

Министерство образования Республики Беларусь  
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

---

Кафедра естественно-научных дисциплин

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАДАНИЯ

к контрольной работе № 3  
по высшей математике  
для студентов-заочников  
по специальности 1–26 02 02 «Менеджмент»

Минск 2004

УДК 519. 2 (076.1) (075.8)

ББК 22. 17я

М 54

В настоящем издании помещены программы и контрольные задания (25 вариантов) по высшей математике.

Студент должен выполнить контрольное задание по номеру варианта, который совпадает с двумя последними цифрами зачетной книжки (шифра). Если номер шифра больше двадцати пяти, то следует из него вычесть число двадцать пять. Полученный результат будет номером варианта.

Составители:

З.М.Алейникова, М.Н.Покатилова, А.Ф.Шидловская

Рецензент Т.С. Яцкевич

© З.М. Алейникова, М.Н. Покатилова,  
А.Ф. Шидловская, составление, 2004

# ПРОГРАММА

## Тема 1. Ряды

Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Действия над рядами. Необходимое условие сходимости.

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.

Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Знакопеременные ряды. Теорема Лейбница.

Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса.

Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды. Применение рядов к приближенным вычислениям.

## Тема 2. Теория вероятностей и математическая статистика

Предмет теории вероятностей. Классификация событий. Пространство элементарных событий. Алгебра событий. Понятие случайного события. Относительные частоты. Закон устойчивости относительных частот.

Классическое и геометрическое определение вероятности. Понятие об аксиоматическом построении теории вероятностей. Методы исчисления вероятностей.

Свойства вероятностей. Теоремы сложения. Независимость событий.

Определение условной вероятности. Вероятность произведения событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Последовательность независимых испытаний. Схема Бернулли. Теоремы Муавра–Лапласа и Пуассона.

Дискретные случайные величины (СВ). Ряд распределения. Функция распределения, ее свойства. Математическое ожидание и дисперсия дискретной СВ.

Непрерывные СВ. Функция распределения, плотность распределения, их взаимосвязь и свойства. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной СВ.

Примеры законов распределения дискретных СВ: биномиальный, Пуассона. Их свойства.

Примеры законов распределения непрерывных СВ: равномерный, показательный, нормальный. Их свойства.

Понятие о различных формах закона больших чисел. Теорема Бернулли и Чебышева. Центральная предельная теорема Ляпунова.

Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд. Гистограмма и полигон.

Эмпирическая функция распределения. Выборочная средняя и дисперсия.

Оценки параметров распределения. Точечные оценки. Интервальные оценки. Доверительные интервалы для математического ожидания нормально распределенной СВ при известном и неизвестном среднем квадратическом отклонении. Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения нормально распределенной СВ.

Понятие о статистических гипотезах и критериях согласия. Критерии согласия  $\chi^2$  – Пирсона и Колмогорова.

## 1. РЯДЫ

### 1.1. Числовые ряды. Основные определения. Сходимость ряда. Признаки сходимости числовых рядов

Выражение вида

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n, \quad (1.1)$$

где  $U_n \in R$ , называется числовым рядом. Числа  $U_1, U_2, \dots, U_n \dots$  называются членами ряда, а  $U_n$  – общий член ряда.

Ряд считается заданным, если известен его общий член:  $U_n = f(n)$ ,  $n \in N$ , т.е. задана функция натурального аргумента.

Суммы

$$S_1 = U_1; S_2 = U_1 + U_2, \dots; S_n = \sum_{i=1}^n U_i \quad (1.2)$$

называются частичными суммами ряда (1.1).

Если существует конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , то ряд (1.1) называется **сходящимся**, а число  $S$  – его суммой. Если же  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  не существует или  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ , то ряд (1.1) называется **расходящимся**.

**Необходимый признак сходимости ряда.** Если ряд (1.1) сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$ .

**Следствие.** Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n \neq 0$ , то ряд (1.1) расходится.

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  называется гармоническим рядом.

Для него  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$ , но ряд расходится.

## 1.2. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

**1. Признак сравнения.** Пусть даны два ряда с положительными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n \tag{1.3}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n, \tag{1.4}$$

причем члены ряда (1.3) не превосходят соответствующих членов ряда (1.4), т.е. при любом  $n$

$$U_n \leq V_n.$$

Тогда: а) если сходится ряд (1.4), то сходится и ряд (1.3);  
б) если расходится ряд (1.3), то расходится и ряд (1.4).

**2. Предельный признак сравнения.** Если существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{V_n} = k \neq 0,$$

то ряды (1.3) и (1.4) одновременно сходятся либо расходятся.

**3. Признак Даламбера.** Если для ряда (1.3) существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l,$$

то если  $l < 1$  – ряд (1.3) сходится;  
 $l > 1$  – ряд (1.3) расходится;  
 $l = 1$ , ответа не дает.

**4. Радикальный признак Коши.** Если для ряда (1.3) существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = q,$$

то, если  $q < 1$  – ряд (1.3) сходится;  
 $q > 1$  – ряд (1.3) расходится;  
 $q = 1$  – ответа не дает.

**5. Интегральный признак Коши.** Пусть члены ряда (1.3) положительны и не возрастают при  $n \rightarrow \infty$ , т.е.

$$U_1 \geq U_2 \geq U_3 \geq \dots \geq U_n \geq \dots,$$

и пусть  $f(x)$  – положительная, непрерывная, невозрастающая функция на  $[1, \infty]$  такая, что

$$f(1) = U_1, \quad f(2) = U_2, \quad \dots, \quad f(n) = U_n.$$

Тогда ряд (1.3) сходится, если сходится несобственный интеграл  $\int_1^{\infty} f(x) dx$ , и расходится, если этот интеграл расходится.

**Пример 1.1**

Установить, сходится ли ряд, исходя из определения его суммы:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}; \quad \text{б) } 2 + 5 + 8 + 11 + \dots$$

**Решение:**

$$\text{а) } U_n = \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n;$$

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}\right) = \\ &= \left| S_n = \frac{b(1-q^n)}{1-q} \right| = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}} = \left(1-\frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n}. \end{aligned}$$

$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2 \cdot 3^n}\right) = \frac{3}{2}$ , следовательно, по определению ряд сходится.

б)  $2 + 5 + 8 + 11 + \dots$   $a_n = a_1 + d(n-1)$ ,  $a_1 = 2$ ,  $d = 3$ , следовательно,  $a_n = 2 + 3(n-1)$ .

