АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 11 АВГУСТ, 1975 ВЫПУСК 3

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ В РАССЕИВАЮЩИХ СРЕДАХ

Н. Н. РОГОВЦОВ, А. М. САМСОН

Поступила 19 марта 1974
Пересмотрена 10 ноября 1974

Рассматривается нестационарное поле излучения в стационарных однородных средах. Предложен метод расчета временных моментов функций, которые определяют нестационарное излучение. Получен ряд формул для моментов при произвольном возбуждении среды. С помощью этих формул найдены общие выражения для средних длительностей $\bar{u}$ и дисперсии $\bar{\sigma}$. Величины $\bar{u}$ и $\bar{\sigma}$ вычислены для случаев плоскопараллельного слоя и шара при различных типах возбуждения. Найдена связь $\bar{u}$ со средним числом рассеяний фотона в шаре для некоторых режимов возбуждения. Оценено влияние конечности скорости света на нестационарное резонансное излучение. Вычислено среднее время свечения $\bar{u}$ шара при мгновенной вспышке точечного источника, находящегося в его центре.

Закономерности нестационарного переноса излучения изучены для ряда задач [1—9]. В редких случаях удается получить решения соответствующих уравнений в достаточно удобной для анализа форме. Существенные упрощения появляются только при отыскании асимптотик [1, 7—10]. Поэтому при изучении нестационарного поля излучения в работах [11—15] применялся подход, основанный на отыскании временных моментов. Он, несмотря на свою неполноту, значительно облегчает исследование нестационарного поля излучения. Временные моменты зачастую имеют непосредственный физический смысл, через них выражаются важные характеристики (средние времена разгорания, послесвечения, дисперсия, асимметрия импульса, сформировавшегося в рассеивающей среде). Отметим, что в теории переноса излучения рассматривались также характеристики (средние значения числа рассеяний и его степеней [16—19]), родственные указанным выше

В данной статье изложен метод расчета временных моментов функций, описывающих нестационарное поле излучения в рассеивающих средах, пригодный для исследования свечения при различных режимах возбуждения. В отличие от работ [11—15], на функциональный вид первичных источников не наложено ограничений, кроме некоторых слабых условий, при которых временные моменты имеют смысл. Предлагаемый подход может использоваться для исследования более широкого круга задач по сравнению с методами, изложенными в [12, 13]. Найден ряд соотношений, которые использованы при расчете временных моментов и параметров импульса применительно к конкретным типам возбуждения плоскопараллельной и сферически симметричной сред.

1. *Метод расчета.* а) *Нестационарное резонансное излучение.* Рассмотрим объем V, заполненный двухуровенным газом. Будем считать, что при рассеянии происходит полное перераспределение излучения по частотам [18], параметры среды не зависят от времени и координат. Предположим, что задержка излучения обуславливается только конечным временем пребывания частицы газа в возбужденном состоянии.

При указанных условиях отыскание населенности верхнего уровня $n_2(\vec{\tau}, u)$ в случае нестационарного возбуждения сводится к решению уравнения

$$\lambda \frac{dn_2(\vec{\tau}, u)}{du} = = -n_2(\vec{\tau}, u) + \frac{\lambda}{4\pi}\int\limits_{\overline{V}} K(|\vec{\tau} - \vec{\tau}'|)\, n_2(\vec{\tau}', u)\, d\overline{V}' + \lambda W(\vec{\tau}, u). \tag{1}$$

Здесь $\vec{\tau}$ — оптический радиус-вектор точки объема $\overline{V}(\vec{\tau} = n_1 \sigma_{12}(\nu_0)\vec{r}$, где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки объема V, n_1 — населенность нижнего уровня, $\sigma_{12}(\nu_0)$ — коэффициент поглощения в центре линии на частоте ν_0, рассчитанный на один атом); λ — вероятность выживания кванта; $u = A_{21}t$ (A_{21} — вероятность спонтанного испускания со второго уровня на первый, t — время); $W(\vec{\tau}, u) = n_1 F(\vec{\tau}, u)/A_{21}$ ($n_1 F(\vec{\tau}, u)$ — число частиц, возбужденных в единице объема около точки $\vec{\tau}$ в единицу времени за счет первичных источников возбуждения). Зависимость населенности $n_2(\vec{\tau}, u)$ от многократных процессов поглощения и испускания излучения описывается интегральным членом уравнения (1).

Ядро $K(|\vec{\tau}-\vec{\tau}'|)$ совпадает с ядром интегрального уравнения для функции источников при стационарном возбуждении. Выражение для $\overset{*}{K}(|\vec{\tau}-\vec{\tau}'|)$ приведено в монографии [18].

