

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
Белорусский национальный технический университет

---

Кафедра «Физика»

# ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Пособие

для студентов специальностей

1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,

1-70 04 02 «Теплогасоснабжение, вентиляция  
и охрана воздушного бассейна»,

1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение  
и охрана водных ресурсов»,

1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»

В 3 частях

Часть 3

*Рекомендовано учебно-методическим объединением  
высших учебных заведений Республики Беларусь по образованию  
в области строительства и архитектуры*

Минск  
БНТУ  
2020

УДК 531.382+531.14(075.8)

ББК 22.213я7

Д46

**С о с т а в и т е л и:**

*А. К. Есман, А. И. Бибик, В. А. Потачиц, И. А. Климович,  
А. А. Иванов, Е. В. Журавкевич*

**Р е ц е н з е н т ы:**

зав. кафедрой физики БГУИР *Г. Ф. Смирнова*,  
зав. лабораторией микро- и наносенсорики ГНПО  
«Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника»,  
профессор *Н. И. Мухуров*

Д46 **Динамика** поступательного и вращательного движения : пособие для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство», 1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна», 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов», 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»: в 3 ч. / А. К. Есман [и др.]. – Минск: БНТУ, 2020. – Ч. 3. – 45 с.  
ISBN 978-985-583-078-9 (Ч. 3).

В пособии представлены материалы для проведения лабораторной работы по разделу «Механика» дисциплины «Физика». В нем изложены основные понятия, касающиеся динамики вращательного движения, рассмотрены моменты инерции различных тел относительно оси вращения. Представлена экспериментальная методика проверки теоремы Штейнера.

Подробно рассмотрены силы трения при контакте твердых тел: трение скольжения и качения.

В пособии представлены методические указания по выполнению лабораторных работ и контрольные вопросы для закрепления полученных студентами знаний.

УДК 537.31(075.6)

ББК 22.33я7

ISBN 978-985-583-078-9 (Ч. 3)

ISBN 978-985-583-005-5

© Белорусский национальный  
технический университет, 2020

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Лабораторная работа № 1</b> .....	4
1. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ОТ МАССЫ ТЕЛА И ЕЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ ВРАЩЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА .....	4
1.1. Момент силы относительно точки и относительно оси .....	4
1.2. Основное уравнение динамики вращательного движения .....	6
1.3. Момент инерции тела .....	11
1.4. Описание установки и вывод рабочей формулы для экспериментального определения момента инерции маятника Обербека .....	16
1.5. Вывод рабочей формулы для теоретического определения момента инерции маятника Обербека .....	20
1.6. Порядок выполнения .....	24
1.7. Контрольные вопросы .....	26
<b>Лабораторная работа № 2</b> .....	27
2. СИЛА ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ .....	27
2.1. Введение.....	27
2.2. Определение коэффициента трения скольжения.....	34
2.3. Изучение закономерностей движения системы связанных тел.....	35
2.4. Сила трения качения .....	35
2.5. Методика измерения коэффициента трения качения и вывод рабочей формулы .....	39
2.6. Порядок выполнения работы .....	42
2.7. Контрольные вопросы .....	44
<b>Литература</b> .....	45

## 1. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ОТ МАССЫ ТЕЛА И ЕЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ ВРАЩЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА

**Цель работы:** изучить основной закон динамики вращательного движения твердого тела, исследовать зависимость момента инерции тел от распределения их массы относительно оси вращения.

**Оборудование и материалы:** маятник Обербека, грузы, секундомер.

### 1.1. Момент силы относительно точки и относительно оси

Любое движение твердого тела можно представить в виде комбинации поступательного и вращательного движений.

**Поступательным** называется такое движение абсолютно твердого тела, при котором любая прямая, жестко связанная с телом, перемещается параллельно самой себе. Все точки тела, движущегося поступательно, в каждый момент времени имеют одинаковые скорости и ускорения, а их траектории полностью совмещаются при параллельном переносе.

**Вращательным** называется движение тела, при котором все его точки движутся с одинаковой угловой скоростью по окружностям различного радиуса вокруг некоторой прямой, называемой **осью вращения**.

Способность силы вращать тело вокруг оси определяется характеристикой вращательного движения, называемой **моментом силы**. Следует различать момент силы относительно точки и момент силы относительно оси.

Пусть  $O$  – какая-либо точка, относительно которой рассматривается момент вектора силы (рис. 1.1). Обозначим бук-

вой  $\vec{r}$  радиус-вектор, проведенный из этой точки к точке  $A$  приложения силы  $\vec{F}$ .

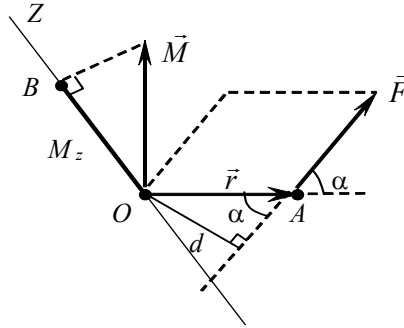


Рис. 1.1. Определение направления момента силы относительно точки и относительно оси  $OZ$

**Моментом  $\vec{M}$  силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$**  называется векторное произведение радиуса-вектора  $\vec{r}$ , проведенного из точки  $O$  в точку приложения силы, на вектор силы  $\vec{F}$ :

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]. \quad (1.1)$$

Момент силы есть псевдовектор, направление которого определяется правилом правого винта: если винт вращать по кратчайшему пути от  $\vec{r}$  к  $\vec{F}$ , то направление поступательного движения головки винта совпадает с направлением момента силы  $\vec{M}$ . Момент силы  $\vec{M}$  всегда перпендикулярен к плоскости векторов  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$  и не имеет точки приложения.

Модуль псевдовектора  $\vec{M}$ , согласно определению векторного произведения, равен

$$M = rF \sin(\widehat{\vec{r}, \vec{F}}) = rF \sin \alpha = Fd. \quad (1.2)$$

Из рис. 1.1 видно, что  $r \cdot \sin \alpha = d$ . Кратчайшее расстояние  $d$  от точки, относительно которой определяется момент силы, до линии действия силы называется *плечом силы*. Следовательно, модуль момента силы равен произведению *силы на плечо*.

Полный момент сил, действующих на систему материальных точек (частиц), равен векторной сумме моментов отдельных сил

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \vec{F}_i]. \quad (1.3)$$

**Моментом силы относительно оси  $OZ$** , проходящей через точку  $O$ , называется скалярная величина  $M_z$ , равная проекции момента  $\vec{M}$  силы  $\vec{F}$  относительно этой точки на данную ось (отрезок  $OB$  на рис. 1.1).

Если ось  $OZ$  совпадает с направлением вектора  $\vec{M}$ , то момент силы представляется в виде вектора  $\vec{M}_z$ , совпадающего с осью.

## 1.2. Основное уравнение динамики вращательного движения

В отличие от поступательного движения, вращение тела нельзя описывать, используя второй закон Ньютона, поскольку точки тела, находящиеся на различных расстояниях от оси вращения, имеют различные линейные скорости и тангенциальные ускорения.

Из определения момента силы относительно точки и момента силы относительно оси следует, что только составляющая силы  $\vec{F}_\tau$ , лежащая в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, и перпендикулярная к радиус-вектору  $\vec{r}$  точки  $A$  приложения внешней силы, приводит к изменению вращательного движения тела.

Выведем уравнение движения тела, имеющего закрепленную в пространстве ось вращения  $Z$ , проходящую через точку  $O$  (рис. 1.2). Для этого мысленно разобьем тело на совокупность материальных точек (частиц) с массами  $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$ . На  $i$ -ую точку действует в данный момент некоторая сила  $\vec{F}_i$ , которая представляет собой вектор равнодействующей всех приложенных к этой частице сил. При вращении тела частица с массой  $m_i$  движется по окружности радиуса  $\vec{R}_i$  (рис. 1.2).

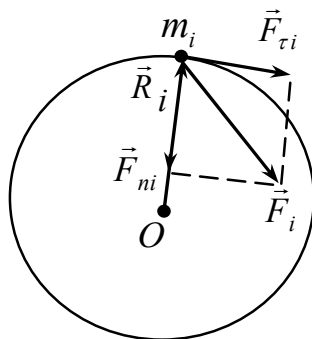


Рис. 1.2. К выводу основного уравнения динамики вращательного движения

Моментом относительно оси вращения обладает только составляющая  $\vec{F}_{\tau i}$  силы  $\vec{F}_i$ , лежащая в плоскости, перпендикулярной оси вращения, так как момент составляющей  $\vec{F}_{ni} = 0$ . Для описания движения каждой отдельной материальной точки можно использовать второй закон Ньютона, который запишется следующим образом:

$$\vec{F}_{\tau i} = m_i \vec{a}_{\tau i}, \quad (1.4)$$

где  $\vec{a}_{\tau i}$  – тангенциальная (касательная) составляющая ускорения частицы.

