УДК 517.937

Н. Н. РОГОВЦОВ

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ПРОЦЕСС МНОГОФОТОННОГО БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ МОЛЕКУЛ

1. Решение целого ряда задач лазерной химии и фотофизики [1, 2], теории лазера на свободных электронах [3], а также изучение эффективности лазерного разделения изотопов [4] сводится к исследованию следующей задачи Коши для бесконечной системы дифференциальных уравнений (ДУ) вида:

$$-i\frac{dx_n(t)}{dt}=f_{n+1}(t)x_{n+1}(t)+h_n(t)x_{n-1}(t)+s_n(t)x_n(t), \tag{1}$$

$$x_n(0)=\alpha_n;\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\quad t\in\Omega\subset[0,\ \infty);\quad x_{-1}(t)=0\quad \forall t\in\Omega.$$

Здесь $\{f_n(t)\}$, $\{h_n(t)\}$, $\{s_n(t)\}$, $\{\alpha_n\}$ и $\{x_n(t)\}$ — соответственно заданные и искомая последовательности, а Ω совпадает с $[0,\ b]$ или $[0,\ \infty)$. Решения задачи (1) для частных случаев последовательностей $\{f_n(t)\}$, $\{h_n(t)\}$, $\{s_n(t)\}$, $\{\alpha_n\}$ были получены в работах [5—8]. Численные алгоритмы решения задачи Коши, полученной из (1) посредством ее усечения, использовались в статьях [9, 10]. Обзор работ, посвященных разработке качественной теории бесконечных систем ДУ и методов их решения, дан в монографии [11, с. 5]. В этой статье дано качественное исследование задачи (1) и предложен алгоритм ее решения, допускающий удобную численную реализацию. Результаты, изложенные в ней, позволяют оценить область применимости приближений, использованных в [5—10] при формулировке и решении различных частных случаев задачи (1).

2. Обозначим через $\mathfrak{C}^\beta[a,\ b]$ класс всех комплекснозначных вектор-функций $\vec{x}(y)=(x_0(y),\ x_1(y),\ \ldots)$ действительного аргумента, для которых $x_k(y)\in C^\beta[a,\ b]$ $\forall k\in N_0=N\cup\{0\}$. Пусть $\mathfrak{C}^\beta_l[a,\ b]$ — класс всех вектор-функций, принадлежащих $\mathfrak{C}^\beta[a,\ b]$ и для каждой из которых $\exists l<\infty$ такое, что для $\forall y\in[a,\ b]$ выполняется условие $\sup\limits_{k\in N_0}\{|x_k(y)|\}\leqslant l$. Через $\mathfrak{C}^1(f,\ [0,\ \infty))$ будем обозначать класс всех комплекснозначных вектор-функций, для которых $x_k(y)\in C^1[0,\ \infty)$ $\forall k\in N_0$, $\sqrt{|f_m(y)|}\,x_n(y)\rightrightarrows 0$ на $\forall[a,\ b]\subset[0,\ \infty)$ при $n\to\infty$, где $m=n,\ n+1$. Обозначим через $\mathfrak{C}^1_0(f,\ [0,\ \infty))$ класс всех вектор-функций, принадлежащих $\mathfrak{C}^1(f,\ [0,\ \infty))$ и удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|x_k(y)|^2=\mathrm{const}<\infty$ для $\forall y\in[0,\ \infty)$.

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть* $\operatorname{Im} f_n(t)=\operatorname{Im} s_n(t)=0$, $f_n(t)=h_n(t)$, $f_n(t)\in C[0,\ \infty)$ *для* $\forall n\in N_0$. *Тогда задача (1) при* $\Omega=[0,\ \infty)$ *может иметь в* $\mathfrak{C}^1(f,\ [0,\ \infty))$ *только единственное решение. Если существует решение (1) в* $\mathfrak{C}^1(f,\ [0,\ \infty))$, *то для него справедливо соотношение*

$$\sum_{n=0}^{\infty}|x_n(t)|^2=\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|^2\quad для\quad \forall t\in[0,\ \infty). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть (1) имеет в $\mathfrak{C}^1(f,\ [0,\ \infty))$ два решения. Их разность $\vec{g}(t)=(g_0(t),\ g_1(t),\ \ldots)$ удовлетворяет (1) при $\alpha_n=0$ для $\forall n\in N_0$. Умножим $(k+1)$-е уравнение такой системы на $(-\overline{g_k(t)})$