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2 + 2 + 3(n-1)}{2} n = \frac{4 + 3(n-1)}{2} n.$$

$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (4 + 3(n-1))n = \infty$ , следовательно, ряд по определению расходится.

**Пример 1.2.**

Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости ряда:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{3^n} \right).$$

**Решение:**

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 \neq 0, \text{ следовательно, ряд расходится.}$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n3^n} = 0, \text{ следовательно, необходимый при-}$$

знак сходимости ряда выполняется.

### **Пример 1.3**

Исследовать сходимость рядов

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + 1}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{9}{10} \right)^n n^6;$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n+1}{4n+1} \right)^{\frac{n}{2}}; \quad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}.$$

**Решение:**

а). Сравним данный ряд с рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$  расходящимся. Так как  $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$  ( $\ln n < n$ ), то по признаку сравнения данный ряд расходится.

б). Сравним с рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ ,  $p = 3 > 1$ , ряд сходится.

По предельному признаку сравнения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^4 + 1} : \frac{1}{n^3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{n^4 + 1} = 1 \neq 0,$$

следовательно, данный ряд сходится.



Для сравнения часто используются ряды:

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$  – геометрический ряд, при  $|q| < 1$  – ряд сходится,

при  $|q| \geq 1$  – расходится.

2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  – обобщенный гармонический ряд, при  $p > 1$  – сходится; при  $p \leq 1$  – расходится.

в). По признаку Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \left| \frac{U_n = \left(\frac{9}{10}\right)^n n^6}{U_{n+1} = \left(\frac{9}{10}\right)^{n+1} (n+1)^6} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1} (n+1)^6}{\left(\frac{9}{10}\right)^n n^6} = \frac{9}{10} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^6 = \frac{9}{10} < 1,$$

следовательно, данный ряд расходится.

г). По радикальному признаку Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3n+1}{4n+1}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{4n+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1,$$

следовательно, ряд сходится.

д). По интегральному признаку Коши.

$U_n = \frac{n}{1+n^2}$ ,  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$  – невозрастающая функция, так как ее

производная  $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} < 0$  при  $x > 1$ .

Имеем

$$\int_1^{\infty} \frac{xdx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \ln|1+x^2| \Big|_1^b = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln(1+b^2) - \ln 2) = \infty,$$

следовательно, несобственный интеграл расходится, значит, и ряд расходится.

### 1.3. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Знакопеременяющиеся ряды. Теорема Лейбница

$$\text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} U_n \quad (1.5)$$

называется знакопеременным, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа.

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|, \quad (1.6)$$

составленный из модулей членов ряда (1.5), сходится, то ряд (1.5) также сходится.

Ряд (1.5) называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд (1.6).

Сходящийся знакопеременный ряд (1.5) называется **условно сходящимся**, если ряд (1.6) расходится.

Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} U_n = U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \dots + (-1)^{n-1} U_n + \dots, \quad (1.7)$$

где  $U_n > 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , называется **знакопеременяющимся**.

**Признак Лейбница.** Если члены знакопеременяющегося ряда (1.7) удовлетворяют условиям:

- 1).  $U_1 > U_2 > U_3 > \dots > U_n > \dots$ ;
- 2).  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$ ,

то ряд (1.7) сходится. Остаток ряда  $r_n$

$$r_n = (-1)^n U_{n+1} + (-1)^{n+1} U_{n+2} + \dots$$

имеет знак своего первого члена и меньше его по модулю, т.е.  $|r_n| < U_{n+1}$ .

### Пример 1.4

Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}.$$

Ряд из модулей его членов  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$  сходится по признаку сравнения, так как  $\frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ , а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  сходится, следовательно, данный ряд сходится абсолютно.

### Пример 1.5

Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}$  – знакочередующийся ряд.

а). Ряд из модулей его членов  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$  расходится (по интегральному признаку сходимости).

б). Проверим условную сходимость по признаку Лейбница.

$$1) \frac{1}{2\ln 2} > \frac{1}{3\ln 3} > \frac{1}{4\ln 4} > \dots;$$

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} |U_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = 0$ , следовательно, данный ряд сходится условно.

## 1.4. Степенные ряды. Область сходимости степенного ряда

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n, \quad (1.8)$$

где  $C_n$  – коэффициенты степенного ряда, а  $C_n \in R$ .

Если  $a = 0$ , то ряд (1.8) принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n. \quad (1.9)$$

Совокупность тех значений  $x$ , при которых степенной ряд сходится, называется **областью сходимости** степенного ряда.

### Теорема Абеля

Если степенной ряд (1.9) сходится при значении  $x = x_0 \neq 0$ , то он сходится, и притом абсолютно, при всех значениях  $x$  таких, что  $|x| < |x_0|$ .

Если степенной ряд (1.9) расходится при  $x = x_1$ , то он расходится при всех значениях  $x$  таких, что  $|x| > |x_1|$ .

**Областью сходимости** степенного ряда (1.9) является некоторый интервал с центром в точке  $x = 0$ .

**Радиусом сходимости** ряда (1.9) называется такое число  $R$ , что во всех точках  $x$ , для которых  $|x| < R$ , ряд сходится, а во всех точках  $|x| > R$  ряд расходится.

Радиус сходимости степенного ряда находится по формулам

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right|;$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}},$$

если эти пределы существуют.

### Примеры

Определить область сходимости рядов:

1. 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n (n+1)}.$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = \left| \frac{C_n = \frac{1}{3^n(n+1)}}{C_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}(n+2)}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}(n+2)}{3^n(n+1)} = 3,$$

следовательно, интервал сходимости  $(-3, 3)$ .

Исследуем сходимость ряда в граничных точках:

а)  $x = 3$ , получаем ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ , который расходится (гармонический ряд);

б)  $x = -3$ , получим ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ , который сходится по признаку Лейбница:

$$1) 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Область сходимости  $-[-3; 3)$ .

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left( \frac{x-1}{2} \right)^n.$$

Определим радиус сходимости ряда:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = \left| \frac{C_n = \frac{n}{(n+1)2^n};}{C_{n+1} = \frac{n+1}{(n+2)2^{n+1}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2)2^{n+1}}{(n+1)(n+1)2^n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = 2,$$

следовательно,  $R = 2$ ,

$$\begin{aligned} |x-1| &< 2; \\ -2 &< x-1 < 2; \\ -1 &< x < 3. \end{aligned}$$

Интервал сходимости  $(-1, 3)$ . Исследуем сходимость ряда в граничных точках:

1).  $x = 3$ , получаем  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$  – знакоположительный,

$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$ , следовательно, ряд расходится.