Умножим обе части равенства (1.4) на  $\vec{R}_i$  и выразим  $\vec{a}_{\tau i}$  через угловое ускорение  $\vec{\varepsilon}$  ( $\vec{a}_{\tau i} = [\vec{\varepsilon}, \vec{R}_i]$ ), тогда получим

$$[\vec{R}_i, \vec{F}_{\tau i}] = m_i R_i^2 \vec{\varepsilon}.$$

Произведение в левой части данного равенства является моментом силы  $\vec{F}_i$  относительно оси вращения, действующим на данную частицу тела:

$$\vec{M}_i = m_i R_i^2 \vec{\varepsilon} = J_i \vec{\varepsilon}, \quad (1.5)$$

где произведение массы частицы на квадрат расстояния от нее до оси вращения, т. е.

$$J_i = m_i R_i^2, \quad (1.6)$$

называют **моментом инерции частицы (материальной точки) относительно оси Z**.

Просуммируем выражение (1.5) по всем частицам тела:

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n J_i \vec{\varepsilon}. \quad (1.7)$$

Так как угловое ускорение  $\vec{\varepsilon}$  одинаково для всех частиц данного тела, то его можно вынести из-под знака суммы

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{\varepsilon} \sum_{i=1}^n J_i. \quad (1.8)$$

Векторную сумму моментов всех внешних сил  $\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{M}$ , действующих на тело, называют **полным моментом внешних сил**. Сумма моментов инерции отдельных частиц, составляющих тело,  $\sum_i J_i = J$  называется **моментом инерции тела относительно заданной оси вращения**.



Следовательно, уравнение (1.8) окончательно запишется следующим образом:

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}, \quad (1.9)$$

причем вектор полного момента сил также как и вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения тела.

Уравнение (1.9) называют **основным уравнением динамики вращательного движения**: полный момент внешних сил, приложенных к телу, относительно оси вращения, равен произведению момента инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения на его угловое ускорение.

Получим еще одну форму записи основного уравнения динамики вращательного движения, используя понятие момента импульса.

**Моментом импульса  $\vec{L}_i$  материальной точки относительно точки  $O$**  называется векторное произведение радиуса-вектора  $\vec{R}_i$ , проведенного из этой точки к точке приложения импульса, на вектор импульса :

$$\vec{L}_i = \left[ \vec{R}_i, m_i \vec{v}_i \right]. \quad (1.10)$$

**Моментом импульса тела относительно точки  $O$**  называется векторная сумма моментов импульса всех частиц тела относительно данной точки:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n \left[ \vec{R}_i, m_i \vec{v}_i \right]. \quad (1.11)$$

**Моментом импульса тела относительно оси  $OZ$** , проходящей через точку  $O$ , называется проекция момента импульса (1.11) на данную ось.

В случае, когда ось  $OZ$  совпадает с осью вращения тела, момент импульса каждой его материальной точки, вращающейся по окружности радиуса  $R$ , относительно оси вращения:

$$\vec{L}_i = [\vec{R}_i, m_i \vec{v}_i] = mR^2 \vec{\omega},$$

так как  $\vec{v}_i = \vec{\omega} \vec{R}_i$ , где  $\vec{\omega}$  – угловая скорость.

Если вокруг оси вращается система материальных точек с одной и той же угловой скоростью  $\vec{\omega}$ , то ее полный момент импульса

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \vec{\omega}.$$

Вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$ , так как он одинаков для всех материальных точек, можно вынести из-под знака суммы. Тогда, согласно определению момента инерции тела, получим

$$\vec{L} = J \vec{\omega}. \quad (1.12)$$

Взяв производную по времени, имеем:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = J \vec{\varepsilon}.$$

Таким образом, согласно (1.9) вторая форма записи основного **закона динамики вращательного движения** тела имеет вид

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш}}, \quad (1.13)$$

где  $\frac{d\vec{L}}{dt}$  – производная по времени от вектора момента импульса тела относительно оси вращения;

$\vec{M}_{\text{внеш}}$  – геометрическая сумма моментов всех приложенных к телу внешних сил относительно этой же оси.

### 1.3. Момент инерции тела

**Момент инерции** – это физическая величина, зависящая от того, каким образом масса тела распределена по его объему. Величина момента инерции тела относительно данной оси определяется размерами тела, его формой, плотностью и не зависит от того, вращается тело или нет.

Для неоднородных тел и тел неправильной геометрической формы момент инерции определяется экспериментально, а для однородных тел геометрически правильной формы – посредством интегрирования.

**Интегрирование** – это суммирование ряда бесконечно малых величин, выполняемое по определенным правилам. Если каждое слагаемое этого ряда может быть представлено в виде произведения некоторой функции  $y = f(x)$  на бесконечно малое изменение ее аргумента  $dx$ , то неопределенным интегралом функции  $f(x)$ , обозначаемым как  $\int f(x) dx$ , называется функция

$F(x)$ , для которой справедливо соотношение  $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ .

Как уже было сказано выше, *момент инерции тела произвольной формы относительно некоторой оси определяется как сумма моментов инерции составляющих это тело материальных точек*. Математически это определение можно записать следующим образом:

$$J = \sum_{i=1}^n R_i^2 m_i = \int R^2 dm = \int \rho R^2 dV, \quad (1.14)$$

где  $\rho = \frac{dm}{dV}$  – плотность тела;

$V$  – объем.

В системе СИ момент инерции  $J$  измеряется в  $\text{кг}\cdot\text{м}^2$ .

Уравнение (1.9) аналогично второму закону Ньютона ( $\vec{F} = m\vec{a}$ ). Роль массы в уравнении (1.9) играет момент инерции, чем больше момент инерции, тем меньше (при прочих равных условиях) угловое ускорение, т. е. имеет место аналогия момента инерции с массой. **Момент инерции тела есть мера инертности тела во вращательном движении.**

Часто при описании движения тела бывает полезно знать положение *центра масс* (центра инерции) тела, которое определяется как точка с координатами  $(x_c, y_c, z_c)$ :

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad (1.15)$$

где  $m_i, x_i, y_i, z_i$  – масса и координаты центра масс  $i$ -той частицы тела.

Из формулы (1.15) следует, что у симметричных тел центр масс  $C$  совпадает с их геометрическим центром.

Использование формулы (1.14) для расчета момента инерции некоторых однородных тел относительно оси, проходящей через их центр масс, дает следующие результаты (рис. 1.3).

В качестве примера приведем расчет момента инерции сплошного однородного диска (цилиндра) относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр масс (рис. 1.4).

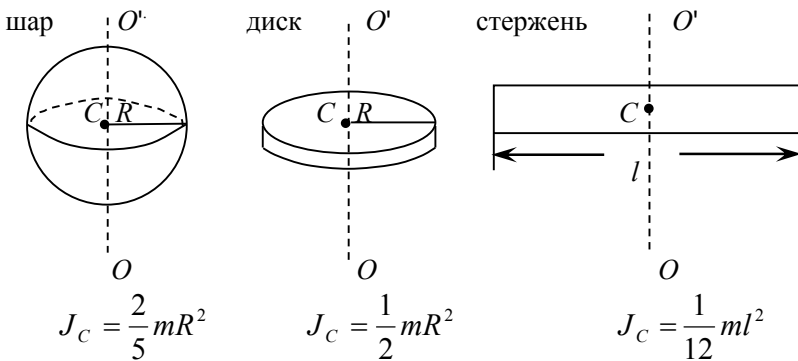


Рис. 1.3. Моменты инерции некоторых тел правильной формы

Разобьём диск на кольцевые слои шириной  $dr$ . Объём такого слоя  $dV$  равен  $b2\pi r dr$ , где  $b$  – толщина диска. Подставим выражение для  $dV$  в формулу (1.14):

$$J = \int_0^m r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV = \int_r 2\pi b \rho r^3 dr$$

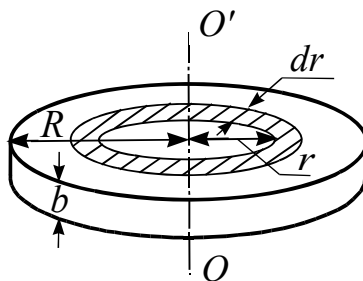


Рис. 1.4. К определению момента инерции диска

и вынесем постоянные за знак интеграла:

$$J = 2\pi b \rho \int_0^R r^3 dr = \pi b \rho \frac{R^4}{2}.$$

Учитывая, что произведение плотности диска  $\rho$  на его объём  $\pi R^2 b$  равно массе диска, получим момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр масс:

$$J = \frac{mR^2}{2}. \quad (1.16)$$

Если ось вращения не проходит через центр масс тела, то можно воспользоваться **теоремой Штейнера**: момент инерции тела относительно произвольной оси  $Z$  равен сумме момента инерции относительно оси  $OO'$ , параллельной данной и проходящей через центр масс тела ( $J_C$ ), и произведения массы тела  $m$  на квадрат расстояния  $d$  между осями:

$$J = J_C + md^2. \quad (1.17)$$

Докажем эту теорему. Поместим начало координат в центр масс и проведем через него ось  $OO'$  параллельно оси  $Z$  относительно которой нам необходимо найти момент инерции тела. Оси  $OO'$  и  $Z$  расположены перпендикулярно плоскости (рис. 1.5).

