АСТРОФИЗИКА

ТОМ 29 ДЕКАБРЬ, 1988 ВЫПУСК 3

УДК: 52—64

О НЕКОТОРЫХ АСИМПТОТИКАХ ПОЛЕЙ ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛОСКИХ ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ, СОДЕРЖАЩИХ ТОЧЕЧНЫЕ ИСТОЧНИКИ

Н. Н. РОГОВЦОВ

Поступила 17 июля 1987
Принята к печати 5 января 1988

Получена асимптотика функции Грина на оптической глубине τ_0 однородной полубесконечной среды, имеющей на границе точечный источник. Найдено асимптотическое выражение для интенсивности излучения, пропущенного однородным слоем оптической толщины τ_0, когда на его первой границе находится точечный источник. Полученные асимптотики справедливы при выполнении условия $(b/\sqrt{\tau_0}) = 0(1)$ при $\tau_0 \to \infty$, где b — минимальное оптическое расстояние от приемника до нормали к границе среды, проходящей через источник.

1. *Введение.* Из-за относительной простоты структуры асимптотических решений уравнения переноса излучения они представляют значительный интерес для самой теории переноса и ее приложений в астрофизике, гидрооптике, оптике рассеивающих сред. Наиболее подробно к настоящему времени исследованы асимптотические свойства полей излучения для таких ситуаций, когда среда и источники обладают плоскопараллельной симметрией (см., например, [1—13]). Ряд асимптотических решений уравнения переноса для однородных шара и сферической оболочки, содержащих сферически симметричные изотропные источники различных частных типов, найден в работах [1, 13—22]. Асимптотики функций Грина для случая бесконечных однородных сред, в которых находятся изотропные (точечный, линейный) и мононаправленные (точечный, линейный) источники получены соответственно в статьях [21—26] (в [21] найдено и явное выражение для функции Грина). В работах [15—18, 23] предполагалось, что индикатриса рассеяния является сферической. Асимптотические выражения для интенсивностей излучения, выходящего из однородных шара и цилиндра, содержащих соответственно в центре и на оси симметрии точечный и линейный мононаправленные источники, найдены в заметке [26]. В статьях [27, 28] получены асимптотики для потоков излучения в оптически толстых невогнутых рассеивающих средах.

Следует отметить, что значительная часть асимптотик, найденных в указанных выше публикациях, была получена с помощью одной общей идеи, фактически применявшейся в классических работах [1—3]. В общем случае ее можно сформулировать следующим образом: асимптотические решения уравнения переноса для рассеивающих тел некоторой конфигурации возможно находить из выражений типа соотношений инвариантности (или интегральных соотношений) посредством подстановки в них известных асимптотик, входящих в эти выражения величин. При реализации данной идеи наиболее удобно использовать такие соотношения, в которые входят решения относительно просто решаемых канонических задач теории переноса для сред более простой формы по сравнению с конфигурацией исследуемого объекта.

Исследования, выполненные в работах [14, 19—21, 23—26], указывают на то, что в ряде случаев через функции, описывающие асимптотические свойства полей излучения в классических задачах [1—3] о глубинном режиме в полубесконечной среде и о диффузном пропускании оптически толстого слоя при облучении их бесконечно широкими мононаправленными пучками излучения, выражаются асимптотики решений уравнения переноса в шаре и цилиндре.

В данной работе на основе сформулированных выше соображений будет показано, что, когда точечные источники и точки «наблюдения» удалены друг от друга на большое оптическое расстояние и лежат «достаточно близко» (точный смысл, вкладываемый в это понятие будет указан ниже) от некоторой прямой, перпендикулярной к границам полубесконечной среды и плоского слоя, можно найти асимптотики, которые имеют много общего с асимптотическими выражениями, полученными в [1—3] для указанных в предыдущем абзаце классических задач. Полученные в статье результаты можно использовать при проведении расчетов и оценок характеристик полей излучения, сформировавшихся в пылевых туманностях, когда они облучаются излучением звезд (или группы звезд), которые находятся внутри них или за их пределами.