и сложим результат с выражением, комплексно-сопряженным с ним. Суммируя полученное соотношение по k от 0 до m, получим равенство

$$\sum_{k=0}^{m} |g_k(t)|^2 = 2\int_0^t f_{m+1}(t') \operatorname{Im}(g_m(t')\overline{g_{m+1}(t')})\,dt', \tag{3}$$

$$m \in N_0.$$

Так как $\vec{g}(t) \in \mathfrak{C}^1(f, [0, \infty))$, то из (3) имеем $\sum_{k=0}^{\infty} |g_k(t)|^2 = 0$ для $\forall t \in [0, \infty)$. Следовательно, $\vec{g}(t) = \vec{0}$ на $[0, \infty)$, что противоречит исходному предположению. Итак, задача (1) может иметь в $\mathfrak{C}^1(f, [0, \infty))$ только одно решение. Если существует решение (1) в $\mathfrak{C}^1(f, [0, \infty))$, то аналогично предыдущему показывается, что оно удовлетворяет соотношению, отличающемуся от (3) только наличием в правой части величины $\sum_{k=0}^{m} |\alpha_k|^2$. Из этого выражения следует (2). Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполняются следующие условия: для* $\forall n \in N_0$ $|\alpha_n| \leqslant c < \infty$; *функции* $f_n(t)$, $h_n(t)$, $s_n(t) \in C[0, b]$ $\forall n \in N_0$; *для* $\forall t \in [0, b]$ $\lim_{n\to\infty} |h_n(t)| = \infty$, $\lim_{n\to\infty} |f_n(t)| = 0$; $\{\tau_n\}$, $\{\nu_n\omega_n\}$ — *ограниченные последовательности, где* $\tau_n = \max_{t\in[0,b]} |s_n(t)|$, $\nu_n = \max_{t\in[0,b]} |f_n(t)|$, $\omega_n = \max_{t\in[0,b]} |h_n(t)|$; *имеет место хотя бы одно из соотношений* $\nu_n \neq 0$ $(\forall n \in N_0)$, $\omega_n \neq 0$ $(\forall n \in N_0)$. *Тогда задача (1) при* $\Omega = [0, b]$ *имеет решение в классе* $\mathfrak{C}^1[0, b]$ *и может иметь в* $\mathfrak{C}_l^1[0, b]$ *только единственное решение.*

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши

$$-i\frac{d\varkappa_n^*(t)}{dt} = f_{n+1}(t) v_{n+1} \varkappa_{n+1}^*(t) + h_n(t) v_n^{-1} \varkappa_{n-1}^*(t) +$$

$$+ s_n(t) \varkappa_n^*(t), \quad \varkappa_n^*(0) = \frac{\alpha_n}{\gamma_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad t \in [0, b]; \quad \varkappa_{-1}^*(t) = 0 \tag{4}$$

$$\forall t \in [0, b].$$

Здесь $\{\varkappa_n^*(t)\}$ — искомая последовательность; величины v_n при $\nu_n \neq 0$ $(\forall n \in N_0)$ и $\omega_n \neq 0$ $(\forall n \in N_0)$ даются для $\forall n \in N_0$ соответственно выражениями $v_n = C\nu_n^{-1}$ и $v_n = C^{-1}\omega_n$ $(C \neq 0, |C| < \infty)$; $\gamma_n = \prod_{k=1}^{n} v_k$ при $n \in N$ и $\gamma_0 = 1$. Задача (4) удовлетворяет условиям теоремы, доказанной в [12]. В силу этой теоремы и условий теоремы 2 существует единственное решение (4) в классе $\mathfrak{C}_l^1[0, b]$. Поскольку функции $x_n(t) = \gamma_n \varkappa_n^*(t)$ $(n \in N_0)$ удовлетворяют задаче (1) при $\Omega = [0, b]$, получаем, что существует ее решение в $\mathfrak{C}^1[0, b]$. Предположим, что задача (1) имеет два решения в $\mathfrak{C}_l^1[0, b]$. Их разность $\vec{\eta}(t)$ удовлетворяет (1) при $\alpha_n = 0$ $\forall n \in N_0$. Из выражений $\eta_n(t) = \gamma_n \sigma_n(t)$ $(n \in N_0)$ и условий теоремы 2 следует, что $\vec{\sigma}(t) \in \mathfrak{C}_l^1[0, b]$. Но функции $\sigma_n(t)$ $(n \in N_0)$ удовлетворяют задаче (4) при $\alpha_n = 0$ для $\forall n \in N_0$, которая по доказанному выше имеет единственное решение в $\mathfrak{C}_l^1[0, b]$. Следовательно, $\vec{\sigma}(t) = \vec{0}$, что влечет за собой $\vec{\eta}(t) = \vec{0}$. Это противоречит исходному предположению. Теорема доказана.

