

ления процессами, протекающими на границе «покрытие – основа» и, как следствие, уровнем механических свойств покрытий путем изменения режимов обработки, задающих температуру нагрева и время существования ванны расплава.

Результаты исследований позволяют применить лазерное оплавление покрытий, в первую очередь, на тех деталях – крупногабаритных, длинномерных, тонкостенных, где не может быть использовано объемное оплавление по причине возникающих больших остаточных напряжений и недопустимых изменений структуры основы. Разработана технология оплавления таких деталей, как рабочие колеса маги-

стральных нефтяных насосов, штоки плунжерных насосов и др. Данная технология внедрена на ряде предприятий нефтяной и нефтехимической промышленности со значительным экономическим эффектом.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Теория** и практика нанесения защитных покрытий / П. А. Витязь [и др.]. – Минск: Беларуская навука, 1998. – 583 с.

2. **Хасуй, А.** Техника напыления: пер. с яп. / А. Хасуй – М.: Машиностроение, 1975. – 288 с.

Поступила 6.06.2006

УДК 539.374

## ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ДЕФОРМАЦИЯМИ И НАПРЯЖЕНИЯМИ В НАПОЛНИТЕЛЯХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

*Докт. физ.-мат. наук, проф. ВАСИЛЕВИЧ Ю. В.,  
канд. физ.-мат. наук, проф. САХОНЕНКО В. М., САХОНЕНКО С. В.*

*Белорусский национальный технический университет*

В современном производстве для композиционно-волокнутого материала (КМ) в основном применяют наполнители, получаемые на основе пряжей (нитей, изготовленных из волокон), а также тканей. В первом случае КМ создается путем послойной укладки семейств однонаправленных нитей. В результате получается слоистая структура (она может представлять собой взаимно перпендикулярные семейства нитей), у которой отсутствует взаимное переплетение. Во втором случае рассматриваются ортотропные структуры из композиционных материалов, которые представляют собой многослойные среды на основе тканей, имеющих упорядоченное расположение волокон. Все слои КМ сориентированы в одном направлении, которые пропитаны полимерным связующим.

Технологический процесс изготовления изделий из композиционно-волокнутого материала состоит из трех стадий: формирования поверхностей заданной геометрии, т. е. получения полуфабрикатов в виде слоистой структуры семейств волокон (ткани), пропитанных связующим; отверждения связующего; механиче-

ской обработки поверхностей изделия до требуемой точности. Особый интерес представляет стадия получения полуфабриката, когда связующее композита неотверждено (такой материал называют препрегом). На этой стадии материал конструкции позволяет целенаправленно создавать напряженное состояние, дающее при эксплуатации положительный эффект, т. е. дает возможность снять или уменьшить остаточные напряжения, которые имели бы место в материале изделия в случае отсутствия принятых мер по их устранению.

Кроме зависимостей между перемещениями точек каждого семейства нитей препрега и напряжениями, в них существуют зависимости между перемещениями и напряжениями в точках разных семейств нитей. Эти связи существуют благодаря переплетению нитей ткани. Найдем их.

Пусть точка  $O$  в координатной системе  $O^1X^1Y^1$  имеет координаты  $(x, y)$  и представляет собой точку пересечения двух взаимно перпендикулярных нитей из слоя ткани (рис. 1). Предположим, что одна из нитей принадлежит семейству «1», совпадает с осью  $OX$  и находится

на расстоянии  $y$  от оси  $O^1X^1$ ; вторая нить принадлежит семейству «2», совпадает с осью  $OY$  и находится на расстоянии  $x$  от оси  $O^1Y^1$ . Пусть точки  $M$  и  $P$ , лежащие на рассматриваемых нитях, после деформации сходятся в точке  $M_1$ . Обозначим: через  $HM = y_0$ ;  $FP = x_0$ ;  $MK = u_2$ ;  $KM_1 = v_2$ ;  $PR = u_1$ ;  $RM_1 = v_1$ . Здесь величины  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $u_2$  и  $v_2$  совпадают с модулями компонент векторов соответствующих перемещений.  $H$  – точка, лежащая на нити  $OY$ , обозначает границу деформации нити (такой точкой может служить точка жесткого закрепления нити). На рис. 1 кривые  $m_1n_1$  и  $m_2n_2$  представляют собой нити семейств «1» и «2» после деформации.