2)  $x = -1$ , получаем ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$  – знакочередующийся, сходится по признаку Лейбница, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} |U_n| \neq 0$ . Область сходимости  $(-1, 3)$ .

### 1.5. Свойства степенных рядов

Пусть функция  $S(x)$  является суммой степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ .

Доказано, что на любом отрезке  $[a, b]$ , целиком принадлежащем интервалу сходимости  $(-R, R)$ , функция  $S(x)$  непрерывна, а следовательно, степенной ряд можно почленно интегрировать на этом отрезке:

$$\int_a^b S(x) dx = C_0 \int_a^b dx + C_1 \int_a^b x dx + \dots + C_n \int_a^b x^n dx + \dots$$

Кроме того, в интервале сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать:

$$S'(x) = C_1 + 2C_2x + 2C_3x^2 + \dots + nC_n x^{n-1} + \dots$$

При этом после интегрирования или дифференцирования полученные ряды имеют тот же радиус сходимости  $R$ .

#### **Пример 1.6.**

Определить интервал сходимости и найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = \left| \frac{C_n = \frac{1}{2n-1}}{C_{n+1} = \frac{1}{2n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n-1} = 1.$$

где  $|x^2| < 1$ ,  $|x| < 1$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , в граничных точках сходится по признаку Лейбница.

$$\text{Тогда } S'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots, S'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\text{а } S(x) = \int S'(x) dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C \quad S(0) = 0, \text{ следовательно, } C = 0.$$

Так как  $S(x) = \operatorname{arctg} x$  определена при  $x = \pm 1$  и непрерывна на  $[-1, 1]$ , то она равна сумме ряда и в точках  $x = \pm 1$ .

## 2. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

### 2.1. Пространство элементарных событий.

#### Определение вероятности.

#### Элементы комбинаторики

*Элементарными событиями* (элементарными исходами) называются взаимоисключающие исходы опыта. Множество  $\Omega = \{\omega\}$  всех элементарных событий называется *пространством элементарных событий* данного опыта. Любое подмножество  $A$  множества  $\Omega$  называется *событием*.

Вероятность события характеризует степень объективной возможности наступления этого события.

### **2.1.1. Классическое определение вероятности**

Пусть множество  $\Omega$  состоит из конечного числа  $n$  равновероятных элементарных событий. Вероятность  $P(A)$  события  $A$  равна числу  $m$  элементарных событий, входящих в  $A$  (числу всех благоприятствующих событию  $A$  элементарных исходов), деленному на число всех элементарных событий (число всевозможных, равновероятных и единственно возможных исходов), т.е.  $P(A) = \frac{m}{n}$ .

### **2.1.2. Геометрическая вероятность**

Пусть  $G$  – некоторая область и вероятность попадания в какую-нибудь часть  $g$  области  $G$  – пропорциональна мере этой части (длине, площади, объему – в зависимости от размерности пространства, в котором рассматриваются области) и не зависит от ее расположения. Тогда вероятность попадания в область  $g$  равна  $P(g) = \frac{\text{мера } g}{\text{мера } G}$ . Понятие геометрической вероятности обобщает понятие классической вероятности на случай опытов с бесконечным числом элементарных исходов.

### **2.1.3. Элементы комбинаторики**

В теории вероятностей часто используют размещения, перестановки и сочетания.

Пусть дано множество  $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ . Размещением из  $n$  элементов по  $k$  называется любое упорядоченное подмножество  $k$  элементов множества  $A$ . Таким образом, размещения отличаются либо самими элементами, либо их порядком. Размещения из  $n$  элементов по  $n$  элементов (т.е. при  $k = n$ ) называются перестановками. Сочетанием из  $n$  элементов по  $k$  называется любое подмножество  $k$  элементов множества  $A$ . Различные сочетания отличаются хотя бы одним элементом.

Пусть, например, дано множество  $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ . Размещениями из 3 элементов этого множества по 2 будут



$$(\omega_1, \omega_2), (\omega_1, \omega_3), (\omega_2, \omega_1), (\omega_2, \omega_3), (\omega_3, \omega_1), (\omega_3, \omega_2).$$

Сочетаниями из 3 элементов по 2 являются:

$$(\omega_1, \omega_2), (\omega_1, \omega_3), (\omega_2, \omega_3).$$

Перестановки из 3 элементов:

$$(\omega_1, \omega_2, \omega_3), (\omega_1, \omega_3, \omega_2), (\omega_2, \omega_1, \omega_3), (\omega_2, \omega_3, \omega_1), (\omega_3, \omega_1, \omega_2),$$

$$(\omega_3, \omega_2, \omega_1).$$

Число перестановок из  $n$  элементов вычисляется по формуле  $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ ; число размещений из  $n$  элементов по  $k$  – по формуле  $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1)$ ; число сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  – по формуле  $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k}$ . Отметим, что  $C_n^k = C_n^{n-k}$ .

Приведем несколько примеров простейших комбинаторных задач.

1. Число способов, которыми можно рассадить за столы по 2 студента группу в 20 человек, равно  $A_{20}^2 = 20 \times 19 = 380$ .

2. Число способов распределения 5 должностей между 5 лицами равно  $P_5 = 5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ .

3. Число партий шахматной игры среди 12 участников чемпионата (если каждый участник играет только одну партию друг с другом) равно  $C_{12}^2 = \frac{12!}{2!10!} = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} = 66$ .

4. Число способов, которыми можно выбрать делегацию в составе 5 человек из группы в 20 человек, равно  $C_{20}^5 = C_{20}^{15} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 15504$ .

**Пример 2.1.** В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наугад отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.

**Решение.** Требуется найти вероятность события  $A = \{\text{среди отобранных лиц} - 3 \text{ женщины}\}$ . В данной задаче элементарное событие – набор из 7 человек. Так как последовательность, в которой они отбираются, не существенна, число всех таких наборов есть число сочетаний из 10 элементов по 7:  $n = C_{10}^7 = C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$ . По условию, все элементарные

события равновозможны. Поэтому можно использовать классический способ вычисления вероятности. Найдем число элементарных исходов, благоприятствующих событию  $A$ . Это будет число наборов, в которых 3 человека выбраны из 4 женщин, а 4 человека – из 6 мужчин. Из 4 женщин троих можно выбрать  $m_1 = C_4^3 = 4$  способами, а из 6 мужчин четверых –  $m_2 = C_6^2 = 15$  способами. Благоприятствующие событию  $A$  исходы получаются, когда набор из 3 женщин дополняется 4 мужчинами. Число таких способов будет равно  $m = m_1 \cdot m_2 = 4 \times 15 = 60$ . По классическому определению вероятности получим  $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$ .