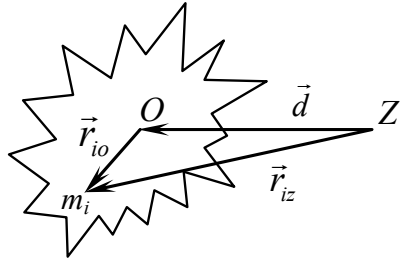


Рис. 1.5. К доказательству теоремы Штейнера

Разобьем все тело на элементарные массы  $m_i$ . Обозначим расстояние от этих масс до оси  $OO'$  через  $r_{io}$ , а до оси  $Z$  – через  $r_{iz}$ . Проведем вектор  $d$ , перпендикулярный осям  $Z$  и  $OO'$  и соединяющий их между собой. Из рис. 1.5. видно, что  $\vec{r}_{iz} = \vec{d} + \vec{r}_{io}$ . Тогда момент инерции тела  $J$  относительно оси  $Z$  равен:

$$J = \sum_i m_i \vec{r}_{iz}^2 = \sum_i m_i (\vec{r}_{io} + \vec{d})^2 = \sum_i m_i r_{io}^2 + \sum_i m_i d^2 + \sum_i 2m_i \vec{r}_{io} \vec{d}.$$

Первая сумма в этом выражении представляет собой момент инерции тела  $J_C$  относительно оси  $OO'$ , проходящей через центр масс, а вторая равна  $md^2$ , так как  $\vec{d} = \text{const}$ , а  $\sum_i m_i$  равна массе тела  $m$ . Вычислим сумму  $\sum_i 2\vec{d}m_i \vec{r}_{io} = 2\vec{d} \sum_i m_i \vec{r}_{io}$ .

Сумму  $\sum_i m_i \vec{r}_{io}$ , согласно определению центра масс (1.15),

можно представить в виде:  $\sum_i m_i \vec{r}_{io} = \vec{R}_C m$ , где  $\vec{R}_C$  – составля-

ющая радиус-вектора центра масс, лежащая в плоскости рисунка. Поскольку начало координат помещено в центр масс,  $\vec{R}_C$  равно нулю. Отсюда следует, что  $2\vec{d} \sum_i m_i \vec{r}_{io} = 0$ .

Таким образом, момент инерции тела  $J$  относительно произвольной оси  $Z$  равен  $J_c + md^2$ , что и требовалось доказать.

Рассмотрим пример применения теоремы Штейнера. На рис. 1.6 показан шар. Согласно (1.17) его момент инерции относительно оси  $ZZ'$ , находящейся на расстоянии  $d = 3R$  от центра инерции шара, равен

$$J = \frac{2}{5}mR^2 + m(3R)^2 = mR^2 \left( \frac{2}{5} + 9 \right) = \frac{47}{5}mR^2.$$

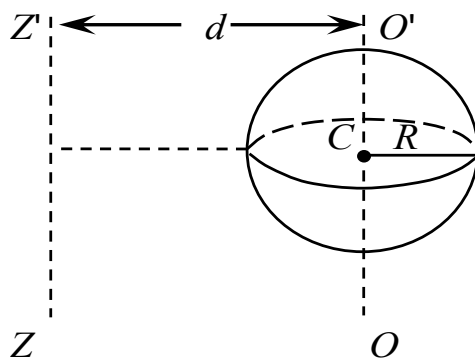


Рис. 1.6. Пример применения теоремы Штейнера

Таким образом, формулы (1.14) и (1.17) позволяют определить момент инерции твердого тела относительно произвольной оси.

#### 1.4. Описание установки и вывод рабочей формулы для экспериментального определения момента инерции маятника Обербека

Установка для исследования зависимости момента инерции от массы тела и распределения ее относительно оси вращения (маятник Обербека) представляет собой вращающийся вокруг горизонтальной оси крестообразный маховик. Он состоит из цилиндрического вала  $l$  с четырьмя взаимно перпендикулярными стержнями  $2$  (рис. 1.7). На стержни можно надевать и закреплять на разных расстояниях от оси вращения одинаковой массы груза, что приводит к изменению момента инерции маятника.

Маятник Обербека позволяет экспериментально определить момент инерции данной системы. На вал наматывается нить с привязанным к ней грузом  $m$ . В верхнем положении груз удерживается электромагнитом. При размыкании цепи электромагнита груз начинает опускаться, вызывая равноускоренное вращательное движение маховика. Время движения груза регистрируется при помощи секундомера.

На вращающийся маховик действует момент  $M$  силы натяжения нити и момент  $M_{\text{тр}}$  силы трения, причем последний тормозит вращение. Уравнение движения маховика в проекции на ось вращения записывается так:

$$M - M_{\text{тр}} = J\varepsilon, \quad (1.18)$$

где  $\varepsilon$  – угловое ускорение маховика;

$J$  – его момент инерции.

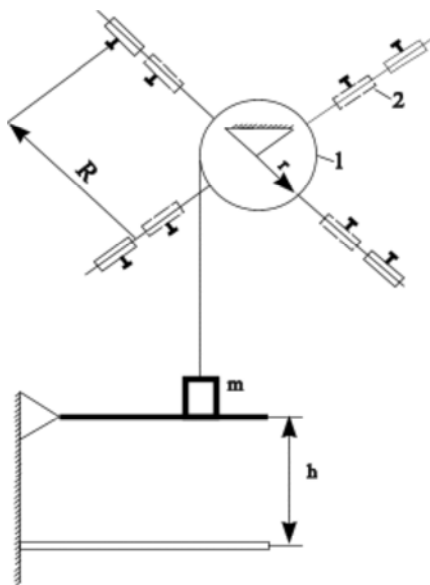


Рис. 1.7. Маятник Обербека



Полный момент сил, действующих на маховик, можно считать постоянным, поэтому вращение маховика будет равноускоренным.

Момент  $M$  силы натяжения нити  $F$ , приложенной к валу маховика, относительно оси вращения равен

$$M = rF,$$

где  $r$  – радиус вала.

Сила натяжения  $F$  нити находится из второго закона Ньютона, записанного в проекции на ось, параллельной нити, на которой закреплен опускающийся груз. Под действием силы тяжести  $P = mg$  и силы натяжения, направленной вертикально вверх, груз опускается равноускоренно, так что

$$P - F = ma,$$

где  $m$  – масса опускающегося груза;

$a$  – его ускорение.

Отсюда сила натяжения нити равна

$$F = P - ma = m(g - a),$$

а момент силы  $F$

$$M = m(g - a)r, \tag{1.19}$$

где  $g$  – ускорение свободного падения.

Из уравнения равноускоренного движения можно определить ускорение опускающегося груза:

$$a = \frac{2h}{t^2}, \tag{1.20}$$

где  $h$  – расстояние, которое проходит опускающийся груз;

$t$  – время движения опускающегося груза.

Подставив (1.20) в (1.19), получим выражение для момента силы натяжения нити

$$M = m\left(g - \frac{2h}{t^2}\right)r. \quad (1.21)$$

Момент силы трения можно найти, исходя из следующих соображений. Как только опускающийся на нити груз коснется нижней площадки, дальнейшее вращение маховика происходит при действии только тормозящего момента сил трения, и уравнение движения маятника теперь запишется так:

$$M_{\text{тр}} = J\varepsilon_1 \quad (1.22)$$

или

$$M_{\text{тр}} = J \frac{\omega_1}{\tau}, \quad (1.23)$$

где  $\varepsilon_1$  – угловое ускорение маховика;

$\omega_1$  – максимальная угловая скорость маховика;

$\tau$  – время вращения маховика после прекращения действия момента силы натяжения нити.

Угловую скорость  $\omega_1$  выразим через тангенциальное ускорение точек на ободе вала  $a_\tau = \varepsilon_1 r$  или

$$\omega_1 = \varepsilon_1 t = \frac{a_\tau t}{r}, \quad (1.24)$$

где  $t$  – время движения опускающегося груза.