2. *Исходные соотношения.* Для получения асимптотик интенсивностей излучения, выходящего из полубесконечной среды $V_{(0,\infty)}$ и пропущенного оптически толстым слоем при наличии в них соответственно на оптической глубине τ_0 ($\tau_0 \to \infty$) и на первой границе слоя точечных мононаправленных стационарных источников, можно воспользоваться стационарными аналогами соотношения инвариантности (12) из работы [29]. Оно связывает между собой функцию Грина для бесконечной среды V_∞ с объемной и поверхностной функциями Грина для тела V, ограниченного произвольной невогнутой поверхностью S (имеются в виду функции Грина неста-

ционарного уравнения переноса). Стационарный аналог этого выражения (схема получения такого рода соотношений изложена в [28, 30]) можно записать в следующем виде:

$$G_*(\vec{\tau}, \vec{\Omega}, \vec{\tau}^*, \vec{\Omega}^*, V) = G_\infty(\vec{\tau}, \vec{\Omega}, \vec{\tau}^*, \vec{\Omega}^*) + \\ + \frac{1}{\pi}\iint\limits_{S} dS'' \int\limits_{\Omega_-} (\vec{n}''\cdot\vec{\Omega}'')\, G_\infty(\vec{\tau}'', \vec{\Omega}'', \vec{\tau}^*, \vec{\Omega}^*)\, P(\ldots)\, d\Omega''. \quad (1)$$

Здесь $G_*(\ldots)$ и $G_\infty(\ldots)$ — объемные функции Грина стационарного уравнения переноса, записанного в безразмерных переменных соответственно для V и V_∞ (при этом V_∞ должна содержать часть, которая имеет геометрические и оптические характеристики, идентичные реализуемым в V); оптический радиус-вектор $\vec{\tau}^*$ и единичный вектор $\vec{\Omega}^*$ задают положение и направление испускания излучения точечного мононаправленного источника (считаем, что он расположен в $\overset{0}{V} = V \setminus S$; символ $\setminus$ обозначает операцию разности двух множеств), а $\vec{\tau}$, $\vec{\tau}''$ и $\vec{\Omega}$, $\vec{\Omega}''$ ($|\vec{\Omega}| = |\vec{\Omega}''| = 1$) определяют аналогичные характеристики для точек „наблюдения“ (в (1) считается, что они лежат на S); $\vec{n}''$ — внешняя нормаль к S в точке, фиксируемой концом оптического радиус-вектора $\vec{\tau}''$ ($|\vec{n}''| = 1$); Ω_- — полусфера, задаваемая условием $(\vec{n}''\cdot\vec{\Omega}'') < 0$; $P(\ldots) = P(\vec{\tau}'', \vec{\Omega}'', \vec{\tau}, \vec{\Omega}, V) = (\pi(\vec{n}\cdot\vec{\Omega}))\, G_S(\vec{\tau}'', -\vec{\Omega}'', \vec{\tau}, -\vec{\Omega}, V)$ — обобщенный коэффициент яркости [29] ($G_S(\ldots)$ — поверхностная функция Грина для V; $\vec{n}$ — внешняя нормаль к S в точке, определяемой $\vec{\tau}$ ($|\vec{n}| = 1$)). При записи выражения (1) предполагалось, что вектор $\vec{\Omega}$ удовлетворяет условию $(\vec{\Omega}\cdot\vec{n}) > 0$.

При выводе искомых асимптотик нам фактически понадобятся только два частных варианта соотношения (1). Первый из них нетрудно получить из (1) посредством формальной замены V на $V_{(0,\infty)}$ (границу $V_{(0,\infty)}$ обозначим через S_0). Если предположить, что V_∞ состоит из двух полупространств (одно из них должно быть чисто поглощающей средой, т. е. в ней $\lambda = 0$, где λ — вероятность выживания кванта) и $V = V_1$ — слой, одна из границ которого совпадает с поверхностью раздела двухслойной среды V_∞ (другую границу слоя обозначим через S_2), то из (1) найдем второе соотношение. Везде далее будем считать, что $V_{(0,\infty)}$ и V_1 являются однородными средами (будем также дополнительно предполагать, что в первом соотношении