**Пример 2.2.** 2 студента условились встретиться в определенном месте между 18 и 19 часами. Пришедший первым ждет второго в течение 15 мин, после чего уходит. Определить вероятность встречи, если время прихода каждого студента независимо и равновозможно в течение указанного часа.

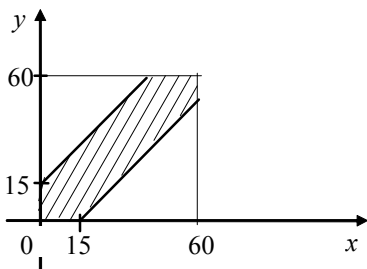


Рис. 2.1

**Решение.** Пусть  $x$  и  $y$  – моменты прихода первого и второго студентов соответственно. Пространство элементарных событий можно записать в виде точек квадрата

$$\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60\}.$$

Событие  $A = \{\text{встреча состоялась}\}$  по условию задачи имеет вид  $A = \{(x, y): |x - y| < 15\}$  (рис. 1). Данная область лежит между прямыми  $x - y = 15$  и  $x - y = -15$  (на рисунке заштрихована). Меры (площади) указанных областей равны пл.  $\Omega = 60^2$ , пл.  $A = 60^2 - (60 - 15)^2$ . Искомая вероятность, если воспользоваться геометрическим определением, равна

$$P(A) = \frac{\text{Пл.}A}{\text{Пл.}\Omega} = \frac{60^2 - (60 - 15)^2}{60^2} = \frac{7}{16} = 0,43753.$$

## 2.2. Теоремы сложения и умножения вероятностей

### 2.2.1. Теорема сложения

Вероятность суммы двух событий  $A$  и  $B$  равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \quad (2.1)$$

Если события  $A$  и  $B$  несовместны (т.е. в результате опыта они не могут появиться вместе), то

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \quad (2.2)$$

**Следствие.** Вероятность события, противоположного данному событию  $A$ , равна

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Для вероятности суммы 3 событий формула (2.1) обобщается так:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

Если события  $A$ ,  $B$ ,  $C$  попарно несовместны, то

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C).$$

### 2.2.2. Теорема умножения вероятностей

Вероятность произведения двух событий  $A$  и  $B$  равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого события, при условии, что первое произошло, т.е.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B). \quad (2.3)$$

Если события  $A$  и  $B$  независимы (т.е. появление одного из них не меняет вероятности появления другого), то

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \quad (2.4)$$

Формула (2.3) верна и для любого конечного числа событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$ :

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \times \\ \times P(A_3 / A_1 A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n / A_1 A_2 \dots A_{n-1}).$$

Если события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  взаимно независимы (в совокупности), то

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$  равна

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n). \quad (2.5)$$

**Пример 2.3.** Для производственной практики на 30 студентов представлено 15 мест в Минске, 8 – в Гомеле и 7 – в Витебске. Какова вероятность того, что 2 определенных студента попадут на практику в один город?

**Решение.** Рассмотрим события:  $A = \{2 \text{ определенных студента попадут на практику в Минск}\}$ ,  $B = \{2 \text{ определенных студента попадут на практику в Гомель}\}$ ,  $C = \{2 \text{ определенных студента попадут на практику в Витебск}\}$ . Эти события попарно несовместны. Событие  $D = \{2 \text{ определенных студента попадут в один город}\}$  есть сумма указанных событий. По формуле (2.2) имеем  $P(D) = P(A) + P(B) + P(C)$ . По классическому определению вероятностей

$$P(A) = \frac{C_{15}^2}{C_{30}^2}; P(B) = \frac{C_8^2}{C_{30}^2}; P(C) = \frac{C_7^2}{C_{30}^2}.$$

$$\text{Тогда } P(D) = \frac{C_{15}^2 + C_8^2 + C_7^2}{C_{30}^2} = \frac{154}{435}.$$

**Пример 2.4.** Имеется блок, входящий в систему. Вероятность безотказной работы его в течение заданного времени  $T$  равна 0,85. Для повышения надежности устанавливают такой же резервный блок. Определить вероятность безотказной работы за время  $T$  с учетом резервного времени.

**Решение.** Введем события:  $A = \{\text{безотказная работа данного блока за время } T\}$ ,  $B = \{\text{безотказная работа резервного блока за время } T\}$ . По условию  $P(A)=P(B)=0,85$ . Пусть событие  $C = \{\text{безотказная работа данного блока с учетом резервного за время } T\}$ . Так как события  $A$  и  $B$  – совместны, но независимы, то по формулам (2.1), (2.4) получим

$$P(C) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 0,85 + 0,85 - 0,85 \cdot 0,85 = 0,9775.$$

**Пример 2.5.** Рабочий, обслуживающий 2 станка, вынужден был отлучиться на некоторое время. Вероятность того, что в течение этого времени станки не потребуют внимания рабочего, равны  $P_1 = 0,7$  и  $P_2 = 0,8$ . Найти вероятность того, что за время отсутствия рабочего ни один станок не потребует его внимания.

**Решение.** Пусть событие  $A = \{\text{первый станок не потребует внимания рабочего за время его отсутствия}\}$ ,  $B = \{\text{второй станок не потребует внимания рабочего за время его отсутствия}\}$ . Эти события независимы, поэтому по формуле (2.4) получим:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56.$$

**Пример 2.6.** У сборщика имеется 6 деталей без дефекта и 2 детали с дефектом. Сборщик берет подряд 2 детали. Найти вероятность того, что обе детали – без дефекта.

**Решение.** Пусть событие  $A = \{\text{первая деталь – без дефекта}\}$ ,  $B = \{\text{вторая деталь – без дефекта}\}$ . Нас интересует событие  $A \cdot B$ . По теореме умножения вероятностей (формула (2.3)) имеем

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B / A) = \frac{6}{8} \cdot \frac{6-1}{8-1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{28}.$$

**Пример 2.7.** 3 стрелка производят по одному выстрелу по цели, вероятности попадания в которую равны: для первого стрелка – 0,6, для второго – 0,7, для третьего – 0,8. Найти вероятность одного попадания в цель.