Тангенциальное ускорение равно ускорению опускающегося груза  $a$ , т. е.

$$a_\tau = a = \frac{2h}{t^2},$$

значит,

$$\omega_1 = \frac{2h}{rt}. \quad (1.25)$$

Подставим (1.25) в (1.23):

$$M_{\text{тр}} = J \frac{2h}{r \tau t}. \quad (1.26)$$

Действие момента сил ( $M - M_{\text{тр}}$ ) приводит к возникновению углового ускорения маховика

$$\varepsilon = \frac{a_{\tau}}{r} = \frac{2h}{rt^2}. \quad (1.27)$$

Уравнение движения маховика (1.18) с учетом (1.21), (1.26) и (1.27) примет вид

$$m \left( g - \frac{2h}{t^2} \right) r - J \frac{2h}{r \tau t} = J \frac{2h}{rt^2}. \quad (1.28)$$

Из (1.28) находим момент инерции маховика

$$J = \frac{m \left( \frac{gt^2}{2h} - 1 \right) r^2}{1 + \frac{t}{\tau}}. \quad (1.29)$$

Формула (1.29) позволяет определить момент инерции маятника Обербека, измерив время движения опускающегося груза  $t$  и время вращения маховика после прекращения действия момента силы натяжения нити  $\tau$ .

## 1.5. Вывод рабочей формулы для теоретического определения момента инерции маятника Обербека

Необходимо помнить, что момент инерции существует безотносительно к вращению. Каждое тело, независимо от того, вращается оно или покоится, обладает определённым моментом инерции относительно любой оси, подобно тому, как тело обладает массой независимо от того, движется оно или покоится. Момент инерции тела есть величина аддитивная. Это означает, что момент инерции тела равен сумме моментов инерции его частей. Маятник Обербека можно представить как систему, состоящую из (см. рис. 1.8) цилиндров  $1, 2$ , стержней  $3$  и перемещаемых по стержням



Рис. 1.8. Элементы маятника Обербека

грузы  $4$ . Поскольку, согласно условиям эксперимента, грузы  $4$  находятся на одинаковом расстоянии от оси вращения, то они представляют собой тело, симметричное относительно данной оси.

Таким образом, момент инерции маятника равен сумме моментов инерции цилиндров  $1, 2$  и стержней  $3$  относительно оси вращения, плюс, умноженный на четыре, момент инерции грузов  $4$  относительно оси:

$$J = J_1 + J_2 + 2J_3 + 4J_4, \quad (1.30)$$

где  $J_1, J_2$  – моменты инерции цилиндров 1, 2;

$J_3$  – моменты инерции стержней 3;

$J_4$  – моменты инерции грузов 4.

Зная линейные размеры элементов маятника и плотность металла, из которого они изготовлены ( $7,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ), можно определить значения моментов инерции  $J_1, J_2$ , используя формулу (1.16), и моментов инерции  $J_3$ , используя формулу

$J_3 = \frac{1}{12} ml_1^2$  для момента инерции стержня длиной  $l_1$  относительно оси вращения, проходящей через его центр симметрии.

Для определения моментов инерции  $J_4$  грузов 4 относительно оси вращения необходимо получить формулу для момента инерции цилиндра, радиусом  $R$  и высотой  $l$  относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно оси цилиндра (ось  $OX$  на рис. 1.9, б), и затем применить теорему Штейнера.

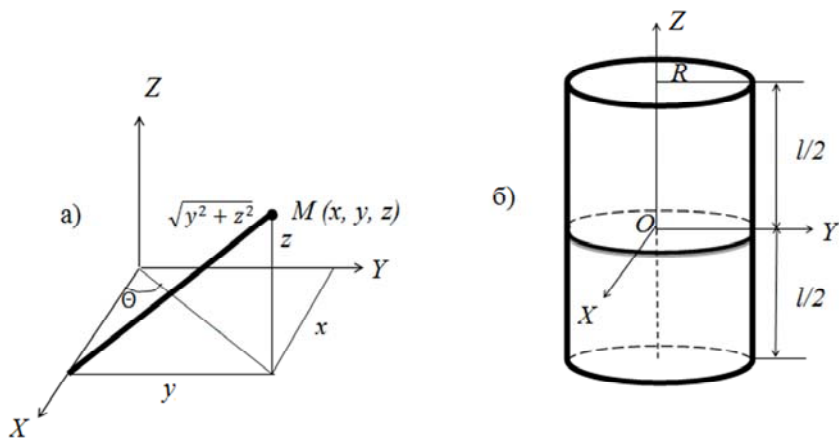


Рис. 1.9. К определению момента инерции цилиндра относительно оси, перпендикулярной оси цилиндра

Согласно определению момента инерции материальной точки (1.6) момент инерции  $J_x$  любого бесконечно малого

объема цилиндра массой  $dm$  в окрестности точки  $M(x,y,z)$  (см. рис. 1.9, *a*) относительно оси  $OX$  равен:

$$J_x = (y^2 + z^2)dm,$$

где  $y^2 + z^2$  – квадрат расстояния от точки  $M$  до оси  $OX$ .

Момент инерции всего цилиндра относительно оси  $OX$ , согласно (1.14), находится интегрированием по всему объему цилиндра  $V$ :

$$J_x = \iiint_V (y^2 + z^2) dx dy dz. \quad (1.31)$$

Перейдем к цилиндрическим координатам (рис. 1.9, *a*)

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z. \quad (1.32)$$

В соотношениях (1.32)  $r$  и  $\theta$  – полярные координаты проекции точки  $M$  на плоскость  $OXY$ .

С учетом соотношений (1.32) при переходе к полярным координатам, дифференциалы декартовых координат будут выглядеть следующим образом (дифференциалы берутся по абсолютной величине):

$$\begin{aligned} dx &= r \sin(\theta)d\theta + \cos(\theta)dr, \\ dy &= r \cos(\theta)d\theta + \sin(\theta)dr, \\ dz &= dz. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Интеграл же (1.31) с точностью до бесконечно малых величин второго порядка примет вид:

$$\begin{aligned}
J_x &= \rho \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^R \left[ \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (z^2 + r^2 \sin^2 \theta) dz \right] r dr \right\} d\theta = \\
&= \rho \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^R \left[ \frac{l^3}{12} + lr^2 \sin^2 \theta \right] r dr \right\} d\theta = \\
&= \rho \int_0^{2\pi} \left( \frac{l^3 R^2}{24} + \frac{lR^4}{4} \sin^2 \theta \right) d\theta = \\
&= \rho \frac{l^3 R^2}{24} 2\pi + \rho \frac{lR^4}{4} \pi = \rho \pi R^2 l \left( \frac{l^2}{12} + \frac{R^2}{4} \right).
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Учитывая, что объем цилиндра  $V$  равен  $\pi R^2 l$ , а его массу  $m$  можно представить как  $\rho V$ , окончательно выражение (1.34) примет вид:

$$J_x = m \left( \frac{l^2}{12} + \frac{R^2}{4} \right). \tag{1.35}$$

Для экспериментальной проверки теоремы Штейнера найдём момент инерции одного груза  $J$ . Для этого от момента инерции крестовины с грузами, рассчитанного по формуле (1.29), отнимем момент инерции крестовины без грузов и разделим на число грузов (четыре). Всего получим четыре значения моментов инерции для каждого значения расстояния  $d$  груза относительно оси вращения. Это будут экспериментальные результаты. Теоретические результаты найдём по теореме Штейнера:

$$J_{\text{теор}} = J_x + md^2,$$

где  $J_x$  – момент инерции груза  $5$  относительно оси  $OX$ , проходящей через его центр масс параллельно оси вращения маятника  $OO'$ , рассчитанный по формуле (1.35);

$m$  – его масса;

$d$  – расстояние между осями  $OX$  и  $OO'$ .

Сравним полученные экспериментальные и теоретические результаты и найдём относительную погрешность измерения.

## 1.6. Порядок выполнения

### Правила пользования установкой

1. Включите сетевой провод установки в розетку.
2. Нажмите кнопку «СЕТЬ».
3. Нажмите кнопку «ПУСК».
4. Вращая маховик, поднимите груз чуть выше датчика.
5. Удерживая маховик, нажмите кнопку «СБРОС» и отождествите кнопку «ПУСК».
6. Нажмите кнопку «ПУСК». Начинается отсчет времени.
7. Повторите с п. 3 по п. 6.

### Задание 1. Определить момент инерции тела и момент сил трения

Для этого:

а) установите грузы  $m_{гр}$  на расстоянии  $R = 10$  см от оси маятника (расстояние измеряется по рисочкам на стержнях, первая рисочка соответствует 4 см). Маятник должен находиться в равновесии;

б) измените нагрузку нити  $m$  и измерьте время  $t$  движения груза, результаты занесите в табл. 1 (масса изначально висящего на нити груза 0,053 кг);

в) вычислите значения  $a$ ,  $\varepsilon$ ,  $M$  для каждой нагрузки по формулам:

$$a = \frac{2h}{t^2}; \quad \varepsilon = \frac{a}{r}; \quad M = m \left( g - \frac{2h}{t^2} \right) r,$$

где  $r$  – радиус шкива,  $r = 42$  мм;

г) постройте график зависимости  $\varepsilon = f(M)$ ; по оси  $x$  откладывайте  $M$ ,  $a$  по оси  $y$  –  $\varepsilon$ .



