Доклады Академии наук Беларуси

1992 Январь Том 36 № 1

УДК 52-64+535.36+539.125.523

Н. Н. РОГОВЦОВ

ОБ АСИМПТОТИКАХ ФУНКЦИЙ ГРИНА УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ РАССЕИВАЮЩИХ СРЕД, ИМЕЮЩИХ ФОРМУ СЛОЯ ИЛИ ЦИЛИНДРА ВРАЩЕНИЯ

(Представлено академиком АН Беларуси Ф. И. Федоровым)

Решение задач о переносе излучения в двумерных и трехмерных областях представляет значительный теоретический и практический интерес для астрофизики, гидрооптики, оптики атмосферы и ядерной энергетики. Наиболее эффективными методами, которые сейчас используются при исследовании такого рода проблем, являются численные алгоритмы и метод Монте-Карло, а также аналитический подход, основанный на анализе общих соотношений инвариантности, полученных в [1—3].

Отметим, что корректное использование численных методов и метода Монте-Карло в области реализации асимптотических режимов весьма затруднительно. С другой стороны, знание асимптотических решений уравнения переноса излучения дает возможность более эффективно использовать эти методы. К настоящему времени получено только несколько асимптотических решений уравнения переноса излучения (для двумерных и трехмерных задач) для бесконечной и полубесконечной сред [4—10], плоского слоя [7, 9, 11], шара [5], цилиндрических областей [5, 12—14] и для рассеивающих объектов, ограниченных гладкой невогнутой поверхностью [7]. Как показано в серии работ [5, 7—11, 13], плодотворным подходом для получения асимптотик полей излучения вдали от источников оказался метод, в котором используются общие соотношения инвариантности и некоторая содержательная информация о величинах, входящих в них. Так как данные соотношения в общем случае являются нелинейными, то они удобны для отыскания нормировочных констант, которые иногда приходится вводить при выводе асимптотик.

В статье будут найдены асимптотики функций Грина уравнения переноса излучения для случаев рассеивающих сред, содержащих точечные изотропные источники и имеющих форму плоского слоя или цилиндра вращения (диска). Рассмотрим сначала задачу об отыскании асимптотики функции Грина $G(\mathbf{r}, \Omega, \mathbf{r}^*; V_1)$ уравнения переноса излучения для случая слоя V_1, содержащего точечный изотропный источник $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}^*)$ ($\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}^*$ — радиусы-векторы, задающие соответственно положения точки «наблюдения» и источника; Ω — вектор, определяющий направление распространения излучения; $|\Omega|=1$).

Предположим, что оптические характеристики элементарного объема слоя не зависят от положения точки наблюдения на любой фиксированной плоскости, параллельной границам слоя V_1. Будем считать также, что показатель рассеяния $\sigma(...)$ и индикатриса рассеяния $x(...; \mu_0)$ ограничены снизу положительными константами (μ_0 — косинус угла между направлениями падающего и рассеянного элементарным объемом излучения). Введем в рассмотрение прямоугольную декартову правую систему координат $OXYZ$, плоскость OXY которой принадлежит слою V_1 и параллельна его границам.

Из сделанных выше предположений следует, что показатели ослабления $\alpha(...)$, рассеяния $\sigma(...)$ и индикатриса могут зависеть только от Z, т. е. $\alpha(\ldots)=\alpha(z)$, $\sigma(\ldots)=\sigma(z)$, $x(\ldots;\mu_0)=x(z;\mu_0)$. Положим $\alpha_1=\min\limits_{z\in[a,b]}\{\alpha(z)\}$, где a и b — апликаты первой и второй границ слоя V_1 $(a<b;$ $\alpha(z)\leqslant\text{const}<\infty$ для $\forall z\in[a,b])$. Поместим теперь в точку O точечный изотропный источник $\delta(\mathbf{r})$ (т. е. полагаем $\mathbf{r}^*=\mathbf{0}$). Если толщина $(b-a)=h$ слоя V_1 фиксирована, то естественно предположить, что в процессе многократного рассеяния на больших расстояниях от источника (т. е. при $\alpha_1\rho\to\infty$; $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$; $\mathbf{r}=(x,y,z)$) будет устанавливаться распределение поля излучения, угловая структура которого не будет зависеть от ρ. При этом оно должно обладать цилиндрической симметрией относительно оси Z. Данные соображения позволяют искать асимптотическое выражение для $G(\mathbf{r},\mathbf{\Omega},\mathbf{0};V_1)$ в виде

