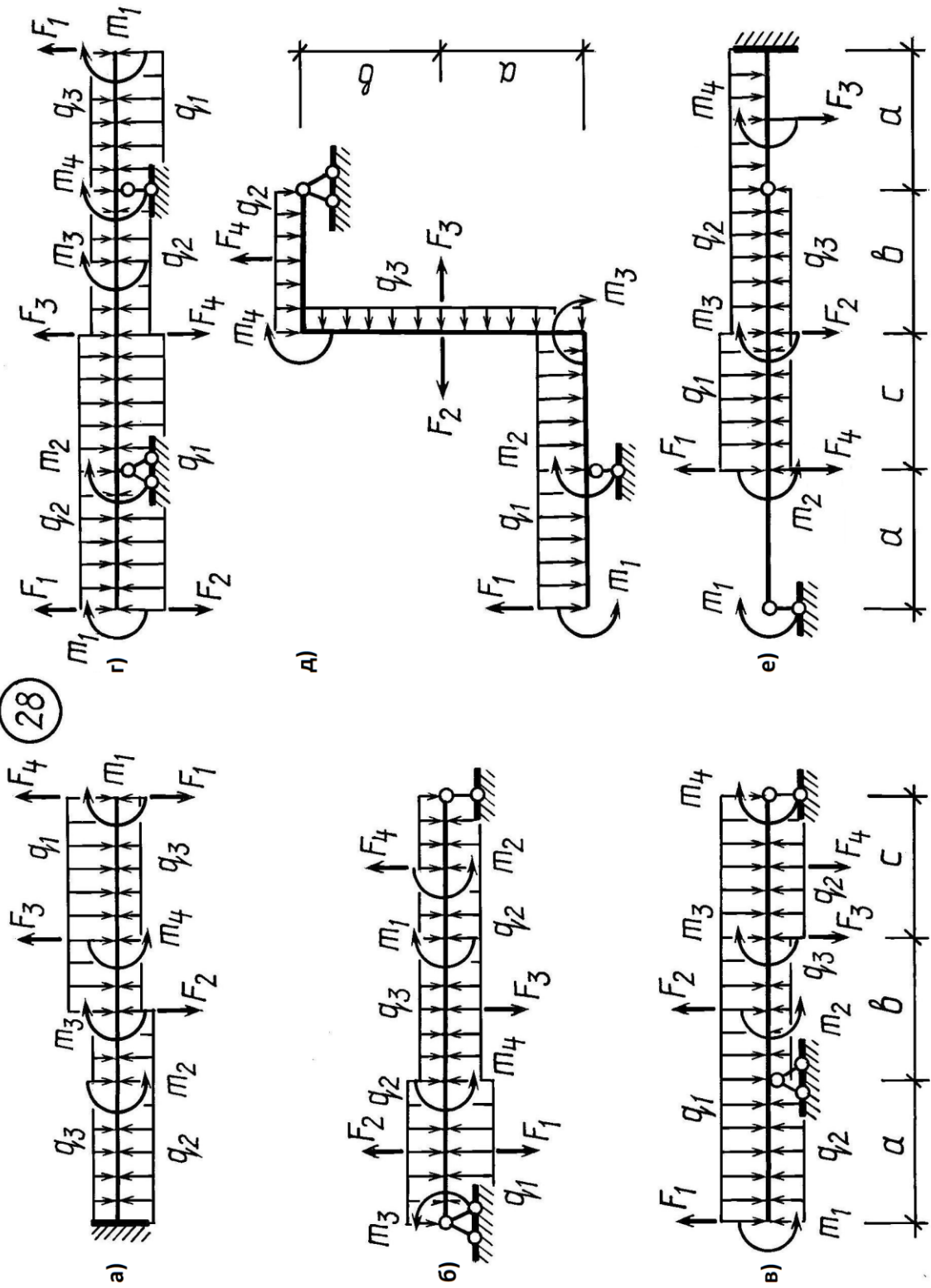
26



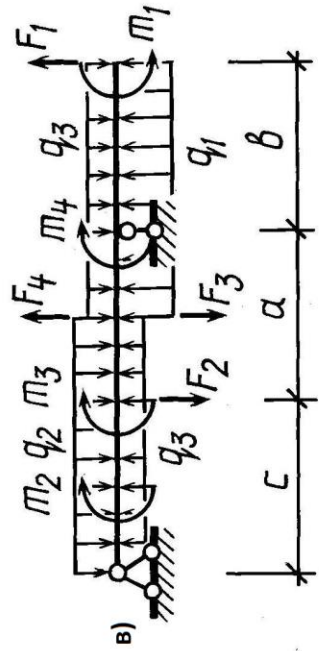
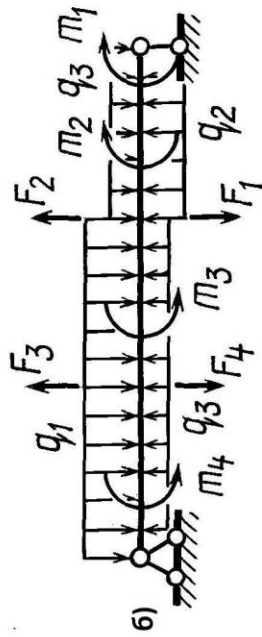
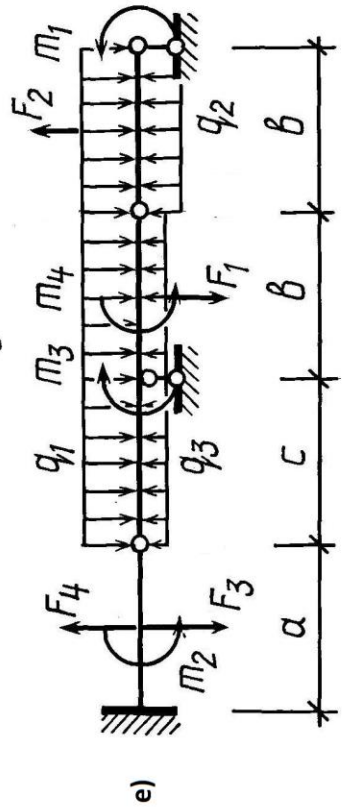
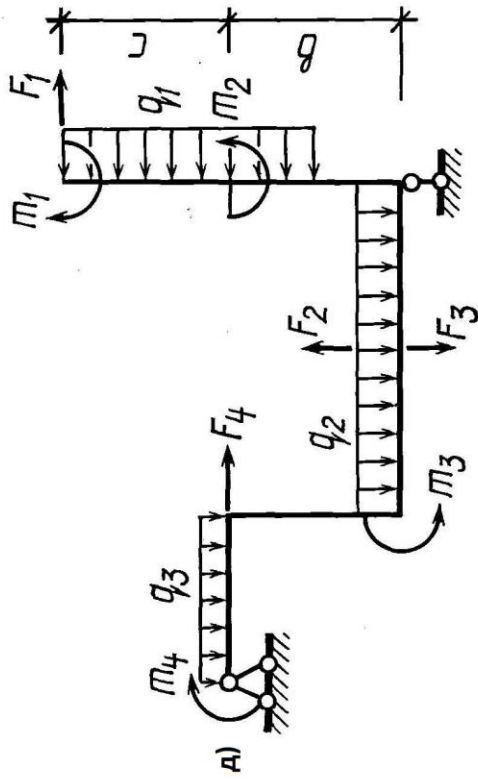
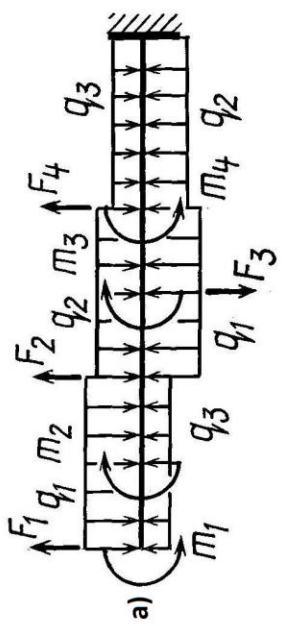
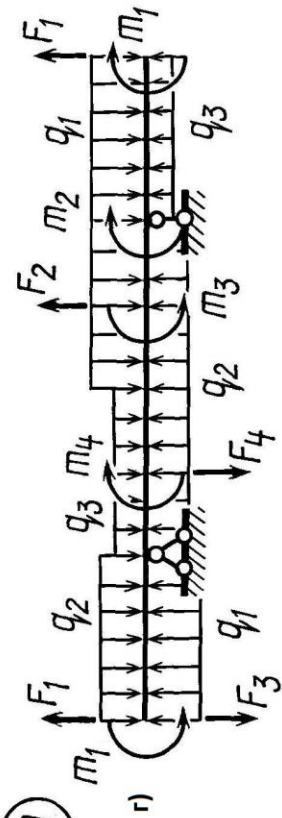
27



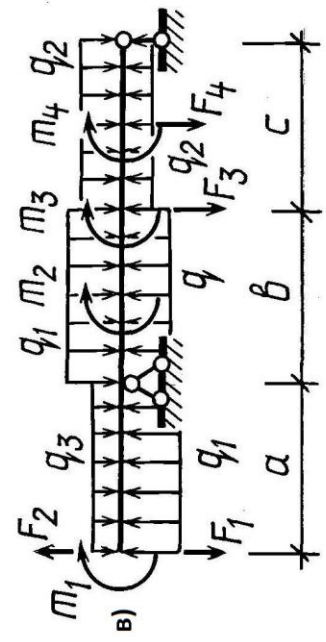
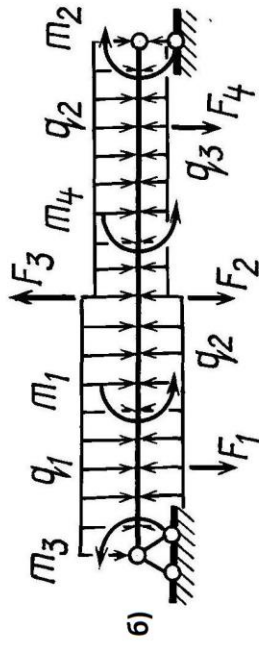
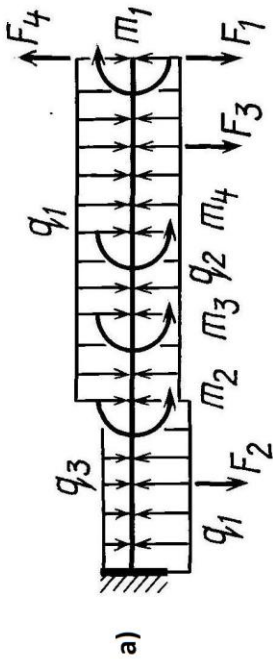
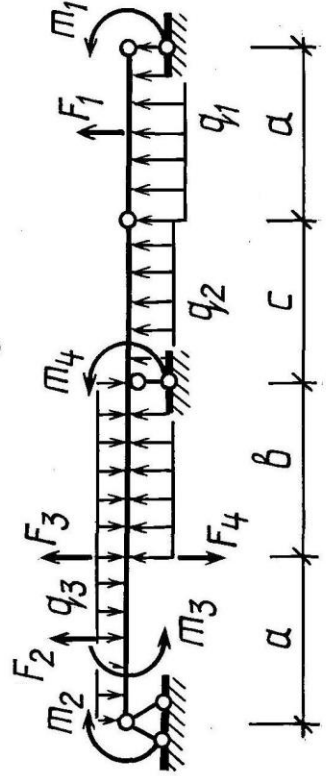
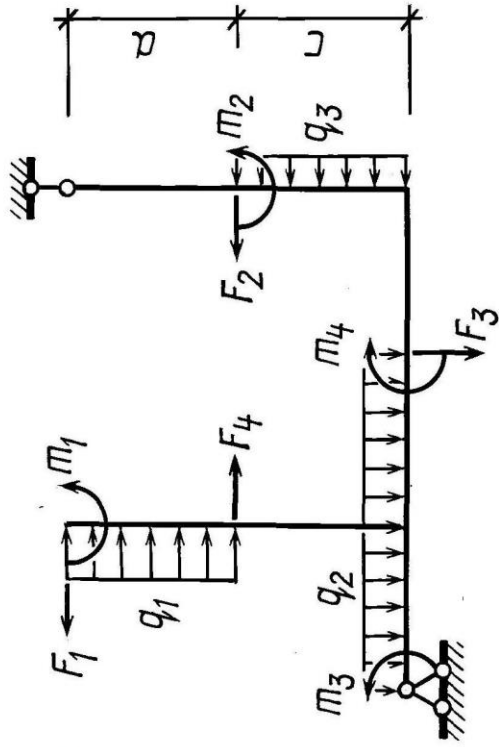
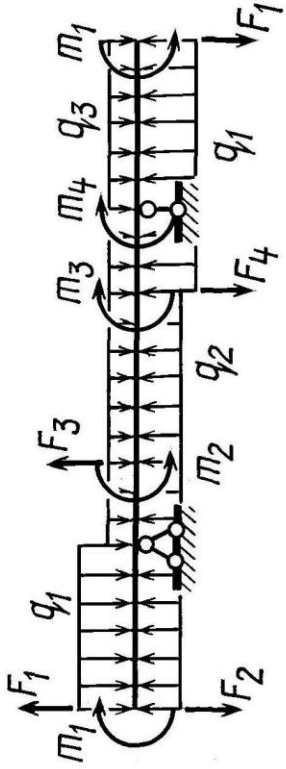
28



29



30



Задача 4.9.

Балка нагружена расчетной нагрузкой. Материал балки – сталь с допускаемыми напряжениями $[\sigma] = 210$ МПа; $[\tau] = 130$ МПа и модулем продольной упругости $E = 200$ ГПа.

Требуется:

1) подобрать сечение балки двутаврового профиля и проверить прочность с учетом собственного веса;

2) в одном из сечений балки, имеющем одновременно большие значения поперечной силы Q и изгибающего момента M , определить напряжения σ и τ на уровне примыкания полки к стенке; проверить прочность, используя энергетическую теорию прочности; для сравнения выполнить проверку прочности по третьей теории прочности; выделить вокруг указанной точки элемент балки и показать на схеме нормальные, касательные и главные напряжения;

3) с использованием уравнений метода начальных параметров определить углы поворота сечений над опорами, прогибы посередине пролета и на конце консоли, построить эпюру прогибов балки.

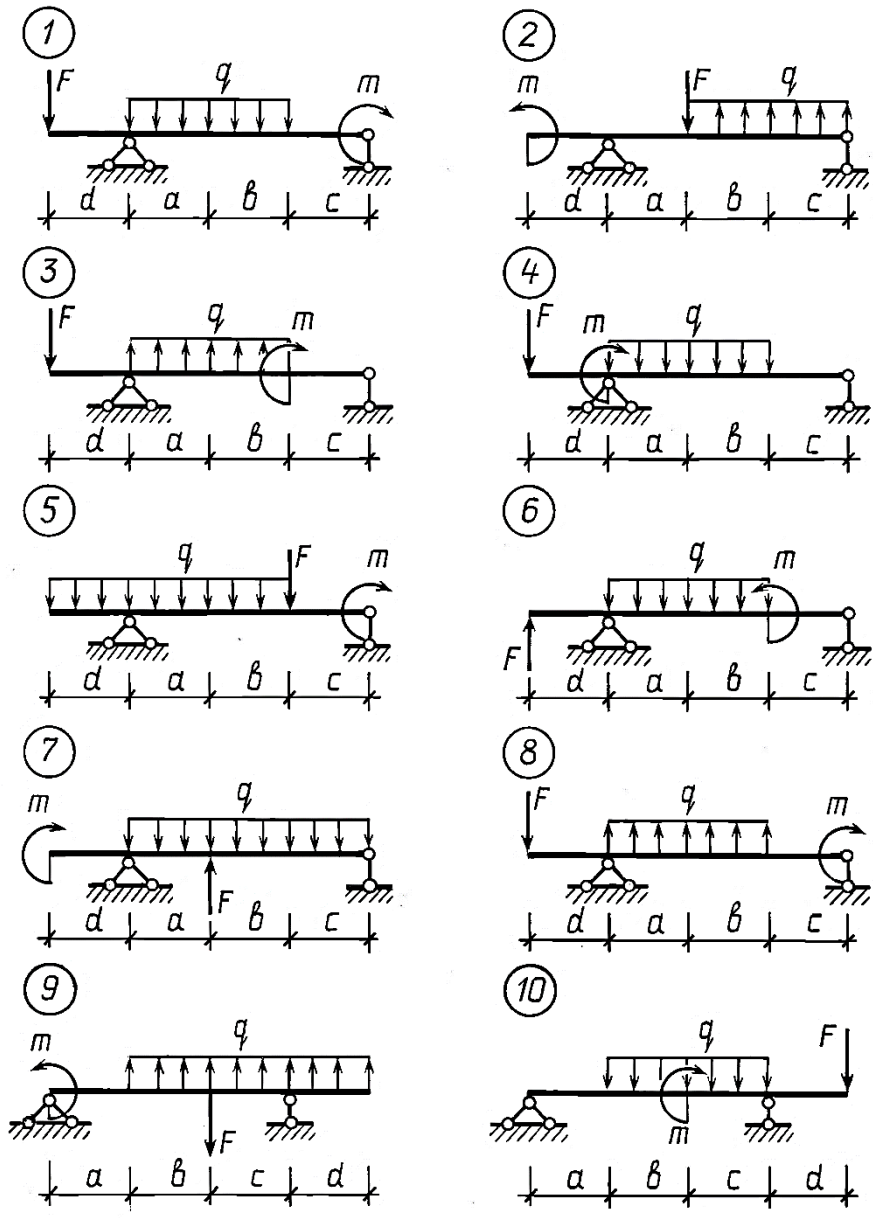
4) проверить жесткость балки при допустимом относительном прогибе:

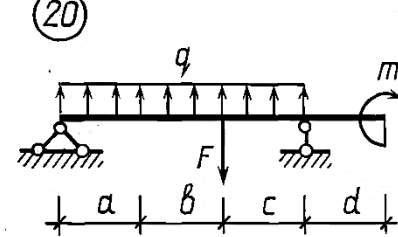
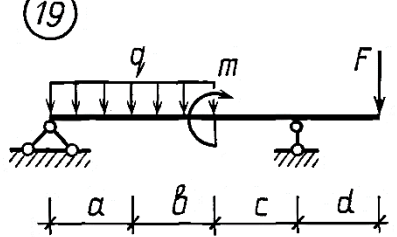
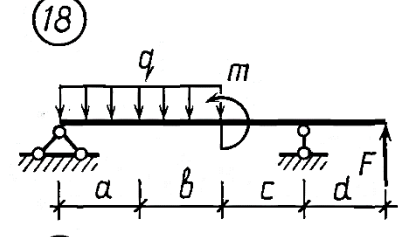
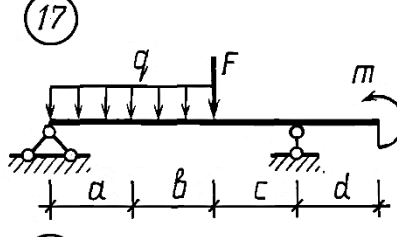
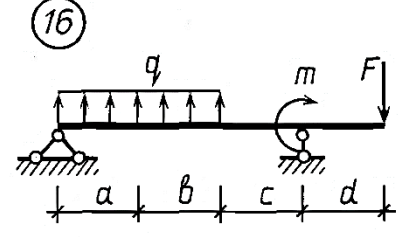
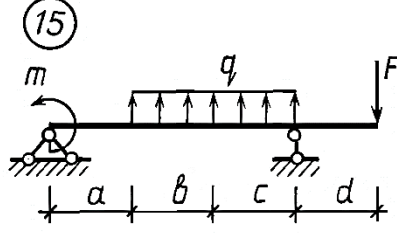
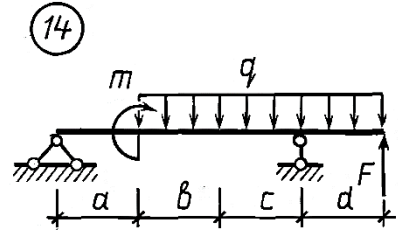
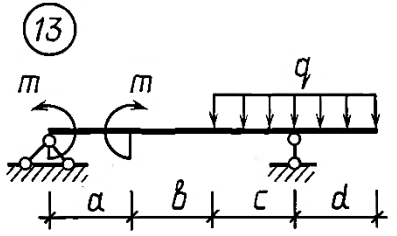
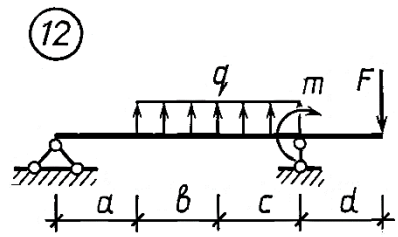
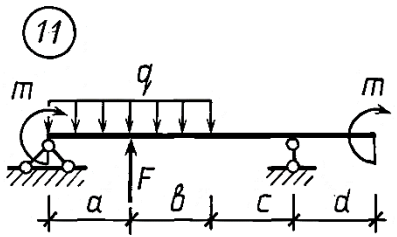
$$\frac{y_{\max}}{l} = \frac{1}{200}.$$

Данные взять из таблицы 4.9.

