ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ В РАССЕИВАЮЩИХ СРЕДАХ РАЗЛИЧНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

РОГОВЦОВ Н.Н.

I. Введение. Развитие теории переноса излучения со времени появления работы Хвольсона [I], в которой изучалось рассеяние света в молочных стеклах, шло в направлении усложнения исследуемых моделей реальных и искусственных рассеивающих поглощающих сред и создания более мощных математических средств для изучения свойств и получения решений уравнений данной теории. На этот естественный ход развития существенно влияли расширение практических приложений теории переноса и появление целого ряда технических достижений 20 века, к которым в первую очередь следует отнести создание космической и вычислительной техники, а также атомной энергетики. К настоящему времени теория переноса излучения (а также нейтронов) нашла широкое применение при решении различных задач теории звездных и планетных атмосфер, оптики моря, оптики облаков и туманов, биофизики, физики твердого тела, оптики фотографических слоев, спектроскопии рассеивающих сред, переноса нейтронов и гамма-излучения, передачи сигналов и изображений через рассеивающие среды и т.д. (см., например, [2--I5] и ссылки в них). Отметим, что теория переноса излучения (нейтронов) является одной из ветвей теории процессов переноса энергии и вещества, начальные положения которой возникли еще до появления работы [I] в исследованиях Фурье и Больцмана. Заметим, что при решении уравнения переноса Больцмана возникает целый ряд родственных проблем, изложенных, в частности, в монографии [16] при решении модельных задач кинетической теории газов.

При изучении различных проблем теории переноса в упомянутых выше областях наиболее часто используется модель рассеивающей поглощающей среды в виде плоскопараллельного слоя, облучаемого внешним излучением или содержащего внутренние источники, имеющие тоже плоскопараллельную симметрию. Эта модель адекватно описывает процесс переноса в звездных и планетных атмосферах, море и некоторых биологических и искуссвенных мутных средах. Однако, при исследовании пылевых и планетарных туманностей, рентгеновских источников, аккреционных дисков, газовых разрядов, факелов, изолированных облаков и разорванной облачности, а также при проектировании ядерных реакторов, указанная модель является по существу малопригодной. Поэтому практические потребности стимулировали разработку аппарата теории переноса излучения для случая сред сложной конфигурации. К настоящему времени наиболее значительные результаты при исследовании переноса излучения в рассеивающих объектах "сложной" конфигурации получены с помощью методов интегральных преобразований [17-20], поверхностных псевдоисточников [21,22], Кейза [23-25], сферических гармоник [26], экспериментального моделирования [27], Монте-Карло [28,29], пограничных функций [30] и численных алгоритмов [31]. К тому же за последнее десятилетие в работах [32-55] был развит подход, основанный на использовании общих соотношений инвариантности и который характеризуется большой общностью, физической наглядностью и применим для решения конкретных задач теории переноса излучения для сред сложной формы (или при отсутствии содержательной симметрии в постановке проблемы). Ниже будут обсуждены истоки и общие идеи, лежащие в основе этого подхода, а также будут указаны работы, в которых получены точные, приближенные, асимптотические решения ряда задач теории переноса для слоя, шара, цилиндров, правильных многогранников и тел невогнутой формы. Будут также отмечены статьи, в которых используются родственные методы.

2. Принципы и соотношения инвариантности, метод инвариантного погружения. Общие положения подхода к решению задач теории переноса излучения для сред сложной конфигурации.

а. Еще до создания теории переноса излучения Стоксом [56] были получены формулы для коэффициентов отражения и пропускания направленного света стопой плоскопараллельных пластинок из чисто поглощающего вещества. Затем аналогичные выражения для указанных коэффициентов для рассеивающей поглощающей среды были выведены Шустером (1905) и Гуревичем (1930) (см. ссылки на эти и родственные работы в [57]). Как и в [56] в данных статьях рассмотрение фактически велось в рамках простейшей модели среды, каковой является одномерная модель. В этих исследованиях по сути дела был использован простейший вариант метода "сложения слоев". Следует, однако, подчеркнуть, что схема рассуждений, использованная Стоксом, направленность работ Шустера, Шварцшильда, Эддингтона (см. ссылки в [57]) и частные варианты балансных соотношений, записанных в статьях [58,59], не позволили их авторам по настоящему оценить весьма нетривиальные возможности метода "сложения слоев".

Как было указано в работах [34,36], одним из фундаментальных и давно используемых общих способов анализа физических объектов или систем является разбиение их на части или подсистемы и последующее получение следствий из рассмотрения "взаимодействия" искуственно образованных частей или подсистем. Родственным по отношению к указанному способу является метод, основанный на извлечении следствий из факта объединения частей или подсистем в единый физический объект или систему. Специфика получаемых при этом результатов существенно зависит не только от физики изучаемого процесса, но и от отношений величин, определяющих характерные геометрические и физические параметры частей и объекта в целом, а также от типа их варьирования. При исследовании конкретных физических систем в качестве дополнительной содержательной информации обычно используются законы (в частности, законы сохранения), симметрия объекта или более общие свойства инвариантности (обычно в неявной форме) и т.д.. С помощью применения указанных способов был получен, в частности, ряд основных уравнений (систем уравнений), соотношений, распределений, закономерностей и т.д. в механике сплошной среды, электродинамике, оптике, термодинамике, статистической физике. Упомянутый выше метод "сложения слоев" может рассматриваться в качестве частного случая указанных общих способов исследования физических объектов и систем.

Особый вариант метода "сложения слоев" был впервые введен в теорию переноса излучения Амбарцумяном в серии работ [3,60], в которых им был решен ряд задач теории переноса излучения для однородных одномерных и плоскопараллельных сред. Заметим, что несмотря на внешнее сходство некоторых приемов, употреблявшихся в работах [3,56 - 60] ,схемы использования метода "сложения слоев" в [56-59] и [3,60] существенно отличаются друг от друга. Одна из значительных отличительных черт работ Амбарцумяна [3,60] состоит в том,что он впервые при применении метода "сложения слоев" использовал понятие об инвариантности и сформулировал первый в теории переноса принцип инвариантности (ПИ) [60]. К тому же рассмотрение проводилось им с существенно более общих позиций,позволивших значительно продвинуть вперед теорию переноса излучения для случая модели плоскопараллельной среды при наличии такой же симметрии источников излучения [3,60]. Обсуждению вопроса об отличии методов "сложения слоев" Амбарцумяна и Стокса (и их последователей) посвящена статья [61],в которой анализируются также работы Редхеффера, Ван де Хюлста,Беллмана,Прайзендофера,Гранта и Ханта,Вийка и других (см. ссылки в [61]), посвященных дальнейшему развитию и использованию метода "сложения слоев" Амбарцумяна для расчета полей излучения в плоскопараллельных средах.