Преобразуем уравнение (1) к виду, который позволяет единообразно изложить метод расчета временных моментов при различных режимах возбуждения среды. Предположим, что при $u\to\infty$ величина $W(\vec{\tau}, u)$ и соответственно $n_2(\vec{\tau}, u)$ стремятся к стационарным значениям. Введем обозначения

$$
\mathrm{R}^*(\vec{\tau}, u)=\begin{cases}\mathrm{R}(\vec{\tau}, u)-\mathrm{R}(\vec{\tau}, \infty) & \text{при} \quad \mathrm{R}(\vec{\tau}, u)|_{u>0} > \mathrm{R}(\vec{\tau}, \infty), \\ \mathrm{R}(\vec{\tau}, \infty)-\mathrm{R}(\vec{\tau}, u) & \text{при} \quad \mathrm{R}(\vec{\tau}, \infty) > \mathrm{R}(\vec{\tau}, u)|_{u>0},\end{cases} \tag{2}
$$

$$
-\infty<u<\infty,
$$

где $\mathrm{R}(\vec{\tau}, u)$ представляет собой $n_2(\vec{\tau}, u)$ или $W(\vec{\tau}, u)$. Случаи, для которых не выполняется ни одно из неравенств в (2), рассматривать не будем, поскольку моменты в таких ситуациях, вообще говоря, не являются знакоопределенными. С учетом (2) уравнение (1) можно переписать в виде:

$$
\lambda\frac{dn_2^*(\vec{\tau}, u)}{du}=
$$

$$
=-n_2^*(\vec{\tau}, u)+\frac{\lambda}{4\pi}\int\limits_V K(|\vec{\tau}-\vec{\tau}'|)\,n_2^*(\vec{\tau}', u)\,d\overline{V}'+\lambda W^*(\vec{\tau}, u). \tag{3}
$$

Используя уравнение (3), исследуем временные моменты функции $n_2(\vec{\tau}, u)$, которые определяются формулами:

$$
M_n(\vec{\tau})=\int\limits_0^\infty u^n n_2^*(\vec{\tau}, u)\,du; \quad n=0, 1, 2,\ldots \tag{4}
$$

Применяя к (3) преобразование Лапласа, получим

$$
\overline{n}_2^*(\vec{\tau}, p)=\frac{\lambda}{4\pi(1+p\lambda)}\int\limits_V K[|\vec{\tau}-\vec{\tau}'|]\,\overline{n}_2^*(\vec{\tau}', p)\,d\overline{V}'+
$$

$$
+\frac{\lambda}{1+p\lambda}\left(\overline{W}^*(\vec{\tau}, p)+n_2^*(\vec{\tau}, 0)\right), \tag{5}
$$

где функции $\overline{n}_2^*(\vec{\tau}, p)$ и $\overline{W}^*(\vec{\tau}, p)$ являются образами по Лапласу от

$n_2^*(\vec{\tau}, u)$ и $W^*(\vec{\tau}, u)$. Как легко заметить, $M_n(\vec{\tau})$ выражаются через $\bar{n}_2^*(\vec{\tau}, p)$ по формулам

$$M_n(\vec{\tau}) = (-1)^n \frac{d^n \bar{n}_2^*(\vec{\tau}, p)}{dp^n}\Bigg|_{p=0}. \tag{6}$$

Из (5) найдем уравнения для моментов. Для этого будем искать решение (5) в окрестности $p=0$ в виде

$$\bar{n}_2^*(\vec{\tau}, p) = \sum_{i=0}^{\infty} R_i(\vec{\tau})\, p^i. \tag{7}$$

Подставляя этот ряд в (5), для $Ri(\vec{\tau})$ получим систему интегральных уравнений:

$$\begin{gathered}
R_0(\vec{\tau}) = \frac{\lambda}{4\pi}\int\limits_{\bar{V}} K(|\vec{\tau} - \vec{\tau}'|)\, R_0(\vec{\tau}')\, d\bar{V}' + \lambda\,(W_0(\vec{\tau}) + n_2^*(\vec{\tau}, 0)),\\
R_n(\vec{\tau}) = \frac{\lambda}{4\pi}\int\limits_{\bar{V}} K(|\vec{\tau} - \vec{\tau}'|)\, R_n(\vec{\tau}')\, d\bar{V}' + \lambda\left(\frac{(-1)^n}{n!}\, W_n(\vec{\tau}) - R_{n-1}(\vec{\tau})\right),
\end{gathered} \tag{8}$$

$$n = 1,\ 2, \ldots,$$

где

$$W_m(\vec{\tau}) = \int\limits_0^{\infty} u_m W^*(\vec{\tau}, u)\, du, \quad m = 0,\ 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Соотношения (6) и (7) показывают, что

$$M_n(\vec{\tau}) = (-1)^n n!\, R_n(\vec{\tau}). \tag{10}$$

Если учесть (10), то видно, что (8) фактически является системой уравнений для $M_n(\vec{\tau})$. Система (8), вообще говоря, позволяет рассчитать моменты для произвольных условий возбуждения среды при $u < 0$, если известно $n_2^*(\vec{\tau}, 0)$. Однако здесь будет рассмотрен только самый интересный случай, когда до $u = 0$ среда возбуждается стационарно. Из сказанного следует, что $n_2(\vec{\tau}, 0)$ будет удовлетворять стационарному интегральному уравнению. Соответствующие первичные функции возбуждения, входящие в стационарные уравнения для $n_2(\vec{\tau}, 0)$ и $n_2(\vec{\tau}, \infty)$, обозначим через $\lambda W^{\mathrm{I}}(\vec{\tau})$ и $\lambda W^{\mathrm{II}}(\vec{\tau}) \equiv \equiv \lambda W(\vec{\tau}, \infty)$.