д) экстраполируя построенную прямую до пересечения с осью  $x$ , определите  $M_{тр}$ ;

е) рассчитайте момент инерции системы по формуле

$$J = \frac{\Delta M}{\Delta \varepsilon}.$$

Таблица 1

№ п/п	$R$ , м	$h$ , м	$m$ , кг	$t$ , с	$a$ , м/с <sup>2</sup>	$\varepsilon$ , с <sup>-2</sup>	$M$ , Н·м
1	0,10	0,45					
...							
5							

**Задание 2. Исследовать зависимость момента инерции системы от распределения массы относительно оси вращения**

Для этого:

а) грузы на стержнях закрепите на расстоянии  $R = 10$  см от оси вращения;

б) нагрузку на нить возьмите  $m = 0,094$  кг;

в) измерьте время движения грузов;

г) повторите опыт, перемещая грузы на стержнях каждый раз на 2 см. Результаты занесите в табл. 2;

Таблица 2

№ п/п	$h$ , м	$R$ , м	$m$ , кг	$t$ , с	$J$ , кг·м <sup>2</sup>
1	0,45	0,10	0,094		
2		0,12			
3		0,14			
4	0,45	0,16	0,094		
5		0,18			
6		0,20			
7		0,22			
8		0,24			

д) для каждого расстояния  $R$  вычислите значение момента инерции системы без учета сил трения по формуле

$$J = \frac{m \left( g - \frac{2h}{t^2} \right) r^2 t^2}{2h},$$

полученные значения занесите в табл. 2;

е) постройте график зависимости  $J = f(R)$ ;

ж) объясните вид графика.

### 1.7. Контрольные вопросы

1. Что такое момент силы относительно точки, оси? Пояснить рисунком.

2. Вывести основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела.

3. Привести две формы записи основного уравнения динамики вращательного движения твердого тела.

4. Дать определение центра масс тела.

5. Что такое момент инерции материальной точки относительно некоторой оси? Как определить момент инерции твердого тела произвольной формы относительно некоторой оси?

6. Чему равны моменты инерции диска, шара, стержня относительно оси, проходящей через их центр масс?

7. Сформулировать и доказать теорему Штейнера.

8. Вывести рабочую формулу для экспериментального определения момента инерции маятника Обербека.

9. Объяснить, как теоретически находится момент инерции маятника Обербека.

10. Вывести формулу для момента инерции цилиндрического груза относительно диаметра его среднего сечения.

## 2. СИЛА ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ

**Цель работы:** изучить силы трения при движении твердых тел. Определить величину коэффициента трения качения для поверхностей различных материалов.

**Оборудование и материалы:** наклонный маятник, счетное устройство, набор материалов

### 2.1. Введение

С трением мы сталкиваемся на каждом шагу. Вернее было бы сказать, что без трения мы и шагу ступить не можем. Но несмотря на ту большую роль, которую играет трение в нашей жизни, до сих пор не создана достаточно полная картина возникновения трения, и вопрос этот остается неясным. Это связано даже не с тем, что трение имеет сложную природу, а скорее с тем, что опыты с трением очень чувствительны к обработке поверхности и поэтому трудно воспроизводимы.

Первые исследования трения, о которых мы знаем, были проведены Леонардо да Винчи примерно 450 лет назад. Он измерял силу трения, действующую на деревянные параллелепипеды, скользящие по доске. Бруски ставились на разные грани, определялась зависимость силы трения от площади опоры. Но работы Леонардо да Винчи не были опубликованы. Они стали известны уже после того, как в 17–18 вв. классические законы трения были открыты французскими учеными Амонтоном и Кулоном.

#### **Законы Амонтона-Кулона:**

1) сила трения  $F_{\text{тр}}$  прямо пропорциональна силе  $N$  нормального давления тела на поверхность, по которой движется тело:  $F_{\text{тр}} = \mu N$ , где  $\mu$  – безразмерный коэффициент, называемый коэффициентом трения;

2) сила трения не зависит от площади контакта между поверхностями;

3) коэффициент трения зависит от свойств трущихся поверхностей;

4) сила трения не зависит от скорости движения тела.

Триста лет исследований трения подтвердили правильность трех первых законов, предложенных Амонтоном и Кулоном. Неверным оказался лишь последний – четвертый.

Механизм трения весьма сложен. Из-за неровностей поверхностей тела соприкасаются только в отдельных точках на вершинах выступов. Здесь молекулы соприкасаются только на расстояниях, соизмеримых с расстоянием между молекулами в самих телах, и сцепляются. При сцеплении образуется прочная связь, которая при движении рвется и возникает вновь. В результате возникают колебания молекул. На эти колебания и тратится энергия.

Площадь действительного контакта составляет от одного до двух тысяч квадратных микрометров. Она практически не зависит от размеров тела и определяется природой поверхностей, их обработкой, температурой и силой нормального давления. Если на тело надавить, то выступы сминаются, и площадь действительного контакта увеличивается. Увеличивается и сила трения.

При значительной шероховатости поверхностей большую роль в увеличении силы трения начинает играть механическое зацепление между «холмами». Они при движении сминаются, и при этом тоже возникают колебания молекул. Пока поверхности «грубые», число контактов невелико, а после хорошей полировки оно возрастает. Можно привести еще пример увеличения трения с улучшением качества поверхности. Если взять два металлических бруска с чистыми полированными поверхностями, то они слипаются. Трение здесь становится очень большим, так как площадь действительного контакта велика. Силы молекулярного сцепления, которые ответственны за трение, превращают два бруска в монолит.

Рассмотренная выше модель трения довольно примитивна. При описании механизма трения не принимается во внимание

диффузия молекул, то есть при проникновении молекул одного тела в другое, не учитывается роль электрических зарядов, возникающих на соприкасающихся поверхностях, роль и механизм действия смазки. Эти вопросы во многом неясны, а объяснения спорны. Можно только удивляться тому, что при такой сложности трение описывается столь простым законом:  $F_{\text{тр}} = \mu N$ . И хотя коэффициент трения  $\mu$  несколько меняется от одной точки поверхности к другой, для многих поверхностей, с которыми мы часто сталкиваемся в технике, можно делать достаточно хорошие оценки ожидаемой силы трения.

Применительно к сухому трению различают трение скольжения и трение качения. В случае сухого трения сила трения возникает не только при скольжении одной поверхности по другой, но также при попытках вызвать это скольжение. В последнем случае оно называется **трением покоя**.

Если в жидкости или газе трение возникает только при движении тела, и тело можно сдвинуть, приложив к нему даже очень маленькую силу, то при скольжении тело начинает двигаться только тогда, когда проекция приложенной к нему силы  $F$  на плоскость, касательную к поверхности, на которой лежит тело, станет больше некоторой величины (рис. 2.1), равной  $F_{\text{тр}}$ .

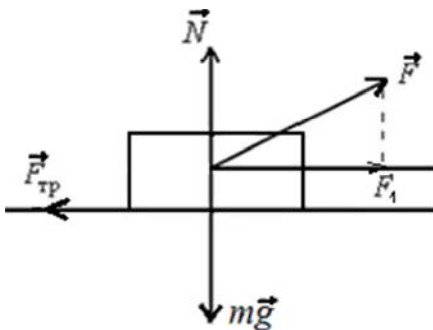


Рис. 2.1. Силы, приложенные к телу, находящемуся на горизонтальной плоскости

Пока тело не начало двигаться, действующая на него сила трения равна касательной составляющей приложенной силы  $F_1$  и направлена в противоположную сторону. При увеличении приложенной силы, сила трения тоже возрастает, пока не достигнет максимальной величины, равной  $\mu N$ , при которой начинается движение. Дальше сила трения уже не меняется.

Часто об этом забывают при решении задач. На вопрос «какая сила трения действует на стол массой 30 кг, стоящий на полу, если коэффициент трения равен 0,4», большинство уверенно отвечает: «~ 120 Н», что неверно. Сила трения равна нулю, иначе стол поехал бы в сторону действия силы трения, так как других горизонтальных сил нет.

Итак, если тело покоится, то для того, чтобы сдвинуть его с места, к телу нужно приложить силу, большую максимально возможной силы трения покоя, которое обусловлено прочностью молекулярных связей. А как обстоит дело, если тело уже движется? Какую силу нужно приложить для того, чтобы тело начало двигаться еще и в другом направлении? Оказывается, сколь угодно малую. Связано это как раз с тем, что сила трения не может быть больше максимальной силы трения покоя.