в. Для последующего изложения полезно ввести в рассмотрение ряд простых алгебраических понятий,которые позволяют с единой точки зрения рассматривать задачи теории переноса применительно к объектам различной конфигурации. С целью выяснения глубинных истоков метода "сложения слоев" Амбарцумяна,построения его аналога для сред различной формы и уяснения связей этого метода с общим понятием об инвариантности в работах [32-34,37] был использован алгебраический подход. Дадим его краткое описание. Понятие об инвариантности (а также о его важном частном случае симметрии) физических объектов,систем,процессов или математических конструкций по отношению к некоторым операциям (физического или математического характера) играют в современном естествознании фундаментальную роль. Наиболее существенный шаг,который нужно сделать в большинстве случаев при проведении исследований в выбранной области на основе указанного понятия,состоит в введении операций (множества операций), оставляющих инвариантными (неизменными) изучаемые объекты,системы,процессы или математические конструкции. Обычно (в частности,в теоретической физике) под принципами инвариантности (ПИ) понимают утверждения,указывающие на инвариантность "чего-либо" при выполнении определенных операций. Под соотношениями инвариантности будем понимать следствия ПИ (их форма зависит от типа объекта, системы и т.д. и смысла понятий, величин, которые используются для их описания). Подчеркнем, что ПИ выполняют целый ряд полезных функций, среди которых следует отметить эвристическую, классификационную и отбора. Алгебраический подход оказался тем математическим языком (и аппаратом), на основе которого удалось весьма удобно описать и понять круг идей, связанных с частным случаем понятия инвариантности, а именно с понятием симметрии. Первоначально это было сделано в кристаллографии и геометрии, а затем и в теоретической физике. Отметим, что в данных областях при формулировке ПИ и получении их следствий, в основном, использовалась теория групп и теория представлений групп. В работе [62] дополнительно к групповым преобразованиям привлекались преобразования двойственности, которые описываются булевой алгеброй. Общий обзор результатов, полученных в этом ракурсе, их глубокое и доступное обсуждение и ссылки на соответствующую литературу можно найти, например, в работах [63,64].

С. При формулировке ПИ в работе [60] была в явном виде использована инвариантность характеристик полей излучения по отношению к групповой операции (трансляции) с целью получения уравнений, определяющих их на границах плоскопараллельного однородного слоя. Однако, по существу использовалась в несколько завуалированной форме также инвариантность поля излучения по отношению к двум основным полугрупповым операциям (этот факт был отмечен в [33,34,37]). Первая операция представляет собой разбиение слоя на подслои посредством разреза его плоскостью, не вносящей никаких изменений в характеристики поля и среды. Второй операцией является "выделение" подслоя из плоскопараллельного слоя с одновременным облучением его границ внешним излучением равным тому, которое имело место на плоскостях, проведенных в исходной среде и взятых в качестве границ подслоя. Эти свойства инвариантности носят более общий характер и без их использования (хотя бы и в неявном виде) метод "сложения слоев" не нашел бы столь широкого применения, которое он приобрел в теории переноса излучения. В частности, в работах [4,65-70] он применялся при решении различных задач для случая неоднородных плоскопараллельных слоев, для которых не имеет место ПИ [3,60]. В [14,68-70] использовались рассуждения (см.

также ссылки в [61]), основанные по существу на многократном применении отмеченных выше полугрупповых операций. Заметим, что "принцип взаимодействия", формулировку которого можно найти, например, в [68], по сути родственен утверждению об инвариантности поля излучения по отношению ко второй полугрупповой операции (в простейшем варианте этот принцип фактически использовался еще в работе [58]). После появления работ [3,60] метод "сложения слоев" сначала получил существенное развитие и применение в работах [2,4,5], в которых был сформулирован целый ряд соотношений инвариантности (а также принципов инвариантности) для случая внешних источников и найдены асимптотики для характеристик полей излучения в однородных слоях большой оптической толщины. Затем в работах (см. [71] и ссылки в ней) был предложен метод инвариантного погружения, основанный на изучении изменений, возникающих при варьировании величин, определяющих систему в целом. Подчеркнем, что рассмотрение свойств сред как цельных объектов составляет суть подхода Амбарцумяна [72]. Отметим, что при разработке метода инвариантного погружения был использован ряд идей, применявшихся в основополагающих исследованиях [3,5]. Данный метод, построенный посредством более абстрактного понимания конструктивных элементов, содержащихся в исходных работах по методу "сложения слоев" вышел далеко за рамки теории переноса излучения и сейчас является одним из мощных методов решения краевых задач и интегральных уравнений математической физики. При этом их исследование сводится к решению задач Коши, которые весьма хорошо приспособлены для изучения их численными методами. Приложениям этого подхода к теории переноса излучения (нейтронов) и другим областям посвящено большое число работ (см., например, [71, 73-77] и ссылки в них).

На основе свойств инвариантности полей излучения по отношению к указанным выше полугрупповым операциям нетрудно проинтерпретировать соотношения инвариантности для случая плоскопараллельных сред, которые были получены и приведены в работах [2-7,32,65-70,78-83]. Эти соотношения, играющие важную роль при построении решений уравнения переноса излучения, в большинстве своем являются с физической точки зрения соотношениями баланса, найденными зачастую посредством разбиения "траекторий" фотонов на различные топологические типы и использования вероятностной трактовки теории переноса [2]. Следует отметить, что интерес к получению новых соотношений инвариантности весьма повысился после появления работ [81,82], в которых был получен исходный "материал" для создания эффективного метода расчета внутренних полей излучения [82,84], построения высокоточных приближенных решений для слоев конечной оптической толщины [85], развития теории для оптически толстых неоднородных плоскопараллельных сред [86]. В статьях [81,82], а затем в [83], фактически было использовано утверждение об инвариантности поля излучения по отношению ко второй полугрупповой операции (см. выше) и равенстве поля излучения в выделенной части с соответствующими внешними источниками на ее границе полю в исходной среде в точках, соответствующих указанной части. Это утверждение с использованием другой терминологии было сформулировано в четкой и "образной" формах в виде общего принципа инвариантности (ОПИ) соответственно для плоскопараллельных сред и рассеивающих тел сложной формы в работе [83].

d. Во введении были отмечены методы, которые использовались в теории переноса излучения при изучении многократного рассеяния света в средах сложной конфигурации. Ниже будет обсуждаться только подход, основанный на использовании общих соотношений инвариантности. Однако, отметим сначала ряд работ, в которых применялись родственные методы. В работах [74-77] и статье [87] с использованием метода инвариантного погружения были найдены уравнения для коэффициентов отражения и пропускания, а также для альбедо, применительно к сферической оболочке [75], цилиндру [74,87] и двумерным [76], трехмерным [77] слоям (они облучаются бесконечно узкими мононаправленными пучками излучения). В статьях [88,89] был получен ряд соотношений инвариантности для сферически симметричных задач и на их основе выведены асимптотики решений уравнения переноса излучения для некоторых типов источников. В работе [90] (см. также ссылки в ней) для решения многомерных задач теории переноса используются аналитические упрощения ядер интегральных уравнений для функций источников и модифицированный метод Амбарцумяна, простейший вариант которого был предложен в [3].