Пусть $M_n^j(\vec{\tau})$, $M_n^{\mathrm{I}}(\vec{\tau})$ и $M_n^{\mathrm{II}}(\vec{\tau})$ являются соответственно n-ми временными моментами $n_2(\vec{\tau}, u)$ при импульсных возбуждениях, задаваемых $\lambda W_j(\vec{\tau})(u)$, $\lambda W^{\mathrm{I}}(\vec{\tau})\,\delta(u)$, $\lambda W_n^{\mathrm{II}}(\vec{\tau})\,\delta(u)$ ($\delta(u)$ — функция Дирака). Будем считать при этом, что $n_2(\vec{\tau}, u)\big|_{u<0} = 0$. Для вычисления величин $M_n^j(\vec{\tau})$, $M_n^{\mathrm{I}}(\vec{\tau})$ и $M_n^{\mathrm{II}}(\vec{\tau})$ можно использовать систему (8) с учетом (10). Но в этом случае в (8) необходимо положить $W_n(\vec{\tau}) \equiv 0$ $(n \geqslant 1)$, а при $n = 0$ заменить выражение $(W_0(\vec{\tau}) + \overset{*}{n_2}(\vec{\tau}, 0))$ соответственно на $W_j(\vec{\tau})$, $W^{\mathrm{I}}(\vec{\tau})$, $W^{\mathrm{II}}(\vec{\tau})$. Используя указанные системы интегральных уравнений, можно выразить n-ые моменты через нулевые. Для доказательства этого достаточно последовательно продифференцировать по $(1/\lambda)$ уравнения, составленные для определения $M_n^j(\vec{\tau})$, $M_n^{\mathrm{I}}(\vec{\tau})$, и $M^{\mathrm{II}}(\vec{\tau})$. Сравнивая получающиеся после дифференцирования уравнения с первоначальными, получаем

$$\mathfrak{M}_n = (-1)^n \frac{\partial^n \mathfrak{M}_0}{\partial (1/\lambda)^n}, \tag{11}$$

где $\mathfrak{M}_q$ обозначает любой из моментов $M_q^j(\vec{\tau})$, $M_q^{\mathrm{I}}(\vec{\tau})$ и $M_q^{\mathrm{II}}(\vec{\tau})$ $(q = 0;\ n)$. При выводе (11) предполагалось, что $W_j(\vec{\tau})$, $W^{\mathrm{I}}(\vec{\tau})$ и $W^{\mathrm{II}}(\vec{\tau})$ не зависят от λ. Это не ограничивает общности. Если эти величины зависят от λ, то можно всегда формально считать λ, входящее в них, постоянными и при дифференцировании учитывать только зависимость от λ, возникающую из самой структуры уравнений для $M_n^j(\vec{\tau})$, $M_n^{\mathrm{I}}(\vec{\tau})$ и $M_n^{\mathrm{II}}(\vec{\tau})$.

Учитывая (8)—(11), окончательно находим для временных моментов $\overline{M}_n(\vec{\tau})$ при произвольном возбуждении среды (при $0 \leqslant u$) следующие выражения:

$$M_n(\vec{\tau}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{\partial^k M_0^{n-k}}{\partial (1/\lambda)^k} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial (1/\lambda)^{n+1}} [\pm (M_0^I - M_0^{II})], \tag{12}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

где C_n^k — число сочетаний из n по k ($C_0^0 = 1$). Знак в (12) выбирается соответственно в зависимости от того, какое из неравенств в (2) выполняется. Формула (12) сводит вычисление $M_n(\vec{\tau})$ для общего случая к нахождению нулевых моментов $M_0^j(\vec{\tau})$, $M_0^{\mathrm{I}}(\vec{\tau})$, $M_0^{\mathrm{II}}(\vec{\tau})$, которые являются решениями соответствующих стационарных задач.

б) *Нестационарное монохроматическое рассеяние.* Подход, изложенный в разделе 1а, может быть использован при расчете временных моментов в случае нестационарного монохроматического рассеяния (теперь будем учитывать время пребывания фотона в пути между двумя последовательными рассеяниями). Поскольку метод расчета моментов для данного случая, в основном, совпадает с изложенным в разделе 1а, в этом пункте ограничимся только схематическим описанием вычислительной процедуры. Для простоты предположим, что рассеяние и первичные источники возбуждения, описываемые функцией $f(\vec{\tau}, u)$ ($\vec{\tau} = \varepsilon\vec{r}$, где ε — коэффициент поглощения; $u = \varepsilon vt$, v — скорость света), изотропны, среда однородна и ограничена невогнутой поверхностью. Будем считать, что при $u < 0$ среда не возбуждается. Уравнение переноса излучения с учетом сделанных предположений можно свести к интегральному уравнению для функции $\bar{B}(\tau_{1p}, \dots, \tau_{\beta p}, p)$ ($\tau_{ip} = (1+p)\tau_i$, $i = 1, 2, \dots, \beta$; τ_i — набор параметров, характеризующих решение соответствующей стационарной задачи (т. е. при $p = 0$) и имеющих смысл оптических расстояний), которая является образом по Лапласу от функции источников $B(\vec{\tau}, u)$ нестационарной задачи. Для этого достаточно применить к уравнению переноса излучения преобразование Лапласа по u (p — параметр преобразования), а затем, считая, что $Im\, p = 0$, перейти по известной методике [20] к интегральному уравнению, формально совпадающему с уравнением Пайерлса. Сделаем в этом уравнении замену $p \to \lambda p$ и введем обозначения