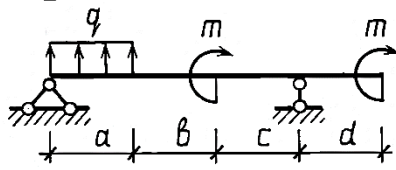
Таблица 4.9

№ строки	Размеры, м				Нагрузки		
	a	b	c	d	F, кН	q, кН/м	m, кН·м
1	2,0	1,0	4,0	1,0	10	16	34
2	2,0	3,0	2,0	2,0	24	12	16
3	2,0	4,0	3,0	2,0	10	22	20
4	4,0	3,0	2,0	2,0	20	20	26
5	2,0	3,0	2,0	2,0	22	18	20
6	4,0	2,0	3,0	1,0	24	10	20
7	2,0	3,0	4,0	2,0	18	20	10
8	4,0	3,0	3,0	2,0	16	18	22
9	3,0	2,0	4,0	2,0	28	18	10
10	3,0	4,0	2,0	2,0	12	14	16

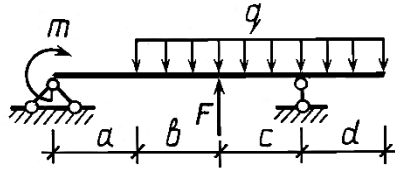




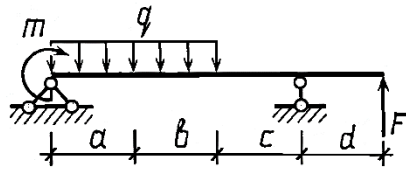
21



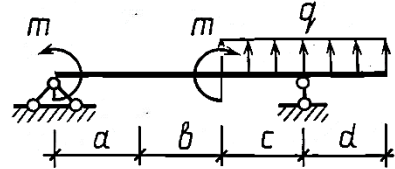
22



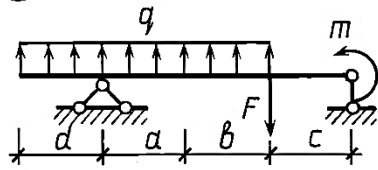
23



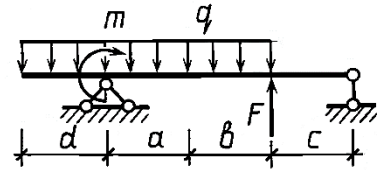
24



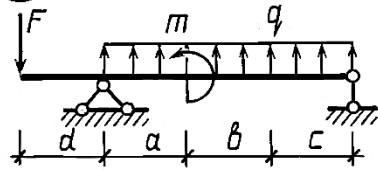
25



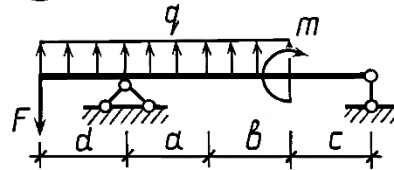
26



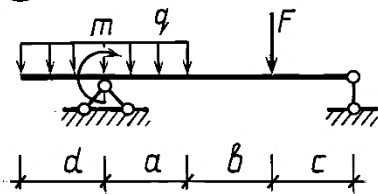
27



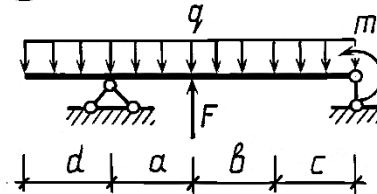
28



29



30



Задача 4.10.

Неразрезная балка нагружена расчетной нагрузкой. Материал балки – сталь с допускаемыми напряжениями $[\sigma] = 210 \text{ МПа}$; $[\tau] = 130 \text{ МПа}$ и модулем продольной упругости $E = 200 \text{ ГПа}$.

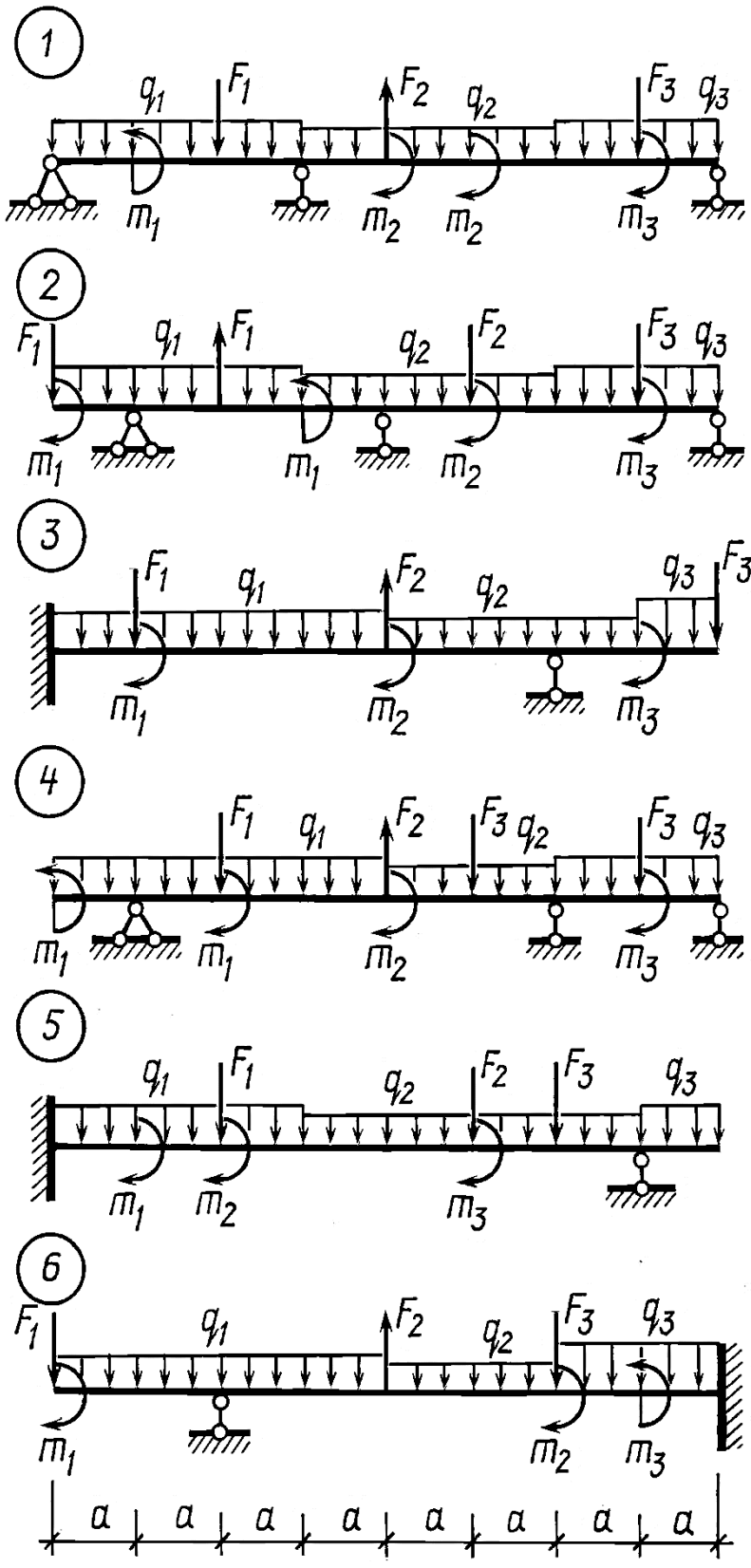
Требуется:

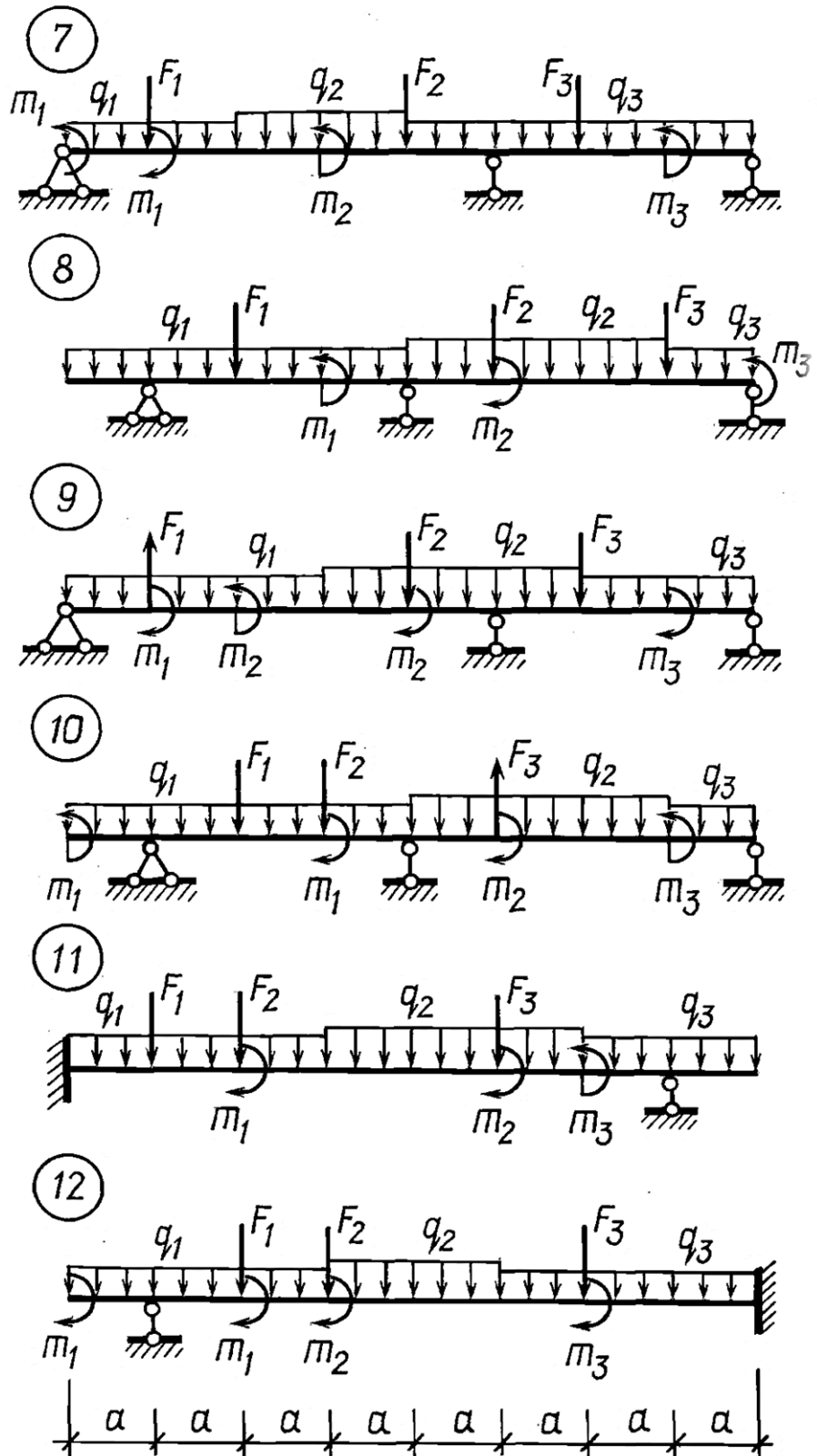
- 1) построить эпюру поперечных сил и изгибающих моментов;
- 2) подобрать сечение из прокатного двутавра;
- 3) определить прогибы на концах и посередине каждого пролета балки и показать очертание ее изогнутой оси (использовать любой из известных методов определения прогибов).

Данные взять из таблицы 4.10.

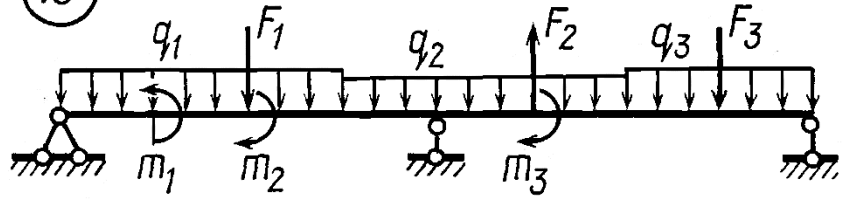
Таблица 4.10

№ п/п	Размеры	Нагрузки			Индекс нагрузки		
	a	q	F	m	q	F	m
	м	кН/м	кН	кН·м			
1	1,0	10	30	26	1	2	3,1
2	1,4	12	48	28	2	3	1
3	1,2	22	16	26	3	2	1
4	1,8	16	40	34	1,3	3,2	2
5	1,6	24	30	28	2	1,2	3
6	2,0	18	42	34	1,2	2	3
7	1,2	16	28	26	3	1	1,2
8	1,0	24	40	36	2	3,1	2
9	1,6	16	48	40	3	1,2	3
10	1,4	20	36	28	1	3	2,1