Простота конфигурации плоскопараллельных сред (при такой же симметрии источников) позволяет избежать изучения ряда дополнительных вопросов, которые неминуемо возникают при попытке построения реализации указанного в пункте 2 а, общего подхода применительно к теории переноса излучения для случая рассеивающих поглощающих объектов сложной формы. При осуществлении соответствующего обобщения желательно сохранить внутреннее единство с методом, основанным на принципах инвариантности, поскольку он обладает физической наглядностью и эвристичностью, что выгодно отличает его от некоторых формальных математических подходов. По-видимому, первый результат в этом направлении был получен в работе Кадомцева [91] для случая однородных выпуклых тел. При этом была дана обобщенная формулировка ПИ Амбарцумяна для данной ситуации. Обобщение, сделанное в [91] неприменимо для неоднородных сред, что весьма ограничивает область его использования. Поэтому в работах [32-34,37] при разработке указанного в п.2 а, подхода для случая сред произвольной конфигурации за основу была взята инвариантность полей излучения по отношению к более общим полугрупповым операциям. Описанные при рассмотрении переноса излучения в плоскопараллельной среде две полугрупповые операции при корректном обобщении порождают два основных типа операций для случая объектов любой формы [33,34, 37]. Ключевым моментом при обобщении второй полугрупповой операции является введение в [33,34] абсолютно поглощающей излучение оболочки (поглотителя). Это позволило придать ясный и корректный смысл операции "выделения" части из всего объекта. Заметим, что в отличие от случая плоскопараллельных сред для тел сложной формы введение такой идеализации необходимо. В [34,37] было построено множество операций, оставляющих почти везде инвариантным поле излучения в любом рассеивающем поглощающем объекте V (V может быть частью другого тела), который может иметь произвольную конфигурацию и любая часть границы S которого может быть подстилающей поверхностью (т.е. такой поверхностью, для которой локальные операторы отражения R и пропускания T не могут быть одновременно соответственно нулевым и единичным; в [33] использовалось более общее определение, а именно часть $\tilde{S}$ границы S считалась подстилающей поверхностью, если хотя бы доля излучения, падающего на нее изнутри V, каким-либо образом попадала в V). В [34,37] был сформулирован общий принцип инвариантности, который включает в себя наиболее содержательную общую часть утверждений типа принципов инвариантности, известных в теории переноса излучения (ОПИ, предложенный в [83], является его важным частным случаем). Фактически в этом принципе утверждается, что поля излучения в рассеивающих поглощающих объектах почти везде инвариантны (инвариантность может нарушаться на кривых и поверхностях) по отношению к унарным операциям, являющимся элементами полугруппы $\mathfrak{R}$ [34,37]. Определения использованных в [34,37] алгебраических понятий можно найти, например, в книге [92]. В [34,37] было также показано, что полугруппу $\mathfrak{R}$ нельзя доопределить до группы. Это указывает на существенное отличие принципов инвариантности, сформулированных в теории переноса от классических принципов инвариантности [63], описываемых с помощью понятия группы. В [32-37,53] была предложена общая схема вывода соотношений инвариантности.

Выпишем только одно из наиболее общих соотношений инвариантности, полученных в работах [33,34,37]. Для этого введем ряд дополнительных обозначений и предположений. Допустим, что $\mathfrak{S}$ представима в виде объединения конечного или счетного числа ее частей, для которых можно ввести понятие стороны и которые почти везде имеют нормали, причем направление внешней нормали $\vec{n}'\ (|\vec{n}'|=1)$ для заданной стороны и точки на $\mathfrak{S}$, которая определяется радиусом-вектором $\vec{r}'$, согласуется с переходом через $\mathfrak{S}$ к другой стороне. Обозначим через $\overset{\circ}{V}=V\setminus\mathfrak{S}$ внутреннюю часть тела V (знак $\setminus$ задает операцию разности двух множеств), а через $\mathfrak{S}(\overset{\circ}{V})$ — объединение тех сторон частей, упоминавшихся выше, которые соприкасаются с $\overset{\circ}{V}$. В любой точке поверхности $\mathfrak{S}$ для каждой стороны указанных выше частей зададим полную единичную сферу Ω и полусферы Ω_+, Ω_-, которые определяются условиями $(\vec{n}'\cdot\vec{\Omega}')>0$, $(\vec{n}'\cdot\vec{\Omega}')<0$, где $\vec{\Omega}'$ - вектор, задающий направление распространения излучения $(|\vec{\Omega}'|=1)$. Пусть характеристики $\overset{\circ}{V}$ не зависят от поля излучения. Ограничимся также распространением случая монохроматического рассеяния и тел, не меняющихся со временем. При сделанных выше предположениях, как показано в [34,37], имеет место следующее общее соотношение инвариантности:

$$\theta_V(\vec{r})I(\vec{r},\vec{\Omega},t,V)=I_1(\vec{r},\vec{\Omega},t,V_1)-$$
$$-\iint\limits_{\mathring{S}(\mathring{V})} ds'\int\limits_{\Omega}(\vec{n}'\cdot\vec{\Omega}')d\Omega'\int\limits_{-0}^{t}G(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{r}',\vec{\Omega}',t-t',S_2,V_1)\times \tag{1}$$
$$\times I(\vec{r}',\vec{\Omega}',t',V)dt', \quad t\geq 0.$$

Здесь $\theta_M(\vec{r})=1$,когда радиус-вектор $\vec{r}$ задает точки,принадлежащие множеству M ,и $\theta_M(\vec{r})=0$ в противном случае, V_1 - любое тело,которое содержит часть,с точки зрения свойств среды идентичную $\mathring{V}\cup S_2$,где поверхность S_2 в геометрическом смысле совпадает с S и характеризуется произвольными линейными операторами R и T (свойства среды тела V_1 не зависят от поля; операторы R и T на S_2 не обязаны совпадать с таковыми на S); $I(\vec{r},\vec{\Omega},t,V)$ - интенсивность излучения,реализующегося в теле V (считаем,что в $\mathring{V}$ содержатся внутренние источники $g(\vec{r},\vec{\Omega},t)$) в момент времени t в точке,заданной $\vec{r}$ ($\vec{\Omega}$ - - вектор,указывающий направление распространения или испускания излучения; $|\vec{\Omega}|=1$) ; $I_1(\vec{r},\vec{\Omega},t,V_1)$ - интенсивность излучения в теле V_1 ,когда оно содержит внутренние источники $\theta_{\mathring{V}}(\vec{r})(g(\vec{r},\vec{\Omega},t)+\delta(t)I(\vec{r},\vec{\Omega},0,V)v^{-1})$, где $\delta(t)$ - дельта-функция Дирака, v - скорость света в среде; $G(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{r}',\vec{\Omega}',t,S_2,V_1)$ - - объемная функция Грина (функция влияния) уравнения переноса излучения для тела V_1 ($V_1\setminus\mathring{V}$ и $\mathring{V}$ могут иметь подстилающие поверхности). Соотношения типа (1) ,как показано в работах [32-37] ,допускают простую физическую интерпретацию. В частных случаях,как отмечено в статьях [35-37],выражение (1) переходит в соотношения инвариантности "первого и последнего пересечений" (см. также [52,53]),в которых интегрирование производится не по полной единичной сфере Ω ,а по полусферам Ω_+ и Ω_- (для плоскопараллельных сред такого рода соотношения рассматривались в [78]).

В подходе,предложенном в работах [32-37] важную роль играет относительность понятия границы тела. В частности,выбор свойств S_2 может производиться таким образом,чтобы сделать удобным использование соотношения инвариантности (I) при решении конкретных задач. Кратко сформулируем общую схему использования указанного подхода, основанного на ОПИ [34-37]. Во-первых, используя алгебраические операции (см. [32-34,37]), следует сконструировать подходящие общие соотношения инвариантности для данной проблемы, которые связывают между собой решения однотипных или различных задач. Далее на основе общей информации о симметрии объекта, свойствах источников, рассеивающих телах и их границах, некоторых аналитических свойствах величин, входящих в общие соотношения инвариантности, и т.д. выводятся более частные соотношения. При этом желательно подбирать соотношения инвариантности таким образом, чтобы о некоторых из величин, входящих в них, были известны какие-либо конкретные данные. Дальнейший анализ этих соотношений и вывод из них конкретных следствий должен производиться с использованием дополнительной содержательной информации и конструктивных идей, появляющихся в процессе исследования при рассмотрении частных проблем. Следует подчеркнуть, что число соотношений инвариантности, вообще говоря, принципиально не ограничено ввиду наличия бесконечного множества указанных в [34,37] операций. Однако, наибольший интерес для приложений, по-видимому, будут иметь наиболее простые среди них. В качестве достоинств указанного подхода можно отметить его эвристичность, общность и достаточную гибкость при построении нужных общих соотношений инвариантности. В работах [32-37] были отмечены связи, существующие между излагаемым подходом и методами доопределения, поверхностных "псевдоисточников" и т.д..