$$\bar{f}\left(\frac{\tau_{1p\lambda}}{1+p\lambda}, \dots, \frac{\tau_{\beta p\lambda}}{1+p\lambda}; \lambda p\right) = \lambda \bar{f}^1\left(\frac{\tau_{1p\lambda}}{1+p\lambda}, \dots, \frac{\tau_{\beta p\lambda}}{1+p\lambda}; \lambda p; \lambda\right) = \lambda \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} f_i^1(\tau_{1p\lambda}, \dots, \tau_{\beta p\lambda}; \lambda)\, p^i, \tag{13}$$

где $\bar{f}(\tau_1, \dots, \tau_\beta; p)$ является образом по Лапласу от $f(\vec{\tau}, u)$. Для единообразия принято, что $\bar{f}$ зависит от β параметров, хотя их число может быть меньше, чем количество параметров, входящих в $\bar{B}$. Теперь, отыскивая решение указанного интегрального уравнения в виде

$$\overline{B}(\tau_{1p\lambda}, \ldots, \tau_{3p\lambda}; \lambda p) = \sum_{i=0}^{\infty} B_i(\tau_{1p\lambda}, \ldots, \tau_{3p\lambda}; \lambda)\, p^i, \tag{14}$$

можно получить систему уравнений для B_i, которая подобна (8), но вместо R_i и W_i нужно подставить соответственно B_i и f_i^1, (ядро K интегральных уравнений, конечно, тоже изменяет свой вид). Временные моменты M_n, определяемые формулами, аналогичными (4), можно найти, используя соотношения

$$M_n = \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^n \left.\frac{d^n \overline{B}(\tau_{1p\lambda}, \ldots, \tau_{3p\lambda}; \lambda p)}{dp^n}\right|_{p=0}. \tag{15}$$

Величины B_i удовлетворяют формулам типа (11), (12) (при дифференцировании по $1/\lambda$ учитываем только явную зависимость B_i от λ, считая, что $\tau_{1p\lambda}, \ldots, \tau_{3p\lambda}$ не зависят от λ; относительно зависимости f_i^1 от λ будем предполагать то же самое, что и о функциях W_i в разделе 1а). Принимая во внимание эти формулы и соотношения (14), (15), окончательно для временных моментов от $B(\vec{\tau}, u)$ при произвольном возбуждении (при $u \geqslant 0$) имеем

$$M_n = \frac{1}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \lambda^k C_n^k \sum_{m=0}^{n-k} (-1)^m C_{n-k}^m \times$$

$$\times \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_3} C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_3} \frac{\partial^{k+m} M_0^{n-k-m}}{\partial (1/\lambda)^m \partial \tau_1^{\alpha_1} \partial \tau_2^{\alpha_2} \ldots \partial \tau_3^{\alpha_3}} \tau_1^{\alpha_1} \tau_2^{\alpha_2} \ldots \tau_3^{\alpha_3}, \tag{16}$$

$$C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_3} = \frac{k!}{\alpha_1!\, \alpha_2!\, \ldots, \alpha_3!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Суммирование в последней сумме (16) производится по всем значениям индексов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_3$, которые удовлетворяют условию $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_3 = k$. В (16) M_0^j представляет собой решение интегрального уравнения для функции источников при стационарном возбуждении, описываемом первичной функцией источников $\lambda f_j^1(\tau_1, \ldots, \tau_3)$.

Отметим, что (16) позволяет получить также общие выражения для моментов интенсивности излучения.

в) *Замечания.* Общий случай, когда необходимо учитывать время, проводимое фотоном в полете между последовательными двумя рассеяниями и время нахождения кванта в поглощенном состоянии (без учета перераспределения излучения по частотам), здесь рассматриваться не будет, поскольку при произвольном возбуждении формулы для моментов любого порядка имеют громоздкий вид.

В данной статье при выводе формул для временных моментов были использованы не только известные замены $\to \lambda/(1+p)$, $\tau \to \tau(1+p)$, которые формально связывают нестационарные и стационарные уравнения переноса при следующих предположениях:

$$\overline{W}(\vec{\tau}, p) = \overline{W}(\vec{\tau}), \qquad \bar{f}^1\left(\frac{\tau_{1p}}{1+p}, \dots, \frac{\tau_{3p}}{1+p}; \ p; \lambda\right) = \bar{f}^1(\tau_{1p}, \dots, \tau_{3p}; \lambda), \quad (17)$$

но и учтены зависимости $\overline{W}$ и $\bar{f}^1$ от p, не описываемые указанными заменами (т. е. принималось во внимание, что связь между нестационарным и стационарным уравнениями определяется также и членами, описывающими первичные источники возбуждения [21]). Условия (17), которые фактически предполагались в работах [11—15], сужают круг задач, которые можно рассмотреть на основе изложенных там формул. Если, в частности, источники возбуждения меняют спектральный состав, направленность и т. д., неоднородны относительно $\vec{\tau}$, то формулы для моментов, найденные в [11—15], применять нельзя. Изложенный выше подход свободен от этого недостатка, поскольку справедливость условий (17) не предполагалась. Формулы (11), (12) справедливы, вообще говоря, для среды, ограниченной произвольной поверхностью.