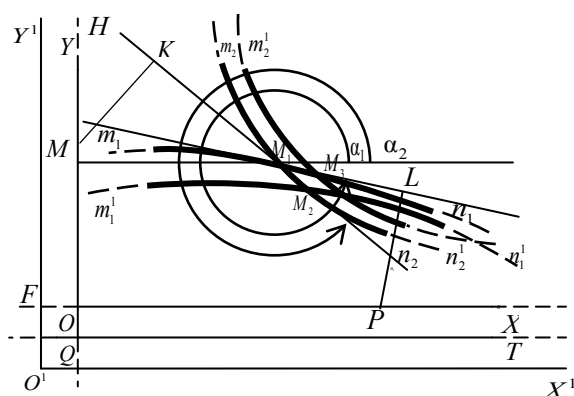


Рис. 1. Нити препрега и их взаимное расположение после деформации

Координаты точки  $M_1$  в системе  $O^1X^1Y^1$  можно выразить через соответствующие компоненты перемещения двумя способами по формулам:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - u_1 \sin \alpha_1 - v_1 \cos \alpha_1; \\ y_1 &= y_0 + u_1 \cos \alpha_1 - v_1 \sin \alpha_1, \end{aligned} \quad (1)$$

или

$$\begin{aligned} x_1 &= x - u_2 \sin \alpha_2 + v_2 \cos \alpha_2; \\ y_1 &= S_0 - y_0 + u_2 \cos \alpha_2 + v_2 \sin \alpha_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $S_0 = S_0(x)$  – расстояние между точкой  $H$  и осью  $O^1X^1$ ;  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы, которые составляют касательные к соответствующим нитям семейств в точке  $M_1$  с осью  $OX$ .

В [1] показано, что компоненты перемещения  $u_1$ ,  $v_1$  зависят от переменных  $\alpha_1$  и  $y$ , а компоненты перемещения  $u_2$ ,  $v_2$  – от переменных  $\alpha_2$ ,  $x$ . При этом между компонентами перемещений имеют место зависимости:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} - v_1 = Z_{11} R_1 \sin \alpha_1; \quad \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + u_1 = -R_1 + Z_{11} R_1 \cos \alpha_1;$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} - v_1 - \frac{\partial u_1}{\partial y} Z_{12} R_1^0 = -R_1^0 + Z_{12} R_1^0 \cos \alpha_1; \quad (3)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + u_1 - \frac{\partial v_1}{\partial y} Z_{12} R_1^0 = -Z_{12} R_1^0 \sin \alpha_1;$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + v_2 = Z_{22} R_2 \cos \alpha_2;$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \alpha_2} - u_2 = R_2 + Z_{22} R_2 \sin \alpha_2;$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + v_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x} Z_{21} R_2^0 = R_2^0 + Z_{21} R_2^0 \sin \alpha_2; \quad (4)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \alpha_2} - u_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x} Z_{21} R_2^0 = -Z_{21} R_2^0 \cos \alpha_2;$$

$$Z_{21} = \frac{1}{1 - \gamma_{21} - \frac{\sigma_{21}}{E_{21}}}; \quad Z_{22} = \frac{1}{1 + \gamma_{22} + \frac{\sigma_{22}}{E_{22}}}; \quad dx_0 = Z_{11} R_1 d\alpha_1;$$

$$Z_{11} = \frac{1}{1 + \gamma_{11} + \frac{\sigma_{11}}{E_{11}}}; \quad Z_{12} = \frac{1}{1 - \gamma_{12} - \frac{\sigma_{12}}{E_{12}}}; \quad dy = -Z_{12} R_1^0 d\alpha_1.$$

Здесь  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{21}$  и  $\gamma_{11}$ ,  $\gamma_{22}$  – относительные неупругие удлинения при сжатии в условиях переплетения нитей и при растяжении семейств нитей соответственно;  $E_{11}$ ,  $E_{22}$  и  $E_{12}$ ,  $E_{21}$  – коэффициенты жесткости на растяжение и сжатие (в условиях переплетения нитей) семейств нитей;  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  – растягивающие напряжения;  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{21}$  – сжимающие напряжения в условиях переплетения семейств нитей в точке  $M_1$ ;  $R_1$ ,  $R_2$  – радиусы кривизны нитей;  $R_1^0$ ,  $R_2^0$  – радиусы кривизны ортогональных кривых к соответствующим нитям в точке  $M_1$ .