3. <u>О некоторых приложениях общих соотношений инвариантности</u>. Очевидно, что на данном этапе развития теории переноса получение решений для многомерных задач является весьма трудным делом. Тем не менее в работах [32,33,35-51] удалось на основе анализа общих соотношений инвариантности получить ряд новых точных, приближенных, асимптотических решений, соотношений и неравенств для различных характерстик полей излучения в плоском слое, шаре, цилиндре, правильных многогранниках и невогнутых рассеивающих телах (при этом и для ситуаций, когда они содержат ограниченные мононаправленные источники). В статьях [39,41,42] для консервативно рассеивающих тел, имеющих форму слоя, шара, цилиндра, правильных многогранников были найдены точные выражения

для средних длительностей ухода энергии излучения за пределы внутренних частей указанных сред при облучении их источниками специальных типов. Там же был получен ряд других точных решений уравнения переноса излучения. В работах [39,40,42,44,47] были выведены нижние и верхние оценки и асимптотики для потоков излучения и "интегральных" светимостей для случая рассеивающих сред невогнутой формы. К тому же в них были предложены приближенные формулы для этих величин и даны априорные оценки их относительных погрешностей. Заметим,что если среда однородна,то все величины,входящие в эти формулы можно выразить через характеристики полей излучения в бесконечных однородных средах,которые зачастую можно найти в аналитической форме. Ниже эффективность использования общих соотношений инвариантности проиллюстрируем на примере получения асимптотик. При этом ввиду невозможности приведения выводов формул ограничимся только их описанием.

Приведем сначала одну асимптотику для энергии излучения $\Pi_1(S)$, выходящей в единицу времени через границу S однородной оптически толстой почти консервативно рассеивающей среды V, содержащей произвольные внутренние источники (границу S считаем невогнутой и гладкой). Обозначим через $\tilde{V}(P,\tau_1)$ шар,полностью принадлежащий V и касающийся S в точке P (τ_1 - оптический радиус этого шара). Пусть $\tau_2(P)$ - максимальное значение τ_1 на множестве шаров с указанными свойствами. Под τ^* будем понимать минимальное значение $\tau_2(P)$ при $P\in S$. При указанных условиях на основе анализа общих соотношений инвариантности [33-35, 37] можно показать,что имеет место асимптотика

$$\left(\Pi_1(S)/\Pi_2(S)\right)=2+O\left(k+(k\tau^*)^{-1}\right), \qquad (2)$$

$$k\tau^*\to\infty\ ,\ k\to 0\ \ (\Lambda\to 1),$$

где k - наименьший неотрицательный корень характеристического уравнения (Λ - альбедо однократного рассеяния), $\Pi_2(S)$ - поток излучения через границу S ,когда тело V вместе с источниками "погружено" в бесконечную среду (при этом в качестве главной нормали при вычислении потока надо брать внешнюю нормаль к S). Заметим,что для однородной среды V величину $\Pi_2(S)$ можно найти в аналитическом виде, а также получить для нее асимптотические выражения [47,48]. Для частного случая изотропного рассеяния формула (2) была получена в [48].

В статье [45] с использованием общих соотношений инвариантности и асимптотики функции Грина для бесконечной однородной среды, полученной в работе [93], были найдены асимптотические выражения для "значений" функций Грина уравнения переноса излучения на границах однородных оптически толстых шара и цилиндра, содержащих в центре и на оси симметрии соответственно точечный и линейный мононаправленные источники. В [38,43,46,49,88,89] с помощью родственных подходов был найден ряд других асимптотик для решений уравнения переноса излучения для оптически толстого шара, содержащего сферически симметричные источники.

В работе [50] была решена задача об отыскании объемной функции Грина $\tilde{G}_{(0,\infty)}(\vec{\tau},\vec{\Omega},\vec{\tau}^*,\vec{\Omega}^*)$ безразмерного уравнения переноса излучения на границе (точка "наблюдения" задается оптическим радиусом-вектором $\vec{\tau}$) однородной полубесконечной среды $\bar{V}_{(0,\infty)}$, на большой оптической глубине τ_0 которой находится точечный мононаправленный "источник" $\delta(\vec{\tau}-\vec{\tau}^*)\delta(\vec{\Omega}-\vec{\Omega}^*)$ ($\vec{\tau}^*$ и $\vec{\Omega}^*$ - определяют положение и направленность источника; $|\vec{\Omega}|=|\Omega^*|=1$). Введем в рассмотрение безразмерную прямоугольную декартову систему координат $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$, которая расположена следующим образом: плоскость $O\bar{X}\bar{Y}$ совпадает с границей $\bar{S}$ среды $\bar{V}_{(0,\infty)}$, а точка O — с точкой "наблюдения"; направление оси $O\bar{Z}$ совпадает с направлением внутренней нормали к $\bar{S}$; ось $O\bar{Y}$ лежит в плоскости, перпендикулярной $\bar{S}$ и проходящей через источник и точку "наблюдения", причем вектор $\vec{\tau}^*$ должен иметь компоненты $(0,\tau_0 tg\beta,\tau_0)$, где β - величина угла между внутренней нормалью к $\bar{S}$ и вектором $(-\vec{R}_1)=$ $=\vec{\tau}^*-\vec{\tau}$ $(0\le\beta<\frac{\pi}{2})$. Используя общее соотношение инвариантности, связывающее между собой функции Грина уравнений переноса излучения для случаев бесконечной $\bar{V}_\infty$ и полубесконечной $\bar{V}_{(0,\infty)}$ сред (см., [33,34,48,51]), асимптотику функции Грина для $\bar{V}_\infty$, найденную в [14,93], и специальный прием отыскания асимптотик поверхностных интегралов, использованный в [48,50,51], можно показать, что имеет место следующее асимптотическое выражение [50]:

$$\tilde{G}_{(0,\infty)}(\vec{\tau},\vec{\Omega},\vec{\tau}^*,\vec{\Omega}^*)=\frac{k\exp(-kR_1)}{2\pi^2 M R_1}i\left(\vec{\Omega}^*\cdot\frac{\vec{R}_1}{R_1}\right)\left\{i\left(\vec{\Omega}\cdot\frac{\vec{R}_1}{R_1}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{M}\int_0^1 \mu'd\mu'\int_0^{2\pi} i(\varkappa)\hat{I}(0,-\mu',\varphi',\mu,\varphi)d\varphi'\right\}+\Delta,$$

$$\tau_0\to\infty,\ R_1\to\infty,\ \mu>0\quad(0<\Lambda<1)\quad. \tag{3}$$

Здесь $R_1=|\vec{R}_1|$; $\varkappa=\sqrt{1-(\mu')^2}\sin\varphi'\sin\beta-\mu'\cos\beta$; $M=$ $=2\int_{-1}^{1}\xi i^2(\xi)d\xi$,где $i(\xi)$ - глубинное тело яркости [4,93];