V_∞ — однородная бесконечная среда). Для записи указанных выше вариантов соотношения (1) в развернутой форме используем прямоугольную декартову систему координат $OXYZ$, в которой будем задавать векторы $\vec{\tau}$, $\vec{\tau}''$, $\vec{\tau}^*$ ($\vec{\tau}=(x, y, z)$; $\vec{\tau}''=(x'', y'', z'')$; $\vec{\tau}^*=(x^*, y^*, z^*)$). Пусть плоскость OXY этой системы совпадает соответственно с S_0, когда $V=V_{(0,\infty)}$, и с S_1 (S_1 — первая граница V_1) при $V=V_1$. Будем считать, что направление оси OZ совпадает с направлением внутренней нормали к S_0 или S_1. Нормированные векторы $\vec{\Omega}$, $\vec{\Omega}^*$, $\vec{\Omega}''$ будем характеризовать косинусами μ, μ^*, μ'' углов, которые $\vec{\Omega}$, $\vec{\Omega}^*$, $\vec{\Omega}''$ образуют с осью OZ, а также соответствующими азимутальными углами φ, φ^*, φ''. Учитывая сказанное, отмеченные ранее частные случаи соотношения (1) можно представить в таком виде:

$$G_{(0,\infty)}(x, y, 0; \mu, \varphi; x^*, y^*, z^*; \mu^*, \varphi^*) =$$
$$= G_\infty(x, y, 0; \mu, \varphi; x^*, y^*, z^*; \mu^*, \varphi^*) -$$
$$-\frac{1}{|\mu|}\iint\limits_{S_0} dx''dy'' \int_0^1 \mu''d\mu'' \int_0^{2\pi} G_\infty(x'', y'', 0; \mu'', \varphi''; x^*, y^*, z^*, \mu^*, \varphi^*)\times$$
$$\times G_S(x'', y'', 0; -\mu'', \varphi''+\pi; x, y, 0; -\mu, \varphi+\pi; V_{(0,\infty)})\,d\varphi''; \quad (2)$$

$$G_*(x, y, \tau_0; \mu, \varphi; x^*, y^*, 0; \mu^*, \varphi^*; V_1) =$$
$$= G_{(0,\infty)}(x, y, \tau_0; \mu, \varphi; x^*, y^*, 0; \mu^*, \varphi^*) +$$
$$+\frac{1}{\mu}\iint\limits_{S_2} dx''dy'' \int_{-1}^0 \mu''d\mu'' \int_0^{2\pi} G_{(0,\infty)}(x'', y'', \tau_0; \mu'', \varphi''; x^*, y^*, 0; \mu^*, \varphi^*)\times$$
$$\times G_S(x'', y'', \tau_0; -\mu'', \varphi''+\pi; x, y, \tau_0; -\mu, \varphi+\pi; V_1)\,d\varphi'', \quad (3)$$

где $G_{(0,\infty)}(\vec{\tau}, \vec{\Omega}, \vec{\tau}^*, \vec{\Omega}^*) = G_{(0,\infty)}(x, y, z; \mu, \varphi; x^*, y^*, z^*; \mu^*, \varphi^*)$ — функция Грина уравнения переноса излучения для $V_{(0,\infty)}$; τ_0 — оптическая толщина слоя V_1. При этом надо считать, что μ удовлетворяет неравенству $\mu<0$ в выражении (2) и $\mu>0$ в формуле (3).

Соотношения (2), (3) указывают только на общую связь, существующую между объемными и поверхностными функциями Грина для бесконечной, полубесконечной сред и плоского слоя. Однако, в соответствии с общей идеей, кратко изложенной во введении, для получения в явном виде асимптотик величин $G_{(0,\infty)}(\ldots)$, $G_*(\ldots)$ необходима дополнительная содержательная информация об асимптотическом поведении функций $G_\infty(\ldots)$ и $G_{(0,\infty)}(\ldots)$, входящих соответственно в (2) и (3). В качестве таковой сначала будет использована асимптотика для $G_\infty(\ldots)$, найденная в работах [24, 25] различными методами. В следующем разделе на основе (2) и этой асимптотики будет получено асимптотическое выражение для $G_{(0,\infty)}(\ldots)$. Оно, в свою очередь, в последнем разделе работы наряду с (3) будет использовано при выводе асимптотического соотношения для $G_*(\ldots)$. Теперь выпишем указанную асимптотику для $G_\infty(\ldots)$ в следующем виде [26]:

$$G_\infty(\vec{\tau}'', \vec{\Omega}'', \vec{\tau}^*, \vec{\Omega}^*) = \frac{k\exp(-k|\vec{\tau}''-\vec{\tau}^*|)}{2\pi^2 M|\vec{\tau}''-\vec{\tau}^*|}\, i(\mu_1)\, i(\mu_2) +$$
$$+\gamma(\vec{\tau}'', \vec{\Omega}'', \vec{\tau}^*, \vec{\Omega}^*), \quad \gamma(\ldots) = q_1 + q_2, \tag{4}$$
$$q_2 = 0(|\vec{\tau}''-\vec{\tau}^*|^{-1}\exp(-k|\vec{\tau}''-\vec{\tau}^*|)),$$
$$|\vec{\tau}''-\vec{\tau}^*| \to \infty \quad (0<\lambda<1),$$