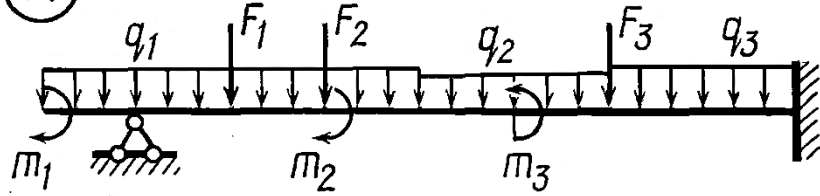




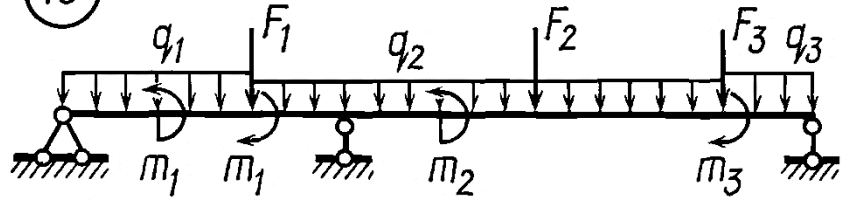
13



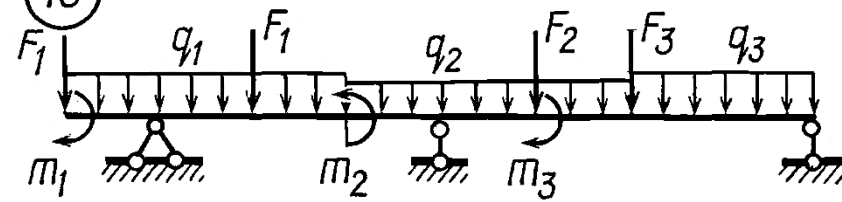
14



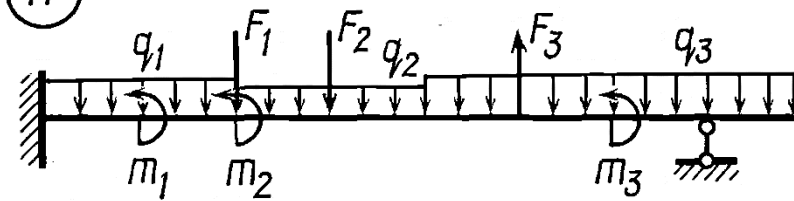
15



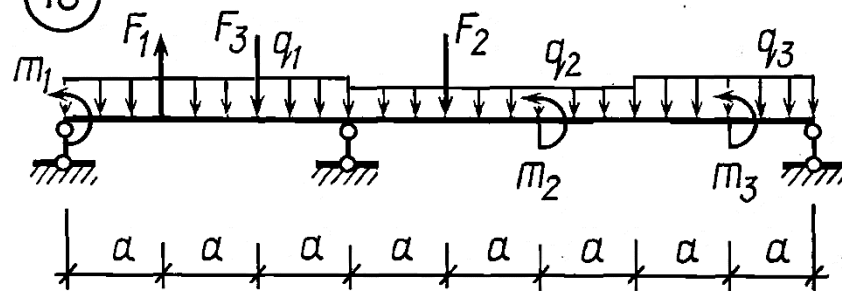
16

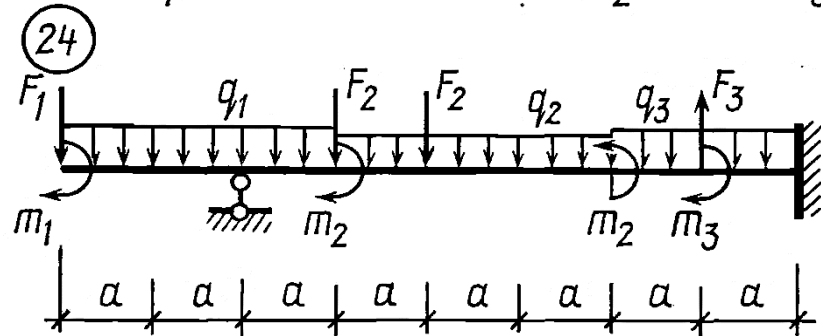
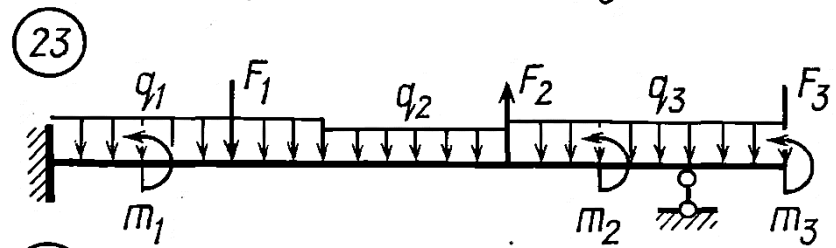
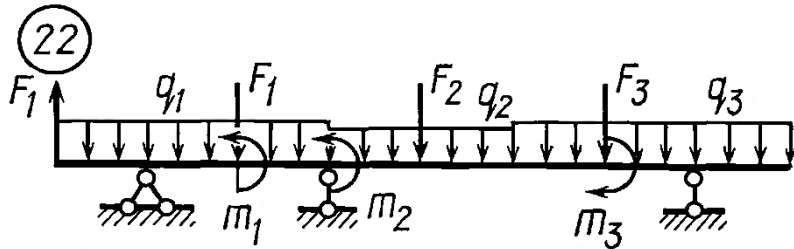
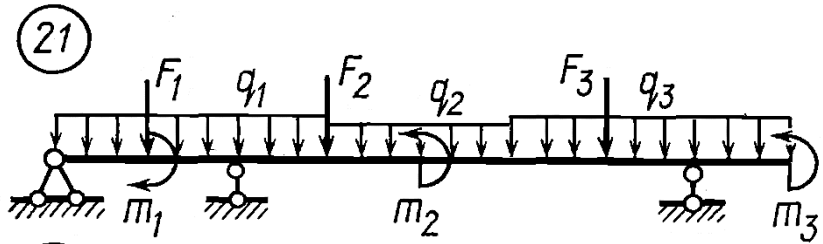
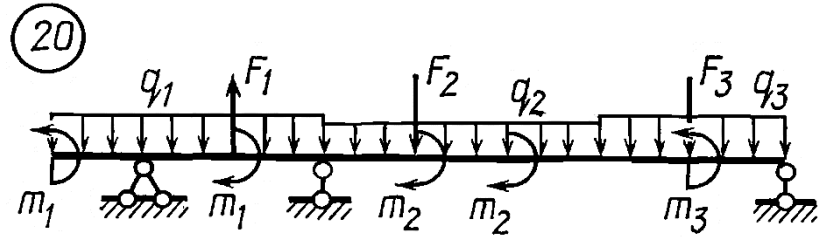
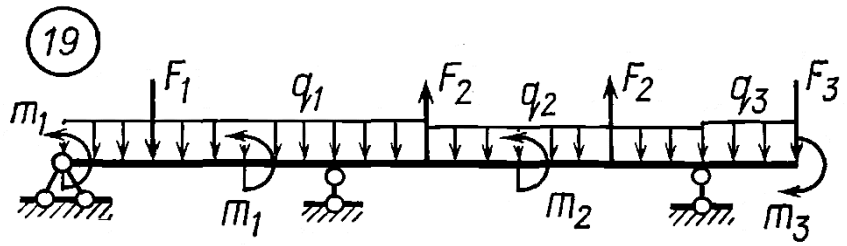


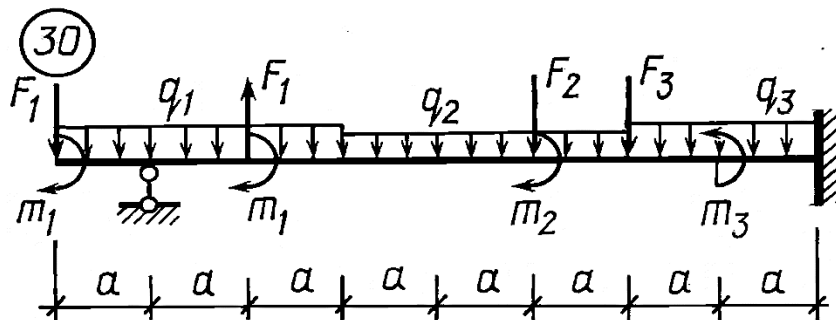
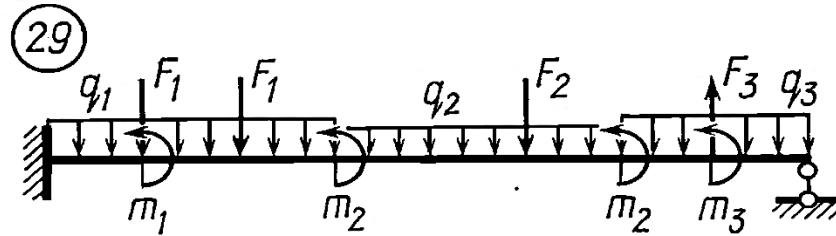
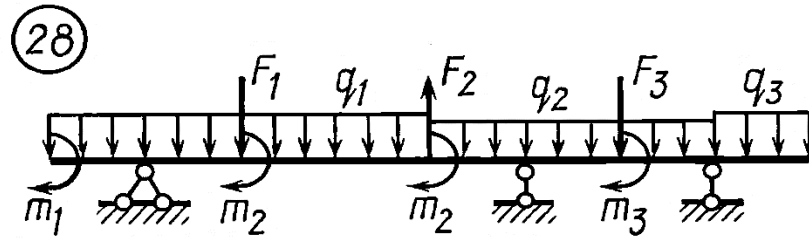
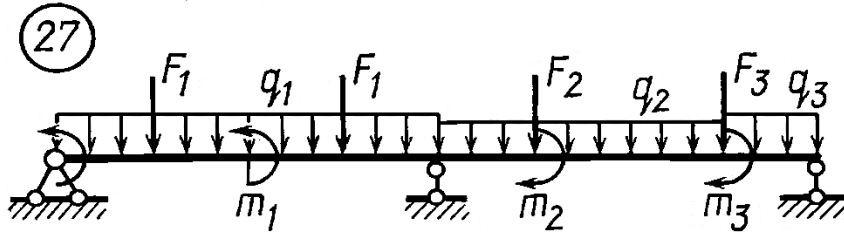
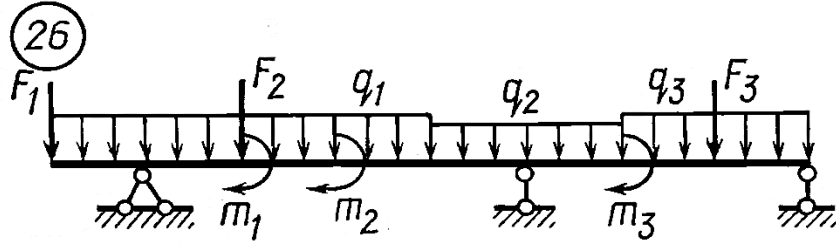
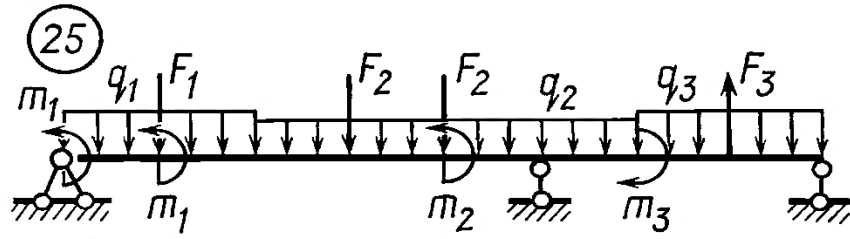
17



18







Задача 4.11.

Колонна заданного поперечного сечения сжимается расчетной силой F , направленной параллельно продольной оси и приложенной к точке, показанной на сечении.

Допускаемые напряжения для материала колонны:

на растяжение $[\sigma] = 210$ МПа ; на сжатие $[\sigma]_{сж} = 130$ МПа .

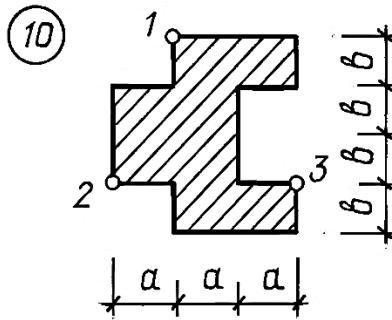
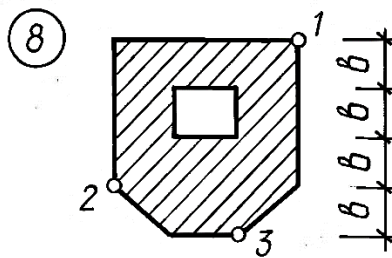
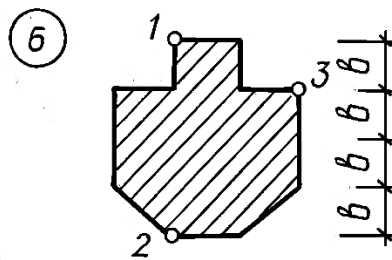
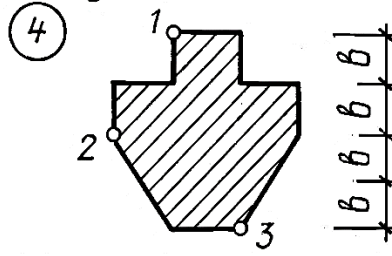
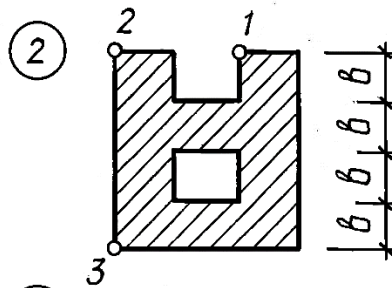
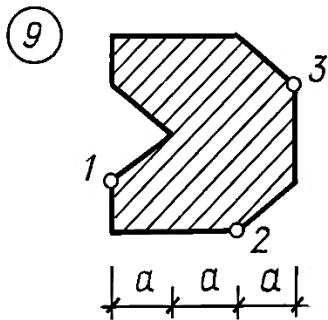
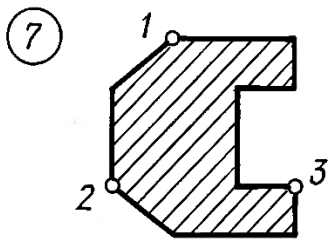
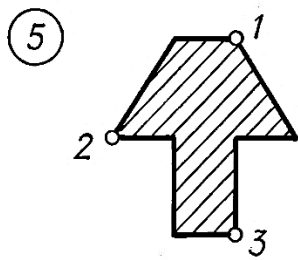
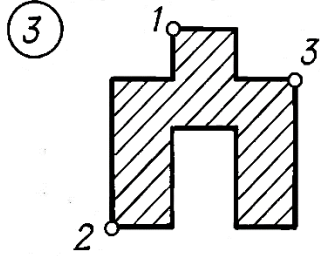
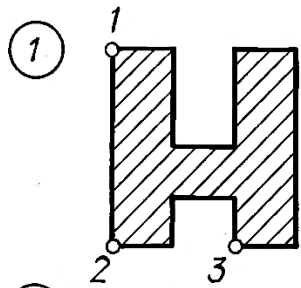
Требуется:

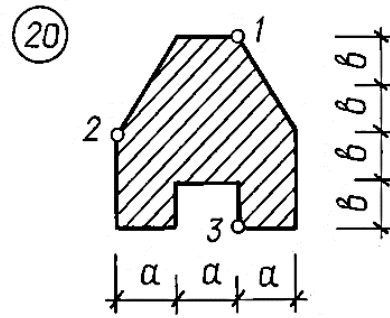
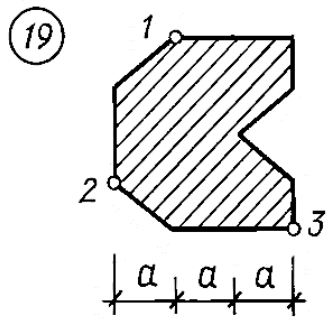
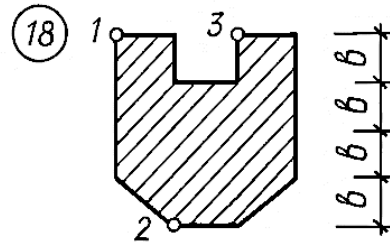
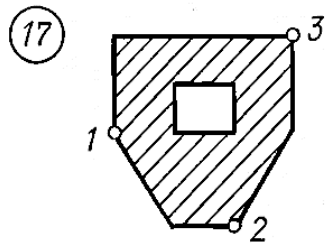
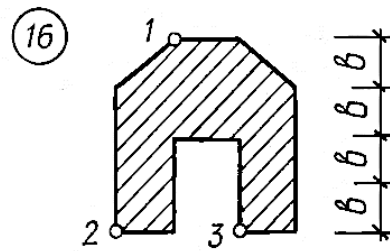
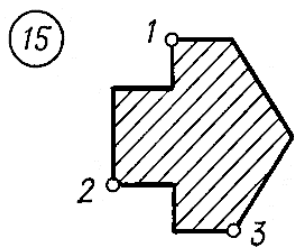
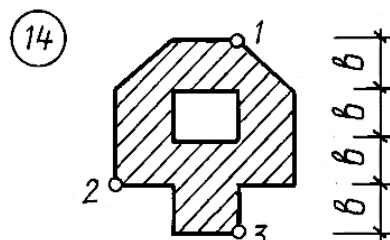
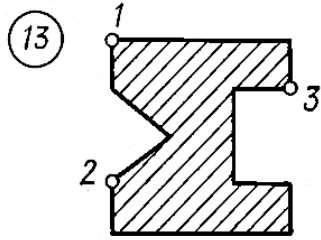
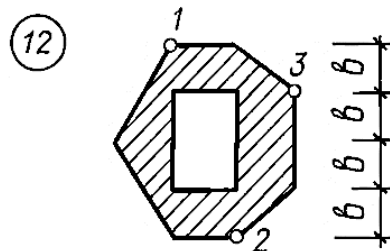
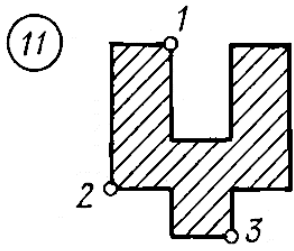
- 1) найти положение нейтральной (нулевой) линии;
- 2) вычислить наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения, построить эпюру напряжений, дать заключение о прочности колонны;
- 3) построить ядро сечения.

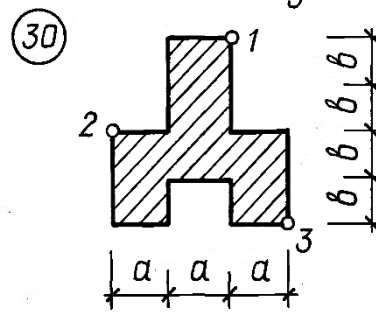
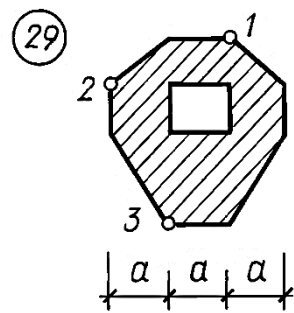
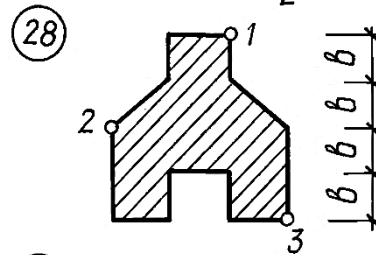
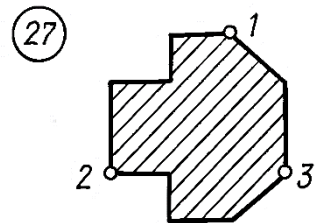
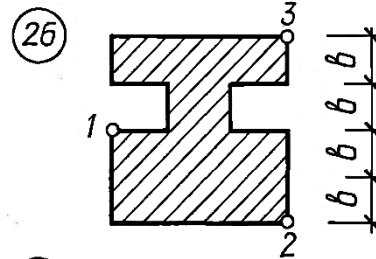
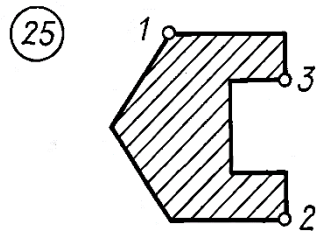
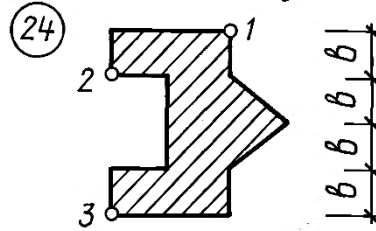
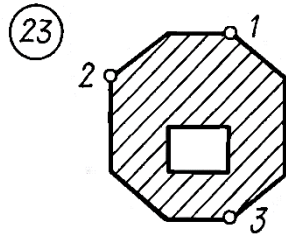
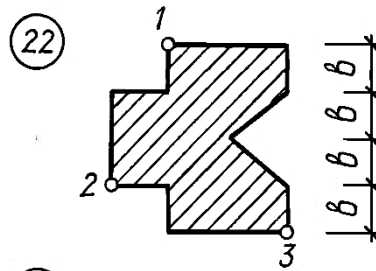
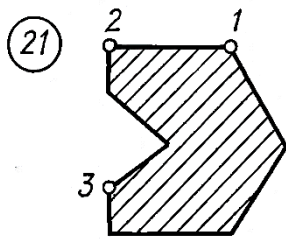
Данные взять из таблицы 4.11.