μ - косинус угла между вектором $\vec{a}=-\vec{\Omega}$ и осью OZ ,а φ - азимутальный угол вектора $\vec{a}$; $\Delta=\Delta_1+\Delta_2$,где функция Δ_1 описывает прямое и первые три кратности рассеянного излучения, а Δ_2 - ограниченная величина,убывающая "быстрее" при $\tau_0\to\infty$, $R_1\to\infty$,чем первый член в правой части (3) ;функция $\hat{I}(\tau,\mu_1,\varphi_1,\mu,\varphi)$ является решением такой краевой задачи

$$\mu_1\frac{\partial\hat{I}(\tau,\mu_1,\varphi_1,\mu,\varphi)}{\partial\tau}=-\left(1-k\sin\beta\cdot\sin\varphi_1\sqrt{1-\mu_1^2}\right)\times$$

$$\times\hat{I}(\tau,\mu_1,\varphi_1,\mu,\varphi)+\frac{\Lambda}{4\pi}\int_{\Omega}x(\mu_0)\hat{I}(\tau,\mu',\varphi',\mu,\varphi)d\Omega',$$

$$\hat{I}(0,\mu_1,\varphi_1,\mu,\varphi)\Big|_{\mu_1>0}=\delta(\mu_1-\mu)\delta(\varphi_1-\varphi),\ \mu>0,\ \tau\geq 0, \tag{4}$$

где $x(\mu_0)$ - индикатриса рассеяния. Заметим,что формула (3) сводит вопрос об определении асимптотики функции Грина к отысканию функции $i(...)$ и решению краевой задачи (4) ,размерность которой на две единицы меньше таковой для исходной проблемы. Согласно принципу взаимности [13] имеет место равенство $\tilde{G}_{\bar{S}}(\vec{\tau}^*,-\vec{\Omega}^*,\vec{\tau},-\vec{\Omega})=\mu\tilde{G}_{(0,\infty)}(\vec{\tau},\vec{\Omega},\vec{\tau}^*,\vec{\Omega}^*)$, где $\tilde{G}_{\bar{S}}(...)$ - поверхностная функция Грина. Следовательно умножив (3) на μ ,получим асимптотику $\tilde{G}_{\bar{S}}(...)$ (теперь положение точки "наблюдения" будет определяться $\vec{\tau}^*$,а место "падения" бесконечно узкого мононаправленного внешнего пучка излучения вектором $\vec{\tau}$ =

$= (0,0,0)$). Из сказанного следует, что относительная форма тела яркости на большой оптической глубине полубесконечной однородной среды, облучаемой указанным внешним пучком излучения, определяется классической функцией $i(\ldots)$ [2-4,7], введенной в теорию переноса при рассмотрении глубинного режима для случая задач, обладающих в своей постановке плоскопараллельной симметрией. Можно показать, что при облучении однородной полубесконечной среды, ограниченной зеркально отражающей поверхностью, точечным мононаправленным источником, находящимся на конечной оптической глубине, относительная форма глубинного тела яркости определяется тоже функцией $i(\ldots)$.

Рассмотрим теперь однородный слой $\overline{V}$ большой оптической толщины τ_0, который содержит точечный мононаправленный источник $\delta(\vec{\tau}-\vec{\tau}^*)\delta(\vec{\Omega}-\vec{\Omega}^*)$. Пусть минимальное оптическое расстояние от источника (он расположен в точке T_1) до второй границы $\overline{S}_2$ слоя $\overline{V}$ равно τ^* ($\tau^* = const$), а точка "наблюдения" P расположена на оптическом расстоянии τ_2 (это тоже наименьшее оптическое расстояние; $\tau_2 = const$) от первой границы $\overline{S}_1$ слоя. Обозначим через K и N_0 - проекции точек P и T_1 соответственно на границы $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$, а через β угол между векторами $\vec{n}_2$ и $\overrightarrow{KN_0}$, где $\vec{n}_2$ - единичная внешняя нормаль к $\overline{S}_2$. Введем еще в рассмотрение две безразмерные прямоугольные декартовы системы координат $K\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$ и $N_0\overline{X}_1\overline{Y}_1\overline{Z}_1$. Они расположены следующим образом: оси $\overline{Z}$ и $\overline{Z}_1$ ортогональны границам слоя и имеют направления, совпадающие соответственно с направлениями векторов $\vec{n}_2$ и $\vec{n}_1$ ($\vec{n}_1$ - единичная внешняя нормаль к $\overline{S}_1$); плоскости $K\overline{X}\overline{Y}$ и $N_0\overline{X}_1\overline{Y}_1$ совпадают соответственно с $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$; оси $\overline{X}$ и $\overline{X}_1$ параллельны друг другу и имеют одинаковые направления; оси $\overline{Y}$ и $\overline{Y}_1$ параллельны и имеют противоположные направления; плоскости $K\overline{Y}\overline{Z}$ и $N_0\overline{Y}_1\overline{Z}_1$ совпадают друг с другом; точка N_0 имеет координаты $(0, \tau_0 tg\beta, \tau_0)$ в системе $K\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$, а точка K имеет такие же координаты в системе $N_0\overline{X}_1\overline{Y}_1\overline{Z}_1$. Если теперь использовать общие соотношения инвариантности (см. [33-35,48,51]), связывающие функции Грина $\tilde{G}_{(0,\infty)}(\ldots)$ и $\tilde{G}(\vec{\tau},\vec{\Omega},\vec{\tau}^*;\vec{\Omega}^*;\overline{V})$ уравнения переноса для полубесконечной среды $\overline{V}_{(0,\infty)}$ и плоского слоя $\overline{V}$, и результаты, изложенные в [50], то можно получить такую асимптотику

$$\tilde{G}(\vec{\tau},\vec{\Omega},\vec{\tau}^*,\vec{\Omega}^*,\vec{V}) = k(2\pi^2 M\tau_0)^{-1}\cos\beta\exp(-k\tau_0/\cos\beta)\times$$

$$\times U(M_1,\varphi_1,\tau_2,\beta)\,U(M^*,\varphi^*,\tau^*,\beta) + q + \eta_1 ,$$

$$q = o(\tau_0^{-1}\cos\beta\exp(-k\tau_0/\cos\beta)),\ \beta = const,$$

$$\tau_0 \to \infty \qquad (0 < \Lambda < 1)\ . \tag{5}$$

Здесь

$$U(\tilde{M},\tilde{\varphi},\tilde{\tau},\beta) = \exp(k\tilde{\tau}\cos\beta)\,i\left(\sqrt{1-(\tilde{M})^2}\sin\beta\sin\tilde{\varphi} + \tilde{M}\cos\beta\right) +$$

$$+ \Phi(\tilde{M},\tilde{\varphi},\tilde{\tau},\beta); \tag{6}$$

θ_1, φ_1 и θ^*, φ^* – угловые координаты векторов $\vec{b} = -\vec{\Omega}$ и $\vec{\Omega}^*$ соответственно в сферических системах, согласованных с системами $K\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ и $N_0\bar{X}_1\bar{Y}_1\bar{Z}_1$ $(M_1 = \cos\theta_1,\ M^* = \cos\theta^*)$; функция η_1 задает прямое и первые три кратности рассеянного излучения; величина $\Phi(\tilde{M},\tilde{\varphi},\tilde{\tau},\beta)$ равна

$$\Phi(\tilde{M},\tilde{\varphi},\tilde{\tau},\beta) = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{0} M'\,i\left(\sqrt{1-(M')^2}\sin\varphi'\sin\beta + M'\cos\beta\right)\times$$

$$\times \hat{I}_1(0,M',\varphi',\tilde{M},\tilde{\varphi},\beta,\tilde{\tau})\,dM' \ . \tag{7}$$