Перейдем из точки  $M_1$  в положение  $M_2$ , двигаясь по кривой  $m_2n_2$  в положительном направлении. За положительное направление на линии семейства «2» принято направление движения от точки  $m_2$  к точке  $n_2$ . Тогда если в точке  $M_1$  пересекаются нити  $m_2n_2$  и  $m_1n_1$ , то в точке  $M_2$  пересекаются нити  $m_2n_2$  и  $m_1^1n_1^1$ . В исходном положении, т. е. до деформации, эти нити пересекаются в точке  $Q$ , которая имеет координаты  $(x, y + dy)$ . Как и координаты точки  $M_1$ , координаты точки  $M_2$  выразим двумя способами: используя для этого компоненты перемещения  $u_1$  и  $v_1$ , а также  $u_2$  и  $v_2$ . На основании (2) коор-

динаты точки  $M_1$  выражаются через параметры:  $u_2, v_2, x, y, x_0, y_0, \alpha_2$ . Рассмотрим, как они изменяются при перемещении точки  $M_1$  вдоль кривой  $m_2n_2$ . Очевидно, что значение угла  $\alpha_2$  в точке  $M_2$  на кривой  $m_2n_2$  будет другим. Пусть он  $\alpha_2^1 = \alpha_2 + d\alpha_2$ . Вследствие этого компоненты перемещения  $u_2$  и  $v_2$  будут другими, т. е. вычисленными при значении угла  $\alpha_2$ , равного значению  $\alpha_2^1$ . Координата  $y_0$  тоже имеет другую величину, равную  $y_0 + dy_0$ . Как было установлено в [2], между  $dy_0$  и  $d\alpha_2$  имеет место зависимость

$$dy_0 = \frac{R_2 d\alpha_2}{1 + \gamma_{22} + \frac{\sigma_{22}}{E_{22}}} = R_2 Z_{22} d\alpha_2.$$

Координата  $x$  не изменяется при изменении положения точки  $M_1$  на кривой, так как она характеризует расположение нити  $m_2n_2$  в исходном положении до деформации. Координата  $y$  изменяется при изменении положения точки  $M_1$ , так как она характеризует нить семейства «1», которая впоследствии пересекается с нитью  $m_2n_2$ . В точке  $M_2$  нить  $m_2n_2$  пересекается с нитью  $m_1^1n_1^1$ , которая в исходном положении находится ниже нити  $m_1n_1$  на расстоянии  $(-dy)$ . Поэтому координата  $y$  станет равной  $y + dy$ . Величина  $S_0 - y_0$  характеризует координату точки на нити  $m_2n_2$ , которая в результате деформации перемещается в точку  $M_1$ , а в точке  $M_2$  становится равной  $S_0(x) - y_0(\alpha_2^1, x)$ . На основании описанного выше и формул (2) координаты точки  $M_2$  будут иметь вид:

$$\begin{aligned} x_2 &= x - u_2(\alpha_2^1, x) \sin \alpha_2^1 + v_2(\alpha_2^1, x) \cos \alpha_2^1; \\ y_2 &= S_0(x) - y_0(\alpha_2^1, x) + u_2(\alpha_2^1, x) \cos \alpha_2^1 + \\ &\quad + v_2(\alpha_2^1, x) \sin \alpha_2^1. \end{aligned} \quad (5)$$

Координаты точки  $M_2$ , выражаемые в компонентах перемещения  $u_1$  и  $v_1$ , определяются формулами:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_0(\alpha_1^1, y + dy) - u_1(\alpha_1^1, y + dy) \sin \alpha_1^1 - \\ &\quad - v_1(\alpha_1^1, y + dy) \cos \alpha_1^1; \\ y_2 &= y + dy + u_1(\alpha_1^1, y + dy) \cos \alpha_1^1 - \\ &\quad - v_1(\alpha_1^1, y + dy) \sin \alpha_1^1. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\alpha_1^1 = \alpha_1 + d\alpha_1$ ;  $\alpha_2^1 = \alpha_2 + d\alpha_2$ . Расстояние между нитями  $m_1n_1$  и  $m_1^1n_1^1$  в исходном положе-