где k — наименьший неотрицательный корень характеристического уравнения; $i(\ldots)$ — глубинное тело яркости (будем считать, что эта функция нормирована условием $\int\limits_{-1}^{1} i(\mu)\,d\mu = (2/\lambda)$ [3]); $M = 2\int\limits_{-1}^{1}\mu i^2(\mu)\,d\mu$; μ_1, μ_2 — косинусы углов соответственно между $\vec{\Omega}''$, $\vec{\Omega}^*$ и направленным отрезком, соединяющим источник с точкой „наблюдения“, определяемой $\vec{\tau}''$; q_1 — обобщенная функция, описывающая прямое и первые кратности рассеянного излучения (ее явный вид приведен в монографии [31]), q_2 — ограниченная функция.

Следует подчеркнуть, что предварительно проинтегрированное по полной единичной сфере Ω (переменной интегрирования является $\vec{\Omega}^*$) соотношение (2) можно использовать для вывода асимптотики функции Грина $G_{(0,\infty)}(\vec{\tau}, \vec{\Omega}, \vec{\tau}^*) = \int\limits_{\Omega} G_{(0,\infty)}(\vec{\tau}, \vec{\Omega}, \vec{\tau}^*, \vec{\Omega}^*)\,d\Omega^*$, когда точка „наблюдения“ расположена на границе S_0 среды $V_{(0,\infty)}$, а точечный изотропный источник в глубине полубесконечной среды. При этом следует воспользоваться асимптотикой функции Грина $G_\infty(\vec{\tau}, \vec{\Omega}, \vec{\tau}^*) = \int\limits_{\Omega} G_\infty(\vec{\tau}, \vec{\Omega}, \vec{\tau}^*, \vec{\Omega}^*)\,d\Omega^*$ при $|\vec{\tau}-\vec{\tau}^*| \to \infty$ для случая бесконечной однородной среды V_∞, содержащей точечный изотропный источник. Отметим, что наличие точного выражения [21] для $G_\infty(\vec{\tau}, \vec{\Omega}, \vec{\tau}^*)$ дает возможность в принципе весьма надежно оценить остаточные члены асимптотики этой величины и других асимптотических выражений, построенных на ее основе. Соотношение же (4) позволяет оценить только порядок остаточных членов искомых асимптотик для функций $G_{(0,\infty)}(\ldots)$, $G_{*}(\ldots)$.

3. Асимптотика функции Грина в глубине полубесконечной однородной среды, имеющей на границе точечный мононаправленный источник. Пусть на оптической глубине τ_0 (т. е. $z^* = \tau_0$) полубесконечной среды находится точечный мононаправленный „источник" вида $\delta(\vec{\tau} - \vec{\tau}^*) \times \delta(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}^*)$ (в отличие от (1)—(3) ограничений на $\vec{\Omega}$ здесь не накладывается). Обозначим через $d = \sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2}$ минимальное расстояние между источником и нормалью к S_0, проведенную через точку „наблюдения" $(x, y, 0)$. Будем предполагать, что величина d удовлетворяет условию $(d/\sqrt{\tau_0}) = o(1)$ при $\tau_0 \to \infty$. Найдем с помощью (2) и (4) асимптотическое выражение для функции Грина $G_{(0,\infty)}(\ldots)$ при $\tau_0 \to \infty$. Для этого выделим область $S_0^{\bullet} \in S_0$ в виде круга с центром в точке „наблюдения" и оптическим радиусом, равным τ_1, для которого выполняется соотношение $(\tau_1/\sqrt{\tau_0}) = o(1)$ при $\tau_0 \to \infty$ (при этом $\tau_1 \to \infty$, когда $\tau_0 \to \infty$). Нетрудно показать, что при сделанных предположениях имеют место следующие асимптотики:

$$
\begin{gathered}
|\vec{\tau}'' - \vec{\tau}^*| = \tau_0 + O(\tau_0^{-1}(\tau_1 + d)^2), \\
\mu_1 = -\mu'' + O(\tau_0^{-1}(\tau_1 + d)), \qquad (5) \\
\mu_2 = -\mu^* + O(\tau_0^{-1}(\tau_1 + d)), \quad \tau_0 \to \infty.
\end{gathered}
$$