Функция $\hat{I}_1(\dots)$ в (7) в свою очередь определяется из решения следующей краевой задачи:

$$M\frac{\partial \hat{I}_1(\tau,M,\varphi,\tilde{M},\tilde{\varphi},\beta,\tilde{\tau})}{\partial\tau} = -\left(1 - k\sqrt{1-M^2}\sin\beta\sin\varphi\right)\times$$

$$\times \hat{I}_1(\tau,M,\varphi,\tilde{M},\tilde{\varphi},\beta,\tilde{\tau}) + \frac{\Lambda}{4\pi}\int_{\Omega} x(M_0)\,\hat{I}_1(\tau,M',\varphi',\tilde{M},\tilde{\varphi},\beta,\tilde{\tau})\,d\Omega' +$$

$$+ \delta(\tau-\tilde{\tau})\,\delta(M-\tilde{M})\,\delta(\varphi-\tilde{\varphi}),$$

$$\hat{I}_1(0,|M|,\varphi,\tilde{M},\tilde{\varphi},\beta,\tilde{\tau}) = 0, \quad \tau\in[0,\infty) \ . \tag{8}$$

При $\beta \to 0$, $\tau^* \to 0$, $\tau_2 \to 0$ соотношение (5) переходит в асимптотику, полученную в [48,51], причем при этих условиях функция $M^{-1}U(...)$ стремится к коэффициенту пропускания $\mathcal{U}(...)$ для полубесконечной среды [3,4]. Если проинтегрировать (5) по μ^* и φ^* соответственно на отрезках $[-1,-1]$ и $[0,2\pi]$, а затем умножить на $\alpha^2 L$ (L величина, имеющая размерность мощности), то получим асимптотику интенсивности излучения в оптически толстом слое, который содержит точечный изотропный источник мощности $4\pi L$. Формула (5) также как и (3) сводит исследование трехмерной (по пространственным переменным) проблемы к решению одномерной задачи.

В статье [94] найдены асимптотики функций Грина уравнения переноса излучения для сред цилиндрической формы двух типов (поскольку они справедливы и для неоднородных сред, то ниже рассмотрение будет вестись с использованием "размерного" уравнения переноса, а геометрические величины будут описываться в обычной прямоугольной декартовой системе координат). К первому относится рассеивающее поглощающее тело V_1, границей которого является цилиндрическая поверхность S_1, пересечение которой с плоскостью, перпендикулярной к образующим границы тела V_1 дает невогнутую кривую ℓ (ℓ - направляющая цилиндрической поверхности S_1). Тело V_1 будем называть бесконечным цилиндром. Ко второму типу относится полубесконечный цилиндр, под которым будем понимать среду V_2, имеющую форму тела, являющегося общей частью V_1 и одного из полупространств, на которое делит пространство плоскость S, перпендикулярная к образующим поверхности S_1. В [94] предполагалось, что оптические характеристики сред в любом сечении тел V_1 и V_2 плоскостью, перпендикулярной образующим, не зависят от его положения. Однако, считалось, что они могут изменяться в пределах самого сечения. Кратко опишем здесь только способ получения глубинной асимптотики функции Грина $G(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{r}^*,\vec{\Omega}^*, V_1)$ для случая бесконечного цилиндра V_1, содержащего внутри себя точечный мононаправленный "источник" $\delta(\vec{r}-\vec{r}^*)\delta(\vec{\Omega}-\vec{\Omega}^*)$, где $\vec{r}$ и $\vec{r}^*$ -радиусы-векторы, задающие положения точки "наблюдения" и источника (векторы $\vec{\Omega}$, $\vec{\Omega}^*$ имеют прежний смысл). Введем декартову прямоугольную систему координат $OXYZ$, плоскость OXY которой перпендикулярна образующим цилиндра V_1. В этой системе $\vec{r}=(x,y,z)$, $\vec{r}^*=(x^*,y^*,z^*)$, $\alpha=\alpha(x,y)$, где α - показатель ослабления.

Пусть $\alpha_1 = \inf\limits_{(x,y)\in\tilde{S}} \{\alpha(x,y)\} \geq const > 0$, где $\tilde{S}$ - область на плоскости OXY, ограниченная проекцией $\tilde{\ell}$ направляющей ℓ на саму плоскость OXY. Теперь введем весьма важное с физической точки зрения ограничение, а именно будем считать, что $\alpha_1 d$ (d - точная верхняя грань длин всех отрезков, отсекаемых S_1 от прямых, пересекающих V_1 и параллельных OXY является ограниченной величиной. Если $\alpha_1|z-z^*|\to\infty$, то естественно предположить, что в процессе многократного рассеяния в поперечном сечении цилиндра V_1 будет устанавливаться распределение поля излучения, независимое в относительных единицах от $|z-z^*|$. Данное утверждение есть фактически предположение о возможности разделения переменных, когда источник и точка "наблюдения" удалены друг от друга на большое оптическое расстояние $\alpha_1|z-z^*|$. В работе [95] исследованы некоторые математические вопросы, связанные с возможностью такого разделения. Итак, будем предполагать, что

$$
\begin{gathered}
G(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{r}^*,\vec{\Omega}^*,V_1) = f(z-z^*)\Phi(x,y;\vec{\Omega})\Phi_1(x^*,y^*;\vec{\Omega}^*) + \\
+\eta_2, \quad \alpha_1|z-z^*|\to\infty, \\
\vec{\Omega} = \left(\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi, \sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi, \mu\right), \\
\vec{\Omega}^* = \left(\sqrt{1-(\mu^*)^2}\cos\varphi^*, \sqrt{1-(\mu^*)^2}\sin\varphi^*, \mu^*\right).
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Здесь функции $f(\ldots)$, $\Phi(\ldots)$, $\Phi_1(\ldots)$ подлежат определению; функция η_2 убывает при $\alpha_1|z-z^*|\to\infty$ "быстрее", чем первый член в правой части (9) (в общем случае η_2 - обобщенная функция); μ, φ и μ^*, φ^* - угловые координаты векторов $\vec{\Omega}$, $\vec{\Omega}^*$ в сферической системе координат, согласованной с системой $OXYZ$. Положим $z^*<0$, $z>0$. Тогда из результатов работ [33,34] следует, что имеет место следующее общее соотношение инвариантности:

$$
\begin{gathered}
G(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{r}^*,\vec{\Omega}^*,V_1) = -\iint\limits_{\tilde{S}} d\tilde{S}' \int\limits_{\Omega} (\vec{n}'\cdot\vec{\Omega}')\, G(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{r}',\vec{\Omega}',V_1)\, \times \\
\times\, G(\vec{r}',\vec{\Omega}',\vec{r}^*,\vec{\Omega}^*,V_1)\, d\Omega',
\end{gathered}
\tag{10}
$$

где $\vec{n}' = -\vec{k}$ ($\vec{k}$ вектор, имеющий направление оси Z; $|\vec{n}'|=1$).