3. Сформулируем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Если* $\max\{|\varepsilon_n|, |\mu_n|, |\varkappa_n|\}\leqslant D(1+n^\beta)$ $(D<\infty, \beta\in[0, 1))$ *для* $\forall n\in N_0$ *и* $\max\{|\alpha_0|, |\alpha_1|, ..., |\alpha_p|\}=A<\infty$, *то существует единственное решение* $\rho_{n,k}\in\mathbf{C}$ $(n, k\in N_0)$ *следующей системы рекуррентных соотношений*:

$$\begin{gathered}\rho_{n,k+1}=\varepsilon_{n+1}\rho_{n+1,k}+\mu_n\rho_{n-1,k}+\varkappa_n\rho_{n,k};\\ \rho_{-1,k}=0;\ \rho_{n,0}=\alpha_n;\ \alpha_n=0\ \forall n>p\ (p, n, k\in N_0,\ p<\infty).\end{gathered}\tag{5}$$

При этом справедливы соотношения

$$|\rho_{n,k}|\leqslant A[3D(1+(n+k)^\beta)]^k\ \forall n,\ k\in N_0;\tag{6}$$

$$\rho_{p+r,k}=0\ \forall r\in N_0\backslash\{0, 1, ..., k\}.$$

Лемма 2. *Пусть* $|\varepsilon_{n+1}|+|\mu_n|+|\varkappa_n|\leqslant q<1\ \forall n\in N_0$, $\alpha_n=0\ \forall n>p$ $(p\in N_0, p<\infty)$, $\chi(\theta)\in C[-\pi, \pi]$. *Тогда для* $\forall n\in\{0, 1, ..., m\}$ *функции* $\tilde{\rho}_{m,n}(\theta)$, *удовлетворяющие конечной системе*

$$\begin{gathered}(\exp(-i\theta)-\varkappa_n)\tilde{\rho}_{m,n}(\theta)=\varepsilon_{n+1}\tilde{\rho}_{m,n+1}(\theta)+\mu_n\tilde{\rho}_{m,n-1}(\theta)+\\ +\alpha_n\chi(\theta)\exp(-i\theta),\end{gathered}\tag{7}$$

$$\tilde{\rho}_{m,-1}(\theta)=\tilde{\rho}_{m,m+1}(\theta)=0\ \ \forall\theta\in[-\pi, \pi],\ n\in\{0, 1, ..., m\},$$

сходятся равномерно на $[-\pi, \pi]$ *при* $m\to\infty$ *к функциям* $\tilde{\rho}_n(\theta)$, *которые являются решением бесконечной системы уравнений*

$$(\exp(-i\theta)-\varkappa_n)\tilde{\rho}_n(\theta)=\varepsilon_{n+1}\tilde{\rho}_{n+1}(\theta)+\mu_n\tilde{\rho}_{n-1}(\theta)+\alpha_n\chi(\theta)\exp(-i\theta),\tag{8}$$

$$\tilde{\rho}_{-1}(\theta)=0\ \ \forall\theta\in[-\pi, \pi],\ n\in N_0,$$

однозначно разрешимой в $\mathfrak{C}_l[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Из (5) и условий леммы 2 следует $|\rho_{n,k}|\leqslant Aq^k$ для $\forall n,\ k\in N_0$. Следовательно, ряды Фурье $\xi_n(\theta)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\rho_{n,k}\times\exp(ik\theta)$ сходятся для $\forall n\in N_0$ равномерно на $[-\pi, \pi]$, причем $\xi_n(\theta)\in C[-\pi, \pi]$ $\forall n\in N_0$. Из сходимости этих рядов и (5) вытекает, что $\vec{\eta}(\theta)=\chi(\theta)(\xi_0(\theta), \xi_1(\theta), \ldots)$ удовлетворяет системе (8), которая вполне регулярна [13, с. 39] и поэтому имеет единственное решение в классе ограниченных последовательностей для $\forall\theta\in[-\pi, \pi]$. В силу этого единственное решение (8) в $\mathfrak{C}_l[-\pi, \pi]$ дается выражениями $\tilde{\rho}_n(\theta)=\chi(\theta)\sum\limits_{k=0}^{\infty}\rho_{n,k}\exp(ik\theta)$ $\forall n\in N_0$. Из этих соотношений, неравенств $|\rho_{n,k}|\leqslant Aq^k$ $(\forall n,\ k\in N_0)$ и (6) получаем, что $\tilde{\rho}_n(\theta)\rightrightarrows 0$ на $[-\pi, \pi]$ при $n\to\infty$. Так как модуль каждого собственного значения матрицы X не превосходит любую ее каноническую норму [14, с. 338], то из неравенств $|\varepsilon_{n+1}|+|\mu_n|+|\varkappa_n|\leqslant q<1$ $(\forall n\in N_0)$ следует, что система (7) для $\forall\theta\in[-\pi, \pi]$ имеет единственное ограниченное решение $\tilde{\rho}_{m,0}(\theta), \ldots, \tilde{\rho}_{m,m}(\theta)$. Из этого утверждения, неравенства $\|(E-X)^{-1}\|\leqslant(1-\|X\|)^{-1}$ [14, с. 251] ($\|...\|$ — каноническая норма матрицы), равномерной сходимости $\tilde{\rho}_n(\theta)$ к нулю на $[-\pi, \pi]$ при $n\to\infty$ и системы уравнений, полученных вычитанием (7) из (8), следует $\tilde{\rho}_{m,n}(\theta)\rightrightarrows\tilde{\rho}_n(\theta)$ для $\forall n\in\{0, 1, ..., m\}$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть* $|\varepsilon_{n+1}|+|\mu_n|+|\varkappa_n|\leqslant q<1$, $\mu_n\neq 0$, $\alpha_n=\delta_{n0}$