нии составляет  $(-dy)$ . После деформации в результате поперечного сжатия семейства нитей оно становится равным  $(-dy)/Z_{12}$ . Поэтому с учетом того, что нить  $m_2n_2$  пересекает эти две нити под углом  $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ , найдем

$$dy = -R_2 Z_{12} \sin \alpha d\alpha_2. \quad (7)$$

С точностью до бесконечно малых первого порядка, если воспользуемся формулами (1) и (6), найдем:

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \frac{\partial x_0}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial x_0}{\partial y} dy - \cos \alpha_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + u_1 \right) d\alpha_1 - \\ &\quad - \sin \alpha_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} - v_1 \right) d\alpha_1 - \frac{\partial v_1}{\partial y} \cos \alpha_1 \frac{dy}{d\alpha_2} d\alpha_2 - \\ &\quad - \frac{\partial u_1}{\partial y} \sin \alpha_1 \frac{dy}{d\alpha_2} d\alpha_2; \\ y_2 - y_1 &= dy - \sin \alpha_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + u_1 \right) d\alpha_1 + \\ &\quad + \cos \alpha_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} - v_1 \right) d\alpha_1 - \frac{\partial v_1}{\partial y} \sin \alpha_1 \frac{dy}{d\alpha_2} d\alpha_2 + \\ &\quad + \frac{\partial u_1}{\partial y} \cos \alpha_1 \frac{dy}{d\alpha_2} d\alpha_2. \end{aligned}$$

Подставляя в предыдущие равенства выражения для  $u_1$  и  $v_1$  из (3), получим окончательно

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= R_1 \cos \alpha_1 d\alpha_1 - \\ &\quad - \left( \frac{Z_{11} R_1}{Z_{12} R_1^0} + \frac{\sin \alpha_1}{Z_{12}} - \frac{R_1}{Z_{12} R_1^0} \cos \alpha_1 \right) \times \\ &\quad \times \frac{dy}{d\alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial x_0}{\partial y} dy; \\ y_2 - y_1 &= R_1 \sin \alpha_1 d\alpha_1 + \\ &\quad + \left( \frac{\cos \alpha_1}{Z_{12}} + \frac{R_1}{Z_{12} R_1^0} \sin \alpha_1 - 1 \right) \frac{dy}{d\alpha_2} d\alpha_2 + dy. \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогично, воспользовавшись зависимостями (2) и (5), найдем:

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= R_2 \cos \alpha_2 d\alpha_2; \\ y_2 - y_1 &= R_2 \sin \alpha_2 d\alpha_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Приравняем соответствующие выражения правых частей равенств (8) и (9). Разделим каждое из полученных равенств на  $d\alpha_2$ . Затем перейдем к пределу при  $d\alpha_2 \rightarrow 0$ . Тогда с учетом зависимости (7) получим:

$$\frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} = \frac{R_2}{R_1} \cos \alpha + \frac{R_2}{R_1} \sin \alpha; \quad \frac{\partial x_0}{\partial y} = \frac{Z_{11} R_1}{Z_{12} R_1^0}. \quad (10)$$

Перейдем из точки  $M_1$  в точку  $M_3$ , двигаясь по кривой  $m_1 n_1$ . Расстояние между нитями  $m_2 n_2$  и  $m_2^1 n_2^1$ , находящимися в исходном положении, обозначим через  $dx$ . Тогда координаты точки  $M_3$  выражаются через соответствующие перемещения по формулам:

$$x_3 = x_0(\alpha_1^1, y) - u_1(\alpha_1^1, y) \sin \alpha_1^1 - v_1(\alpha_1^1, y) \cos \alpha_1^1;$$

$$y_3 = y + u_1(\alpha_1^1, y) \cos \alpha_1^1 - v_1(\alpha_1^1, y) \sin \alpha_1^1,$$