Подставляя (9) в (10) и отбрасывая члены более высокого порядка, получим (при $\alpha_1 z \to \infty$, $\alpha_1 |z^*| \to \infty$) соотношение

$$\xi(z-z^*) = -\xi(z)\xi(-z^*) \times \times \iiint_{\tilde{S}} d\tilde{S}' \int_{\Omega} (\vec{n}'\cdot\vec{\Omega}')\Phi(x',y';\vec{\Omega}')\Phi_1(x',y';\vec{\Omega}')\,d\Omega' . \qquad (11)$$

Выберем нормировку функций $\Phi(...)$, $\Phi_1(...)$ так, чтобы выполнялось условие

$$\iiint_{\tilde{S}} d\tilde{S}' \int_{\Omega} (\vec{n}'\cdot\vec{\Omega}')\Phi(x',y';\vec{\Omega}')\Phi_1(x',y';\vec{\Omega}')\,d\Omega' = -1 . \qquad (12)$$

Из (11), (12) с учетом того, что z и z^* произвольные (в рамках ограничений $\alpha_1 z \gg 1$, $\alpha_1|z^*| \gg 1$, $\alpha_1|z-z^*| \gg 1$) числа, получаем $\xi(z) = exp(\pm\tilde{k}|z|)$ ($\tilde{k}$ - неотрицательное число). Так как поле излучения при $\alpha_1|z-z^*| \to \infty$ должно убывать, то следует положить $\xi(z) = exp(-\tilde{k}|z|)$. Теперь надо найти связь между $\Phi(...)$ и $\Phi_1(...)$. Воспользовавшись принципом взаимности [13] и соотношением (9), приходим к такому выражению:

$$\Phi_1(x,y;\vec{\Omega}) = \Phi_1(x,y;\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi, \sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi, \mu) = = C\,\Phi(x,-y;-\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi, \sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi, \mu),\ C = const . \qquad (13)$$

Подставив (13) в (12) , получим условие нормировки для $\Phi(...)$

$$C \iiint_{\tilde{S}} d\tilde{S}' \int_{\Omega} (\vec{n}'\cdot\vec{\Omega}')\tilde{\Phi}(x',y';\mu',\varphi')\tilde{\Phi}(x',-y';\mu',\pi-\varphi')\,d\Omega' = -1,$$

$$\tilde{\Phi}(x,y;\mu,\varphi) = \Phi(x,y;\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi, \sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi, \mu) . \qquad (14)$$

Из (9), (13), (14) находим искомую асимптотику

$$G(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{r}^*,\vec{\Omega}^*,V_1) = C\,exp(-\tilde{k}|z-z^*|)\,\tilde{\Phi}(x,y;\mu,\varphi) \times \times \tilde{\Phi}(x^*,-y^*;\mu^*,\pi-\varphi^*) + \eta_2 ,\quad \alpha_1|z-z^*| \to \infty . \qquad (15)$$

Поскольку выражение (15) должно удовлетворять однородному уравнению переноса, приходим к такой краевой задаче для определения функции $\tilde{\Phi}(...)$ (см. также [95])

$$-\tilde{k}\mu\tilde{\Phi}(x,y;\mu,\varphi)+\vec{\Omega}_{\perp}\cdot\nabla_{\perp}\tilde{\Phi}(x,y;\mu,\varphi)=-\alpha(x,y)\tilde{\Phi}(x,y;\mu,\varphi)+$$

$$+\frac{\sigma(x,y)}{4\pi}\int_{\Omega}\chi(x,y;\mu_0)\tilde{\Phi}(x,y;\mu',\varphi')d\Omega',\quad \vec{r}_{1}=(x,y),$$

$$\nabla_{\perp}=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y},\ \vec{\Omega}_{\perp}=(\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi,\sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi),$$

$$\tilde{\Phi}(x,y;\mu,\varphi)\Big|_{\substack{\vec{r}_1\in\tilde{\ell}\\ \vec{n}_1\cdot\vec{\Omega}_{\perp}>0}}=0\ , \qquad (16)$$

где $\sigma(x,y)$ - показатель рассеяния (выше фактически предполагалось также, что $\sigma(x,y)\geqslant const>0$ для любых $(x,y)\in\tilde{S}$), $\vec{n}_1$ - внутренняя нормаль к границе S_1 в точке, задаваемой $\vec{r}=(x,y,0)$, а $\vec{i}$ и $\vec{j}$ - единичные орты системы OXY ($\chi(...)$ - индикатриса рассеяния). Задача (16) может решаться для любой заданной нормировки функции $\tilde{\Phi}(...)$, а затем константу C в (15) следует находить из условия (14).

Из изложенного выше следует, что подход, основанный на использовании общих соотношений инвариантности [32-37] , позволяет решить целый ряд "многомерных" задач теории переноса излучения, причем зачастую в аналитическом виде.

ЛИТЕРАТУРА

I. Хвольсон О.Д.//Изв.Петербургской Академии наук.1890. Т.33.С.221 .

2. Соболев В.В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет.М.,1956.

3. Амбарцумян В.А.//Научные труды.Ереван,1960.Т.I.

4. Соболев В.В. Рассеяние света в атмосферах планет.М., 1972.

5. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии.М.,1953.

6. Иванов В.В. Перенос излучения и спектры небесных тел. М.,1969.

7. Минин И.Н. Теория переноса излучения в атмосферах планет.М.,1988.

8. Иванов А.П. Оптика рассеивающих сред.Минск,1969.

9. Кондратьев К.Я.,Биненко В.И. Влияние облачности на радиацию и климат.Ленинград,1984.

10. Иванов А.П. Физические основы гидрооптики.Минск,1975.

11. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов.М.,1960.

12. Марчук Г.И.,Лебедев В.И. Численные методы в теории переноса нейтронов.М.,1971.

13. Кейз К.,Цвайфель П. Линейная теория переноса.М.,1972.

14. Фано У.,Спенсер Л.,Бергер М. Перенос гамма-излучения. М.,1963.

15. Зеге Э.П.,Иванов А.П.,Кацев И.Л. Перенос изображения в рассеивающей среде.Минск,1985.

16. Черчиньяни К. Математические методы в кинетической теории газов.М.,1973.

17. Нагирнер Д.И.//Докл.АН СССР.1986.Т.289,№3.С.606-609.

18. Колесов А.К.//Докл.АН СССР.1983.Т.272,№ 1.С.53-56.

19. Ершов Ю.И.,Шихов С.Б. Методы решения краевых задач теории переноса.М.,1977.

20. Martonchik J.V., Diner D.J.//JQSRT.1985.v.34,No 2.P.133-148.

21. Лалетин Н.И.//Методы расчета полей тепловых нейтронов в решетках реакторов.М.,1974.С.155-186.

22. Beauwens R., Devooght J.//Nucl. Sci. Engng. 1968. V. 32, No 2. P.249-261.

23. Колесов А.К.//Астрофизика.1984.Т.20,№ 1.С.133-147.

24. Шулая Д.А.//Докл.АН СССР.1990.Т.312,№ 3.С.604-606.

25. Gibbs A.G.//J. Math. Phys. 1969. V. 10, No 2. P.875-890.

26. Ou S.-C., Liou K.-N.//JQSRT.1982.v.28, No 4. P.271-288.

27. Иванов А.П.,Борисевич М.Н. Распространение солнечного излучения через кучевую облачность.Минск,1987 (Препринт ИФ АН БССР № 467).

28. Бусыгин В.П.,Евстратов Н.А.,Фейгельсон Е.М.//Изв.АН СССР.Физика атмосферы и океана.1977.Т.13,№ 3.С.264-273.

29. McKee T.B., Klehr J.T.//Monthly Weather Rev. 1978. V. 106, No 3. P. 399-404.

30. Латышев В.Н.//Дифференциальные уравнения.1984.Т.20,№ 9. С.1596-1602.

31. Басс Л.П.,Волощенко Л.М.,Гермогенова Т.А. Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучения.М.,1986.