Таблица 4.11.

№ п/п	Нагрузка F , кН	Размеры сечения, см		Точка приложения силы
		a	b	
1	100	20	14	3
2	280	26	12	1
3	440	36	22	2
4	120	22	18	2
5	300	30	24	3
6	460	30	28	1
7	140	26	24	3
8	320	24	28	1
9	480	42	28	2
10	220	24	18	3







Задача 4.12.

Балка нагружена в главных плоскостях расчетной нагрузкой. Материал балки – сталь с допускаемым напряжением $[\sigma] = 210$ МПа .

Требуется:

1) построить эпюры изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях;

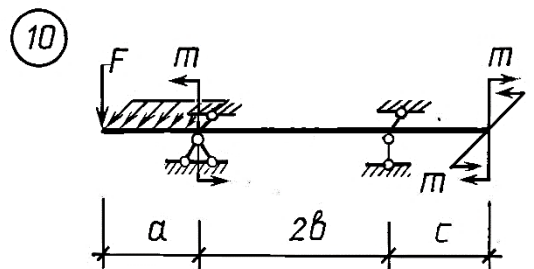
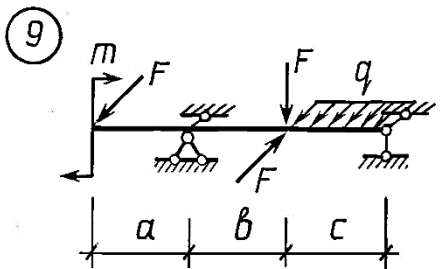
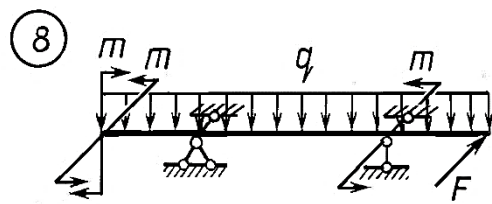
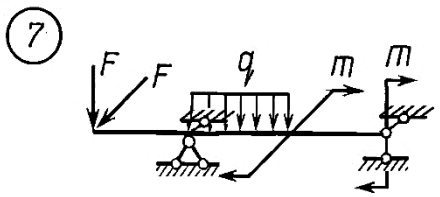
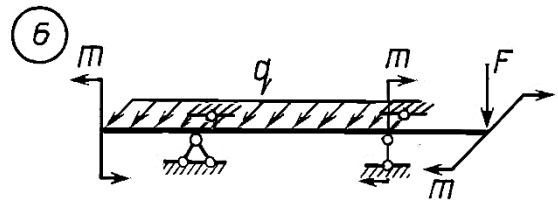
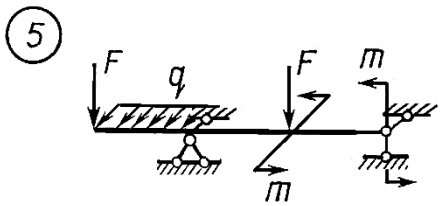
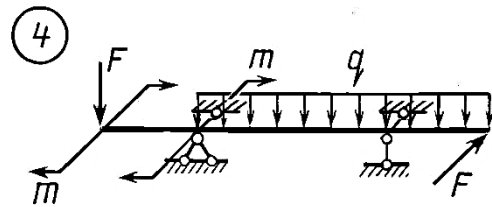
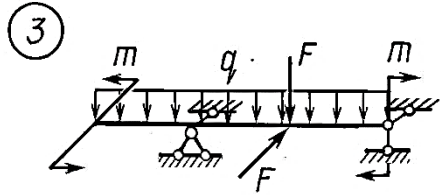
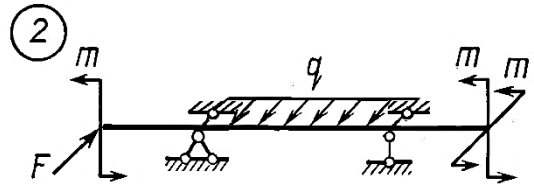
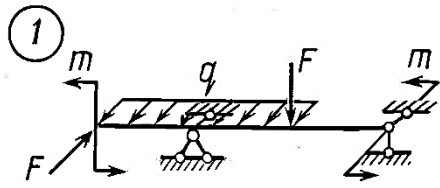
2) определить опасное сечение и подобрать двутавр, приняв $W_x / W_y \approx 8$;

3) определить положение нейтральной оси в одном сечении и построить эпюру нормальных напряжений.

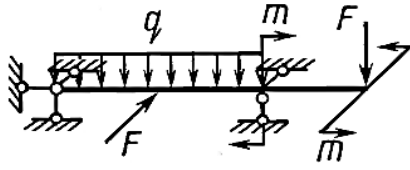
Данные взять из таблицы 4.12.

Таблица 4.12

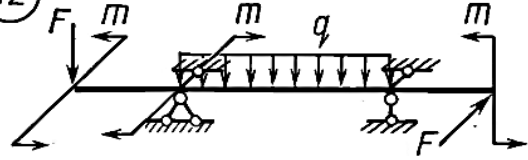
№ п/п	a, м	b, м	c, м	F, кН	q, кН/м	m, кН·м
1	3	2	1	8	10	12
2	2	3	2	12	8	10
3	2	1	2	10	4	6
4	1	2	3	14	10	8
5	2	3	2	6	8	12
6	2	3	3	16	6	10
7	2	2	3	12	10	6
8	2	3	2	8	6	14
9	2	4	2	14	12	18
10	2	3	1	12	6	14



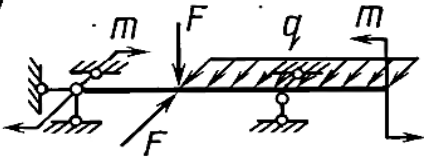
11



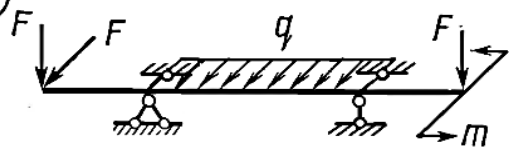
12



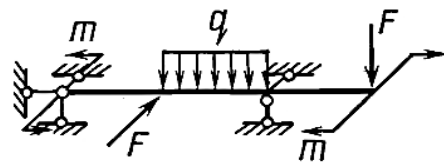
13



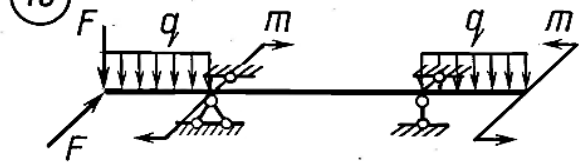
14



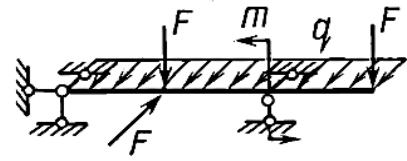
15



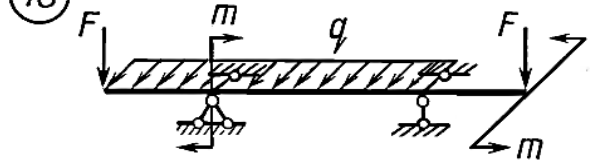
16



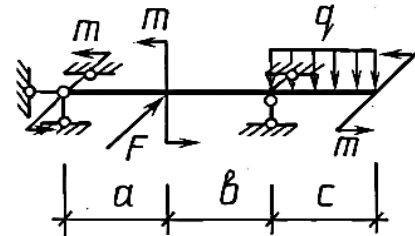
17



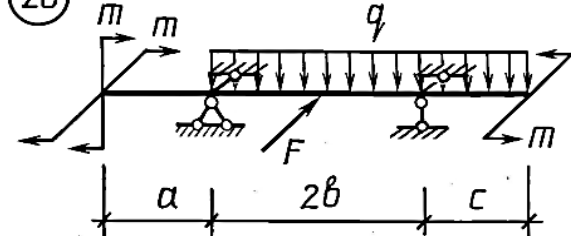
18

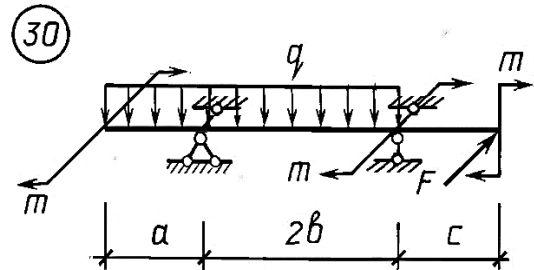
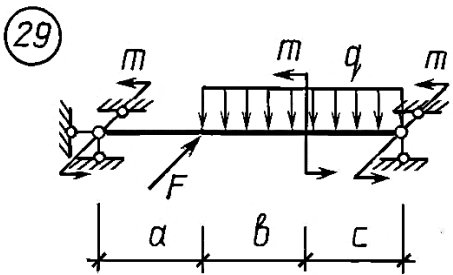
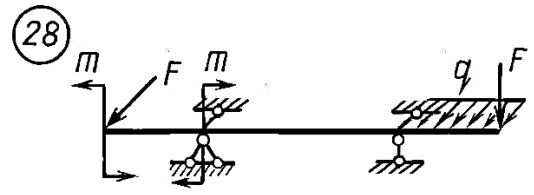
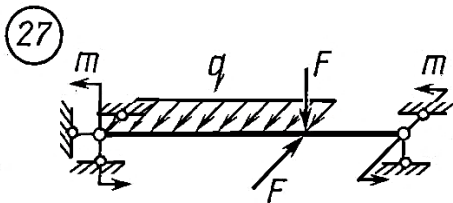
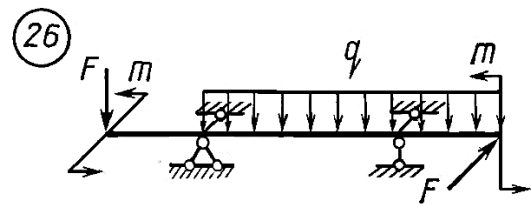
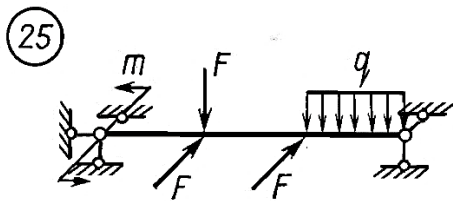
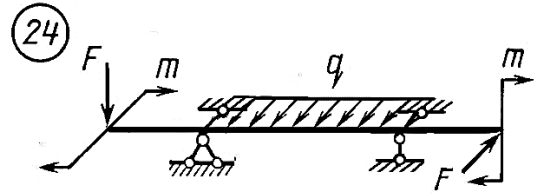
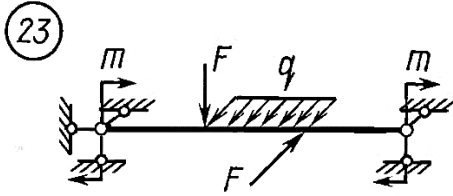
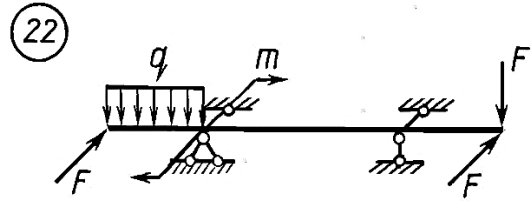
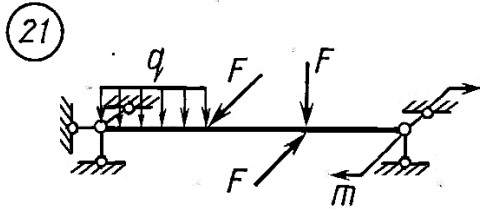


19



20





Задача 4.13.

Пространственная система, состоящая из трех стержней, жестко соединенных между собой под прямым углом, нагружена расчетной нагрузкой в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Стержни системы имеют одинаковые длины l и диаметры поперечных сечений D . Материал стержней – сталь допускаемыми напряжениями $[\sigma] = 200$ МПа, $[\tau] = 130$ МПа.

Требуется:

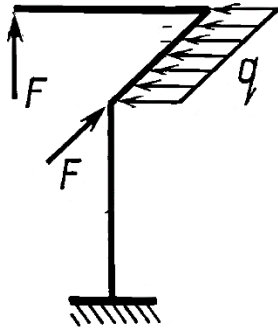
- 1) построить эпюры внутренних усилий;
- 2) установить вид сопротивления для каждого участка стержня;
- 3) определить опасное сечение и дать заключение о прочности конструкции.

Данные взять из таблицы 4.13.

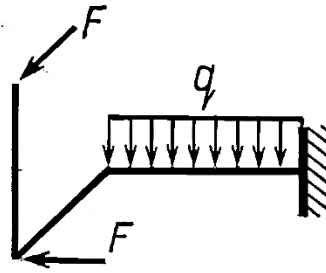
Таблица 4.13

№ п/п	F, кН	q, кН/м	m, кН·м	l, м	D, см
1	10	4	1	0,8	12
2	4	10	1	0,6	10
3	10	10	5	1,0	11
4	6	6	1	0,6	13
5	6	10	6	1,0	10
6	4	4	8	0,6	12
7	8	4	8	0,8	10
8	8	8	4	0,4	11
9	12	6	8	0,8	10
10	8	6	4	0,6	13

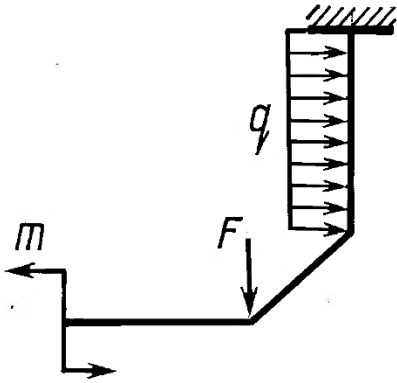
1



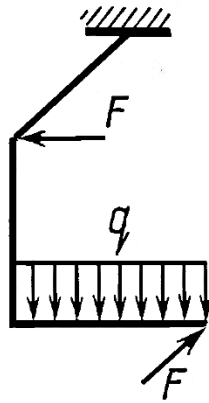
2



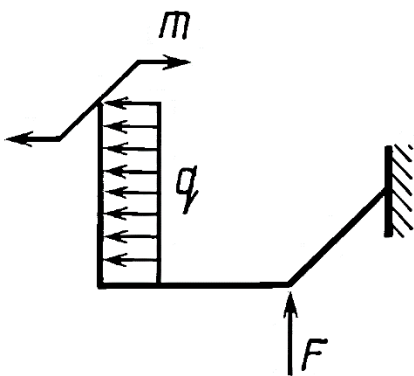
3



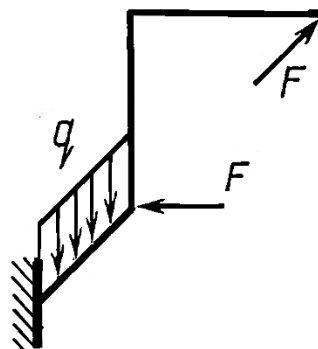
4



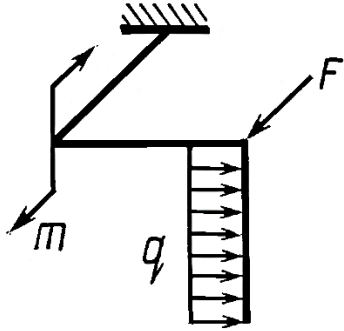
5



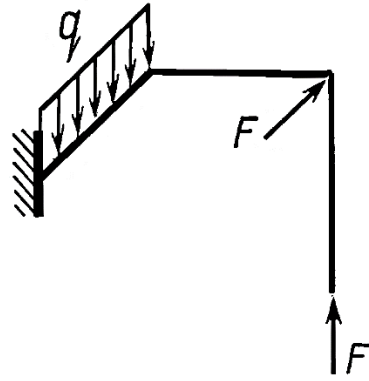
6



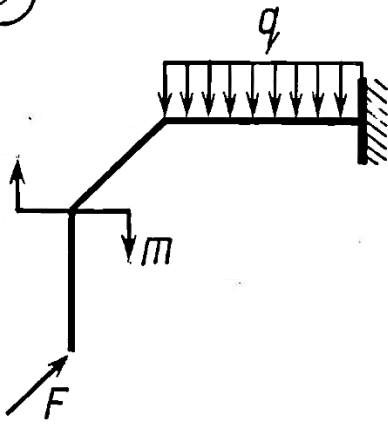
7



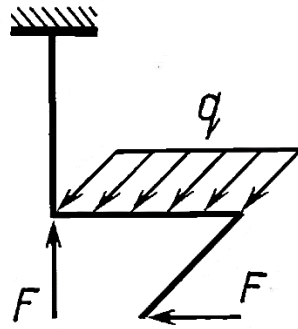
8



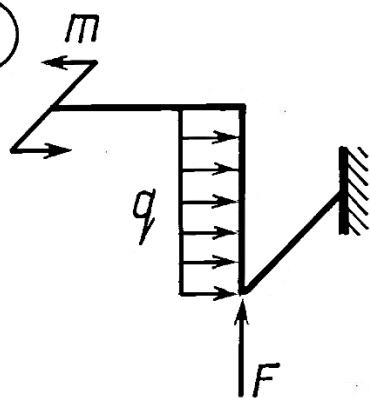
9



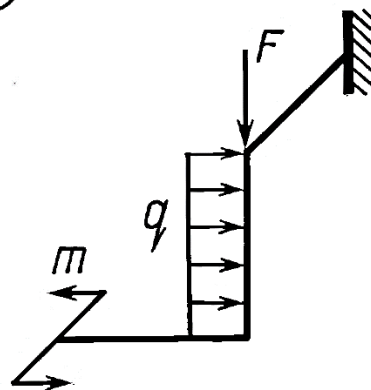
10

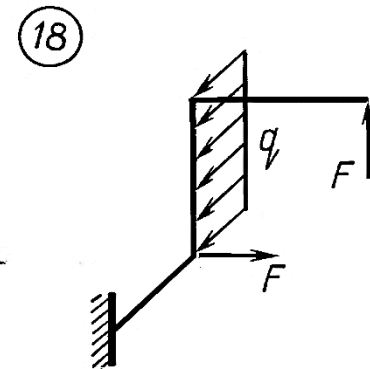
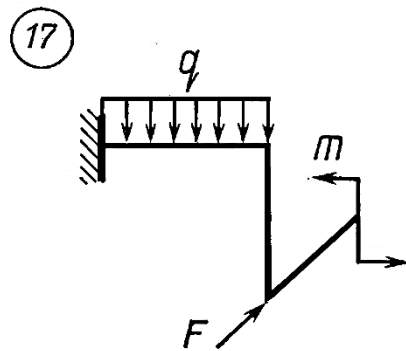
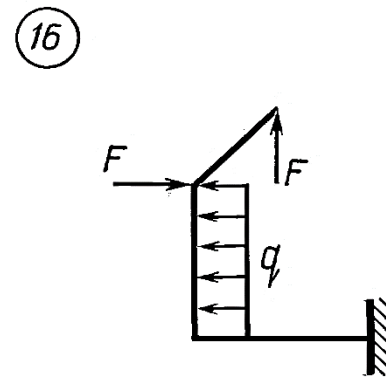
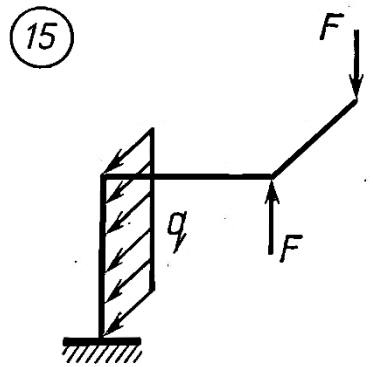
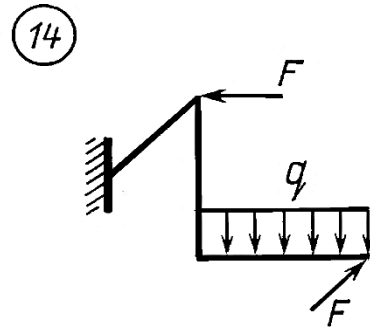
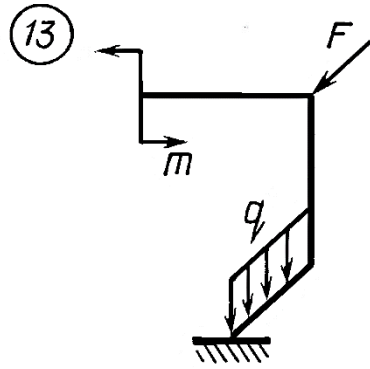