Заметим, что при выполнении второго из соотношений (17) формула (16) дает выражения для моментов в случае анизотропного рассеяния, если положить $m=n-k$. Под M_0^0 нужно понимать решение соответствующей стационарной задачи.

Достаточные условия существования временных моментов приводить не будем, но отметим, что этот вопрос сводится к доказательству сходимости рядов (7), (14) и возможности дифференцирования ряда (14).

2. *Характеристики нестационарного поля излучения, выражающиеся через моменты.* Кроме самостоятельного интереса временные моменты полезны еще и тем, что через них выражаются параметры, которые удобны при описании нестационарного переноса излучения. Наиболее важными из них и имеющими простой смысл, являются средняя длительность $\bar{u}$ и дисперсия σ, которые определяются формулами

$$\bar{u} = \int_0^\infty uG(u)\,du \Bigg/ \int_0^\infty G(u)\,du;$$

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (u-\bar{u})^2 G(u)\,du \Bigg/ \int_0^\infty G(u)\,du, \quad (18)$$

где $G(u)$ — любая из функций, характеризующих нестационарное поле излучения. Используя (12), (16) можно записать $\bar{u}$ и σ^2 в явном виде через нулевые моменты. Эти выражения позволяют рассчитывать $\bar{u}$ и σ^2 при различных режимах возбуждения среды.

3. *Вычисление временных моментов, средней длительности и дисперсии для случаев плоской и сферически симметричной среды.* Найденные в п. 1а. формулы (11), (12) справедливы также для временных моментов величин, которые выражаются через $n_2(\vec{\tau}, u)$ посредством операций относительно $\vec{\tau}$, коммутирующими с интегрированием по u. В дальнейшем при вычислении моментов различных величин будем использовать те же обозначения для них, что и в п. 1а. Уравнениям (8) с учетом (9), (10) с точностью до обозначений удовлетворяют и моменты функции источников $S(\vec{\tau}, u) = A_{21}n_2(\vec{\tau},u)/B_{12}n_1$ (B_{12} — эйнштейновский коэффициент вынужденного поглощения, рассчитанный на среднюю интенсивность излучения).

а) Предположим, что на границе полубесконечной плоскопараллельной среды, состоящей из двухуровенного газа, происходит мгновенная вспышка изотропного плоского источника, интенсивность которого пропорциональна профилю коэффициента поглощения и мощность на единицу площади равна $4\pi Q$. Для полного числа возбужденных атомов $\mathrm{R}(u, \lambda)$, находящихся в момент времени u в цилиндре единичного сечения, ось которого перпендикулярна к границе слоя, получим

$$\mathrm{R}(u, \lambda) = Q\frac{B_{12}n_1}{A_{21}}\int_0^\infty \Phi(\tau, u, \lambda)\, d\tau, \tag{19}$$

где τ оптическая глубина слоя [18], $\Phi(\tau, u, \lambda)$ — функция источников задачи о вспыхивающей плоскости [9] (первичные источники в этом случае задаются выражением $(\lambda/2)K(\tau)\,\delta(u)$). Как известно [18], для соответствующей стационарной задачи имеем соотношение

$$\int_0^\infty \Phi(\tau, \lambda)\, d\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} - 1. \tag{20}$$

Здесь $\Phi(\tau, \lambda)$ — функция источников при стационарном возбуждении, описываемом функцией $(\lambda/2)\,K(\tau)$. С помощью формул (11), (19), (20) для временных моментов M_n величины $\mathrm{R}(u, \lambda)$ при мгновенном возбуждении находим выражения

$$M_n = Q\frac{B_{12}n_1}{A_{21}}\left[\frac{\lambda^n}{(1-\lambda)^{1/2+n}} - \sum_{k=0}^{n} D_{nk}(1-\lambda)^k - \delta_{0n}\right], \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

где

$$\begin{gathered} D_{nk} = (-1)^k C_n^k\left(\delta_{0k} + (1-\delta_{0k})\prod_{m=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}-m\right)\right)\times \\ \left(\delta_{0(n-k)} + (1-\delta_{0(n-k)})\prod_{m=0}^{n-k-1}\left(\frac{1}{2}+m\right)\right). \end{gathered} \tag{22}$$

В формуле (22) δ_{ij} — символ Кронекера. Учитывая (12), (18), (21), (22) для $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ и σ_1 и σ_2, которые являются средними длительностями и дисперсиями соответственно для случаев мгновенного и стационарного при $u < 0$ возбуждений, имеем

$$\begin{gathered} \bar{u}_1 = \frac{\lambda^2}{2(1-\lambda)(1-\sqrt{1-\lambda})}, \qquad \bar{u}_2 = \frac{\lambda(4-\lambda)}{4(1-\lambda)}, \\ \sigma_1 = \sqrt{\bar{u}_1(2\bar{u}_2 - \bar{u}_1)}, \qquad \sigma_2 = \frac{\lambda}{1-\lambda}\sqrt{16-4\lambda-\lambda^2}. \end{gathered} \tag{23}$$