32. Роговцов Н.Н.//Изв.АН СССР.Физика атмосферы и океана. 1980.Т.16,№ 3.С.244-253.

33. Роговцов Н.Н.//Ж.прикл.спектроскопии.1981.Т.34,№ 2. С.335-342.
34. Роговцов Н.Н.//Докл.АН БССР.1981.Т.25,№ 5.С.420-423.
35. Роговцов Н.Н.//Ж.прикл.спектроскопии.1981.Т.35,№ 6. С.1044-1050.
36. Роговцов Н.Н.//Ж.прикл.спектроскопии.1985.Т.43,№ 1. С.142-148.
37. Роговцов Н.Н.//Принцип инвариантности и его приложения.: Тр.Всес.симп.,приуроч.к 40-летию введения принципа инвариантности в теорию переноса излучения.,Бюракан,26-30 окт.,1981.-Ереван, 1989. С.120-134.
38. Роговцов Н.Н.,Самсон А.М.//Астрофизика.1985.Т.23,№ 1. С.163-176.
39. Роговцов Н.Н.//Докл.АН БССР.1983.Т.23,№ 1.С.34-37.
40. Роговцов Н.Н.//Докл.АН БССР.1983.Т.27,№ 10.С.901-903.
41. Роговцов Н.Н.//Ж.прикл.спектроскопии.1985.Т.42,№ 5. С.839-843.
42. Роговцов Н.Н.//Изв.АН СССР.Физика атмосферы и океана. 1985.Т.21,№ 10.С.111-1112.
43. Роговцов Н.Н. //Ж.прикл.спектроскопии.1986.Т.44,№ 4. С.659-663.
44. Роговцов Н.Н.//Докл.АН БССР.1986.Т.30,№ 7.С.609-612.
45. Роговцов Н.Н.//Докл.АН БССР.1986.Т.30,№ 10.С.901-904.
46. Роговцов Н.Н.,Самсон А.М.//Докл.АН БССР.1987.Т.31,№ 4. С.320-323.
47. Роговцов Н.Н.//Ж.прикл.спектроскопии.1987.Т.47,№5.С.866.
48. Роговцов Н.Н.//Докл.АН БССР.1988.Т.32,№ 5.С.413-416.
49. Роговцов Н.Н.//Весцi АН БССР.Сер.фiз.-мат.навук.1988. № 2.С.101-106.
50. Роговцов Н.Н.//Докл.АН БССР.1988.Т.32,№ 12.С.1085-1088.
51. Роговцов Н.Н.//Астрофизика.1988.Т.29,№ 3.С.602-612.
52. Пикичян О.В.//Принцип инвариантности и его приложения: Тр.Всес.симп.,приуроч. к 40-летию введения принципа инвариантности в теорию переноса излуч.,Бюракан,26-30 окт.,1981.-Ереван, 1989. С.88-119.
53. Пикичян О.В.//Докл.АН СССР.1982.Т.262,№ 4.С.860-863.
54. Пикичян О.В.//Докл.АН СССР.1982.Т.263,№ 3.С.601-606.
55. Пикичян О.В.//Докл.АН СССР.1983.Т.273,№4.С.861-865.
56. Stokes G. G. // Proc. Roy. Soc., 1862. V. 11. P. 545.

57. Степанов Б.И.//Изв.АН СССР.Сер.физическая.1957.Т.21,№ 11. С.1485-1493.
58. Гершун А.Л.//Труды ГОИ.1936.Т.11,вып.99.С.43-55.
59. Gurevic M.//Phys.ZS.1930.No 16. P.753-763.
60. Амбарцумян В.А.//Докл.АН СССР.1943.Т.38,№ 8.С.257
61. Пикичян О.В.//Сообщения Бюраканской обсерватории.1984. вып.57.С.5-16.
62. Левашев А.Е. Движение и двойственность в релятивистской электродинамике.Минск,1979.
63. Вигнер Е.В. Этюды о симметрии.М.,1970.
64. Вейль Г. Математическое мышление.М.,1989.
65. Яновицкий Э.Г.//Астрон.журн.1971.Т.48,№ 2.С.323-332.
66. Романова Л.М.//Изв.АН СССР.Физика атмосферы и океана. 1976.Т.12,№ 8.С.820-833.
67. Мнацаканян М.А.//Сообщ.Бюраканской обсерв.1978.вып.50. С.59-78.
68. Hunt G.E.,Grant I.P.//J.Atmos. Sci. 1969.v.26, No 9. P.963-972.
69. Гермогенова Т.А.,Коновалов Н.В.//Ж.вычисл. мат. и мат. физики.1974.Т.14,№ 4.С.928-946.
70. Peebles G.H., Plesset M.S.//Phys. Rev. 1951. v.81,No3.P.430.
71. Касти Дж.,Калаба Р. Методы погружения в прикладной математике.М.,1976.
72. Амбарцумян В.А.//Принцип инвариантности и его приложения:Тр.Всес.симп.,приуроч. к 40-летию введения принципа инвариантности в теорию переноса излуч.,Бюракан,26-30 окт.,1981. Ереван,1989. С.9-18.
73. Кляцкин В.И. Метод погружения в теории распространения волн.М.,1986.
74. Kalaba R., Ruspini E.H.//JQSRT. 1971. v.11, No 7. P.1063-1074.
75. Bellman R., Kagiwada H., Kalaba R., Ueno S.//J. Math. Phys. 1968. V. 9, No 6. P. 909-912.
76. Bellman R., Kalaba R., Ueno S.//J. Math. Anal. Appl. 1963. V. 7, No 1. P. 91-99.
77. Кацев И.Л.//Изв.АН СССР.Физика атмосферы и океана. 1974.Т.10,№ 4.С.425-430.
78. Иванов В.В.//Астрофизика.1976.Т.12,№ 4.С.565-578.
79. Яновицкий Э.Г.//Астрон.журн.1979.Т.59,№ 4.С.833-844.
80. Пикичян О.В.//Астрофизика.1978.Т. 14,№ 1.С.169-190.

81. Енгибарян Н.Б.,Мнацаканян М.А.//Докл.АН СССР.1974.Т.217, № 3.С.533-535.
82. Иванов В.В.//Астрон.журн.1975.Т.52,№2.С.217-226.
83. Яновицкий Э.Г.//Астрон.журн.1981.Т.58,№ 1.С.119-129.
84. Длугач Ж.М.//Астрон.журн.1976.Т.53,№ 6.С.1295-1305.
85. Мнацаканян М.А.//Астрофизика.1980.Т.16,№ 3,С.514-533.
86. Яновицкий Э.Г.//Астрон.журн.1980.Т.57,№6.С.1277-1286.
87. Орлов В.В.//Атомная энергия.1975.Т.38,№ 1.С.39-40.
88. Соболев В.В.//Докл.АН СССР.1983.Т.273,№ 3.С.573-576.
89. Колесов А.К.//Астрофизика.1984.Т.21,№ 2.С.309-322.
90. Crosbie A.L., Shien S.M.//JQSRT. 1989. V. 42, No 1. P.33-38.
91. Кадомцев Б.Б.//Докл.АН СССР.1957.Т.112,№ 5.С.831-834.
92. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре.М.,1973.
93. Долин Л.С.//Оптика моря.М.,1983.С.118-123.
94. Роговцов Н.Н.//Докл.АН БССР.1990.Т.34,№ 12.С.1081-1084.
95. Гермогенова Т.А.,Павельева Е.Б.//Журн.вычисл. мат. и мат.физики.1989.Т.29,№8.С.1195-1211.