или

$$x_3 = x + dx - u_2(\alpha_2^1, x + dx) \sin \alpha_2^1 + v_2(\alpha_2^1, x + dx) \cos \alpha_2^1;$$

$$y_3 = S_0(x + dx) - y_0(\alpha_2^1, x + dx) +$$

$$+ u_2(\alpha_2^1, x + dx) \cos \alpha_2^1 + v_2(\alpha_2^1, x + dx) \sin \alpha_2^1.$$

Здесь  $x_0, y_0, \alpha_1^1$  и  $\alpha_2^1$  имеют тот же смысл, что и при выводе зависимостей (5) и (6). Искомые зависимости между параметрами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , если рассматривать их на кривой, представляющей собой одну из нитей семейства «1», получим при рассмотрении выражений  $x_3 - x_1$  и  $y_3 - y_1$ :

$$x_3 - x_1 = R_1 \cos \alpha_1 d\alpha_1;$$

$$y_3 - y_1 = R_1 \sin \alpha_1 d\alpha_1,$$

или

$$x_3 - x_1 = R_2 \cos \alpha_2 d\alpha_2 + dx -$$

$$- \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \sin \alpha_2 - \frac{\partial v_2}{\partial x} \cos \alpha_2 \right) dx d\alpha_1;$$

$$y_3 - y_1 = R_2 \sin \alpha_2 d\alpha_2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \cos \alpha_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x} \sin \alpha_2 \right) dx \times$$

$$\times \frac{dx}{d\alpha_1} d\alpha_1 + \left( \frac{\partial S_0}{\partial x} - \frac{\partial y_0}{\partial x} \right) dx.$$

Здесь следует иметь в виду, что

$$dx = R_1 Z_{21} \sin \alpha d\alpha_1.$$

Приравнявая соответствующие выражения для  $x_3 - x_1$  и для  $y_3 - y_1$ , получим:

$$\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = \frac{R_1}{R_2} \cos \alpha + \frac{R_1}{R_2^0} \sin \alpha; \quad \frac{\partial S_0}{\partial x} - \frac{\partial y_0}{\partial x} = \frac{Z_{22} R_2}{Z_{21} R_2^0}. \quad (11)$$

Найденные выражения имеют смысл, если установлена функциональная зависимость всех

параметров от переменной  $\alpha_1$ . Параметры  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  непрерывны и кусочно-монотонны в области их изменения, поэтому между ними существует зависимость [3]

$$\frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = 1.$$

Таким образом, на основании первых соотношений (10) и (11) предыдущее равенство можно записать в виде

$$\left( \frac{R_1 R_2}{R_1^0 R_2^0} - 1 \right) \sin \alpha + \left( \frac{R_2}{R_2^0} + \frac{R_1}{R_1^0} \right) \cos \alpha = 0. \quad (12)$$

Полученные выражения (10)–(12) соответствуют решению поставленной задачи: найдены зависимости между параметрами, определяющими перемещения точек разных семейств нитей материала препрега и форму деформированных нитей ( $x_0, y_0, S_0, x, y, R_1^0, R_2^0, R_1, R_2, \alpha_1, \alpha_2$ ), и напряжениями, возникающими в результате этих перемещений ( $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}$  входят в выражения для  $Z_{11}, Z_{12}, Z_{21}, Z_{22}$  соответственно). Необходимо также отметить, что предложенная математическая модель приближает препрега к пластическим средам, точнее, к средам, которые автор [4] назвал как обобщенные линейные среды.

## ВЫВОД

Для композиционных материалов, представляющих структуру взаимно перпендикулярных семейств нитей, пропитанных связующим, найдены зависимости между перемещениями нитей разных семейств армирующего материала и напряжениями, возникающими в результате их деформации.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сахоненко, С. В. Зависимость между напряжениями и перемещениями армирующего материала препрегов на стадии формования изделий / С. В. Сахоненко. – Деп. в ГУ «БелИСА» 10.03.2005. – № Д200515.
2. Сахоненко, С. В. Процессы растяжения и сжатия в материале препрегов при проколе отверстий / С. В. Сахоненко. – Деп. в ГУ «БелИСА» 10.03.2005. – № Д200576.
3. Кудрявцев, Л. Д. Математический анализ / Л. Д. Кудрявцев. – М.: Высш. шк., 1973.
4. Егер, Дж. К. Упругость, прочность и текучесть / Дж. К. Егер. – М.: Машгиз, 1961.

Поступила 29.09.2006