**Решение.** Пусть  $A_i = \{\text{попадание } i\text{-го стрелка в цель}\}$ , противоположные события  $\bar{A}_i = \{\text{промах } i\text{-го стрелка}\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Рассмотрим событие  $A = \{\text{одно попадание в цель при стрельбе 3 стрелков}\}$ . Это событие может наступить при наступлении одного из следующих несовместных событий:  $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3, \bar{A}_1A_2\bar{A}_3, \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$ .

Тогда  $A = A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$ , а его вероятность

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) = \\ &= P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(A_3) = \\ &= 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,036 + 0,056 + 0,096 = 0,188. \end{aligned}$$

**Пример 2.8.** Техническое устройство, состоящее из 3 узлов, работало в течение некоторого времени  $T$ . За это время первый узел оказывается неисправным с вероятностью 0,1, второй – с вероятностью 0,15, третий – с вероятностью 0,12. Найти вероятность того, что за время работы хотя бы 1 узел технического устройства выйдет из строя.

**Решение.** Пусть событие  $A_i = \{\text{выход из строя } i\text{-го узла технического устройства}\}$  ( $i = \overline{1,3}$ ). Тогда событие  $A = A_1 + A_2 + A_3$  – выход из строя хотя бы одного из 3 узлов. События  $A_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) совместны и независимы. Поэтому вероятность события  $A$  определяется по формуле (2.5):

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3).$$

Следовательно,  $P(A) = 1 - 0,9 \cdot 0,85 \cdot 0,88 = 1 - 0,6732 = 0,3268$ .

### 2.3. Формула полной вероятности и формула Байеса

Если событие  $A$  может произойти только совместно с одним из событий  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , образующих полную группу событий (гипо-

тез), то вероятность события  $A$  определяется по формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(H_k)P(A/H_k), \quad (2.6)$$

где  $P(H_k)$  – вероятность гипотезы  $H_k$ ;  $P(A/H_k)$  – условная вероятность события  $A$  при этой гипотезе,  $\sum_{k=1}^n P(H_k) = 1$ . Вероятность  $P(H_k/A)$  гипотезы  $H_k$  после того, как появилось событие  $A$ , определяется по формуле Байеса

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)}, \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (2.7)$$

**Пример 2.9.** В ящике содержится 12 деталей, изготовленных заводом №1, 20 деталей – заводом № 2 и 18 деталей – заводом № 3. Вероятность того, что деталь, изготовленная заводом № 1, – отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на заводах № 2 и № 3, эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная наугад деталь окажется отличного качества.

**Решение.** Пусть событие  $A = \{\text{деталь отличного качества}\}$ . Рассмотрим гипотезы:  $H_1 = \{\text{деталь изготовлена заводом № 1}\}$ ;  $H_2 = \{\text{деталь изготовлена заводом № 2}\}$ ;  $H_3 = \{\text{деталь изготовлена заводом № 3}\}$ . Вероятности этих гипотез:

$$P(H_1) = \frac{12}{50} = \frac{6}{25}; \quad P(H_2) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}; \quad P(H_3) = \frac{18}{50} = \frac{9}{25}.$$

Условные вероятности:  $P(A/H_1) = 0,9$ ;  $P(A/H_2) = 0,6$ ;  $P(A/H_3) = 0,9$ . По формуле полной вероятности (2.6) при  $n = 3$  находим искомую вероятность:

$$P(A) = \sum_{k=1}^3 P(H_k)P(A/H_k) = \frac{6}{25} \cdot 0,9 + \frac{2}{5} \cdot 0,6 + \frac{9}{25} \cdot 0,9 = 0,78.$$

**Пример 2.10.** В телевизионном ателье имеется 4 кинескопа. Вероятность гарантийной работы кинескопа: 0,8; 0,95; 0,9 и 0,7 для первого, второго, третьего и четвертого соответственно. Найти вероятность того, что наудачу выбранный кинескоп будет работать в течение гарантийного срока.

**Решение.** Событие  $A = \{\text{кинескоп проработает гарантийный срок}\}$ . Гипотезы  $H_k = \{\text{выбран } k\text{-й кинескоп}\}$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ). Эти гипотезы равновероятны, т.е.

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = \frac{1}{4}.$$

Условные вероятности

$$P(A/H_1) = 0,8; P(A/H_2) = 0,95; P(A/H_3) = 0,9; P(A/H_4) = 0,7.$$

По формуле полной вероятности (2.6) при  $n = 4$  находим искомую вероятность события  $A$ :

$$P(A) = \sum_{k=1}^4 P(H_k)P(A/H_k) = \frac{1}{4} \cdot 0,8 + \frac{1}{4} \cdot 0,95 + \frac{1}{4} \cdot 0,9 + \frac{1}{4} \cdot 0,7 = 0,8375.$$

**Пример 2.11.** Самолет морской авиации производит бомбометание с малой высоты по кораблю противника. При попадании бомбы в надводную часть вероятность гибели корабля 0,6, при попадании в подводную часть – вероятность 0,9. Вероятность попадания бомбы в надводную часть равна 0,6, в подводную – 0,4. Определить вероятность гибели корабля в результате бросания одной бомбы.

**Решение.** Событие  $A = \{\text{гибель корабля}\}$ . Формулируем гипотезы:  $H_1 = \{\text{попадание бомбы в надводную часть корабля}\}$ ;  $H_2 = \{\text{попадание бомбы в подводную часть корабля}\}$ . По условию вероятности гипотезы соответственно равны:  $P(H_1) = 0,6$ ;  $P(H_2) = 0,4$ . Условные вероятности события  $A$  будут такими:  $P(A/H_1) = 0,6$ ;  $P(A/H_2) = 0,9$ .

Тогда

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) = 0,6 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,9 = 0,72.$$



**Пример 2.12.** Счетчик регистрирует частицы 3 типов:  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Вероятности появления этих частиц:  $P(A) = 0,2$ ;  $P(B) = 0,5$ ;  $P(C) = 0,3$ . Частицы каждого из этих типов счетчик улавливает с вероятностями  $P_1 = 0,8$ ;  $P_2 = 0,2$ ;  $P_3 = 0,4$ . Счетчик отметил частицу. Определить вероятность того, что это была частица типа  $B$ .