для $\forall n \in N_0$ *и* $\chi(\theta) \in C[-\pi, \pi]$. *Тогда единственное решение системы (8) в* $\mathfrak{C}_l[-\pi, \pi]$ *можно найти с помощью следующего алгоритма:*

1° *если* $\varepsilon_n \neq 0$ *для* $\forall n \in N$, *то* $\tilde{\rho}_0(\theta)$ *представляется равномерно сходящейся на* $[-\pi, \pi]$ *бесконечной цепной дробью*

$$\tilde{\rho}_0(\theta) = \left[0; \frac{\varphi(\theta)}{u_0(\theta)}, \frac{-\varepsilon_1\mu_1}{u_1(\theta)}, \frac{-\varepsilon_2\mu_2}{u_2(\theta)}, \ldots\right], \tag{9}$$

$$\varphi(\theta) = \chi(\theta)\exp(-i\theta), \quad u_r(\theta) = \exp(-i\theta) - \varkappa_r, \quad r \in N_0,$$

а величины $\tilde{\rho}_n(\theta)$ $(n \in N)$ *определяются рекуррентными соотношениями (8) при* $\alpha_n = \delta_{n0}$;

2° *если* $\varepsilon_n = 0$ *для* $\forall n_k$, *принадлежащего счетному множеству упорядоченных индексов* $B = \{n_1, n_2, \ldots\} \subset N$, *то функции* $\tilde{\rho}_0(\theta)$, $\tilde{\rho}_{n_k}(\theta)$ *для* $\forall n_k \in B$ *находятся по формулам*

$$\tilde{\rho}_0(\theta) = \begin{cases} u_0^{-1}(\theta)\varphi(\theta), \; n_1 = 1, \\ \left[0; \dfrac{\varphi(\theta)}{u_0(\theta)}, \dfrac{-\varepsilon_1\mu_1}{u_1(\theta)}, \ldots, \dfrac{-\varepsilon_{n_1-1}\mu_{n_1-1}}{u_{n_1-1}(\theta)}\right], \; n_1 \geqslant 2, \end{cases} \tag{10}$$

$$\tilde{\rho}_{n_k}(\theta) = \begin{cases} \mu_{n_k} u_{n_k}^{-1}(\theta)\tilde{\rho}_{n_k-1}(\theta), \; n_{k+1} = n_k + 1, \\ \left[0; \dfrac{\mu_{n_k}\tilde{\rho}_{n_k-1}(\theta)}{u_{n_k}(\theta)}, \dfrac{-\varepsilon_{n_k+1}\mu_{n_k+1}}{u_{n_k+1}(\theta)}, \ldots, \dfrac{-\varepsilon_{n^*}\mu_{n^*}}{u_{n^*}(\theta)}\right], \\ n_k + 1 < n_{k+1} \quad (n_{k+1} - 1 = n^*). \end{cases} \tag{11}$$

Величины $\tilde{\rho}_n(\theta)$ *с индексами, удовлетворяющими неравенствам* $0 < n < n_1$ *при* $n_1 \geqslant 2$ *и условиям* $n_k < n < n_{k+1}$ *при* $n_{k+1} > n_k + 1$ *для* $\forall n_k$, $n_{k+1} \in B$, *находятся из рекуррентных соотношений (8) при* $\alpha_n = \delta_{n0}$;

3° *если* $\varepsilon_{n_k} = 0$ *для* $\forall n_k$, *принадлежащего конечному множеству индексов* $B_1 = \{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$, *то функции* $\tilde{\rho}_0(\theta), \ldots, \tilde{\rho}_{n_{m-1}}(\theta)$ *находятся с помощью процедуры, описанной в 2°. Величина* $\tilde{\rho}_{n_m}(\theta)$ *дается равномерно сходящейся на* $[-\pi, \pi]$ *бесконечной цепной дробью*

$$\tilde{\rho}_{n_m}(\theta) = \left[0; \frac{\mu_{n_m}\tilde{\rho}_{n_m-1}(\theta)}{u_{n_m}(\theta)}, \frac{-\varepsilon_{n_m+1}\mu_{n_m+1}}{u_{n_m+1}(\theta)}, \frac{-\varepsilon_{n_m+2}\mu_{n_m+2}}{u_{n_m+2}(\theta)}, \ldots\right],$$

а величины $\tilde{\rho}_{n_m+1}(\theta)$, $\tilde{\rho}_{n_m+2}(\theta), \ldots$ *определяются из (8) при* $\alpha_n = \delta_{n0}$.