б) Пусть возбуждение полубесконечного слоя производится импульсом бесконечно широкого пучка света, падающего на границу под углом $\xi_1 = \arccos \zeta_1$ и имеющего безразмерную частоту x_1 $(x = (\nu - \nu_0)/\Delta\nu$, ν — частота, $\Delta\nu$ — полуширина линии). Будем учитывать конечность времени перемещения в слое возбуждающего светового пучка. Первичные источники возбуждения в уравнении для функции источников нестационарной задачи тогда имеют вид

$$c\lambda \exp(-\beta\tau)\,\delta(u - \gamma\tau), \tag{24}$$

где

$$\beta = \frac{\alpha(x_1)}{\zeta_1} = \frac{1}{z_1}, \qquad \gamma = \frac{A_{21}}{n_1\sigma_{12}(\nu_0)\,v\zeta_1}, \tag{25}$$

а c — константа, v — скорость света, $\alpha(x)$ — профиль коэффициента поглощения $(\alpha(0) = 1)$ [18]. Используя уравнения для временных моментов, формулы (12), (18) и метод, изложенный в монографии [18] (гл. VI, § 6, 7), для среднего времени свечения $\bar{u}$ (под $G(u)$ в (18) понимаем интенсивность излучения выходящего из слоя) при указанном возбуждении получим

$$\bar{u} = \lambda\left(1 + \lambda\frac{\partial \ln [H(z, \lambda) H(z_1, \lambda)]}{\partial\lambda}\right) +$$

$$+ \gamma z_1^2\left(\frac{zz_1^{-1}}{z + z_1} + \frac{\lambda}{2} H(z_1, \lambda)\,\Omega(z_1, \lambda)\right), \qquad (26)$$

$$z = \frac{\zeta}{\alpha(x)},$$

где $\vartheta = \arccos\zeta$ — угол между внешней нормалью к слою и направлением выходящего излучения, x — его частота, $H(z, \lambda)$ — обобщение функции Амбарцумяна на случай переноса излучения в частотах спектральной линии [18], функция $\Omega(z, \lambda)$ определена в [18] (гл. VI, § 6.7). Если второй член в (26) сравним с первым, то нельзя пренебрегать даже конечностью скорости перемещения возбуждающего импульса. Но эффект затягивания свечения слоя из-за многократных рассеяний еще более усилится. Поэтому оценка этого члена дает нижнюю границу вклада в задержку резонансного излучения из-за конечности времени пребывания фронта в пути между рассеяниями. Используя легко проверяемое соотношение

$$\Omega(z, \lambda) > 2A\left(\int_0^\infty \alpha^2(x)\,dx\right)\left(\ln\left(\frac{1+z}{z}\right) - \frac{1}{1+z}\right) = 2\varkappa(z), \qquad (27)$$

$$A^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\,dx,$$

получаем, что второй член $\bar{u}_\gamma$ в (26) удовлетворяет неравенству

$$\bar{u}_\gamma > \gamma z_1\left(\frac{z}{z + z_1} + \lambda z_1 \varkappa(z_1) H(z_1, \lambda)\right). \qquad (28)$$

Оценим параметр γ применительно к задаче о переносе излучения в линии L_α водорода. Допустим, что концентрация атомов водорода равна $n_1 = 10^{12}$ *см*$^{-3}$, а температура $T = 10^4$ °K. Учитывая выражения для коэффициента поглощения в случае доплеровского контура [22] и вторую из формул (25), находим, что γ по порядку равно $1/\tau_1$. При уменьшении n_1 и увеличении T, γ растет ($\gamma \sim 1/n_1$). Поскольку n_1 в астрофизических объектах (планетарных туманностях, хромосферах) мала [22, 23] и соответственно γ велико, то конечностью времени пребывания фотона в полете, вообще говоря, пренебрегать нельзя (даже $\bar{u}_\gamma$ может быть сравнимым с первым членом в (26)).

Однако, как видно из (26)—(28), учет конечности скорости света необходим и при достаточно больших концентрациях $n_1 \gtrsim 10^{12}$ $см^{-3}$, если среда возбуждается в частотах, лежащих на крыле коэффициента поглощения, т. е. $z_1 \gg 1$.