В (5) радиус-вектор $\vec{\tau}''$ должен задавать точку на $S_0^{\bullet}$, т. е. $z'' = 0$, $\sqrt{(x'' - x)^2 + (y'' - y)^2} \leqslant \tau_1$. Если теперь представить „поверхностный интеграл" в выражении (2) в виде суммы „интегралов" по $S_0^{\bullet}$ и $S_0 \setminus S_0^{\bullet}$, то с помощью (4), (5), ряда элементарных преобразований и оценок можно получить такую асимптотическую формулу:

$$
G_{(0,\infty)}(x, y, 0; -|\mu|, \varphi; x^*, y^*, \tau_0; \mu^*, \varphi^*) =
$$

$$
= \frac{k \exp(-k\tau_0)}{2\pi^2 M \tau_0} i(-\mu^*) \Bigg[i(|\mu|) - \frac{1}{|\mu|} \iint_{S_0} dx'' dy'' \int_0^1 \mu'' i(-\mu'')\, d\mu'' \times
$$

$$
\times \int_0^{2\pi} G_S(x'', y'', 0; -\mu'', \varphi'' + \pi; x, y, 0; |\mu|, \varphi + \pi; V_{(0,\infty)})\, d\varphi'' \Bigg] +
$$

$$+\eta(\vec{\tau}, \vec{\Omega}, \vec{\tau}^*, \vec{\Omega}^*) + q_3, \quad q_3 = o(\tau_0^{-1}\exp(-k\tau_0)), \tag{6}$$

$$(d/\sqrt{\tau_0}) = o(1), \quad \tau_0 \to \infty,$$

$$\vec{\tau} = (x, y, 0), \quad \vec{\tau}^* = (x^*, y^*, \tau_0) \quad (0<\lambda<1, \ \mu<0).$$

При выводе (6) было сделано физически оправданное допущение о непрерывной зависимости функции $i(\mu')$ от аргумента $\mu' \in [-1, 1]$, а также принято во внимание соотношение $(1/|(\vec{n}\cdot\vec{\Omega})|)\,G_S(\vec{\tau}'', -\vec{\Omega}'', \vec{\tau}, -\vec{\Omega}, V_{(0,\infty)}) \leqslant G_\infty(\vec{\tau}, \vec{\Omega}, \vec{\tau}'', \vec{\Omega}'')$, полученное с учетом принципа взаимности [32]. Нетрудно убедиться в том, что выражение, стоящее в квадратных скобках в (6) равно

$$i(|\mu|) + 2\int_{-1}^{0} \mu'' i(\mu'')\rho^0_{(0,\infty)}(|\mu''|, |\mu|)\,d\mu'', \tag{7}$$

где $\rho^0_{(0,\infty)}(\ldots)$ — нулевая азимутальная гармоника коэффициента отражения от полубесконечной среды [3]. Согласно формуле (53) работы [3] соотношение (7) равно $Mu(|\mu|)$, где $u(\ldots)$ — коэффициент пропускания полубесконечной среды [3]. С учетом сказанного из (6) находим следующую асимптотику:

$$G_{(0,\infty)}(x, y, 0; -|\mu|, \varphi; x^*, y^*, \tau_0; \mu^*, \varphi^*) =$$