Доказательство. При доказательстве леммы 2 было показано, что системы (7), (8) имеют единственные ограниченные решения для $\forall \theta \in [-\pi, \pi]$. Тогда из (7) следует, что ее решение при $\chi(\theta) = 1$ для $\forall \theta \in [-\pi, \pi]$ будет задаваться ограниченными на $[-\pi, \pi]$ рациональными функциями аргумента $z = \exp(-i\theta)$. При $\alpha_n = \delta_{n0}$ для $\forall n \in \{0, 1, \ldots, m\}$ непосредственно из (7) получим конечную цепную дробь

$$\left[0; \frac{\exp(-i\theta)}{u_0(\theta)}, \frac{-\varepsilon_1\mu_1}{u_1(\theta)}, \ldots, \frac{-\varepsilon_m\mu_m}{u_m(\theta)}\right]. \tag{12}$$

Она совпадает с $\tilde{\rho}_{m,0}(\theta)$, когда $\chi(\theta) = 1$ $\forall \theta \in [-\pi, \pi]$, при всех тех $\theta \in [-\pi, \pi]$, для которых выражение (12) ограничено. Но (12) может иметь не более $(m+1)$ полюсов. Из теоремы об аналитическом продолжении следует, что (12) для указанного случая совпадает с $\tilde{\rho}_{m,0}(\theta)$ для

$\forall\theta\in[-\pi, \pi]$. Если в (7) $\alpha_n=\delta_{n0}$ и $\chi(\theta)\in C[-\pi, \pi]$, то из линейности системы (7) получаем, что $\tilde{\rho}_{m,0}(\theta)$ равно произведению $\chi(\theta)$ на выражение (12). В силу леммы 2 имеем $\tilde{\rho}_{m,0}(\theta)\rightrightarrows\tilde{\rho}_0(\theta)$ на $[-\pi, \pi]$ при $m\to\infty$. Следовательно, $\tilde{\rho}_0(\theta)$ — равномерно сходящаяся на $[-\pi, \pi]$ бесконечная цепная дробь (9) при выполнении условий 1° и конечная цепная дробь (10), если выполняются предположения 2°, 3°. Из (8) следует, что $\rho_n(\theta)$ для $\forall n\in\{1, 2, ..., n_1-1\}$ при $n_1\geqslant 2$ (см. 2°, 3°) и для $\forall n\in N$ при условиях 1° находятся последовательно из самой системы (8) при $\alpha_n=\delta_{n0}$. Итак, доказана справедливость утверждений 1°, а также 2° при $0\leqslant n<n_1$. С помощью аналогичных рассуждений и того, что система (8) при $n\in N_0\setminus\{0, 1, ..., n_{k-1}\}$ для $\forall n_k\in B_2$ (B_2 равно B или B_1) и условиях теоремы 3 с точностью до обозначений по форме совпадает с исходной системой (8), в которой $\alpha_n=\delta_{n0}$ и $\chi(\theta)=\mu_{n_k}\exp(i\theta)\tilde{\rho}_{n_k-1}(\theta)$ для $\forall\theta\in[-\pi, \pi]$, показывается правильность остальных утверждений теоремы. Теорема доказана.

Замечание 3.1. Если $|\varepsilon_{n+1}|+|\mu_n|+|\varkappa_n|\leqslant q<1$ для $\forall n\in N_0$, $\mu_r=0$ для некоторого $r\in N$ и $\alpha_k=0$ для $\forall k\geqslant r$, то решение системы (8) в $\mathfrak{C}_l[-\pi, \pi]$ обладает свойством: $\tilde{\rho}_k(\theta)=0$ для $\forall\theta\in[-\pi, \pi]$ и $\forall k\geqslant r$. Вычисление функций $\tilde{\rho}_0(\theta), ..., \tilde{\rho}_{r-1}(\theta)$ можно производить на основе метода прогонки [15, с. 73].

4. Изложим результаты, относящиеся к решению задачи (1).

Теорема 4. *Пусть* $f_n(t)=f_n$, $h_n(t)=h_n$, $s_n(t)=s_n$ *для* $\forall n\in N_0$ *и* $\forall t\in[0, \infty)$. *Если члены числовых последовательностей* $\{f_n\}$, $\{h_n\}$, $\{s_n\}$ *удовлетворяют неравенствам* $\max\{|f_n|, |h_n|, |s_n|\}=K\leqslant D(1+n^\beta)$ *для* $\forall n\in N_0$ ($D<\infty$, $\beta\in[0, 1)$), $\alpha_n=0$ *для* $\forall n>p$ *и* $\alpha_p\neq 0$ ($p\in N_0$, $p<\infty$), *то существует хотя бы одно решение задачи (1) в* $\mathfrak{C}^1(f, [0, \infty))$. *Оно может быть представлено следующим образом*:

$$x_n(t)=\sum_{k=r}^{\infty}\frac{\rho_{n,k}}{k!}(it)^k,\quad r=\begin{cases} n-p, & n>p,\\ 0, & 0\leqslant n\leqslant p;\end{cases}\qquad n\in N_0, \tag{13}$$

где величины $\rho_{n,k}$ *удовлетворяют рекуррентным соотношениям (5) при* $\varepsilon_{n+1}=f_{n+1}$, $\mu_n=h_n$, $\varkappa_n=s_n$ *для* $\forall n\in N_0$.