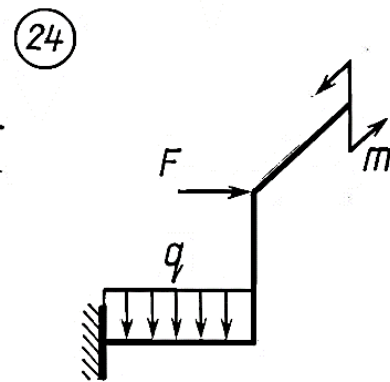
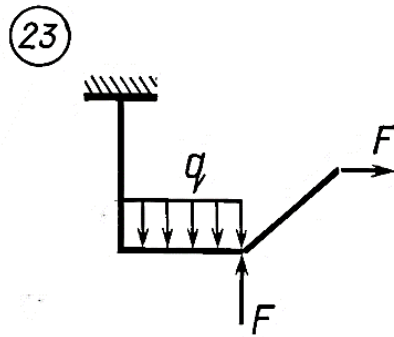
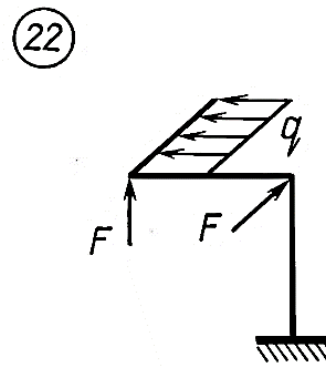
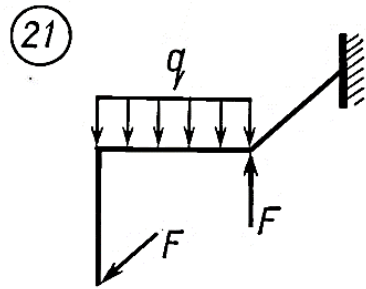
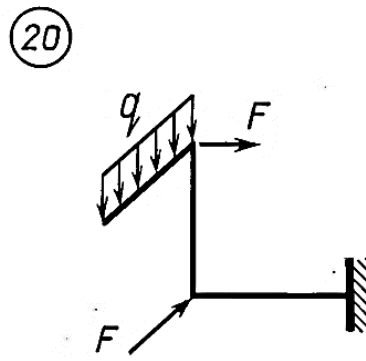
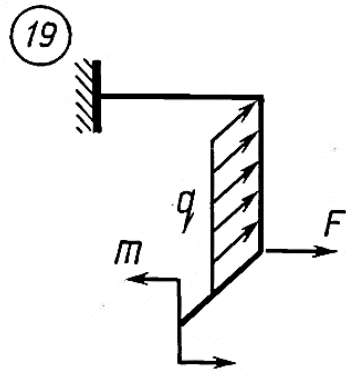
11



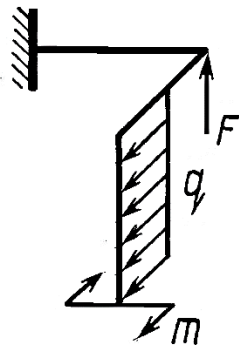
12



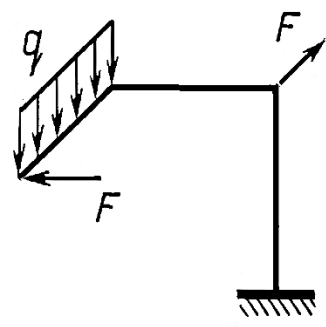




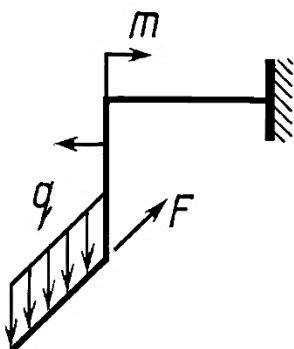
25



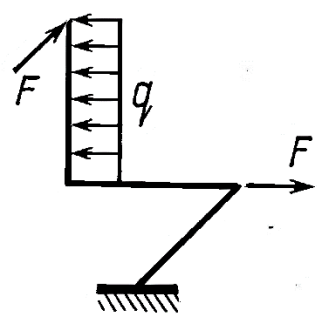
26



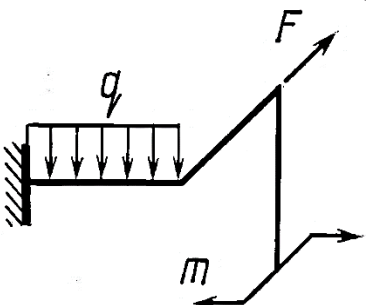
27



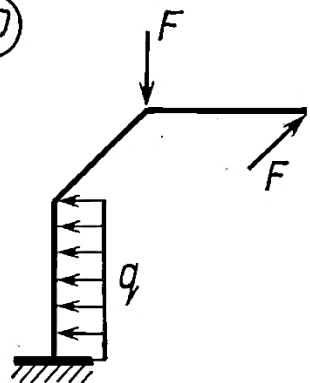
28



29



30



Задача 4.14.

Шкив с диаметром D_1 и углом наклона ветвей ремня к горизонту α_1 делает n оборотов в минуту и передает мощность N кВт. Два других шкива имеют одинаковый диаметр D_2 и одинаковые углы наклона ветвей к горизонту α_2 и каждый из них передает мощность $0,5N$ (рис.87).

Требуется:

- 1) определить моменты, приложенные к шкивам, по заданным величинам N и n ;
 - 2) построить эпюру крутящих моментов M_K ;
 - 3) определить окружные усилия t_1 и t_2 , действующие на шкивы, по найденным моментам и заданным диаметрам шкивов D_1 и D_2 ;
 - 4) определить давления на вал, принимая их равными трем окружным усилиям;
 - 5) определить силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях (вес шкивов и вала не учитывать);
 - 6) построить эпюры изгибающих моментов от горизонтальных ($M_{гор}$) и вертикальных ($M_{верт}$) сил;
 - 7) построить эпюру суммарных изгибающих моментов, пользуясь формулой $M_{и} = \sqrt{M_{гор}^2 + M_{верт}^2}$.
 - 8) при помощи эпюр M_K и $M_{и}$ найти опасное сечение и определить величину максимального расчетного момента (по третьей теории прочности);
 - 9) подобрать диаметр вала d при $[\sigma] = 70$ МПа и округлить его величину.
- Данные взять из табл. 4.14.

Таблица 4.14

Номер строки	Схема по рис.2	N, кВт	n, об/мин	a, м	b, м	c, м	D ₁ , м	D ₂ , м	α_1	α_2
1	1	10	100	1,4	1,2	0,9	1,5	1,2	10°	15°
2	2	20	200	1,2	0,9	1,3	1,3	0,6	20°	25°
3	3	30	300	1,3	0,6	1,0	1,4	1,4	30°	35°
4	4	40	400	1,4	1,0	0,8	1,2	0,8	40°	30°
5	5	50	500	1,0	1,5	1,1	0,8	0,6	50°	45°
6	6	60	600	1,6	0,6	1,2	0,9	0,7	30°	10°
7	7	70	700	1,1	1,3	1,7	1,0	0,8	45°	25°
8	8	80	800	1,8	1,1	1,2	1,5	0,9	35°	20°
9	9	90	900	1,9	1,9	1,9	1,1	0,8	25°	50°
10	10	100	1000	1,2	1,0	1,4	1,2	1,1	50°	20°

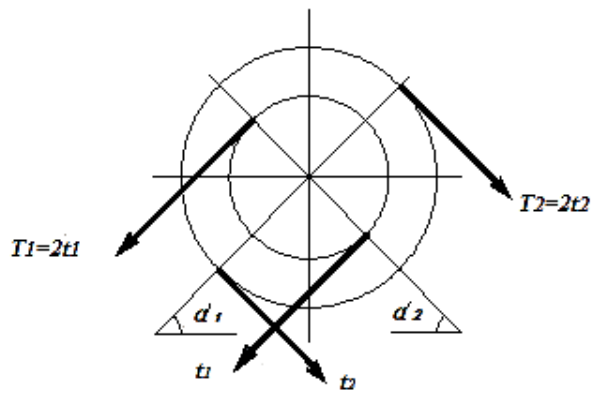
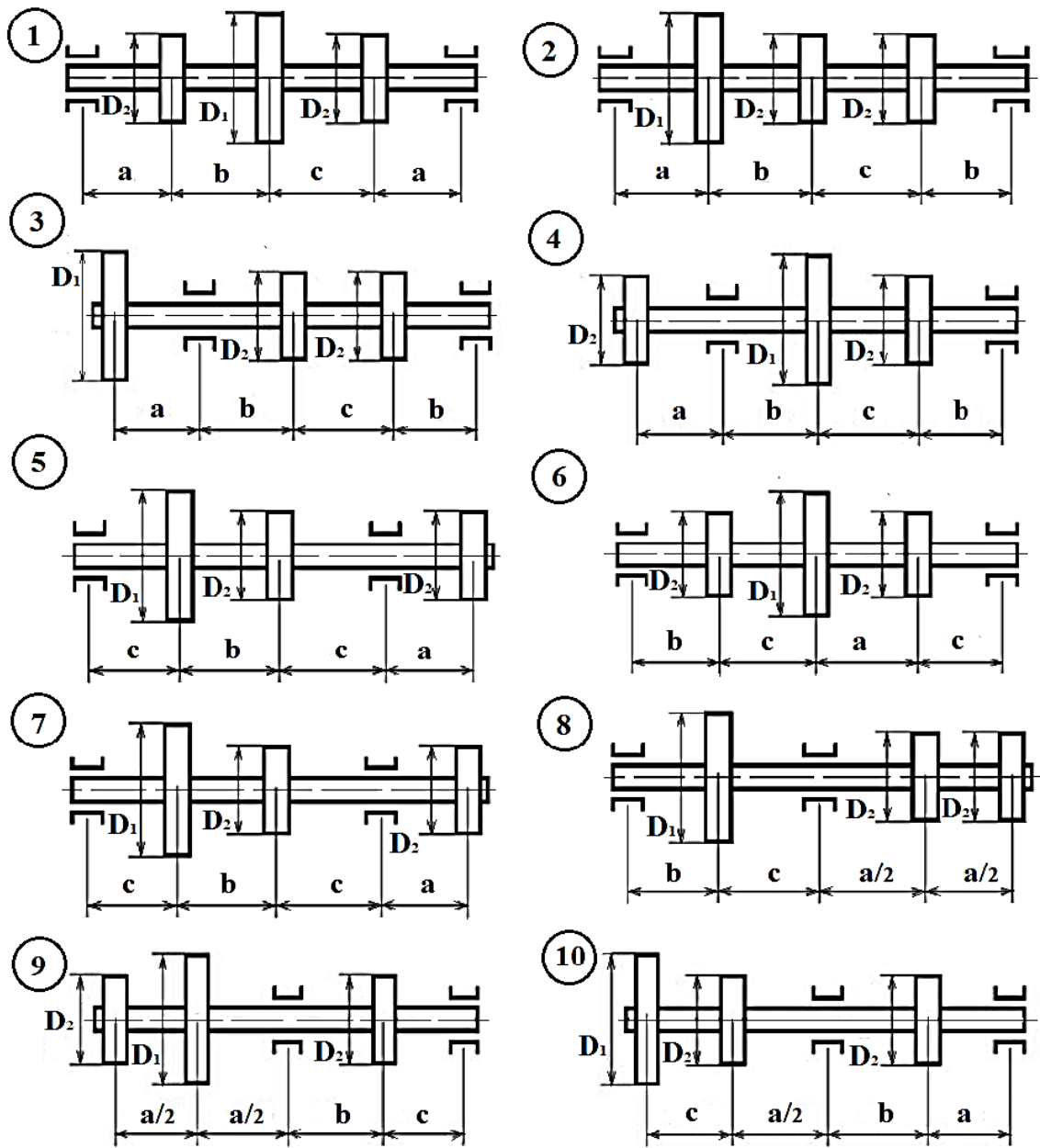
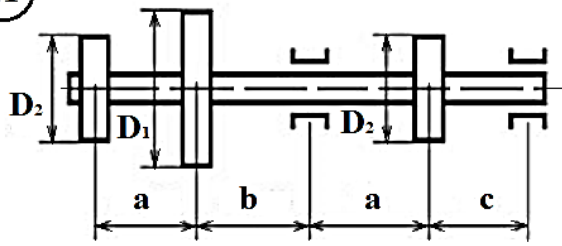


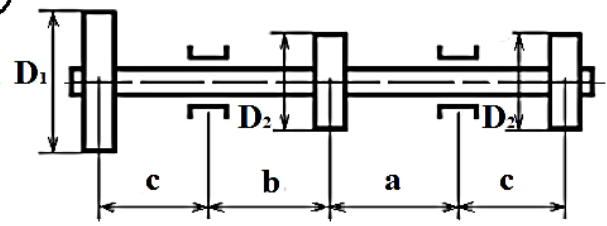
Рис. 87 – Схема сил, действующих на шкивы



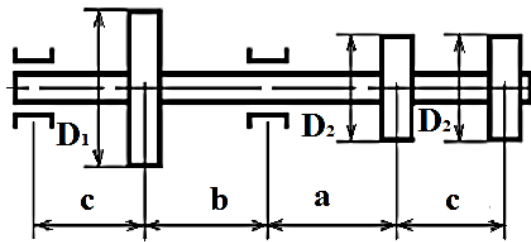
21



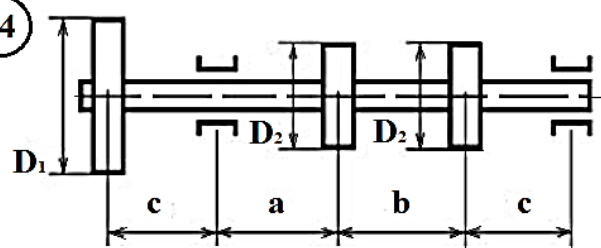
22



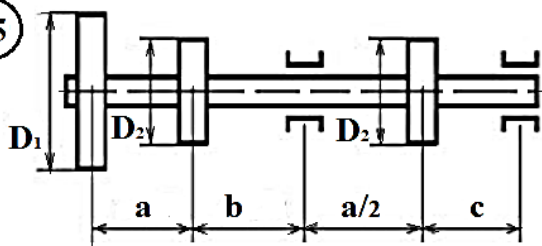
23



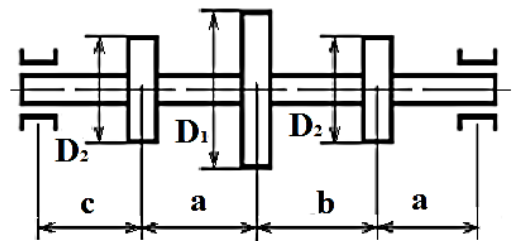
24



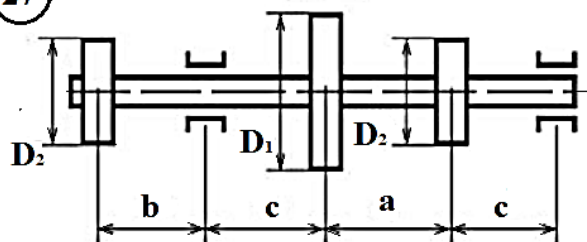
25



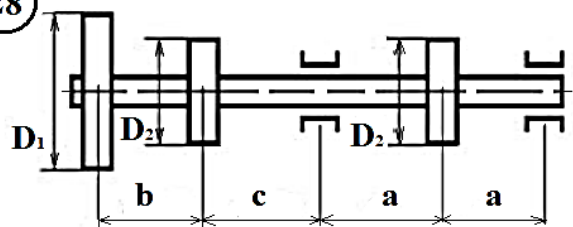
26



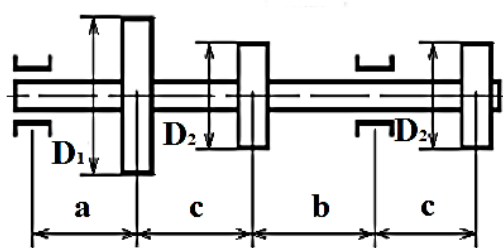
27



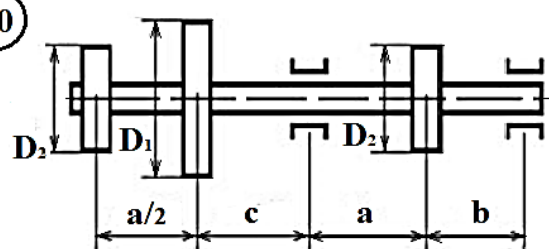
28



29



30



Задача 4.15.