**Решение.** Обозначим событие  $D = \{\text{счетчик уловил частицу}\}$ . Гипотезы:  $H_1 = \{\text{появление частицы типа } A\}$ ;  $H_2 = \{\text{появление частицы типа } B\}$ ;  $H_3 = \{\text{появление частицы типа } C\}$ . Вероятности гипотез:  $P(H_1) = 0,2$ ;  $P(H_2) = 0,5$ ;  $P(H_3) = 0,3$ . Условные вероятности:  $P(D/H_1) = 0,8$ ;  $P(D/H_2) = 0,2$ ;  $P(D/H_3) = 0,4$ . Искомую вероятность  $P(H_2/D)$  определим по формуле Байеса (2.7):

$$P(H_2/D) = \frac{P(H_2)P(D/H_2)}{\sum_{k=1}^3 P(H_k)P(D/H_k)} =$$

$$= \frac{0,5 \cdot 0,2}{0,2 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,4} = \frac{0,1}{0,16 + 0,1 + 0,12} = \frac{5}{19}.$$

**Пример 2.13.** Сборщик получает 50 % деталей завода №1, 30 % – завода №2, 20% – завода №3. Вероятность того, что деталь завода №1 отличного качества, равна 0,7; завода №2 – 0,8; завода №3 – 0,9. Наугад взятая деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена заводом №1.

**Решение.**  $A = \{\text{деталь отличного качества}\}$ . Гипотезы:  $H_k = \{\text{деталь изготовлена заводом № } k\}$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

Вероятности этих гипотез:  $P(H_1) = 0,5$ ;  $P(H_2) = 0,3$ ;  $P(H_3) = 0,2$ .

Условные вероятности:  $P(A/H_1) = 0,7$ ;  $P(A/H_2) = 0,8$ ;  $P(A/H_3) = 0,9$ .

Искомую вероятность определим по формуле Байеса:

$$P(H_1/A) = \frac{0,5 \cdot 0,7}{0,5 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,9} = \frac{0,35}{0,77} = \frac{5}{11}.$$

## 2.4. Повторение испытаний

### 2.4.1. Формула Бернулли

Если в каждом из  $n$  независимых испытаний вероятность появления события  $A$  постоянна и равна  $p$ , то вероятность того, что в  $n$  испытаниях событие  $A$  произойдет ровно  $m$  раз, определяется по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}, \quad q = 1 - p. \quad (2.8)$$

### 2.4.2. Формула Пуассона

Если  $n$  велико, а  $p$  мало (обычно  $p < 0,1$ ;  $npq \leq 9$ ), то вместо формулы Бернулли применяют приближенную формулу Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad (2.9)$$

где  $\lambda = np$ .

### 2.4.3. Локальная теорема Лапласа

Если  $n$  велико, вероятность  $P_n(m)$  может быть вычислена по приближенной формуле

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad (2.10)$$

где  $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ ,  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ,  $p \neq 0$ ,  $p \neq 1$ .

Значения функции  $\varphi(x)$  определяются из таблицы ( $\varphi(-x) = \varphi(x)$ ).

Вероятность  $P_n(m_1, m_2)$  того, что в  $n$  независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события  $A$  равна  $p$  ( $0 < p < 1$ ), событие  $A$  наступит не менее  $m_1$  раз и не более  $m_2$  раз, приближенно равна

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad (2.11)$$

где  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  — функция Лапласа,

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значения  $\Phi(x)$  определяются из таблицы;  $\Phi(x) = 1/2$  при  $x = 0$ ,  $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ .

**Пример 2.14.** В мастерской имеется 10 моторов. При существующем режиме работы вероятность того, что в данный момент не менее 8 моторов работают с полной нагрузкой, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент не менее 8 моторов работают с полной нагрузкой.

**Решение.** Рассмотрим события:  $A = \{\text{не менее 8 моторов из 10 в данный момент работают с полной нагрузкой}\}$ ;  $B, C, D$  — события, состоящие в том, что работают соответственно 8, 9 и 10 моторов. Тогда  $A = B + C + D$ . Так как события  $B, C$  и  $D$  несовместны,  $P(A) = P(B) + P(C) + P(D)$ . Найдем вероятности событий  $B, C$  и  $D$  по формуле Бернулли (2.8):

$$P(B) = P_{10}(8) = C_{10}^8 p^8 q^2 = C_{10}^2 \cdot 0,8^8 \cdot 0,2^2 = 45 \cdot 0,8^8 \cdot 0,2^2;$$

$$P(C) = P_{10}(9) = C_{10}^9 p^9 q = C_{10}^1 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 10 \cdot 0,8^9 \cdot 0,2;$$

$$P(D) = P_{10}(10) = C_{10}^{10} p^{10} q^0 = p^{10} = 0,8^{10}.$$

Тогда  $P(A) = 45 \cdot 0,8^8 \cdot 0,2^2 + 10 \cdot 0,8^9 \cdot 0,2 + 0,8^{10} = 0,8^8 \cdot 4,04 \approx 0,678$ .

**Пример 2.15.** Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

**Решение.** По условию  $n = 100, m = 75, p = 0,8, q = 0,2$ . Так как  $n = 100$  велико, воспользуемся формулой (2.10) локальной теоремы Лапласа. Для этого найдем  $x = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,25$ . По таблице най-

дем  $\Phi(-1,25) = 0,1826$ . Искомая вероятность  $P_{100}(75) = \frac{0,1826}{4} = 0,04565$ .

**Пример 2.16.** Предприятие отправило на базу 5000 изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудет ровно 3; не более 3 негодных изделий.

**Решение.** Воспользуемся формулой Пуассона (2.9). В данном случае  $m = 3, p = 0,0002, n = 5000, \lambda = np = 1; P_{5000}(3) = \frac{1}{3!} e^{-1} = 0,0613$ .

Вероятность того, что на базу прибудет не более 3 негодных изделий, равна

$$P_{5000}(0 \leq m \leq 3) = P_{5000}(0) + P_{5000}(1) + P_{5000}(2) + P_{5000}(3) = \\ = \frac{1}{0!} e^{-1} + \frac{1}{1!} e^{-1} + \frac{1}{2!} e^{-1} + \frac{1}{3!} e^{-1} = \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) e^{-1} = \frac{8}{3} e^{-1} \approx 0,9180.$$

**Пример 2.17.** Имеется 100 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга, в одинаковом режиме, при включенном приводе, в течение 0,8 всего рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными от 70 до 86 станков?