Доказательство. Из (6) следует сходимость рядов (13) для $\forall n\in N_0$ и $\forall t\in[0, \infty)$. Тогда из (13) имеем $x_n(t)\in C^1[0, \infty)$ для $\forall n\in N_0$. Равномерная сходимость $\sqrt{|f_m|}\,x_n(t)$ при $m=n, n+1$ к нулю на $\forall[a, b]\subset[0, \infty)$ при $n\to\infty$ следует из (6), (13). Вследствие сказанного вектор-функция $\vec{x}(t)=(x_0(t), x_1(t), ...)$, где $x_n(t)$ даются (13), принадлежит $\mathfrak{C}^1(f, [0, \infty))$. В силу (5) соотношения (13) удовлетворяют (1) при условиях теоремы (4). Следовательно, существует решение $\vec{x}(t)\in\mathfrak{C}^1(f, [0, \infty))$ задачи (1), представимое в виде (13). Теорема доказана.

Следствие 4.1. *Если выполняются условия теоремы 4,* $f_n=h_n$ *и* $\operatorname{Im} f_n=\operatorname{Im} s_n=0$ *для* $\forall n\in N_0$, *то существует единственное решение задачи (1) в* $\mathfrak{C}^1_0(f, [0, \infty))$, *причем имеет место соотношение*

$$\sum_{n=0}^{\infty}|x_n(t)|^2=\sum_{n=0}^{p}|\alpha_n|^2.$$

Следствие 4.2. *Пусть выполнены условия следствия 4.1,* $p=0$, $\alpha_0=1$ *и* $s_n=0$ *для* $\forall n\in N_0$. *Тогда существует единственное решение задачи (1) в* $\mathfrak{C}^1_0(f, [0, \infty))$, *представимое в виде*

$$x_n(t) = (-i)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varkappa_{n,k} t^k}{k!} \quad (\forall n \in N_0). \tag{14}$$

Здесь $\varkappa_{n,k}$ определяются из системы

$$\begin{gathered} \varkappa_{n,k+1} = f_{n+1}\varkappa_{n+1,k} - f_n \varkappa_{n-1,k}, \\ \varkappa_{n,0} = \delta_{n0}, \quad \varkappa_{-1,k} = 0, \quad n,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \end{gathered} \tag{15}$$

которая имеет единственное решение $\varkappa_{n,k} \in R$ $(\forall n,\ k \in N_0)$, причем справедливы соотношения

$$\varkappa_{n,n} = (-1)^n \prod_{r=1}^{n} f_r \quad (\forall n \in N), \quad \varkappa_{n,k} = 0 \quad при \quad n + k = 2r + 1 \quad (\forall r \in N_0).$$

При этом каждый из рядов (14) является знакочередующимся или равен нулю для $\forall t \in [0, \infty)$, если $f_n \geqslant 0$ $\forall n \in N_0$.

Теорема 5. *Если члены числовых последовательностей $\{f_n\}$, $\{h_n\}$, $\{s_n\}$ удовлетворяют условиям $|f_{n+1}| + |h_n| + |s_n| \leqslant q < 1$, $\alpha_n = \delta_{n0}$ для $\forall n \in N_0$, то решение задачи (1) в $\mathfrak{C}_l^1 [0, b]$ при $f_n(t) = f_n$, $h_n(t) = h_n$, $s_n(t) = s_n$ для $\forall n \in N_0$ существует и единственно. Его можно записать следующим образом:*

$$x_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\rho}_n(\theta) \exp(it \exp(-i\theta))\, d\theta, \quad n \in N_0, \tag{16}$$

где $\tilde{\rho}_n(\theta)$ определяются по алгоритму, изложенному в теореме 3, причем при его реализации следует положить $\varepsilon_{n+1} = f_{n+1}$, $\mu_n = h_n$, $\varkappa_n = s_n$ для $\forall n \in N_0$ и $\chi(\theta) = 1$ для $\forall \theta \in [-\pi, \pi]$.