Спроектировать цилиндрическую пружину сжатия со средним диаметром D из проволоки круглого сечения диаметром d , если задана характеристика пружины (зависимость осадки λ от нагрузки F , рис.89). Определить шаг пружины t_0 и высоту H_0 пружины в недеформированном состоянии, если зазор Δ между витками при максимальной нагрузке F_{\max} должен быть равен заданной величине. Наружный диаметр пружины D_0 и ее высота H_0 не должны превышать указанных предельных значений. Возникающие в пружине максимальные касательные напряжения не должны превышать величины допустимого напряжения $[\tau]$. Модуль сдвига материала пружины $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа. Данные взять из таблицы 4.15а.

Значение поправочного коэффициента k при расчете пружин в зависимости от индекса пружины $c = \frac{D}{d}$ представлены в таблице 3.1.

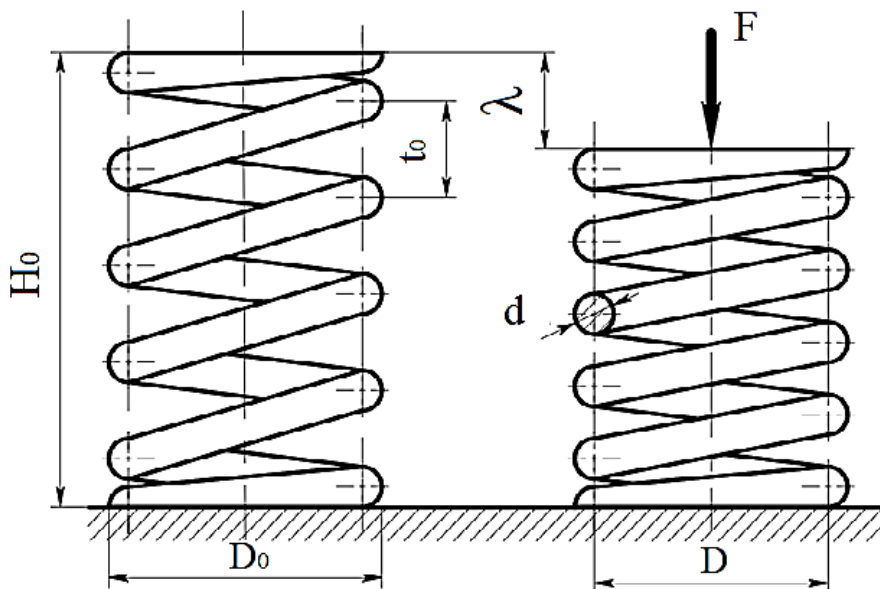


Рис. 88 – Схема пружины сжатия

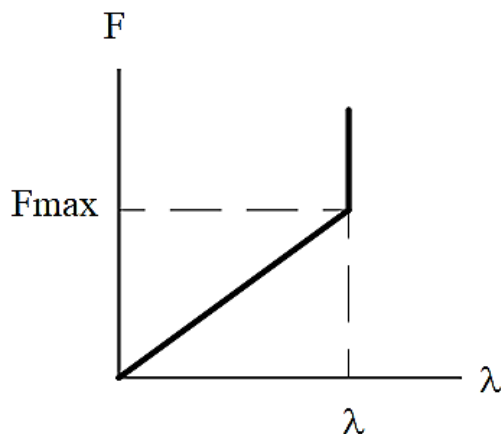


Рис. 89 – Характеристики пружины

Таблица 4.15

№ п/п	F , кН	λ , мм	$[\tau]$ МПа	Δ , мм	H_0 max, мм	D_0 max , мм
1	4	25	540	1,0	180	160
2	10	40	450	0,8	200	200
3	5	36	330	0,5	220	180
4	7	50	700	2,0	150	130
5	9	28	200	1,5	250	250
6	11	32	420	1,2	100	150
7	6	45	680	2,2	130	110
8	12	60	800	2,5	240	100
9	8	20	300	3,0	90	240
10	3	55	250	1,8	110	140
11	2	24	380	1,0	120	170
12	5	35	280	0,9	180	200
13	8	46	580	0,8	140	100
14	11	56	620	0,5	210	150
15	10	34	780	1,3	170	100
16	9	21	460	0,7	140	240
17	12	43	450	1,0	200	140
18	2	58	720	1,5	100	250
19	8	22	340	0,8	230	190
20	11	39	520	1,1	160	120
21	5	54	550	0,5	150	210
22	9	38	740	0,9	90	110
23	3	23	600	0,7	130	230
24	10	48	480	1,4	110	160
25	7	52	650	0,8	170	180
26	12	60	760	1,0	190	120
27	4	27	560	1,6	240	110
28	6	41	370	0,7	160	130
29	7	57	640	1,8	120	220
30	3	37	500	0,5	190	130

Задача 4.16.

Стальной стержень сжимается продольной расчётной нагрузкой F . Допускаемое напряжение материала стержня $[\sigma] = 200$ МПа. Модуль продольной упругости $E = 200$ ГПа.

Требуется:

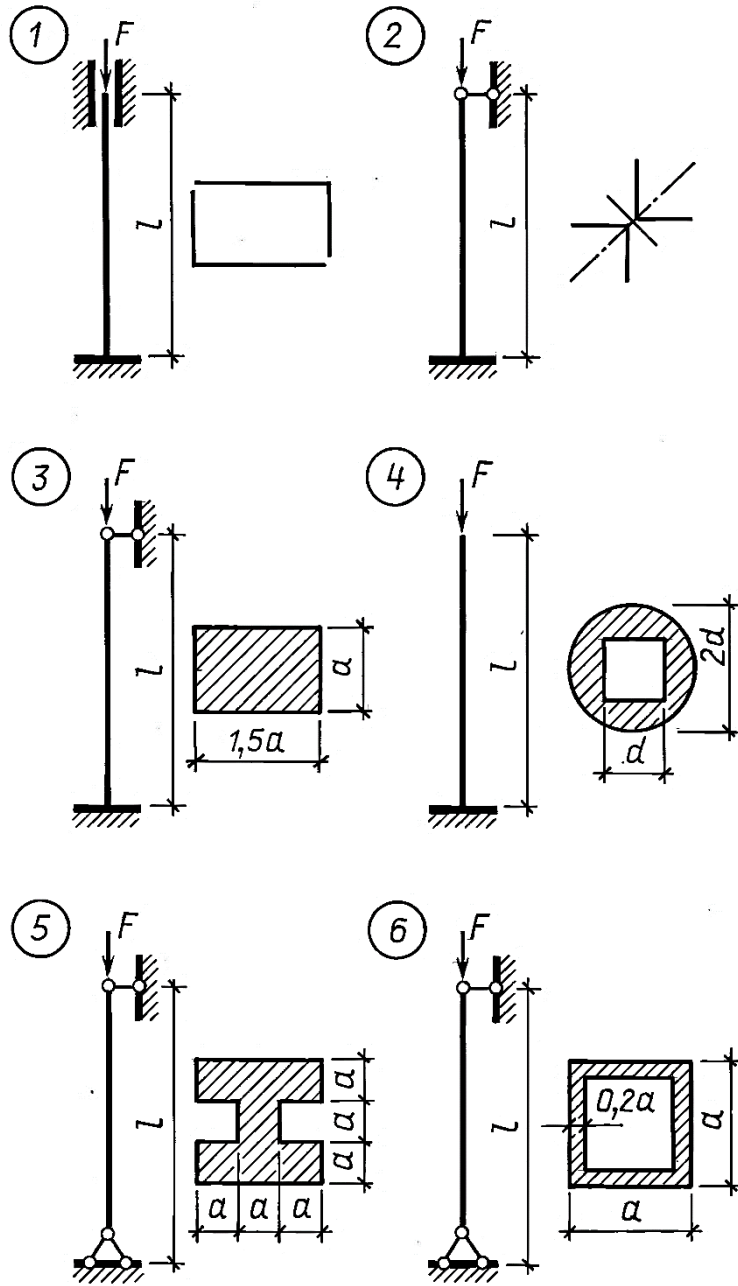
1) подобрать размеры поперечного сечения стержня из условия устойчивости;

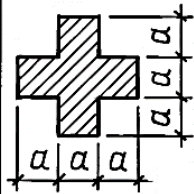
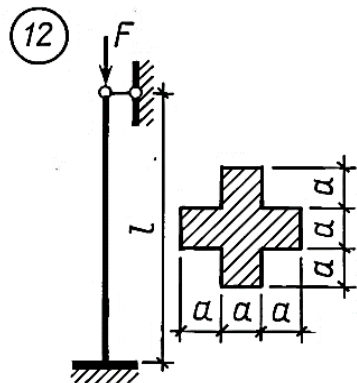
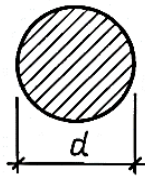
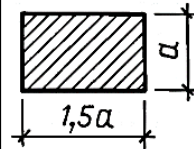
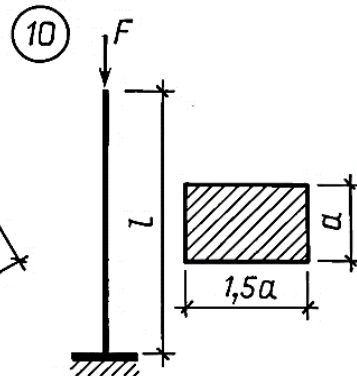
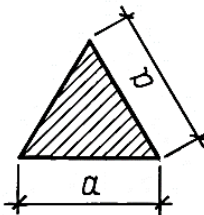
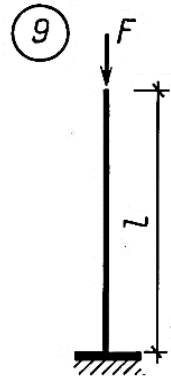
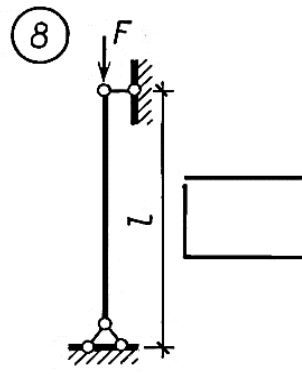
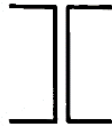
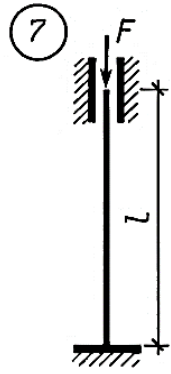
2) определить значение коэффициента запаса устойчивости.

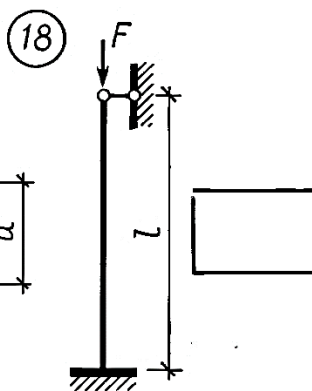
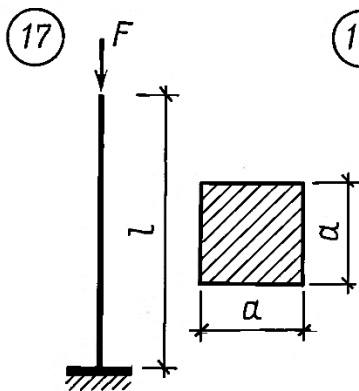
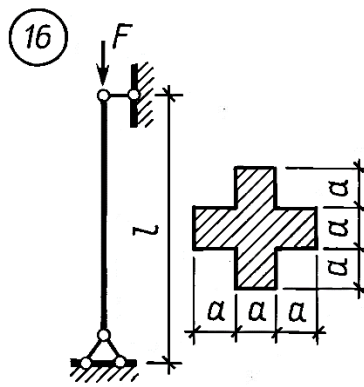
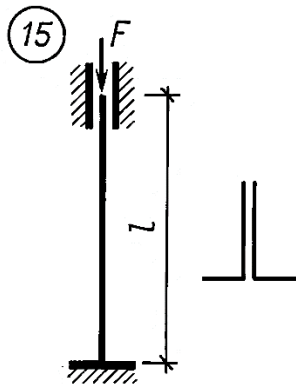
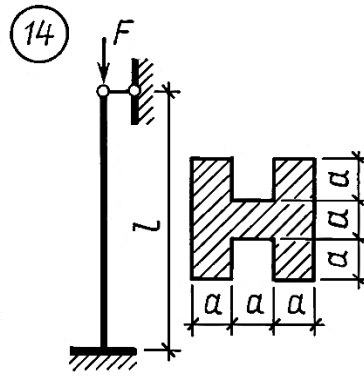
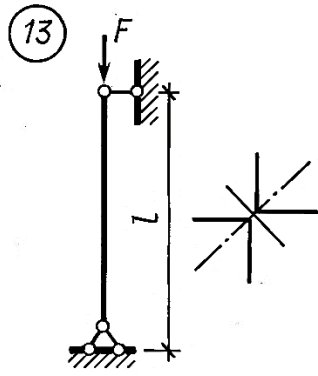
Данные взять из таблицы 4.15.

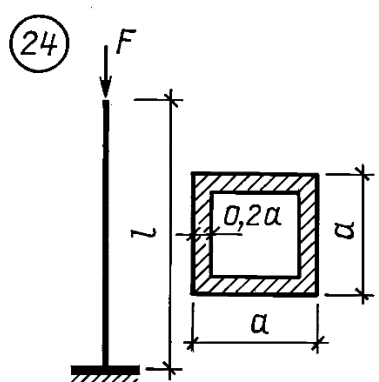
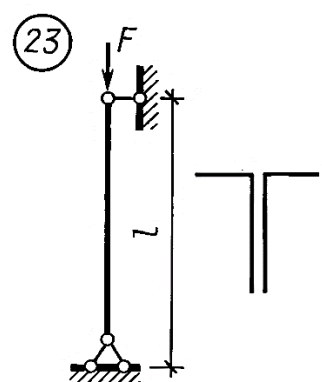
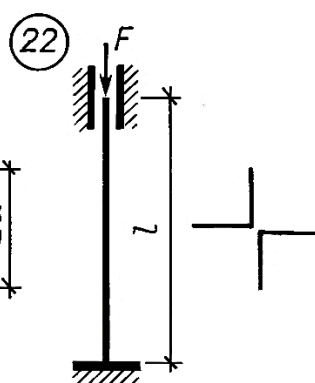
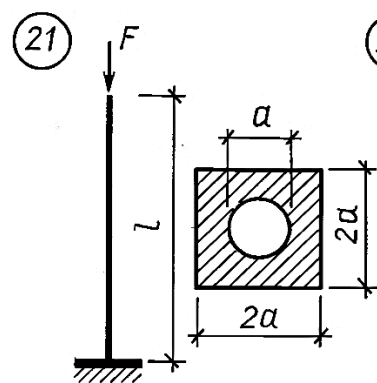
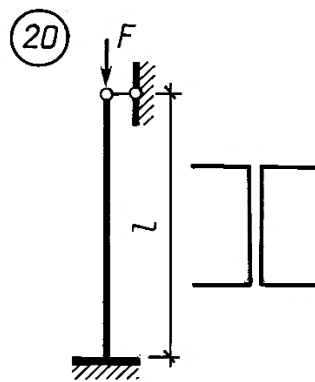
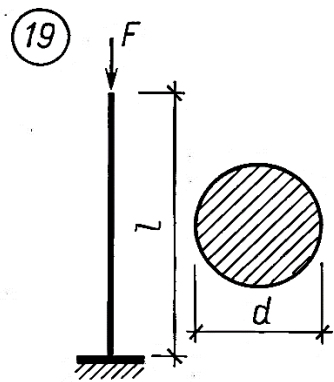
Таблица 4.15

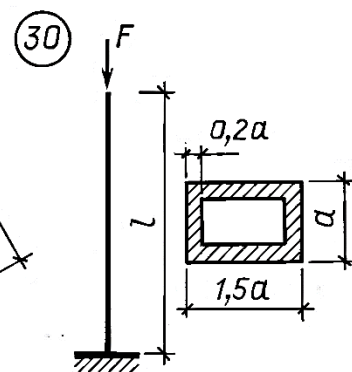
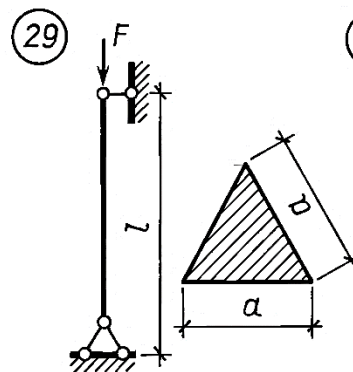
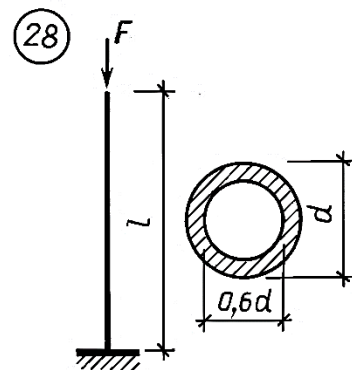
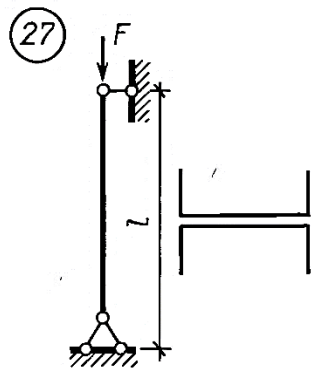
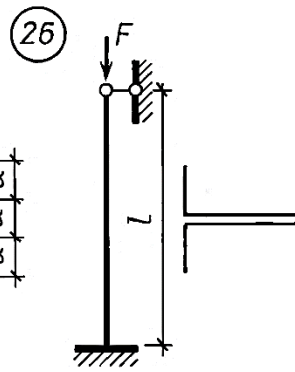
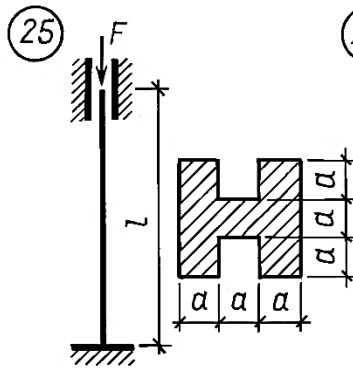
№ п/п	F, кН	l, м	№ п/п	F, кН	l, м	№ п/п	F, кН	l, м
1	110	1,8	11	200	2,5	21	134	1,8
2	160	2,8	12	100	2,2	22	280	2,8
3	190	2,2	13	140	2,6	23	220	2,4
4	100	1,6	14	172	2,2	24	110	1,8
5	120	2,5	15	210	2,8	25	144	2,8
6	164	2	16	110	1,5	26	282	2,6
7	194	2,6	17	124	1,6	27	224	2,4
8	120	2,4	18	178	2,6	28	180	1,6
9	130	1,6	19	216	1,7	29	150	2,4
10	170	1,5	20	160	2,5	30	186	1,5











Задача 4.16.