**Решение.** Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа (формула (2.11))  $P_n(m_1, m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$ , где  $\Phi(x)$  – функция Лапласа;

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -\frac{10}{4} = -2,5;$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{86 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{6}{4} = 1,5.$$

Искомая вероятность

$$\begin{aligned} P_{100}(7086) &= \Phi(1,5) - \Phi(-2,5) = \Phi(1,5) + \Phi(2,5) = \\ &= 0,4332 + 0,4938 = 0,927. \end{aligned}$$

#### 2.4.4. Наивероятнейшее число появлений события

Наивероятнейшее число  $m_0$  появления события  $A$  в  $n$  независимых испытаниях, в каждом из которых оно может появиться с вероятностью  $p$  ( и не появиться с вероятностью  $q = 1 - p$  ), определяется из двойного неравенства

$$np - q \leq m_0 \leq np + p, \quad (2.12)$$

а вероятность появления события  $A$  хотя бы один раз вычисляется по формуле

$$P = 1 - q^n. \quad (2.13)$$

**Пример 2.18.** Оптовая база снабжает 10 магазинов, от каждого из которых может поступить заявка на очередной день с вероятностью  $p = 0,4$ , независимо от заявок других магазинов. Найти наивероятнейшее число заявок в день и вероятность получения этого числа заявок.

**Решение.** Запишем двойное неравенство (2.12) при  $n = 10$ ,  $p = 0,4$ ,  $q = 0,6$  для этого случая:  $10 \cdot 0,4 - 0,6 \leq m_0 \leq 10 \cdot 0,4 + 0,4$  или  $3,4 \leq m_0 \leq 4,4$ .

Так как число  $m_0$  должно быть целым, положительным, то  $m_0 = 4$ . Найдем вероятность получения этого числа по формуле Бернулли (2.8):  $P_{10}(4) = C_{10}^4 \cdot (0,4)^4 \cdot (0,6)^6 = 210 \cdot (0,4)^4 \cdot (0,6)^6 = 0,2508$ .

**Пример 2.19.** Вероятность попадания в десятку при одном выстреле равна 0,3. Сколько должно быть произведено независимых выстрелов, чтобы вероятность хотя бы одного попадания в десятку была больше 0,9?

**Решение.** Для решения этой задачи воспользуемся формулой (2.13). В данном случае  $p = 0,3$ ;  $q = 0,7$ ;  $P > 0,9$ ; число выстрелов  $n$  необходимо определить из неравенства  $1 - (0,7)^n > 0,9$ . Решим его:

$$(0,7)^n < 0,1, \text{ отсюда } n > \frac{\lg 0,1}{\lg 0,7} = \frac{-1}{-0,1549} \approx 6,46, \text{ т.е. } n \geq 7.$$

## 2.5. Случайные величины

### 2.5.1. Понятие случайной величины

Случайной величиной (СВ) называется числовая функция  $\xi = \xi(\omega)$ , заданная на пространстве  $\Omega$  элементарных событий  $\omega$ , и такая, что для любого числа  $x$  определена вероятность  $P(\xi < x) = P\{\omega: \xi(\omega) < x\}$ . Другими словами, случайная величина – это величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем неизвестно, какое именно.

Обычно рассматриваются два типа СВ: дискретные и непрерывные. Дискретной называется такая СВ, которая принимает конечное или счетное множество значений. Возможные значения непрерывной СВ заполняют некоторый интервал (конечный или бесконечный).

Случайная величина считается заданной, если задан закон ее распределения. Законом распределения дискретной СВ называется соотношение, устанавливающее связь между ее возможными значениями и соответствующими им вероятностями.

Пусть дискретная СВ  $\xi$  может принимать значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Обозначим  $p_i = P(\xi = x_i)$  – вероятность того, что СВ  $\xi$  принимает значение  $x_i$ .

Таблица

$x$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$P$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

называется рядом распределения вероятностей дискретной СВ  $\xi$  или законом распределения дискретной СВ  $\xi$ . Поскольку дискретная СВ  $\xi$  обязательно принимает одно из значений  $x_i$ , события

$\{\xi = x_i\}$  образуют полную группу событий, поэтому  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ . Гра-

фическое изображение ряда распределения называется многоугольником распределения.

### 2.5.2. Функция распределения случайной величины

Функцией распределения СВ  $\xi$  (интегральной функцией СВ  $\xi$ ) называется функция  $F(x)$ , равная вероятности  $P(\xi < x)$  того, что СВ  $\xi$  примет значение, меньшее, чем  $x$ , т.е.  $F(x) = P(\xi < x)$ . Свойства функции распределения:

1.  $0 \leq F(x) \leq 1$ .
2.  $F(x)$  – неубывающая функция, т.е.  $x_1 < x_2$  следовательно,  $F(x_1) \leq F(x_2)$ .
3. Если СВ  $\xi$  принимает возможное значение  $x_i$  с вероятностью  $p_i$ , то  $F(x_i + 0) - F(x_i - 0) = p_i$ .

Функция распределения  $F(x)$  в точке  $x_i$  непрерывна слева.

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

$$5. P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a).$$

Случайная величина  $\xi$  называется непрерывной, если ее функция распределения непрерывна.

6. Если  $\xi$  – непрерывная СВ, то  $P(\xi = x) = 0$ .

### 2.5.3. Плотность вероятностей непрерывной случайной величины

Плотностью распределения СВ  $\xi$  ( дифференциальной функцией распределения СВ  $\xi$  ) называется функция  $p(x)$ , такая, что функция

распределения  $F(x)$  выражается формулой  $F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$ .

Свойства плотности вероятности:

1.  $p(x) \geq 0$ .
2.  $P(a \leq \xi \leq b) = \int_a^b p(t) dt$ .
3.  $\int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = 1$ .
4.  $p(x) = F'(x)$ .

**Пример 2.20.** В партии из 6 деталей имеется 4 стандартных. Наудачу отобраны 3 детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных, построить функцию распределения.