Доказательство. Из доказательства теоремы 4 и теоремы единственности, доказанной в [12], следует существование и единственность решения (1) в $\mathfrak{C}_l^1 [0, b]$, представимого в виде (13). Из доказательства леммы 2 вытекает, что ряды Фурье $\tilde{\rho}_n(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_{n,k} \exp(ik\theta)$, где $\rho_{n,k}$ — решение (5) при $\varepsilon_{n+1} = f_{n+1}$, $\mu_n = h_n$, $\varkappa_n = s_n$, $\alpha_n = \delta_{n0}$ для $\forall n \in N_0$, равномерно сходятся на $[-\pi, \pi]$ для $\forall n \in N_0$ и удовлетворяют (8) при $\alpha_n = \delta_{n0}$ и $\chi(\theta) = 1$ $\forall \theta \in [-\pi, \pi]$. Следовательно, функции $\tilde{\rho}_n(\theta)$ можно находить по методу, предложенному в теореме 3, и справедливы соотношения $\rho_{n,k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\rho}_n(\theta) \exp(-ik\theta)\, d\theta$ для $\forall n,\ k \in N_0$. Подставив эти выражения в (13), с учетом (6) и равномерной сходимости рядов Фурье для $\tilde{\rho}_n(\theta)$ получим (16). Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 2, для $\forall n \in N_0$ $f_n(t) = f_n$, $h_n(t) = h_n$, $s_n(t) = s_n$ ($\{f_n\}$, $\{h_n\}$, $\{s_n\}$ — числовые последовательности), $\exists n_1 \in N$ такое, что при $n \geqslant n_1$ имеет место неравенство $|f_n| \geqslant \xi_1 n^{-\beta}$ $(\beta \in (0, 1),\ 0 < \xi_1 < \infty)$, $\alpha_n = 0$ для $\forall n > p$ и $\alpha_p \neq 0$ $(p \in N_0,\ p < \infty)$. Тогда существует единственное решение задачи (1) в $\mathfrak{C}_l^1 [0, b]$, которое может быть найдено по формулам (13) для $\forall t \in [0, b]$.*

Доказательство. Из условий данной теоремы и доказательства теоремы 4 следует, что выражения (13) удовлетворяют задаче (1) при $\Omega = [0, b]$. Из (6) и (13) получаем, что $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = 0$ для $\forall t \in [0, b]$. Следовательно, формулы (13) дают решение задачи (1) в $\mathfrak{C}_l^1 [0, b]$, причем это решение единственно согласно теореме 2. Теорема доказана.

Следствие 6.1. *Если выполнены условия теоремы 6, для* $\forall n\in N_0$ $\omega_n\neq 0$ *и* $\alpha_n=\delta_{n0}$, *то решение* (1) *в* $\mathfrak{C}_l^1[0,b]$ *можно записать в форме*

$$x_n(t)=\frac{\gamma_n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{\rho}_n(\theta)\exp(i\xi t\exp(-i\theta))\,d\theta,\quad n\in N_0. \tag{17}$$

При этом функции $\tilde{\rho}_n(\theta)$ *для* $\forall n\in N_0$ *определяются по алгоритму теоремы 3, причем при его реализации следует положить* $\varepsilon_{n+1}=\xi^{-1}C_1^{-1/2}\times\times h_{n+1}f_{n+1}$, $\mu_n=\xi^{-1}C_1^{1/2}$, $\varkappa_n=\xi^{-1}s_n$ *для* $\forall n\in N_0$, *где* $|\xi|>2\sqrt{C_1}+C_2$, $C_1=\sup\limits_{k\in N_0}\{|f_kh_k|\}$, $C_2=\sup\limits_{k\in N_0}\{|s_k|\}$ *и* $\chi(\theta)=1$ $\forall\theta\in[-\pi,\pi]$.

5. Введем в рассмотрение следующую задачу Коши:

$$-i\frac{dx_{m,n}(t)}{dt}=f_{n+1}x_{m,n+1}(t)+f_nx_{m,n-1}(t)+s_nx_{m,n}(t),$$

$$x_{m,n}(0)=\alpha_n,\ \ x_{m,-1}(t)=x_{m,m+1}(t)=0\ \ \forall t\in[0,\infty), \tag{18}$$

$$n=0,1,\ldots,m;\ \ \alpha_n=0\ \ \forall n\in\{p+1,\ldots,m\};\ \ 0\leqslant p<m,$$

где $x_{m,n}(t)$ — искомые функции. Задача (18) получена из частного случая задачи (1) с помощью процедуры усечения, достаточные условия применимости которой сформулированы ниже.

Теорема 7. *Пусть* $\vec{x}(t)=(x_0(t),x_1(t),\ldots)$ — *решение* (1) *в* $\mathfrak{C}^1(f,[0,\infty))$ *при* $h_n(t)=f_n(t)=f_n$, $s_n(t)=s_n$ *для* $\forall n\in N_0$. *Если члены числовых последовательностей* $\{f_n\}$, $\{s_n\}$ *удовлетворяют условиям теоремы 4 и* $f_n, s_n\in R$ *для* $\forall n\in N_0$, *то для* $\forall n\in\{0,1,\ldots,m\}$ *функции* $x_{m,n}(t)\in\in C^1[0,\infty)$, *являющиеся решением задачи* (18), *равномерно сходятся к* $x_n(t)$ *на* $\forall[a,b]\subset[0,\infty)$ *при* $m\to\infty$. *При этом справедливы неравенства*

$$\sum_{k=0}^{m}|g_{m,k}(t)|^2\leqslant 4|f_{m+1}|A\Big(\sum_{k=0}^{p}|\alpha_k|^2\Big)^{1/2}U_1,$$
$$\sum_{k=0}^{m}|g_{m,k}(t)|^2\leqslant 4|f_{m+1}|A^2U_1U_2,\ \ t\in[0,\infty), \tag{19}$$