$$= \eta(x, y, 0; -|\mu|, \varphi; x^*, y^*, \tau_0; \mu^*, \varphi^*) + q_3 +$$

$$+ \frac{k\exp(-k\tau_0)}{2\pi^2\tau_0}\, i(-\mu^*)\,u(|\mu|), \tag{8}$$

$$\frac{d}{\sqrt{\tau_0}} = o(1), \quad \tau_0 \to \infty \quad (0<\lambda<1).$$

Так как согласно принципу взаимности $G_{(0,\infty)}(\vec{\tau}^*, -\vec{\Omega}^*, \vec{\tau}, -\vec{\Omega}) = G_{(0,\infty)}(\vec{\tau}, \vec{\Omega}, \vec{\tau}^*, \vec{\Omega}^*)$, то правая часть выражения (8) является также искомой асимптотикой для функции Грина, когда точка „наблюдения“ (теперь она задается вектором $\vec{\tau}^* = (x^*, y^*, \tau_0)$) находится в глубине полубесконечной однородной среды $V_{(0,\infty)}$, а точечный мононаправленный источник расположен на ее границе в точке $(x, y, 0)$. Заметим, что условие $(d/\sqrt{\tau_0}) = o(1)$ при $\tau_0 \to \infty$ (см. также аналогичное условие в следующем пункте) придает точный смысл понятию „достаточно близкого расположения“ источника и точки „наблюдения“ от прямой, перпендикулярной S_0.

Если на оптической глубине τ_0 среды $V_{(0,\infty)}$ находится точечный изотропный „источник" $\delta(\vec{\tau}-\vec{\tau}^*)$, то принимая во внимание нормировку функции $i(\ldots)$, указанную выше, получим из (8) такое асимптотическое выражение:

$$G_{(0,\infty)}(\vec{\tau},\vec{\Omega},\vec{\tau}^*)=G_{(0,\infty)}(x,y,0;-|\mu|,\varphi;x^*,y^*,\tau_0)=$$
$$=\eta^*(x,y,0;-|\mu|,\varphi;x^*,y^*,\tau_0)+q_3^*+\frac{2k\exp(-k\tau_0)}{\lambda\pi\tau_0}u(|\mu|), \quad (9)$$
$$\eta^*(x,y,0;-|\mu|,\varphi;x^*,y^*,\tau_0)=$$
$$=\int_{-1}^{1}d\mu^*\int_0^{2\pi}\eta(x,y,0;-|\mu|,\varphi;x^*,y^*,\tau_0;\mu^*,\varphi^*)\,d\varphi^*,$$
$$q_3^*=\int_{\Omega}q_3d\Omega^*,\quad \frac{d}{\sqrt{\tau_0}}=o(1),\ \tau_0\to\infty\ (0<\lambda<1).$$

Заметим, что выражения (9) и (8) формально схожи с асимптотиками, найденными в работах [21, 26] для случая оптически толстого шара, содержащего в центре соответственно точечные изотропный и мононаправленный источники.

Следует отметить работу [33], в которой на основе анализа уравнений для пространственных моментов была найдена асимптотика функции Грина в глубине полубесконечной среды $V_{(0,\infty)}$, имеющей на границе точечный мононаправленный источник, испускающий излучение в направлении внутренней нормали к ее границе. При этом в [33] делалось предположение о возможности представления поля излучения в глубине $V_{(0,\infty)}$ на плоскости, параллельной S_0, в виде двумерного нормального закона распределения. Выражение (8) является обобщением полученной в [33] асимптотики для указанной функции Грина.

4. *Асимптотическое выражение для поверхностной функции Грина оптически толстого однородного слоя.* Пусть на первой границе S_1 слоя V_1 находится точечный мононаправленный источник, расположенный в точке $(x^*, y^*, 0)$. Точку „наблюдения" расположим на второй границе S_2 слоя V_1 (т. е. зададим ее вектором $\vec{\tau}=(x,y,\tau_0)$). Будем предполагать, что она лежит внутри круга $S_2^*\in S_2$ с центром в точке (x^*, y^*, τ_0) и радиусом τ_2, удовлетворяющим условию $(\tau_2/\sqrt{\tau_0})=o(1)$ при $\tau_0\to\infty$. Если теперь записать "поверхностный интеграл" в (3) в виде суммы „интегралов" по S_2^* и $(S_2\setminus S_2^*)$, принять во внимание асимптотики (4), (8), то с помощью ряда преобразований и оценок можно получить следующее асимптотическое соотношение:

$$G_*(x, y, \tau_0; |\mu|, \varphi; x^*, y^*, 0; |\mu^*|, \varphi^*; V_1) =$$

$$= \frac{k\exp(-k\tau_0)}{2\pi^2\tau_0} u(|\mu^*|)\left[i(|\mu|) + \frac{1}{|\mu|}\iint\limits_{S_2} dx''dy'' \int\limits_{-1}^{0} \mu'' i(\mu'')\, d\mu'' \times\right.$$