в) Рассчитаем среднее время $\bar{u}$ выхода энергии из сферически симметричной среды. Используя метод, предложенный в работе [24], нетрудно найти светимость шара для случая переноса излучения в частотах спектральной линии при стационарном возбуждении

$$L(\tau_0, \lambda) = \frac{16\pi^2\Delta\nu}{A\lambda n_1^2\sigma_{12}^2(\nu_0)} \int_0^{\tau_0} \tau^2 S^*(\tau)\,d\tau\,(1-(1-\lambda)N(\tau_0, \lambda)). \tag{29}$$

Здесь $S^*(\tau)$ — первичная функция источников на оптическом расстоянии τ от центра шара, τ_0 — оптический радиус шара, $N(\tau_0, \lambda)$ — среднее число рассеяний фотона [17, 19]

$$N(\tau_0, \lambda) = \left(\int_0^{\tau_0} \tau^2 S(\tau)\,d\tau\right)\left(\int_0^{\tau_0} \tau^2 S^*(\tau)\,d\tau\right)^{-1}, \tag{30}$$

где $S(\tau)$ — функция источников для шара [19]. Учитывая (12), (18), (29), для среднего времени свечения $\bar{u}_1$ в случае мгновенного возбуждения, мощность которого пропорциональна $S^*(\tau)$, имеем

$$\bar{u}_1 = \lambda^2\left(N(\tau_0, \lambda) - (1-\lambda)\frac{\partial N(\tau_0, \lambda)}{\partial\lambda}\right)(1-(1-\lambda)N(\tau_0, \lambda))^{-1}. \tag{31}$$

Если $\lambda < 1$, $\bar{u}_1$ не совпадает со средним числом рассеяний фотона. При консервативном рассеянии

$$\bar{u}_1 = N(\tau_0, 1). \tag{32}$$

Найдем среднее время $\bar{u}_2$ установления лучистого равновесия (совпадает со временем разгорания свечения) считая, что источники возбуждения при $u < 0$ отсутствовали, а после $u = 0$ шар стационарно возбуждается. Из (12), (18), (29), получим

$$\bar{u}_2 = \lambda + \frac{\lambda^2}{2}\left(2\frac{\partial N(\tau_0, \lambda)}{\partial\lambda} - (1-\lambda)\frac{\partial^2 N(\tau_0, \lambda)}{\partial\lambda^2}\right) \times \\ \times \left(N(\tau_0, \lambda) - (1-\lambda)\frac{\partial N(\tau_0, \lambda)}{\partial\lambda}\right)^{-1}. \tag{33}$$

В случае консервативного рассеяния

$$\bar{u}_2 = 1 + \left.\frac{\partial \ln N(\tau_0, \lambda)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=1}. \quad (34)$$

Средние длительности, описывающие изменение светимости шара, вообще говоря, не равны среднему числу рассеяний фотона.

В случае консервативного рассеяния $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$, можно рассчитать, принимая во внимание результаты [19]. Приведем только асимптотику для среднего времени $\bar{u}_2$ разгорания свечения при равномерном возбуждении шара

$$\bar{u}_2 \sim \frac{\Gamma(1+2\gamma)\,\Gamma\left(\gamma+\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(1+\gamma)\,\Gamma(2+2\gamma)\,\Gamma\left(\frac{5}{2}+2\gamma\right)} \, \frac{\tau_0^{2\gamma}}{V_0\left(\frac{1}{\tau_0}\right)}, \quad \tau_0 \gg 1, \quad (35)$$

где Γ — гамма-функция, величины γ и V_0 введены при исследовании асимптотических свойств поля излучения в частотах спектральной линии [18, 19]. Для случая доплеровского профиля из (35) с учетом выражения для $N(\tau_0, 1)$ [24] получим $\bar{u}_2 = 2^9\, N/45\pi^2 \approx 1.15\, N$, т. е. $\bar{u}_2$, N при $\lambda = 1$ и $\tau_0 \gg 1$ совпадают по порядку величины. Используя первую из формул во второй строке (23) и (31), (33), можно найти дисперсию при мгновенном возбуждении шара.

г) Допустим, что в центре шара происходит мгновенная вспышка точечного источника. Будем считать для простоты, что рассеяние изотропно. Первичная функция источников нестационарной задачи для случая монохроматического рассеяния при данных условиях возбуждения имеет вид

$$f(\tau, u) = L\frac{\lambda}{4\pi}\frac{e^{-\tau}}{\tau^2}\,\delta(u-\tau), \quad (36)$$

где L — определяется мощностью источника. Из (36) получим

$$\bar{f}\left(\frac{\tau_{1p}}{1+p}, p\right) = L\frac{\lambda}{4\pi}(1+p)^2\,\frac{e^{-\tau_{1p}}}{\tau_{1p}^2}. \quad (37)$$

В качестве величины, описывающей нестационарное поле излучения, возьмем поток излучения, выходящего с поверхности шара. Используя метод, описанный в разделе 16 и первую из формул (18), найдем для средней длительности $\bar{u}$ свечения шара выражение

$$\bar{u} = \lambda\frac{\partial \ln H(\tau_0, \lambda)}{\partial \lambda} - \frac{\partial \ln H(\tau_0, \lambda)}{\partial \tau_0}\,\tau_0 - 2, \quad (38)$$

где $H(\tau_0, \lambda)$ — поток излучения [24] в случае стационарного возбуждения шара точечным источником, находящимся в центре. Для $H(\tau_0, \lambda)$, как следует из [24], имеем

$$H(\tau_0, \lambda) = \frac{\lambda}{\tau_0^2}(1 - e^{-\tau_0})(1 - (1 - \lambda) N(\tau_0, \lambda)). \tag{39}$$