где $g_{m,k}(t)=x_{m,k}(t)-x_k(t)$,

$$U_1=\sum_{k=m-p+1}^{\infty}\frac{[3D(1+(m+1+k)^{\beta})]^kt^{k+1}}{(k+1)!},$$
$$U_2=\sum_{k=m-p}^{\infty}\frac{[3D(1+(m+k)^{\beta})]^kt^k}{k!}, \tag{20}$$

а константа A *определена при формулировке леммы 1.*

Доказательство. Исходя из (1) и (18) и рассуждая так же, как и при получении соотношения (3), имеем

$$\sum_{k=0}^{m}|g_{m,k}(t)|^2=2f_{m+1}\int_0^t\operatorname{Im}(g_{m,m}(t')\,x_{m+1}(t'))\,dt',\quad m\in N_0. \tag{21}$$

Из следствия 4.1 получаем, что решение (1) в $\mathfrak{C}^1(f,[0,\infty))$ при $\{h_k\}=$

$=\{f_k\}=\{0, f_1, f_2, ..., f_m, 0, 0, ...\}$, $\{s_k\}=\{s_0, s_1, ..., s_m, 0, 0, ...\}$ и $\alpha_n=0$ для $\forall n>m$ имеет вид $(x_0(t), ..., x_m(t), 0, 0, ...)$, причем $x_0(t)=$ $=x_{m,0}(t)$, ..., $x_m(t)=x_{m,m}(t)$ для $\forall t\in[0, \infty)$, если $\alpha_n=0$ для $\forall n>p$. В силу этого и соотношения $\sum_{k=0}^{\infty}|x_k(t)|^2=\sum_{k=0}^{p}|\alpha_k|^2$ (см. следствие 4.1) из выражений (6), (13), (21) следует справедливость (19). Из (19), (20) находим, что $\sum_{k=0}^{m}|g_{m,k}(t)|^2\rightrightarrows 0$ на $\forall[a, b]\subset[0, \infty)$ при $m\to\infty$. Вследствие этого $x_{m,n}(t)\rightrightarrows x_n(t)$ для $\forall n\in\{0, 1, ..., m\}$ на $\forall[a, b]\subset[0, \infty)$ при $m\to\infty$. Теорема доказана.

Автор выражает признательность В. В. Веременюку и А. А. Килбасу за полезное обсуждение результатов статьи.

Литература

1. Панфилов В. Н., Молин Ю. Н. // Успехи химии. 1978. Т. 47, № 6. С. 967—991.
2. Летохов В. С. // Успехи физ. наук. 1978. Т. 125, № 1 С. 57—96.
3. Макивер Дж., Федоров М. В. // Журн. эксперимент. и теоретич. физики. 1979. Т. 76, № 6. С. 1996—2010.
4. Карлов Н. В., Прохоров А. М. // Успехи физ. наук. 1976. Т. 118, № 4. С. 583—609.
5. Макаров А. А. // Журн. эксперимент. и теоретич. физики. 1977. Т. 72, № 5. С. 1749—1761.
6. Bialynicka-Birula Z., Bialynicki-Birula I., Eberly J. H. et al. // Phys. Rev. A. 1977. Vol. 16, N 5. P. 2048—2054.
7. Парамонов Г. К., Савва В. А. // Журн. прикл. спектроскопии. 1980. Т. 33, № 1. С. 56—63.
8. Парамонов Г. К., Савва В. А. // Квантовая электроника. 1985. Т. 12, № 1. С. 29—40.
9. Груев Д. И. // Квантовая электроника. 1975. Т. 2, № 11. С. 2487—2492.
10. Горчаков В. И., Сазонов В. Н. // Квантовая электроника. 1977. Т. 4, № 8. С. 1673—1680.
11. Валеев К. Г., Жаутыков О. А. Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Алма-Ата, 1974.
12. Персидский К. П. // Изв. АН КазССР. Сер. мат. и мех. 1958. Вып. 7 (11). С. 52—71.
13. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.; Л., 1962.
14. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М., 1963.
15. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.

Белорусский политехнический институт

Поступила в редакцию 14 октября 1988 г.

УДК 517.938

В. П. СЕРОВ, А. Г. ЧЕНЦОВ

ОБ ОДНОЙ КОНСТРУКЦИИ РАСШИРЕНИЯ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

1. Введение. Процедуры расширения используются в различных экстремальных задачах с целью реализации постановок, в рамках которых имеют место соответствующие теоремы существования (оптимального) решения; кроме того, использование расширений обеспечивает указанные обобщенные задачи свойствами, имеющими смысл своеобразной устойчивости при малых изменениях ограничений даже в тех случаях, когда такого рода устойчивостью не обладает исходная экстремальная задача. Применительно к задачам оптимального управления упомянутые процедуры построения обобщенных задач рассматривались,