$$\left.\times \int\limits_{0}^{2\pi} G_S(x'', y'', \tau_0; -\mu'', \varphi''+\pi; x, y, \tau_0; -|\mu|, \varphi+\pi; V_1)\, d\varphi''\right] +$$

$$+ \eta(x, y, \tau_0; |\mu|, \varphi; x^*, y^*, 0; |\mu^*|, \varphi^*) + q_4, \qquad (10)$$

$$\frac{d_1}{\sqrt{\tau_0}} = o(1), \quad \tau_0 \to \infty \quad (0 < \lambda < 1),$$

где $d_1 = \sqrt{(x-x^*)^2 + (y-y^*)^2}$ — минимальное оптическое расстояние между нормалями к границам слоя, проведенными через источник и точку „наблюдения“; q_4 — ограниченная функция, допускающая такую же оценку, как и величина q_3. Нетрудно убедиться в том, что выражение в квадратных скобках в (10) равно $2\int\limits_{-1}^{0} \mu'' i(\mu'')\, \rho^0_{(0,\tau_0)}(|\mu''|, |\mu|) \times d\mu'' + i(|\mu|)$, где $\rho^0_{(0,\tau_0)}(\ldots)$ — нулевая азимутальная гармоника коэффициента отражения для плоскопараллельного слоя оптической толщины τ_0 [3]. Принимая во внимание асимптотику для $\rho^0_{(0,\tau_0)}(\ldots)$ при $\tau_0 \to \infty$ [3] и формулу (53) из монографии [3], соотношение (10) нетрудно преобразовать к виду

$$G_*(x, y, \tau_0; |\mu|, \varphi; x^*, y^*, 0; |\mu^*|, \varphi^*; V_1) =$$

$$= \frac{Mk\exp(-k\tau_0)}{2\pi^2\tau_0} u(|\mu^*|)\, u(|\mu|) +$$

$$+ \eta(x, y, \tau_0; |\mu|, \varphi; x^*, y^*, 0; |\mu^*|, \varphi^*) + q_5, \qquad (11)$$

$$\frac{d_1}{\sqrt{\tau_0}} = o(1), \quad q_5 = o(\tau_0^{-1}\exp(-k\tau_0)), \quad \tau_0 \to \infty, \quad (0 < \lambda < 1).$$

С учетом принципа взаимности [32] из (11) в свою очередь находим искомую асимптотику для поверхностной функции Грина

$$G_S(x^*, y^*, 0; -|\mu^*|, \varphi^*+\pi; x, y, \tau_0; -|\mu|, \varphi+\pi; V_1) =$$

$$= |\mu|\frac{Mk\exp(-k\tau_0)}{2\pi^2\tau_0} u(|\mu^*|)\, u(|\mu|) +$$

$$+ |\mu|(q_5 + \eta(x, y, \tau_0; |\mu|, \varphi; x^*, y^*, 0; |\mu^*|, \varphi^*)), \qquad (12)$$

$$\frac{d_1}{\sqrt{\tau_0}} = o(1), \quad \tau_0 \to \infty \quad (0 < \lambda < 1).$$

В отличие от (11) в (12) точка „наблюдения“ (она имеет координаты (x^*, y^*, 0)) расположена на S_1, а место падения бесконечно узкого мононаправленного пучка излучения совпадает с точкой (x, y, τ_0), лежащей на S_2.

Заметим, что для получения асимптотических выражений для интенсивности излучения при наличии в $V_{(0,\infty)}$ и V_1 точечных диффузных источников с относительной угловой диаграммой $f(\mu, \varphi)$ $\left(\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-1}^{1} f(\mu, \varphi)\, d\mu = 1\right)$ достаточно умножить (8), (11) на $\alpha^2 E_0 f(\mu^*, \varphi^*)$ (E_0 — мощность источника; α — коэффициент ослабления), а затем проинтегрировать по μ^*, φ^* соответственно по полной единичной сфере и полусфере, задаваемой условиями $0 \leqslant \mu^* \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi^* < 2\pi$.