$$G(\mathbf{r},\ \mathbf{\Omega},\ \mathbf{0};\ V_1)\sim f(\rho)\,\Phi(z,\ \mu,\ \varphi)=f(\rho)\,\Phi_1(z,\ \mu,\ \cos\varphi),\quad \alpha_1\rho\to\infty,\quad (1)$$

где $f(\rho)$, $\Phi(z,\mu,\varphi)$ — положительные функции, μ — косинус угла между $\mathbf{\Omega}$ и осью Z, φ — угол между $\mathbf{\Omega}_0$ и $\mathbf{r}_\perp=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ $(\mathbf{\Omega}=\mathbf{\Omega}_0+\mu\mathbf{k}$; $\{\mathbf{0};\ \mathbf{i},\ \mathbf{j};\ \mathbf{k}\}$ — репер системы $OXYZ)$. Подстановка (1) в уравнение переноса излучения показывает, что асимптотическое решение в виде (1) возможно только тогда, когда $\lim\limits_{\rho\to\infty}(f'(\rho)/f(\rho))=-\tilde{k}\ (\tilde{k}>0)$ и разрешима задача

$$\mu\,\frac{\partial\Phi(z,\ \mu,\ \varphi)}{\partial z}+(\alpha(z)-\tilde{k}\cos\varphi\sqrt{1-\mu^2})\,\Phi(z,\ \mu,\ \varphi)=$$

$$=\frac{\sigma(z)}{4\pi}\int\limits_{\Omega}x(z;\ \mu_0)\,\Phi(z,\ \mu',\ \varphi')\,d\Omega',\quad \Phi(z,\ \mu,\ \varphi)\geqslant\text{const}>0,\qquad (2)$$

$$\Phi(a,\ |\mu|,\ \varphi)=0,\quad \Phi(b,\ -|\mu|,\ \varphi)=0,$$

где Ω — единичная сфера. При $\alpha(z)=1$ (для $\forall z\in[a,b]$) вопрос о разрешимости характеристического уравнения (2) рассматривался в [14]. Выражение (1) при $\alpha_1\rho\to\infty$ должно удовлетворять (с точностью до «бесконечно малых более высокого порядка») однородному уравнению переноса излучения. В работе [14] показано, что при $\alpha(z)=1$ (для $\forall z\in[a,b]$) элементарные решения этого уравнения описываются при $\alpha_1\rho\to\infty$ асимптотиками, совпадающими с (1) при $f(\rho)=\sqrt{\pi/2\tilde{k}}\,\rho^{-\frac{1}{2}}\exp(-\tilde{k}\rho)$. Следовательно, по крайней мере, при указанном выше предположении об $\alpha(z)$ асимптотика (1) примет вид:

$$G(\mathbf{r},\ \mathbf{\Omega},\ \mathbf{0};\ V_1)\sim C\rho^{-\frac{1}{2}}\exp(-\tilde{k}\rho)\,\Phi(z,\ \mu,\ \varphi),\quad C=\text{const},\quad \alpha_1\rho\to\infty,\qquad (3)$$

где под $\tilde{k}$ следует понимать минимальный положительный корень характеристического уравнения (2). Формула (3) была получена ранее в [14]. Однако способа определения нормировочной константы C в этой работе предложено не было.