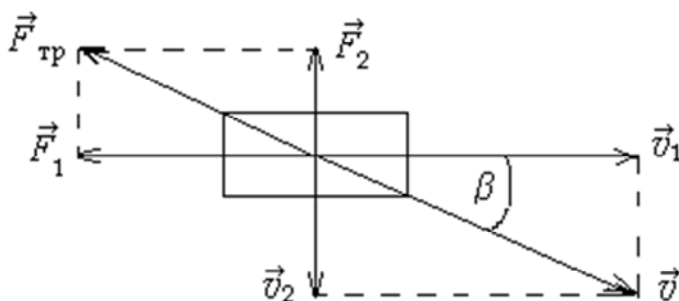


Рис. 2.2. Силы, приложенные к бруску, движущемуся с постоянной скоростью на горизонтальной плоскости (вид сверху)

Возьмем брусок, находящийся на горизонтальной плоскости и движущийся с постоянной скоростью  $\vec{v}_1$  (рис. 2.2). Приложив к бруску боковую силу, перпендикулярную  $\vec{v}_1$ , его можно заставить двигаться еще и в этом направлении с постоянной скоростью  $\vec{v}_2$ . Сила трения при этом будет равна  $\mu N$  и направлена противоположно скорости  $\vec{v}$  движения бруска относительно плоскости ( $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ).

Разложим силу трения на две составляющие по направлениям скоростей  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ :

$$F_1 = F_{\text{тр}} \cos \beta, \quad F_2 = F_{\text{тр}} \sin \beta,$$

где  $\beta$  – угол между векторами  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}$ , а  $\operatorname{tg} \beta = \frac{v_2}{v_1}$ .

Составляющая  $F_1$  силы трения уравнивает силу, приложенную к бруску вдоль  $v_1$ , а составляющая  $F_2$  – «боковую» силу, приложенную к бруску. Так как

$$\sin \beta = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}},$$

то

$$F_2 = F_{\text{тр}} \frac{\frac{v_2}{v_1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2}} = F_{\text{тр}} \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

Если  $v_2 \ll v_1$ , то угол  $\beta$  мал и  $\sin \beta \approx \operatorname{tg} \beta$ .

В этом случае  $F_2 = F_{\text{тр}} \operatorname{tg} \beta = \mu N \frac{v_2}{v_1}$ , и составляющая силы

трения, препятствующая движению бруска «вбок», оказывается пропорциональной скорости этого движения. Картина получается такая, как при малых скоростях при жидком трении. А это означает, что брусок, движущийся в некотором направлении, можно заставить двигаться еще и в перпендикулярном направлении сколь угодно малой силой.

Явление, о котором идет речь, совсем нередкое и встречается довольно часто. Например, известно, что при резком

торможении электродвигателя, ремень передачи часто соскальзывает со шкивов. Происходит это потому, что, при торможении двигателя, ремень начинает проскальзывать относительно шкивов, и достаточно небольшой силы, чтобы сдвинуть ремень вбок. Так как обычно имеется небольшой перекокс в установке шкивов и ремня, то такой силой является составляющая силы натяжения ремня. Вот еще примеры. Когда хотят вытащить гвоздь из стенки без помощи клещей, его сгибают и тащат, поворачивая одновременно вокруг оси. По той же причине при резком торможении автомобиль теряет управление: машину «заносит». Колеса скользят по дороге, а боковая сила возникает за счет неровностей дороги.

Остановимся теперь на последнем законе Амонтона-Кулона: сила трения не зависит от скорости тела. Это не совсем так.

Вопрос о зависимости силы трения от скорости имеет очень важное практическое значение. И хотя эксперименты здесь имеют много специфических трудностей, они окупаются использованием полученных сведений, например, в теории резания металлов, в расчетах движения пули и снарядов в стволе и т. д.

Обычно считают, что для того, чтобы сдвинуть тело с места, к нему нужно приложить бóльшую силу, чем для того, чтобы тащить тело. В большинстве случаев это связано с загрязнениями поверхностей трущихся тел. Например, для чистых металлов такого скачка силы трения не наблюдается. Опыты с движением пули в стволе показали, что с

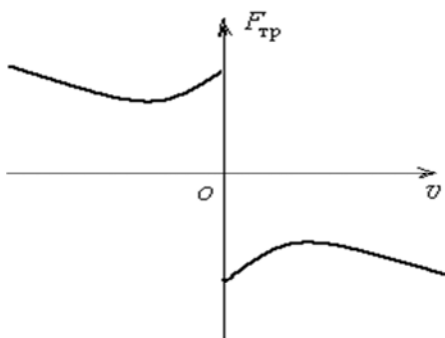


Рис. 2.3. Качественный график зависимости силы трения  $F_{\text{тр}}$  пули в стволе от ее скорости  $v$



увеличением скорости пули величина силы трения сначала быстро убывает, затем она уменьшается все медленнее, а при скоростях, больших 100 м/с, начинает возрастать. График зависимости силы трения от скорости показан на рис. 2.3.

Грубо это можно объяснить тем, что в месте контакта выделяется много тепла. При скоростях порядка 100 м/с температура в месте контакта может достигать нескольких тысяч градусов, и между поверхностями образуется слой расплавленного металла. Трение становится жидким. При больших же скоростях жидкое трение пропорционально квадрату скорости.

Интересно, что примерно такую же зависимость от скорости имеет сила трения смычка о струну. Именно поэтому мы можем слушать игру на смычковых инструментах – скрипке, виолончели, альте.

При равномерном движении смычка струна увлекается им и натягивается. Вместе с натяжением струны увеличивается сила трения между смычком и струной. Когда величина силы трения становится максимально возможной, струна начинает проскальзывать относительно смычка. Если бы сила трения не зависела от относительной скорости смычка и струны, то, очевидно, отклонение струны от положения равновесия не изменялось бы (рис. 2.4).

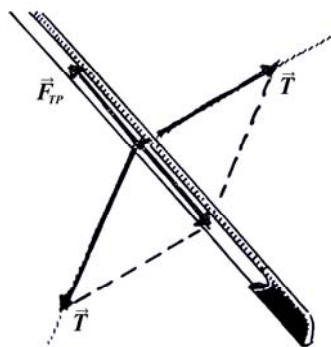


Рис. 2.4. Сила трения  $F_{тр}$  смычка о струну

Но при проскальзывании трение уменьшается. Поэтому струна начинает двигаться к положению равновесия. При этом относительная скорость струны увеличивается, а это еще уменьшает силу трения. Когда же струна, совершив колебание, движется в обратном направлении, ее скорость относительно смычка уменьшается, и смычок опять захватывает

струну. Все повторяется. Так возбуждаются колебания струны. Эти колебания незатухающие, так как энергия, «потерянная» струной при ее движении, каждый раз восполняется работой силы трения, подтягивающей струну до положения, при котором струна срывается.

## 2.2. Определение коэффициента трения скольжения

При движении тела массой  $m$  по наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом, модуль силы трения скольжения

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha,$$

где  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения.

По второму закону Ньютона в направлении движения вдоль оси  $x$  (рис. 2.5) можно записать

$$mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} = ma,$$

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$$

или

$$mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = ma,$$

т. е. модуль ускорения тела

$$a = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha.$$

Следовательно, коэффициент трения скольжения

$$\mu = \frac{g \sin \alpha - a}{g \cos \alpha}.$$

При равномерном движении тела по наклонной плоскости  $|\vec{a}| = 0$ . В этом случае коэффициент трения скольжения  $\mu = \text{tg} \alpha$ .

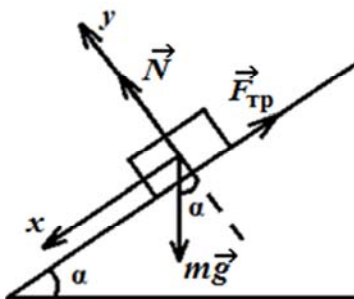


Рис. 2.5. Движение тела по наклонной плоскости вниз

### 2.3. Изучение закономерностей движения системы связанных тел

При движении по горизонтальной поверхности тела массой  $m_2$ , связанного нитью, перекинутой через неподвижный блок (рис. 2.6), с грузом массой  $m_1$  модуль ускорения системы тел на направление движение согласно второму закону Ньютона:

$$(m_1 + m_2)a = m_1g - F_{\text{тр}},$$

где  $F_{\text{тр}}$  – модуль силы трения скольжения. При движении тела по горизонтальной поверхности

$$F_{\text{тр}} = \mu m_2g,$$

где  $\mu$  – коэффициент трения скольжения. Следовательно,  $(m_1 + m_2)a = (m_1 - \mu m_2)g$ . Если тело движется равноускоренно, то

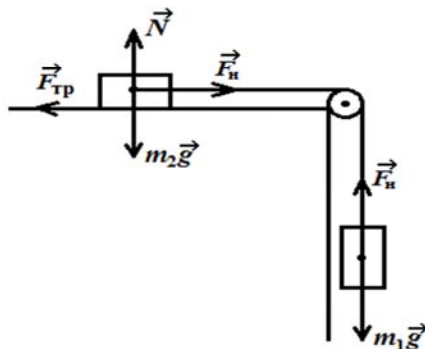


Рис. 2.6. Движение тела по горизонтальной плоскости

$$\mu = \frac{m_1}{m_2} - \frac{(m_1 + m_2)a}{m_2g}.$$

При равномерном движении  $\mu = \frac{m_1}{m_2}$ .