В статье выявлены некоторые ситуации, для которых угловая структура полей излучения в полубесконечной среде и плоском слое, содержащих точечные источники, полностью определяется функциями $i(\ldots)$, $u(\ldots)$, введенными в теорию переноса в [1—3] при решении указанных выше классических задач. Подчеркнем, что, когда величина $(\sqrt{(x-x^*)^2 + (y-y^*)^2}/\tau_0)$ не стремится к нулю при $\tau_0 \to \infty$, зависимости функций Грина от угловых переменных становятся существенно сложнее по сравнению с теми, которые имеют место в полученных в работе асимптотиках.

Белорусский политехнический
институт

ON SOME ASYMPTOTIC FORMULAS OF RADIATION FIELDS IN PLANE UNIFORM MEDIA OBTAINING POINT SOURCES

N. N. ROGOVTSOV

The asymptotic formulae for Green's function in optical depth τ_0 of the semi-infinite medium having on its boundary surface a point source are obtained. When on the first boundary surface of the layer with optical thickness τ_0 a point source is situated, the asymptotic expression for intensity of radiation passing through it is found. The asymptotic formulas obtained are valid if $(b/\sqrt{\tau_0}) = o(1)$ at $\tau_0 \to \infty$, where b is the minimal optical distance from the receiver to the boundary normal passing through the source.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян*, Научные труды, т. 1, Ереван, 1960.
2. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ГИТЛ, М., 1956.
3. *В. В. Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, М., 1972.
4. *Т. А. Гермогенова*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1, 1001, 1961.
5. *М. А. Мнацаканян*, Астрофизика, 12, 451, 1976.
6. *В. В. Иванов, Е. В. Волков*, Уч. зап. ЛГУ. вып. 57, № 400, 3, 1978.
7. *В. В. Иванов, Х. Домке*, Астрон. ж., 52, 1034, 1975.
8. *Т. А. Гермогенова, Н. В. Коновалов*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 14, 928, 1974.
9. *Э. Г. Яновицкий*, Астрон. ж., 57, 1277, 1981.
10. *О. В. Пикичян*, Астрофизика, 16, 351, 1980.
11. *А. А. Килбас, Н. Н. Роговцов*, Докл. АН БССР, 26, 197, 1982.
12. *В. В. Соболев*, Астрофизика, 20, 123, 1984.
13. *Н. Н. Роговцов, А. М. Самсон*, Астрофизика, 23, 163, 1985.
14. *В. В. Соболев*, Докл. АН СССР, 273, 573, 1983.
15. *В. В. Соболев*, в сб. «Кинематика и динамика звездных систем и физика межзвездной среды, Алма-Ата, 1965, стр. 285.
16. *Д. И. Нагирнер*, Тр. АО ЛГУ, 22, 66, 1965.
17. *Д. И. Нагирнер*, Астрофизика, 8, 353, 1972.
18. *Т. А. Гермогенова*, Астрофизика, 2, 251, 1966.
19. *А. К. Колесов*, Астрофизика, 21, 309, 1984.
20. *А. К. Колесов*, Астрофизика, 22, 177, 1985.
21. *А. К. Колесов*, Докл. АН СССР, 272, 53, 1983.
22. *Н. Н. Роговцов*, Ж. прикл. спектр., 44, 659, 1986.
23. *G. E. Hunt*, J. Appl. Math., 16, 1255, 1968.
24. *У. Фано, Л. Спенсер, М. Бергер*, Перенос гамма-излучения, М., 1963.
25. *Л. С. Долин*, в сб. «Оптика моря», М., 1983, стр. 118.
26. *Н. Н. Роговцов*, Докл. АН БССР, 30, 901, 1986.
27. *Н. Н. Роговцов*, Докл. АН БССР, 27, 901, 1983.
28. *Н. Н. Роговцов*, Изв. АН СССР, Физ. атмосферы и океана, 21, 1111, 1985.
29. *Н. Н. Роговцов*, Ж. прикл. спектр., 35, 1044, 1981.
30. *Н. Н. Роговцов*, Ж. прикл. спектр., 34, 335, 1981.
31. *Т. А. Гермогенова*, Локальные свойства решений уравнения переноса, Наука, М., 1986.
32. *К. Кейз, П. Цвайфель*, Линейная теория переноса, М., 1972.
33. *Л. М. Романова*, Изв. АН СССР, Физ. атмосферы и океана, 4, 311, 1968.