Здесь $N(\tau_0, 1)$ — среднее число рассеяний фотона, которое определяется по формуле, аналогичной (30), для случая точечного источника в центре шара. Формула для $N(\tau_0, \lambda)$ найдена в статье [24]. Подставляя (39) в (38), можно найти $\bar{u}$ через $N(\tau_0, \lambda)$ и его производные по λ и τ_0. Приведем лишь формулу для случая консервативного рассеяния

$$\bar{u} = N(\tau_0, 1) - \frac{\tau_0}{e^{\tau_0} - 1}. \tag{40}$$

При больших τ_0 и $\lambda = 1$ величина $\bar{u}$ фактически равна среднему числу рассеяний. Для $\lambda < 1$ или не слишком больших τ_0 средняя длительность $\bar{u}$ не совпадает с N, причем при малых τ_0 различие будет сильное. Если вести отсчет времени от начала прихода света к границе шара, то средняя длительность свечения u' примет вид

$$\overline{u'} = N(\tau_0, 1) - \tau_0/(1 - e^{-\tau_0}). \tag{41}$$

Например, для $\tau_0 = 0.5$, используя данные работ [24—26], найдем, что $\overline{u'} \approx 0.325$. Полученные формулы можно применить для оценки среднего времени свечения пылевой туманности, в центре которой происходит вспышка звезды (при более строгом рассмотрении необходимо учесть анизотропность рассеяния). Истинное среднее время свечения туманности $\bar{t} = \overline{u'}/\varepsilon v$. В частности, при консервативном рассеянии для $\tau_0 = 0.5$ и $\varepsilon \sim 3 \cdot 10^{-20}$ *см*$^{-1}$ [27] получаем, что $\bar{t} \approx 10$ *лет*.

В заключение отметим, что в изложенном в статье подходе нетрудно учесть неоднородность среды. Можно показать, что если известна функция Грина стационарной задачи в случае неоднородной среды, то временные моменты при произвольном возбуждении будут вычисляться по формулам, формально мало отличающимся от полученных в данной работе.

Институт физики АН БССР

THE NONSTATIONARY RADIATION TRANSFER IN SCATTERING MEDIA

N. N. ROGOVTSOV, A. M. SAMSON

The nonstationary radiation field in stationary homogeneous media is considered. The calculation method for temporal moments of functions defining nonstationary radiation is suggested. Several formulae for moments at arbitrary function of excitation are obtained. Using these formulae the generalized expressions for average time $\bar{u}$ and dispersion σ are found. The quantities $\bar{u}$ and σ for the cases of the flat parallel layer and a sphere at various kinds of excitation are calculated. The connections of $\bar{u}$ with the mean number of photon scattering in the sphere of some regimes of excitation are found. The influence of time lag due to the finiteness of velocity of light on nonstationary resonance radiation field is estimated. The average time lag $\bar{u}$ lumination of a sphere at instantaneous flash of the point source located at its centre is calculated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *T. Holstein*, Phys. Rev., 72, 1212, 1947.
2. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ГИТТЛ, М., 1956.
3. *Б. А. Векленко*, ЖЭТФ, 36, 204, 1959.
4. *И. Н. Минин*, Вестн. ЛГУ, № 13, 137, 1959; № 19, 124, 1962.
5. *А. М. Самсон*, Инж.-физ. ж., 2, 84, 1959.
6. *И. Н. Минин*, ДАН СССР, 154, 1059, 1964.
7. *I. Kuscer, P. F. Zweifel*, J. Math. Phys., 6, 1125, 1965.
8. *Ю. Ю. Абрамов, А. П. Напартович*, Астрофизика, 4, 195, 1968.
9. *Д. И. Нагирнер*, Астрофизика, 5, 31, 1969.
10. *И. Н. Минин*, Сб. „Теоретические и прикладные проблемы рассеяния света", Наука и техника, Минск, 1971.
11. *А. М. Самсон*, Оптика и спектроскопия, 8, 89, 1960.
12. *А. М. Самсон*, ЖПС, 9, 603, 1968.
13. *И. Л. Кацев*, ДАН БССР, 8, 118, 1969.
14. *И. Л. Кацев*, ЖПС, 11, 85, 1969.
15. *Н. Н. Роговцов*, ЖПС, 19, 1092, 1973.
16. *В. А. Амбарцумян*, ДАН Арм. ССР, 8, 101, 1948.
17. *В. В. Соболев*, Астрофизика, 2, 135, 239, 1966; 3, 137, 1967.
18. *В. В. Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
19. *Д. И. Нагирнер*, Астрофизика, 8, 353, 1972.

20. *Г. И. Марчук*, Методы расчета ядерных реакторов, Госатомиздат, М., 1961.
21. *И. Н. Минин*, Астрофизика, 3, 345, 1967.
22. *В. В. Соболев*, Курс теоретической астрофизики, Физматгиз, М., 1967.
23. *Г. А. Гурзадян*, Планетарные туманности, Физматгиз, М., 1962.
24. *В. В. Соболев*, Астрофизика, 8, 197, 1972.
25. *Ж. Белл, Р. Калаба, С. Уэно*, Астрофизика, 7, 23, 1971.
26. *Д. И. Нагирнер*, Астрофизика, 9, 347, 1973.
27. *И. Н. Минин*, Астрофизика, 3, 481, 1967.