Найдем величину C в (3). Для этого сначала расположим точку наблюдения и источник таким образом, чтобы $\mathbf{r}=(0,\ y,\ 0)$, $\mathbf{r}^*=(0,\ -y,\ 0)$, $y>0$. Обозначим через S сечение V_1 плоскостью OXZ. Тогда из общего соотношения инвариантности (9) из работы [1] несложно получить следующее выражение:

$$G(\mathbf{r},\ \mathbf{r}^*;\ V_1)=-\iint\limits_{S}ds'\int\limits_{\Omega}(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{\Omega}')\,G(\mathbf{r}',\ -\mathbf{\Omega}',\ \mathbf{r};\ V_1)\times$$

$$\times G(\mathbf{r}',\ \mathbf{\Omega}',\ \mathbf{r}^*;\ V_1)\,d\Omega',\qquad (4)$$

$$G(\mathbf{r},\ \mathbf{r}^*;\ V_1)=\int\limits_{\Omega}G(\mathbf{r},\ \mathbf{\Omega},\ \mathbf{r}^*;\ V_1)\,d\Omega,$$

где $\mathbf{n}'=-\mathbf{j}\,(|\mathbf{n}'|=1)$. Из соображений симметрии следует, что нормировочная константа C в (3) при фиксированных значениях a и b не должна зависеть от положения точки O в слое V_1. Учитывая этот факт, с помощью элементарных преобразований и геометрических соображений получим из (3), (4) такое асимптотическое соотношение

$$\frac{C_1}{C}(2y)^{-\frac{1}{2}}\exp(-2\tilde{k}y)\sim\int\limits_0^\infty(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}\exp(-2\tilde{k}y\sqrt{1+u^2})\times$$

$$\times(\eta(u)+\eta(-u))\,du,\ \ y\to\infty. \qquad (5)$$

Здесь

$$C_1=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi'\int\limits_{-1}^{1}\Phi(0,\ \mu',\ \varphi')\,d\mu',$$

$$\qquad (6)$$

$$\eta(u)=\int\limits_a^b dz\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-\mu^2}\cos(\varphi-\operatorname{arctg}u)\,\Phi(z,\ \mu,\ \varphi)\times$$

$$\times\Phi(z,\ -\mu,\ \varphi-2\operatorname{arctg}u)\,d\mu.$$

Используя метод Лапласа [15], из (5) находим искомое выражение для C:

$$C=C_1(\tilde{k})^{\frac{1}{2}}(\sqrt{2\pi}\,\eta(0))^{-1}. \qquad (7)$$

Итак, после отыскания решения задачи (2), соответствующей наименьшему положительному корню $\tilde{k}$ (при этом $\Phi(\ldots)$ можно определять из (2) для любой заданной ее нормировки), следует с помощью (6), (7) найти C. Подстановка этого значения C в (3) и дает явный вид асимптотики $G(\mathbf{r},\,\boldsymbol{\Omega},\,0;\,V_1)$ при $\alpha_1\rho\to\infty$.

Теперь найдем асимптотику функции Грина $G(\mathbf{r},\,\boldsymbol{\Omega},\,\mathbf{r}^*;\,V_2)$ на боковой границе S_2 диска V_2, содержащего на его оси симметрии l (будем считать, что на ней задано направление) точечный изотропный источник вида $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}^*)$. Будем предполагать, что можно подобрать такой слой V_1, который содержит часть, с геометрической и «оптической» точек зрения идентичную V_2. Обозначим радиус и высоту диска V_2 соответственно через R и h. Введем в рассмотрение правую декартову прямоугольную систему координат $OXYZ$ (она отличается от введенной выше системы), которую расположим следующим образом: ось симметрии l и точка наблюдения на S_2 лежат на плоскости OYZ; направления осей Y и l одинаковы; точка O совпадает с точкой пересечения S_2 с прямой l_1, которая лежит на плоскости OYZ, проходит через источник и ортогональна l; ось Z имеет направление, совпадающее с направлением внутренней нормали к S_2 в точке O. Через V_3 обозначим рассеивающее поглощающее тело, которое в системе $OXYZ$ задается неравенствами $z\geqslant 0$, $a\leqslant y\leqslant b$ (оптические характеристики элементарного объема среды V_3 идентичны тем, которые реализуются в V_1). Принимая во внимание сказанное выше, с помощью использования общего соотношения инвариантности, связывающего между собой функции Грина $G(\ldots;\,V_1)$ и $G(\ldots;\,V_2)$ (оно является частным случаем соотношения (9) из [1]), асимптотики (3) и метода, предложенного и развитого в [5, 7—11, 13], можно показать, что имеет место следующая асимптотика:

$$G(\mathbf{r},\ \boldsymbol{\Omega},\ \mathbf{r}^*;\ V_2)|_{\mu<0}\sim CR^{-\frac{1}{2}}\exp(-\tilde{k}R)\times$$

$$\qquad (8)$$

$$\times\Big\{\Phi(y,\ \sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi,\ \xi)-\int\limits_a^b dy'\int\limits_0^{2\pi}d\varphi'\int\limits_0^1\mu'\Phi(y',\ -\sqrt{1-(\mu')^2}\times$$

$$\times \sin\varphi',\ \zeta) \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(0,\ y,\ 0;\ \mu,\ \varphi;\ x',\ y',\ 0;\ \mu',\ \varphi'+\pi;\ V_3)\,dx'\Big\},$$

$$\alpha_1 R \to \infty,\ h = \mathrm{const}.$$

Здесь $\xi = -\operatorname{arctg}(-\mu^{-1}\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi)$; $\zeta = \pi - \operatorname{arctg}((\mu')^{-1}\sqrt{1-(\mu')^2}\times$ $\times\cos\varphi')$; $\mathbf{r} = (0,\ y,\ 0)$; $\mathbf{r}^* = (0,\ 0,\ -R)$, $(\mu,\ \varphi)$ и $(\mu'',\ \varphi'')$ — угловые координаты векторов $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{\Omega}''$ в сферической системе координат, согласованной с $OXYZ$ ($|\mathbf{\Omega}''| = 1$); $G(x,\ y,\ z;\ \mu,\ \varphi;\ x',\ y',\ z';\ \mu'',\ \varphi'';\ V_3)$ — объемная функция Грина уравнения переноса излучения для среды V_3. Из (3) и (8) ледует, что зависимости асимптотик функций Грина $G(\ldots;\ V_1)$, $G(\ldots;\ V_2)$ соответственно от ρ и R являются однотипными.

Заметим, что в (3) и (8) входят функции $\Phi(\ldots)$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\ldots;\ V_3)\,dx'$, которые являются решениями соответствующих одномерной и двумерной задач. Проблема их решения является более простой по сравнению с исследованием исходной трехмерной задачи.

Summary

Asymptotic expressions for Green's functions of the radiation transfer equation are found with the use of general invariance relations. The scattering media considered contain point isotropic sources and have a form of a plane layer or a disc.

Литература

1. Роговцов Н. Н. // Журнал прикл. спектроскопии. 1981. Т. 34, № 2. С. 335—342. 2. Роговцов Н. Н. // Докл. АН БССР. 1981. Т. 25, № 5. С. 420—423. 3. Роговцов Н. Н. // Журнал прикл. спектроскопии. 1981. Т. 35, № 6. С. 1044—1050. 4. Долин Л. С. // Оптика моря. М., 1983. С. 118—122. 5. Роговцов Н. Н. // Докл. АН БССР. 1986. Т. 30, № 10. С. 901—904. 6. Романова Л. М. // Изв. АН СССР. ФАО. 1968. Т. 4, № 3. С. 311—320. 7. Роговцов Н. Н. // Докл. АН БССР. 1988. Т. 32, № 5. С. 413—416. 8. Роговцов Н. Н. // Докл. АН БССР. 1988. Т. 32, № 12. С. 1085—1088. 9. Роговцов Н. Н. // Астрофизика. 1988. Т. 29, № 3. С. 602—612. 10. Роговцов Н. Н. // Изв. АН СССР. ФАО. 1990. Т. 26, № 10. С. 1082—1088. 11. Роговцов Н. Н. // Докл. АН БССР. 1991. Т. 35, № 1. С. 43—46. 12. Гермогенова Т. А., Павельева Е. Б. // Журн. выч. мат. и мат. физики. 1989. Т. 29, № 8. С. 1195—1211. 13. Роговцов Н. Н. // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34, № 12. С. 1081—1084. 14. Павельева Е. Б. Асимптотика решения уравнения переноса излучения в диске большого радиуса с источником в окрестности оси симметрии. М., 1990 (Препринт/ИПМ АН СССР : 97). 15. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М., 1978.

Белорусский политехнический институт *Поступило 24.05.91*