Этим можно и закончить рассмотрение трения скольжения – явления, природу которого мы еще не понимаем достаточно хорошо, но умеем описывать с помощью законов, выполняющихся с удовлетворительной точностью. Это дает нам возможность объяснять многие физические явления.

### 2.4. Сила трения качения

Если рассматриваемое тело имеет форму шара или цилиндра, то под действием внешних сил оно может катиться по по-

верхности другого тела. Из-за деформации поверхностей этих тел в месте их соприкосновения возникают силы реакции, препятствующие как скольжению, так и качению тела.

Для выяснения причин, которые приводят к возникновению сил трения качения, рассмотрим абсолютно твердое (недеформируемое) тело в форме шара, лежащее на горизонтальной плоскости (рис. 2.7). В этом случае имеет место точечный контакт между телами. Приложим к телу силу  $\vec{F}$ . Если численное значение ее меньше порогового значения силы трения покоя, то тело скользить не будет. В отсутствие скольжения возникает сила трения покоя  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , равная силе  $F$ .

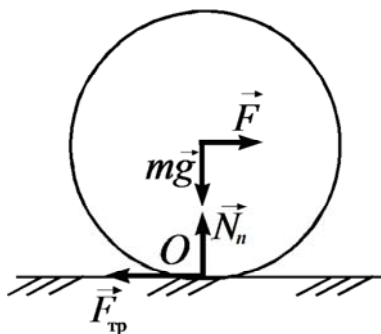


Рис. 2.7. Силы, приложенные к шару, катящемуся по горизонтальной недеформируемой поверхности

Сила тяжести  $m\vec{g}$ , нормальной реакции  $\vec{N}_n$  и  $\vec{F}_{\text{тр}}$  проходят через точку  $O$  и их моменты относительно этой точки равны нулю. Момент же силы  $\vec{F}$  отличен от нуля ( $M_F = FR$ , где  $R$  – радиус шара).

При таких условиях шар должен катиться по плоскости при сколь угодно малом значении силы  $\vec{F}$ .

Опыт же показывает, что это возможно только когда сила  $\vec{F}$  имеет некоторое определенное значение, достаточное для преодоления сил, препятствующих качению.

Причиной возникновения таких сил может быть преодоление «мостиков сцепления», так как на разрыв сил молекулярного сцепления необходимо затратить работу. Величина затрат энергии в этом случае зависит от площади поверхности «мостиков» и при небольших значениях ее незначительна.

В случае реальных твердых тел, основной причиной сопротивления качению является их способность деформироваться под действием внешних сил.

Тело  $A$  (рис. 2.8) под действием силы  $m\vec{g}$  вдавливается в поверхность опоры  $B$  и само несколько сжимается. Деформации тел не являются идеально упругими и, следовательно, часть механической энергии будет переходить в тепловую.

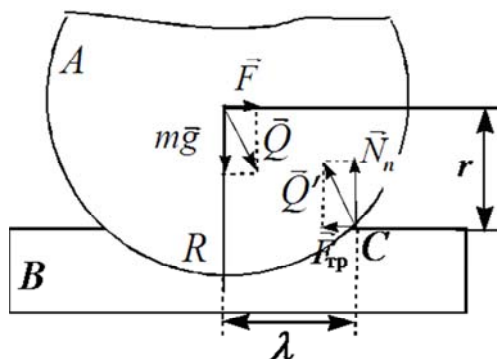


Рис. 2.8. Силы, приложенные к шару, катящемуся по горизонтальной деформируемой поверхности

Затрачивается работа и на деформацию материала при формировании поверхности в окрестности точки  $C$  перед катящимся телом. В процессе качения тело  $A$  как бы вкатывается на горку, проворачиваясь вокруг точки  $C$ . В этой точке к телу приложена сила  $\vec{Q}'$  – реакция опоры, равная по модулю и противоположно направленная силе  $\vec{Q}$  – равнодействующей сил  $m\vec{g}$  и  $\vec{F}$ . Разложив силу  $\vec{Q}'$  на составляющие, параллельные силам  $m\vec{g}$  и  $\vec{F}$ , получим силы  $\vec{N}$  и  $\vec{F}_{\text{тр}}$ . При равномерном качении будут выполняться равенства

$$N_n = mg, F_{\text{тр}} = F. \quad (2.1)$$

Сила  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , приложенная к телу и направленная в сторону, противоположную движению, называется *силой трения качения*.

Условием равномерного вращения тела относительно точки  $C$  является равенство нулю алгебраической суммы моментов всех сил, приложенных к телу. Так как моменты сил  $\vec{N}_n$  и  $\vec{F}_{\text{тр}}$  равны нулю (силы приложены в точке вращения), то уравновешиваться должны моменты сил  $m\vec{g}$  и  $\vec{F}$

$$Fr = mg\lambda, \quad (2.2)$$

где  $r$  – плечо силы  $\vec{F}$ ;

$\lambda$  – плечо силы  $m\vec{g}$ .

С учетом (2.1) и (2.2) для силы трения качения получается выражение:

$$F_{\text{тр}} = \lambda \frac{mg}{r}.$$

Так как обычно деформация поверхности  $B$  под действием силы тяжести катящегося тела  $A$  мала, то  $\lambda \ll r$ , и  $r$  можно принять равным радиусу шара  $R$ . С учетом этого получается формула, выражающая экспериментальный закон Кулона для трения качения

$$F_{\text{тр}} = \lambda \frac{mg}{R} = 2\lambda \frac{N_n}{D}, \quad (2.3)$$

где  $D$  – диаметр шара.

Величину  $\lambda$  в формуле (2.3) называют **коэффициентом трения качения**.

Чем тверже поверхность, тем меньше вдавливание и тем меньше плечо  $\lambda$  силы  $m\vec{g}$  (коэффициент трения качения). Коэффициент  $\lambda$  имеет размерность длины. Численное значение его зависит от материала поверхностей, качества их обра-

ботки и, в довольно широких пределах, не зависит (как показывает опыт) от скорости качения.

Коэффициенты трения качения устанавливаются экспериментально.

Приведем значения коэффициентов трения качения для некоторых материалов (в см):

Стальной каток по стали	0,005
Деревянный каток по стали	0,03–0,04
Деревянный каток по дереву	0,05–0,08
Колесо вагона по рельсу	0,05
Резиновая шина по шоссе	0,024

Коэффициент трения качения можно считать не зависящим от угловой скорости качения катка и его скорости скольжения по плоскости. Законы трения качения, как и законы трения скольжения, справедливы для не очень больших давлений и не слишком легко деформируемых материалов катка и плоскости.

Для начала качения по горизонтальной плоскости требуется значительно меньшая сила, чем для начала скольжения тела одинакового веса. С точки зрения затрат энергии выгодно заменять скольжение качением.

## **2.5. Методика измерения коэффициента трения качения и вывод рабочей формулы**

Измерение силы трения с помощью наклонного маятника основано на измерении уменьшения амплитуды его колебаний. Пусть  $\alpha_0$  – максимальный угол отклонения маятника в начальный момент движения,  $\alpha_n$  – максимальное значение угла отклонения маятника после  $N$  колебаний (рис. 2.9, а); точка  $B$  определяет положение шарика в начальный момент отклонения маятника на угол  $\alpha = \alpha_0$ , точка  $B'$  – положение шарика после  $N$  колебаний в момент отклонения маятника на угол  $\alpha = \alpha_n$ . За  $N$  колебаний полная энергия  $E$  маятника уменьшается на величину  $\Delta E$ , равную убыли его потенциальной энергии:

$$\Delta E = \Delta E_p = mg\Delta h,$$

где  $\Delta h$  – изменение высоты центра тяжести шарика после  $N$  колебаний

$$\Delta h = \Delta l \sin \beta. \quad (2.4)$$

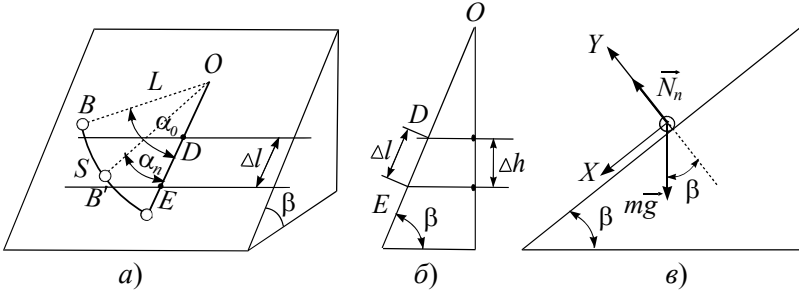


Рис. 2.9. Схематическое изображение наклонного маятника

Убыль потенциальной энергии равна работе сил сопротивления и сил трения, взятых по модулю, на пройденном пути  $S$  за  $N$  колебаний

$$\Delta E_p = \Delta A_{\text{тр.кач.}} + \Delta A_{\text{сопр.}} = F_{\text{тр.кач.}} S + \Delta A_{\text{сопр.}}, \quad (2.5)$$

где  $\Delta A_{\text{тр.кач.}} = F_{\text{тр.кач.}} S$  – работа сил трения качения;

$S$  – путь, который проходит центр тяжести шарика за  $N$  полных колебаний, равный

$$S = LN\alpha_{\text{ср}}, \quad (2.6)$$

$L$  – длина маятника;

$\Delta A_{\text{сопр.}}$  – работа по преодолению сопротивления среды и трения в точке подвеса маятника.