На упругую систему падает груз G с высоты h . Материал стержней – сталь. Допускаемое напряжение при статической нагрузке $[\sigma] = 210$ МПа, модуль продольной упругости $E = 200$ ГПа.

Требуется:

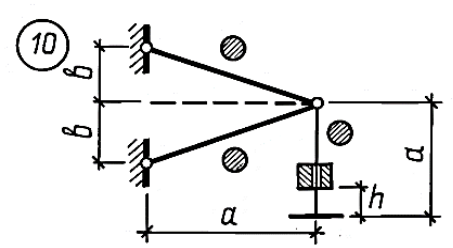
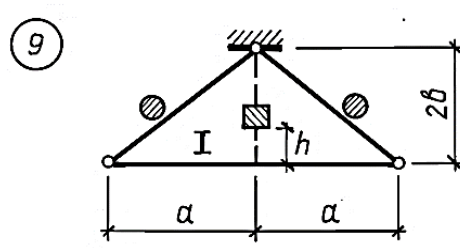
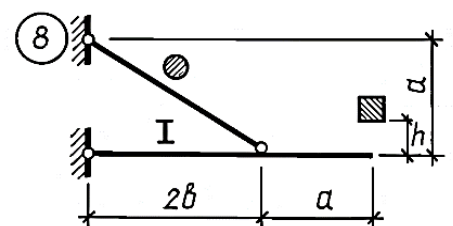
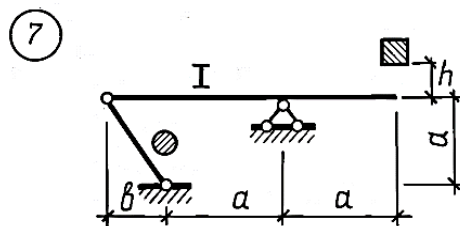
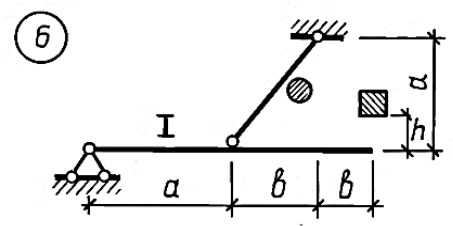
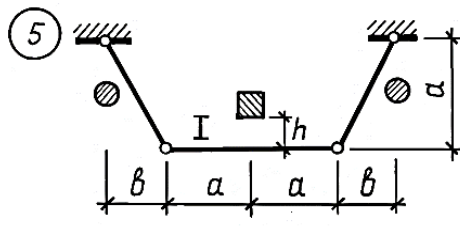
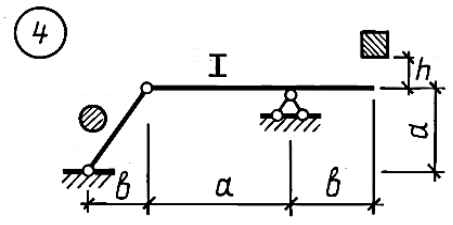
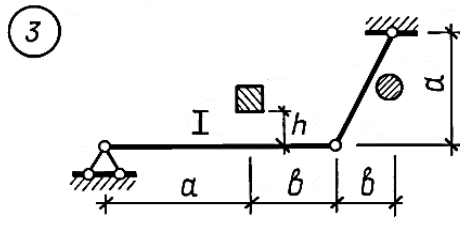
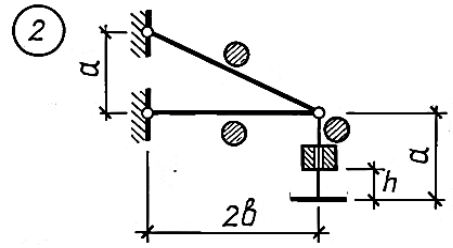
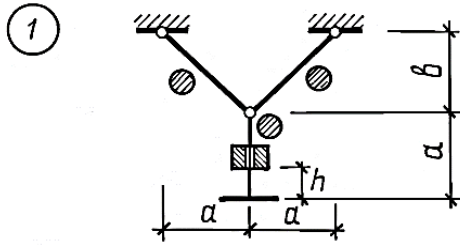
- 1) определить величины максимальных динамических напряжений в элементах системы;
- 2) определить величину динамического перемещения точки приложения груза.

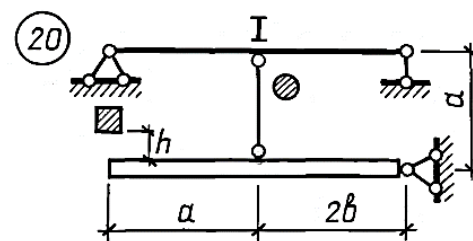
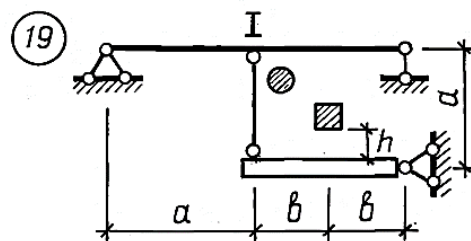
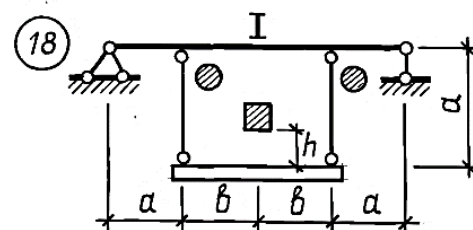
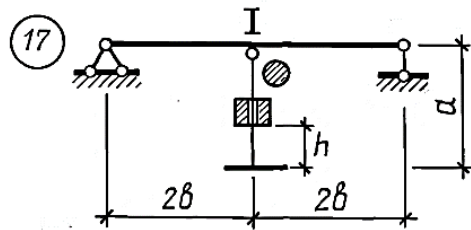
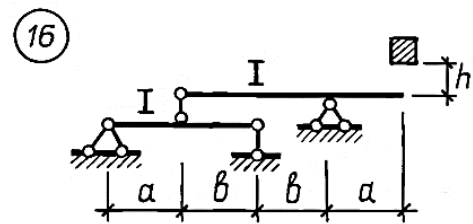
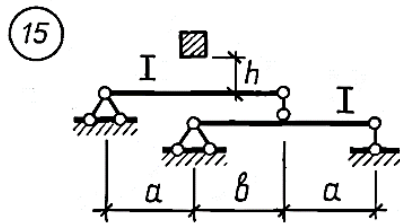
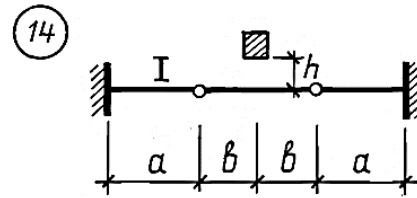
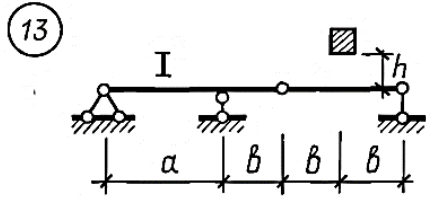
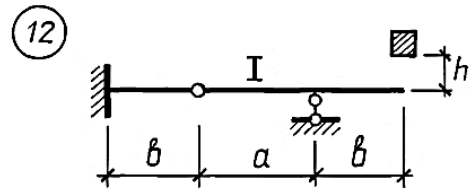
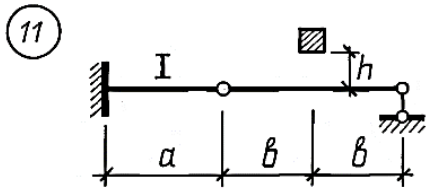
Массу конструкции не учитывать.

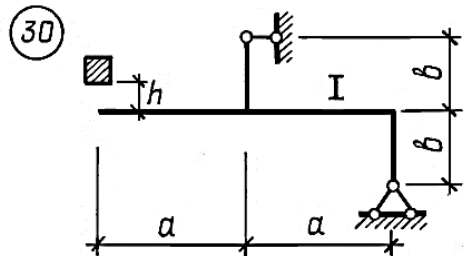
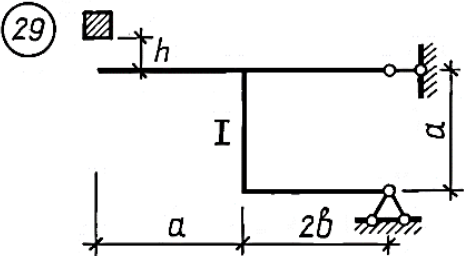
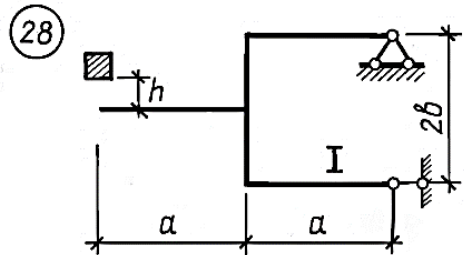
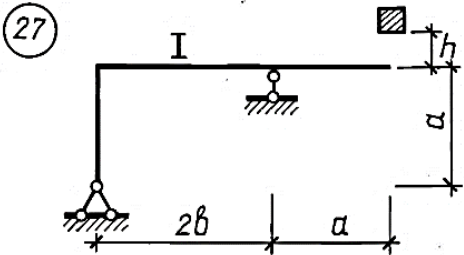
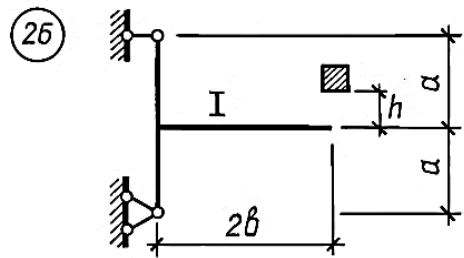
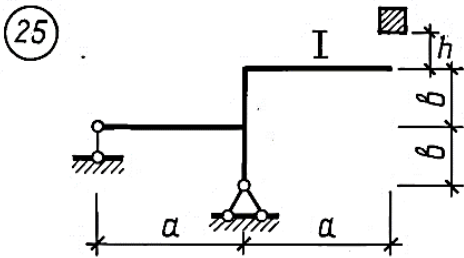
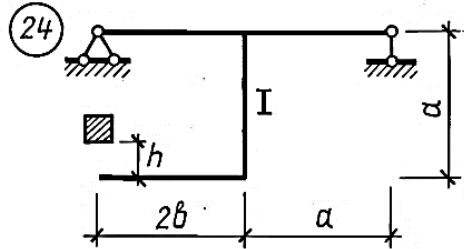
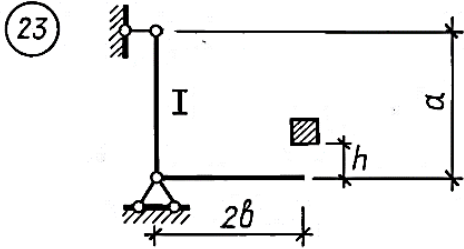
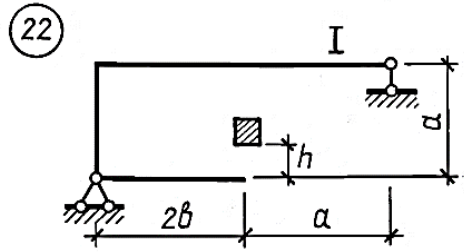
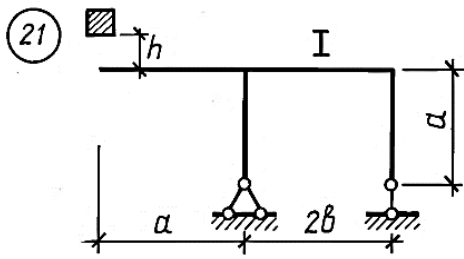
Данные взять из таблицы 4.16.

Таблица 4.16

№ п/п	G, Н	h, см	a, м	b, м	Номер двутавра	Диаметр d, см
1	400	7	4,0	1,0	18	4,2
2	450	6,5	3,8	1,2	18	3,6
3	500	6	3,6	1,4	16	3,8
4	550	5,5	3,4	1,6	22	3,4
5	600	5	3,2	1,8	20	3,2
6	650	7	3,0	3,0	20	3,0
7	700	6,5	2,8	2,8	24	2,8
8	750	6	2,6	2,6	22	2,6
9	800	5,5	3,4	2,4	27	2,4
10	850	7	3,2	2,2	24	2,6







Задача 4.17.

Напряженное состояние в точке задано шестью компонентами (рис. 90) σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} (таблица 4.17).

Требуется определить:

- 1) главные напряжения;
- 2) максимальные касательные напряжения;
- 3) направляющие косинусы главных площадок;
- 4) значения главных относительных деформаций;
- 5) относительное изменение объема;
- 6) удельную потенциальную энергию изменения объема и формы;
- 7) полную удельную потенциальную энергию.

Таблица 4.17

№ п/п	σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}	τ_{yz}	τ_{zx}	μ	Е, ГПа
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	10	-60	100	-10	20	10	0,24	200
2	-20	70	-110	40	-30	-50	0,30	210
3	30	-80	120	-40	-20	10	0,28	220
4	-40	90	-130	20	80	80	0,25	200
5	50	-100	140	-60	60	20	0,24	210
6	-60	110	-150	80	50	-50	0,30	220
7	70	120	-50	40	-40	80	0,27	200
8	-80	130	60	30	90	60	0,25	210
9	90	-140	70	60	20	-20	0,30	220
10	-100	150	-80	-50	50	30	0,24	200
11	110	-50	90	70	-40	40	0,28	210
12	120	60	-100	80	-30	30	0,25	220
13	130	-70	110	50	40	-50	0,27	200
14	140	80	-40	20	-10	40	0,30	210
15	150	-90	50	40	-40	20	0,28	220
16	-10	40	-60	10	-10	20	0,25	200
17	20	-50	100	20	40	10	0,27	210
18	-30	60	-110	-10	30	20	0,28	220
19	40	-70	120	60	-50	50	0,25	200
20	-50	80	-10	20	30	-40	0,24	210

Продолжение таблицы 4.17

1	2	3	4	5	6	7	8	9
21	60	-90	20	50	-40	50	0,30	220
22	70	100	-30	20	20	-10	0,27	200
23	80	-110	40	30	-40	50	0,25	210
24	-90	120	-50	50	60	-20	0,30	220
25	100	-130	60	20	-50	40	0,27	200
26	110	50	-70	30	40	-10	0,28	210
27	120	-60	10	10	10	-20	0,26	220
28	-130	70	-20	20	30	-40	0,24	200
29	140	-80	30	30	70	-60	0,27	210
30	150	90	-40	-20	-40	30	0,28	220

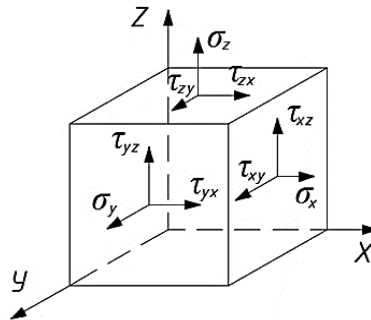
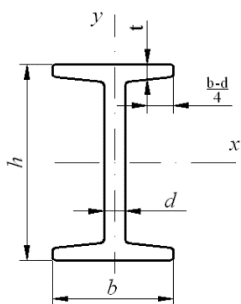


Рис. 90 – Элементарный параллелепипед в общем случае нагружения

5. ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Сталь горячекатаная. Балки двутавровые (по ГОСТ 8239-89*)

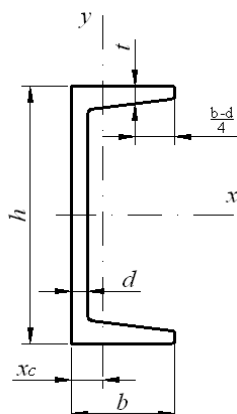


I – момент инерции
 W – момент сопротивления
 S – статический момент площади полусечения
 i – радиус инерции

Таблица П1.1

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения A , см ²	Линейная плотность ρ , кг/м	Геометрические характеристики относительно осей						
	h	b	d	t			x				y		
							I_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	I_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см
10	100	55	4,5	7,2	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	11,5	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	13,7	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5	7,8	20,2	15,9	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	180	90	5,1	8,1	23,4	18,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	200	100	5,2	8,4	26,8	21	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	220	110	5,4	8,7	30,6	24	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	240	115	5,6	9,5	34,8	27,3	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	270	125	6	9,8	40,2	31,5	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	300	135	6,5	10,2	46,5	36,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	330	140	7	11,2	53,8	42,2	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	48,6	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13	72,6	57	19062	953	16,2	545	667	86	3,03
45	450	160	9	14,2	84,7	66,5	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	100	78,5	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	118	92,6	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	138	108	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

Сталь горячекатаная. Швеллерная (по ГОСТ 8240-89)



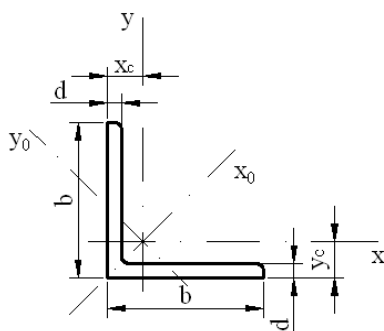
I – момент инерции
 W – момент сопротивления
 S – статический момент площади полусечения
 i – радиус инерции