Так как с течением времени происходит затухание колебаний, то значение максимального угла отклонения  $\alpha_n$  маятника от положения равновесия уменьшается, поэтому при расчете пути  $S$ , пройденного шариком за  $N$  колебаний, берем среднее значение максимального угла  $\alpha_{\text{ср}}$ :



$$\alpha_{\text{ср}} = (\alpha_0 + \alpha_n) / 2. \quad (2.7)$$

Ввиду малости, пренебрегаем в (2.7)  $\Delta A_{\text{сопр.}}$ , получим

$$\Delta E_p = mg\Delta h = F_{\text{тр.кач.}} S, \quad (2.8)$$

где  $F_{\text{тр.кач.}}$  определяется выражением (2.3).

По второму закону Ньютона для шарика можно записать (рис. 2.9, в)

$$m\vec{g} + \vec{N}_n = m\vec{a},$$

откуда в проекциях на ось  $y$

$$N_n = mg\cos\beta. \quad (2.9)$$

Здесь  $\beta$  – угол наклона плоскости, на которую опирается шарик, подвешенный на нити,  $m$  – масса шарика.

Подставив формулы (2.3), (2.4) и (2.9) в формулу (2.8), получим:

$$mg\Delta l\sin\beta = 2\lambda mgS\cos\beta / D, \quad (2.10)$$

откуда находим формулу для  $\lambda$ :

$$\lambda = (D\Delta l / 2S)\text{tg}\beta, \quad (2.11)$$

в которой  $\Delta l = OE - OD = L(\cos\alpha_n - \cos\alpha_0)$  (рис. 2.9, б).

Подставив в последнюю формулу значения  $S$  и  $\alpha_{\text{ср}}$  (формулы (2.6), (2.7)), получим:

$$\lambda = \frac{\cos\alpha_n - \cos\alpha_0}{N(\alpha_0 + \alpha_n)} D\text{tg}\beta, \quad (2.12)$$

$N$  – число полных колебаний.

Для удобства расчетов их можно выразить в градусах. Принимая во внимание, что  $1^0 = \frac{1}{57,3}$  радиана, окончательно получаем рабочую формулу для расчета коэффициента трения качения:

$$\lambda = \frac{\cos \alpha_n - \cos \alpha_0}{N(\alpha_0 + \alpha_n)} \cdot 57,3 D \operatorname{tg} \beta.$$

Углы  $\alpha_0$  и  $\alpha_n$  выражаются в радианах.

## 2.6. Порядок выполнения работы

1. Плоскость маятника установлена на угол  $\varphi = 20^\circ$ . В вертикальном положении плоскости  $\varphi_0 = 2^\circ$ . По формуле  $\beta = 90^\circ - (\varphi_n - \varphi_0)$  посчитайте угол  $\beta$ . Запишите значение в таблицу.

Таблица 1

Номера измерений	$\alpha_0^\circ$	$\alpha^\circ$	$\beta^\circ$	$\varphi_0^\circ$	$\varphi_n^\circ$	$N$	$t, \text{с}$	$\lambda, \text{м}$	$T, \text{с}$
1									
...									
5									

$$\lambda_{\text{ср}} = \quad T_{\text{ср}} =$$

2. Включите установку.

3. Задвиньте пластину из исследуемого металла (алюминий или сталь) в плоскость качения маятника. Для этого слегка нажмите большим пальцем на прижимную пружину в направлении от себя и задвиньте исследуемую пластину справа налево. Проверьте правильность установки пластины: она должна быть плотно прижата.

4. Отклоните маятник от положения равновесия на угол  $7^\circ$  по наклонной шкале (5). Запишите значение выбранного угла  $\alpha_0 = 7^\circ$ .

5. Нажмите клавишу “СБРОС” на электронной приставке (2) и без толчка (плавно) отпустите маятник. При достижении маятником выбранного конечного угла отклонения  $\alpha_n = 4^\circ$ , нажмите кнопку “СТОП”.

6. Запишите значение угла  $\alpha_n$ , показания шкалы “Число периодов”  $N$  и шкалы “Время колебаний”  $t$  в таблицу.

7. Сохраняя выбранные значения углов  $\beta$ ,  $\alpha_0$  и  $\alpha_n$ , повторите опыт 5 раз.

8. По формуле  $\lambda = \frac{\cos \alpha_n - \cos \alpha_0}{N(\alpha_n + \alpha_0)} \cdot 57,3 D \operatorname{tg} \beta$  рассчитайте

величину коэффициента трения качения для каждого из опытов. Найдите среднее значение  $\lambda$ , абсолютную и относительную ошибки измерения.  $D = 2,5 \cdot 10^{-2}$  м.

9. Подсчитайте период колебаний маятника в каждом опыте, по формуле  $T = \frac{t}{N}$ . Вычислите среднее значение периода

$$T_{\text{cp}} = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5}{5},$$

абсолютную его погрешность по формуле  $\Delta T_i = |T_{\text{cp}} - T_i|$

$$\Delta T_{\text{cp}} = \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2 + \Delta T_3 + \Delta T_4 + \Delta T_5}{5}.$$

Полученные значения среднего периода и его средней абсолютной погрешности округлите по правилам округления, результат запишите в виде  $T_{\text{cp}} \pm \Delta T_{\text{cp}}$ .

10. Вычислите абсолютную погрешность коэффициента трения качения для исследуемого материала по примеру вычисления погрешности для периода. Произведите округления и запишите результаты в виде  $\lambda_{\text{cp}} \pm \Delta \lambda_{\text{cp}}$ .

Замените материал плоскости качения шарика и произведите измерения согласно пунктам 3–10. Результаты измерений и вычислений занесите в табл. 2.

11. Сравните значения коэффициентов трения качения и периодов колебаний в двух случаях и сделайте вывод.

Таблица 2

Номера измерений	$\alpha_0^\circ$	$\alpha^\circ$	$\beta^\circ$	$\varphi_0^\circ$	$\varphi_n^\circ$	$N$	$t, \text{с}$	$\lambda, \text{м}$	$T, \text{с}$
1									
...									
5									

### 2.7. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте законы Амонтона-Кулона.
2. Что такое трение покоя?
3. Причины возникновения трения скольжения.
4. Покажите, что тело, скользящее в некотором направлении, можно заставить двигаться еще и в перпендикулярном направлении сколь угодно малой силой.
5. Как зависит сила трения скольжения от скорости движения?
6. Почему равномерно движущийся смычок заставляет колебаться струну с различной частотой?
7. Что такое трение качения? Какими причинами оно объясняется?
8. Каким законом выражается сила трения качения?
9. В чем заключается физический смысл коэффициента трения качения? В каких единицах он измеряется? От чего зависит?
10. Как используется закон сохранения энергии при выводе рабочей формулы?
11. Как рассчитывается работа силы трения качения?

## Литература

1. Савельев, И. В. Курс общей физики в 3 т. / И. В. Савельев. – М.: Наука, 2018. – Т. 1. – 436 с.
2. Трофимова, Т. И. Курс физики. / Т. И. Трофимова. – М.: «Высшая школа», 1999. – 536 с.
3. Лабораторный практикум по общей физике / под ред. Е. М. Гершензона, Н. Н. Малова. – М.: «Просвещение», 1985. – 351 с.
4. Иванов, А. А. Маятник Обербека для определения характеристик вращательного движения твердого тела / А. А. Иванов, С. И. Петренко. – Минск: БНТУ, 2008. – 16 с.
5. Климович, И. А. Определение коэффициента трения качения методом наклонного маятника / И. А. Климович, П. Г. Кужир, А. А. Иванов. – Минск: БНТУ, 2008. – 15 с.

Учебное издание

## **ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ**

Пособие

для студентов специальностей

1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,

1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция  
и охрана воздушного бассейна»,

1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение  
и охрана водных ресурсов»,

1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»

В 3 частях

Часть 3

Составители:

**ЕСМАН** Александр Константинович

**БИБИК** Александр Иванович

**ПОТАЧИЦ** Владимир Александрович и др.

Редактор *Е. О. Германович*

Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 23.03.2020. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 2,85. Уч.-изд. л. 2,09. Тираж 100. Заказ 584.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя  
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.