Таблица П2.1

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения $A, \text{см}^2$	Линейная плотность $\rho, \text{кг/м}$	Геометрические характеристики относительно осей							$x_c, \text{см}$
	h	b	d	t			x			y				
							$I_x, \text{см}^4$	$W_x, \text{см}^3$	$i_x, \text{см}$	$S_x, \text{см}^3$	$I_y, \text{см}^4$	$W_y, \text{см}^3$	$i_y, \text{см}$	
5	50	32	4,4	7	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,6	2,75	0,95	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	5,9	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	23,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	8,59	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	10,4	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8Д	15,6	12,3	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67
16	160	64	5	8,4	18,1	14,2	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16a	160	68	5	9	19,5	15,3	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2
18	180	70	5,1	8,7	20,7	16,3	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	17,4	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9	23,4	18,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,07
22	220	82	5,4	9,5	26,7	21	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	240	90	5,6	10	30,6	24	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
27	270	95	6	10,5	35,2	27,7	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11	40,5	31,8	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7	11,7	46,5	36,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	41,9	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	400	115	8	13,5	61,5	48,3	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Приложение 3

Рекомендуемый сортамент равнополочных уголков (по ГОСТ 8509-86)



I – момент инерции
 W – момент сопротивления
 S – статический момент площади полусечения
 i – радиус инерции

Таблица ПЗ.1

Номер профиля	Размеры, мм		Площадь сечения A , см ²	Линейная плотность ρ ,	Геометрические характеристики относительно осей							x_c , y_c , см
	b	d			x		x_0		y_0		I_{xy} , см ⁴	
					I_x , см ⁴	i_x , см	I_{x0} , см ⁴	I_{x0} , см	I_{y0} , см ⁴	I_{y0} , см		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	2	3	1,13	0,89	0,4	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,23	0,6
		4	1,46	1,15	0,5	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	0,28	0,64
3	3	3	1,74	1,36	1,45	0,91	2,3	1,15	0,6	0,59	0,85	0,85
		4	2,27	1,78	1,84	0,9	2,92	1,13	0,77	0,58	1,08	0,89
4	4	3	2,35	1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	2,08	1,09
		4	3,08	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,9	0,78	2,68	1,13
		5	3,79	2,98	5,53	1,21	8,75	1,52	2,3	0,78	3,22	1,17
5	5	3	2,96	2,32	7,11	1,55	11,27	1,95	2,95	1	4,16	1,33
		4	3,89	3,05	9,21	1,54	14,63	1,94	3,8	0,99	5,42	1,38
		5	4,8	3,77	11,2	1,53	17,77	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42
		6	5,69	4,47	13,07	1,52	20,72	1,91	5,43	0,98	7,65	1,46
6,3	6,3	4	4,96	3,9	18,86	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	11	1,69
		5	6,13	4,81	23,1	1,94	36,8	2,44	9,52	1,25	13,7	1,74
		6	7,28	5,72	27,06	1,93	42,91	2,43	11,18	1,24	15,9	1,78

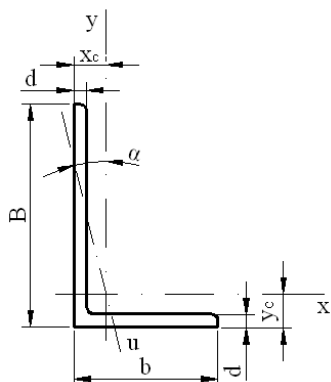
Продолжение таблицы ПЗ.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
7	70	5	6,86	5,38	31,94	2,16	50,67	2,72	13,22	1,39	18,7	1,9
		6	8,15	6,39	37,58	2,15	59,64	2,71	15,52	1,38	22,1	1,94
		7	9,42	7,39	42,98	2,14	68,19	2,69	17,77	1,37	25,2	1,99
		8	10,67	8,37	48,16	2,12	76,35	2,68	19,97	1,37	28,2	2,02
7,5	75	5	7,39	5,8	39,53	2,31	62,65	2,91	16,41	1,49	23,1	2,02
		6	8,78	6,89	46,57	2,3	73,87	2,9	19,28	1,48	27,3	2,06
		7	10,15	7,97	53,34	2,29	84,61	2,89	22,07	1,47	31,2	2,1
		8	11,5	9,02	59,84	2,28	94,89	2,87	24,8	1,47	35	2,15
		9	12,83	10,07	66,1	2,27	104,72	2,86	27,48	1,46	38,6	2,18
8	80	6	9,38	7,36	56,97	2,47	90,4	3,11	23,54	1,58	33,4	2,19
		7	10,85	8,51	65,31	2,45	103,6	3,09	26,97	1,58	38,3	2,23
		8	12,3	9,65	73,36	2,44	116,3	3,08	30,32	1,57	43	2,27
9	90	6	10,61	8,33	82,1	2,78	130	3,5	33,97	1,79	48,1	2,43
		7	12,28	9,64	94,3	2,77	149,6	3,49	38,94	1,78	55,4	2,47
		8	13,93	10,93	106,1	2,76	168,4	3,48	43,8	1,77	62,3	2,51
		9	15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	68	2,55
10	100	7	13,75	10,79	130,5	3,08	207	3,88	54,16	1,98	76,4	2,71
		8	15,6	12,25	147,1	3,07	233	3,87	60,92	1,98	86,3	2,75
		10	19,24	15,1	178,9	3,05	283	3,84	74,08	1,96	110	2,83
		12	22,8	17,9	208,9	3,03	330	3,81	86,84	1,95	122	2,91
		14	26,28	20,63	237,1	3,00	374	3,78	99,32	1,94	138	2,99
12,5	125	8	19,69	15,46	294	3,87	466	4,87	121,9	2,49	172	3,36
		9	22	17,3	327	3,86	520	4,86	135,8	2,48	192	3,4
		10	24,33	19,1	359	3,85	571	4,84	148,5	2,47	211	3,45
		12	28,89	22,68	422	3,82	670	4,82	174,4	2,46	248	3,53
		14	33,37	26,2	481	3,8	763	4,78	199,6	2,45	282	3,61
		16	37,77	29,65	538	3,78	852	4,75	224,2	2,44	315	3,68
14	140	9	24,72	19,41	465	4,34	739	5,47	192	2,79	274	3,78
		10	27,33	21,45	512	4,33	813	5,46	210	2,78	301	3,82
		12	32,49	25,5	602	4,31	956	5,43	248	2,76	354	3,9

Окончание таблицы ПЗ.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
16	160	10	31,43	24,67	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	455	4,3
		11	34,42	27,02	844	4,95	1340	6,24	347	3,18	496	4,35
		12	37,39	29,35	912	4,94	1450	6,23	375	3,17	537	4,39
		14	43,57	33,97	1046	4,92	1662	6,2	430	3,16	615	4,47
		16	49,07	38,52	1175	4,89	1865	6,17	484	3,14	690	4,55
		18	54,79	43,01	1290	4,87	2061	6,13	537	3,13	771	4,63
		20	60,4	47,44	1418	4,85	2248	6,1	589	3,12	830	4,7
20	200	12	47,1	36,97	1822	6,22	2896	7,84	749	3,99	1073	5,37
		13	50,85	39,92	1960	6,21	3116	7,83	805	3,98	1156	5,42
		14	54,6	42,8	2097	6,2	3333	7,81	861	3,97	1236	5,46
		16	61,98	48,65	2362	6,17	3755	7,78	969	3,96	1393	5,54
		20	76,54	60,08	2871	6,12	4560	7,72	1181	3,93	1689	5,7
		25	94,29	74,02	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	2028	5,89
		30	111,54	87,56	4019	6	6351	7,55	1698	3,89	2332	6,07
25	250	16	78,4	61,55	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	2775	6,75
		18	87,72	68,86	5247	7,73	8336	9,75	2157	4,96	3089	6,83
		20	96,96	76,11	5764	7,71	9159	9,72	2370	4,94	3395	6,91
		22	106,12	83,31	6270	7,09	9961	9,69	2579	4,93	3691	7
		25	119,71	93,97	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	4119	7,11
		28	133,12	104,5	7716	7,61	12243	9,59	3189	4,9	4527	7,23
		30	141,96	111,44	8176	7,59	12964	9,56	3388	4,89	4788	7,31

Рекомендуемый сортамент неравнополочных уголков (по ГОСТ 8510-86)



B – ширина большой полки
 b – ширина малой полки
 d – толщина полки
 I – момент инерции
 i – радиус инерции
 x_c, y_c – расстояние от центра тяжести до наружных граней полок
 α – угол наклона главной центральной оси

Таблица П4.1

Номер профиля	Размеры, мм			Площадь сечения A , см ²	Линейная плотность ρ , кг/м	Геометрические характеристики относительно осей						x_c , см	y_c , см	I_{xy} , см ⁴	$tg\alpha$
	B	b	d			x		y_0		u					
						I_x , см ⁴	i_x , см	I_y , см ⁴	i_y , см	I_u , см ⁴	i_u , см				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,91	0,70	0,78	0,22	0,44	0,13	0,34	0,42	0,86	0,22	0,392
3,2/2	32	20	3	1,49	1,17	1,52	1,01	0,46	0,55	0,28	0,43	0,49	1,08	0,47	0,382
			4	1,94	1,52	1,93	1	0,57	0,54	0,35	0,43	0,53	1,12	0,59	0,374
4/2,5	40	25	3	1,89	1,48	3,06	1,27	0,93	0,70	0,56	0,54	0,59	1,32	0,96	0,385
			4	2,47	1,94	3,93	1,26	1,18	0,69	0,71	0,54	0,63	1,37	1,22	0,281
			5	3,03	2,37	4,73	1,25	1,41	0,68	0,86	0,53	0,66	1,41	1,44	0,374
5/3,2	50	32	3	2,42	1,9	6,18	1,6	1,99	0,91	1,18	0,7	0,72	1,60	2,01	0,403
			4	3,17	2,4	7,98	1,59	2,56	0,9	1,52	0,69	0,76	1,65	2,59	0,401
6,3/4,0	63	40	4	4,04	3,17	16,33	2,01	5,16	1,13	3,07	0,87	0,91	2,03	5,25	0,397
			5	4,98	3,91	19,91	2	6,26	1,12	3,73	0,86	0,95	2,08	6,41	0,396
			6	5,9	4,63	23,31	1,99	7,29	1,11	4,36	0,86	0,99	2,12	7,44	0,393
			8	7,68	6,03	29,6	1,96	9,15	1,09	5,58	0,85	1,07	2,2	9,27	0,386
7,5/5	75	60	5	6,11	4,79	34,81	2,39	12,47	1,43	7,24	1,09	1,17	2,39	12	0,436
			6	7,25	5,69	40,92	2,38	14,6	1,42	8,48	1,08	1,21	2,44	14,1	0,435
			7	8,37	6,57	46,77	2,36	16,61	1,41	9,69	1,08	1,25	2,48	16,18	0,435
			8	9,47	7,43	52,38	2,35	18,52	1,4	10,87	1,07	1,29	2,52	17,8	0,43
9/5,6	90	56	5,5	7,86	6,17	65,28	2,88	19,67	1,58	11,77	1,22	1,26	2,92	20,54	0,384
			6	8,54	6,7	70,58	2,88	21,22	1,58	12,7	1,22	1,28	2,95	22,23	0,384
			8	11,18	8,77	90,87	2,85	27,08	1,56	16,29	1,21	1,36	3,04	28,33	0,38
10/6,3	100	63	6	9,58	7,53	98,29	3,2	30,58	1,79	18,2	1,38	1,42	3,23	31,5	0,393
			7	11,09	8,7	112,86	3,19	34,99	1,78	20,83	1,37	1,46	3,28	36,1	0,392
			8	12,57	9,87	126,96	3,18	39,21	1,77	23,38	1,36	1,5	3,32	40,5	0,391
			10	15,47	12,14	153,95	3,15	47,18	1,75	28,34	1,35	1,58	3,4	48,6	0,387

Продолжение табл. П4.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
12,5/8	125	80	7	14,06	11,04	226	4,01	73,73	2,29	43,4	1,76	1,8	4,01	74,7	0,407
			8	15,98	12,58	225	4	80,95	2,28	48,82	1,75	1,84	4,05	84,1	0,406
			10	19,7	15,47	311	3,98	100,47	2,26	59,33	1,74	1,92	4,14	102	0,404
			12	23,36	18,34	364	3,95	116,84	2,24	69,47	1,72	2	4,22	118	0,4
16/10	160	100	9	22,87	17,96	605	5,15	186	2,85	110,4	2,2	2,24	5,19	194	0,391
			10	25,28	19,85	666	5,13	204	2,84	121,16	2,19	2,28	5,23	213	0,390
			12	30,04	23,58	784	5,11	238	2,82	142,14	2,18	2,36	5,32	249	0,388
			14	34,72	27,26	897	5,08	271	2,8	162,49	2,16	2,43	5,4	282	0,385
20/12,5	200	125	11	34,87	27,37	1449	6,45	446	3,58	263	2,75	2,79	6,5	465	0,392
			12	37,89	29,74	1568	6,43	481	3,57	285	2,74	2,83	6,54	503	0,392
			14	43,87	34,43	1800	6,41	550	3,54	326	2,73	2,91	6,62	575	0,390
			16	49,77	39,07	2026	6,38	616	3,52	366	2,72	2,99	6,71	643	0,388

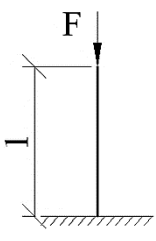
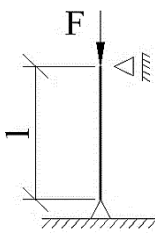
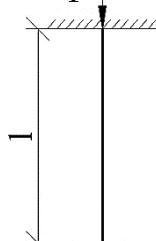
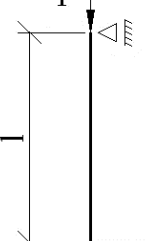
Коэффициент φ продольного изгиба
центрально-сжатых элементов

Таблица П5.1

Гибкость, λ	Значения φ для элементов из							
	спали с расчетным сопротивлением R, МПа						чугун	древесина
	200	240	280	320	360	400		
0	1	1	1	1	1	1	1	1
10	0,988	0,987	0,985	0,984	0,983	0,982	0,97	0,992
20	0,967	0,962	0,959	0,955	0,952	0,949	0,91	0,968
30	0,939	0,931	0,924	0,917	0,911	0,905	0,81	0,928
40	0,906	0,894	0,883	0,873	0,863	0,854	0,69	0,872
50	0,869	0,852	0,836	0,822	0,809	0,796	0,57	0,8
60	0,827	0,805	0,785	0,766	0,749	0,721	0,44	0,712
70	0,782	0,754	0,724	0,687	0,654	0,623	0,34	0,608
80	0,734	0,686	0,641	0,602	0,566	0,532	0,26	0,469
90	0,665	0,612	0,565	0,522	0,483	0,447	0,2	0,37
100	0,599	0,542	0,493	0,448	0,408	0,369	0,16	0,3
110	0,537	0,478	0,427	0,381	0,338	0,306	–	0,248
120	0,479	0,419	0,366	0,321	0,287	0,26	–	0,208
130	0,425	0,364	0,313	0,276	0,247	0,223	–	0,178
140	0,376	0,315	0,272	0,24	0,215	0,195	–	0,153
150	0,328	0,276	0,239	0,211	0,189	0,171	–	0,133
160	0,29	0,244	0,212	0,187	0,167	0,152	–	0,117
170	0,259	0,218	0,189	0,167	0,15	0,136	–	0,104
180	0,233	0,196	0,17	0,15	0,135	0,123	–	0,093
190	0,21	0,177	0,154	0,136	0,122	0,111	–	0,083
200	0,191	0,161	0,14	0,124	0,111	0,101	–	0,075
210	0,174	0,147	0,128	0,113	0,102	0,093	–	0,068
220	0,16	0,135	0,118	0,104	0,094	0,086	–	0,062

Влияние условий закрепления концов стержня
на величину критической силы

Таблица П6.1

Схема стойки				
μ	2	1	0,5	0,7

Значение коэффициентов a и b в формуле Ясинского

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda$$

Таблица П6.2

Материал	$\lambda_{пред}$	a , Мпа	b , Мпа
Ст 2, Ст 3	100	310	1,14
Ст 5	100	464	3,26
Сталь 40	90	321	1,16
Кремнистая сталь	100	589	3,82
Дерево	110	29,3	0,194
Чугун	80	776	12
Для чугуна $\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2$,			где
$c = 0,53$			

Нормальные линейные размеры валов (по гост 6636-69)

Ra5	Ra10	Ra20	Ra40	Ra5	Ra10	Ra20	Ra40	Ra5	Ra10	Ra20	Ra40	Ra5	Ra10	Ra20	Ra40
1,0	1,0	1,0 1,1	1,0 1,05 1,1 1,15	6,3	6,3	6,3 7,1	6,3 6,7 7,1 7,5	40	40	40 45	40 42 45 48	250	250	250 280	250 260 280 300
	1,2	1,2 1,4	1,2 1,3 1,4 1,5		8,0	8,0 9,0	8,0 8,5 9,0 9,5		50	50 56	50 53 56 60		320	320 360	320 340 360 380
1,6	1,6	1,6 1,8	1,6 1,7 1,8 1,9	10	10	10 11	10 10,5 11 11,5	63	63	63 71	63 67 71 75	400	400	400 450	400 420 450 480
	2,0	2,0 2,2	2,0 2,1 2,2 2,4		12	12 14	12 13 14 15		80	80 90	80 85 90 95		500	500 560	500 530 560 600
2,5	2,5	2,5 2,8	2,5 2,6 2,8 3,0	16	16	16 18	16 17 18 19	100	100	100 110	100 105 110 120	630	630	630 710	630 670 710 750
	3,2	3,2 3,6	3,2 3,4 3,6 3,8		20	20 22	20 21 22 24		125	125 140	125 130 140 150		800	800 900	800 850 900 950
4,0	4,0	4,0 4,5	4,0 4,2 4,5 4,8	25	25	25 28	25 26 28 30	160	160	160 180	160 170 180 190	1000	1000	1000 1120	1000 1060 1120 1180
	5,0	5,0 5,6	5,0 5,3 5,6 6,0		32	32 36	32 34 36 38		200	200 220	200 210 220 240		1250	1250 1400	1250 1320 1400 1500

Примечания: 1) При выборе размеров предпочтение должно отдаваться рядом с более крупной градацией (ряд *Ra5* следует предпочитать ряду *Ra10*, ряд *Ra10* – ряду *Ra20*, ряд *Ra20* – ряду *Ra40*).
 2) ГОСТ предусматривает размеры в диапазоне от 0,001 до 100000 мм.
 3) ГОСТ предусматривает дополнительные размеры, которые допускается применять в отдельных, технически обоснованных случаях. Например, размеры посадочных мест для подшипников качения: 35, 47, 52, 55, 62, 65, 70, 72.