**Решение.** СВ  $\xi$  – число стандартных деталей из 3 отобранных – может принимать следующие значения:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$ . Вероятности возможных значений  $\xi$  определим по формуле

$$P(\xi = k) = \frac{C_4^k C_2^{3-k}}{C_6^3}.$$

Итак,

$$P(\xi = 1) = \frac{C_4^1 C_2^2}{C_6^3} = \frac{1}{5}; \quad P(\xi = 2) = \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} = \frac{3}{5}; \quad P(\xi = 3) = \frac{C_4^3 C_2^0}{C_6^3} = \frac{1}{5}.$$

Составим ряд распределения:

$x_i$	1	2	3
$p_i$	1/5	3/5	1/5

Для построения функции распределения дискретной СВ  $\xi$  воспользуемся тем свойством  $F(x)$ , что при

$$x_{k-1} < x \leq x_k \quad F(x) = p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1} = \sum_{i=1}^k p_i.$$

В точке  $x_i$  функция  $F(x)$  имеет скачок  $p_i = P(\xi = x_i) = F(x_i + 0) - F(x_i - 0)$  и, значит, для всех  $x \in (x_k, x_{k+1}]$

$$F(x) = P_1 + P_2 + \dots + P_{K-1} + P_K = \sum_{i=1}^k P_i.$$



Таким образом, функция распределения дискретной СВ  $\xi$  – кусочно-постоянна, имеет скачки  $p_i$  в точках разрыва  $x_i$  и непрерывна слева в точках разрыва  $x_i$ . Для данной СВ  $\xi$  функция  $F(x)$  и ее график имеют вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1; \\ 1/5 & \text{при } 1 < x \leq 2; \\ 4/5 & \text{при } 2 < x \leq 3; \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

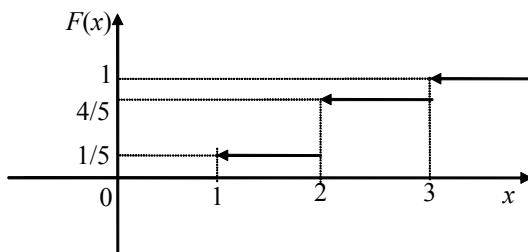


Рис.2.2

**Пример 2.21.** Случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$p(x) = \begin{cases} a \sin x & \text{при } 0 \leq x < \pi; \\ 0 & \text{при } x \geq \pi \text{ или } x < 0. \end{cases}$$

Следует:

- 1) найти коэффициент  $a$ ;
- 2) найти функцию распределения  $F(x)$ ;
- 3) вычислить вероятность неравенства  $\pi/4 < \xi < \pi/2$ ;
- 4) построить графики функций  $p(x)$ ,  $F(x)$ .

**Решение**

- 1). Коэффициент  $a$  определим из равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad \text{или} \quad \int_0^{\pi} a \sin x dx = 1; \quad -a \cos x \Big|_0^{\pi} = 1; \quad 2a = 1; \quad a = \frac{1}{2}.$$

$$2). F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt = \int_0^x \frac{1}{2} \sin t dt = -\frac{1}{2} \cos t \Big|_0^x = \frac{1}{2} (1 - \cos x),$$

$$\text{тогда } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{1}{2} (1 - \cos x) & \text{при } 0 < x \leq \pi; \\ 1 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

3). Вероятность

$$P\left(\frac{\pi}{4} \leq \xi < \frac{\pi}{2}\right) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

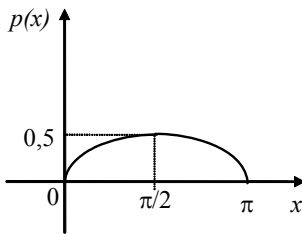


Рис. 2.3

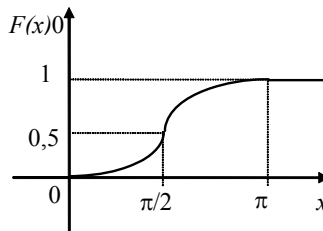


Рис. 2.4

## 2.6. Числовые характеристики случайных величин

К числовым характеристикам СВ относятся: *математическое ожидание*  $M(\xi)$ , *дисперсия*  $D(\xi)$ , *среднее квадратическое отклонение*  $\sigma(\xi)$ , *моменты* и др.

Пусть  $\xi$  – дискретная СВ, принимающая значения  $x_1, x_2, \dots$  с вероятностями  $p_1, p_2, \dots$  соответственно. Математическим ожиданием СВ  $\xi$ , или средним значением, называется число

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

в предположении, что этот ряд сходится абсолютно.

Если СВ  $\xi$  – непрерывна с плотностью  $p(x)$ , то математическое ожидание определяется интегралом

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx .$$

Дисперсией или рассеянием  $D(\xi)$  СВ  $\xi$  называется математическое ожидание квадрата отклонения СВ  $\xi$  от ее математического ожидания, т.е.

$$D(\xi) = M(\xi - M(\xi))^2 .$$

Для дискретной СВ  $\xi$  дисперсия определяется равенством

$$D(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - M(\xi))^2 p_i .$$

Для непрерывной СВ

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(\xi))^2 p(x)dx .$$

Из свойств дисперсии получается удобная рабочая формула для ее вычисления:

$$D(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2 .$$

Итак,  $D(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - (M(\xi))^2$  для дискретной СВ;

$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx - (M(\xi))^2$  для непрерывной СВ.

Среднее квадратическое отклонение  $\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}$ .

**Пример 2.22.** Имеется 6 ключей, из которых только 1 подходит к замку. Составить ряд распределения числа попыток при открывании замка, если ключ, не подошедший к замку, в последующих опробованиях не участвует. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

**Решение.** Опробования открывания замка заканчиваются на  $k$ -й попытке, если первые  $k-1$  попытки не привели к успеху, а  $k$ -я попытка закончилась успешно.

Случайная величина  $\xi$  – число попыток при открывании замка – может принимать следующие значения:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$ ,  $x_4 = 4$ ,  $x_5 = 5$ ,  $x_6 = 6$ . Вероятности этих значений можно определить по формуле

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{6-k+1}{6} \cdot \frac{1}{6-k+1} = \frac{1}{6}.$$

Таким образом, возможные значения случайной величины равновероятны. Запишем ряд распределения данной дискретной СВ.

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$p_i$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

На основании этого распределения получим

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^6 x_i p_i = \frac{1}{6} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{7}{2};$$

$$M(\xi^2) = \sum_{i=1}^6 x_i^2 p_i = \frac{1}{6} (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = \frac{91}{6};$$

$$D(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}; \quad \sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{\frac{35}{12}}.$$

**Пример 2.23.** Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{x^2}{16} & \text{при } 0 < x \leq 4; \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Найти  $M(\xi)$ ,  $D(\xi)$ ,  $\sigma(\xi)$ .

**Решение.**

$$1) \quad p(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{x}{8} & \text{при } 0 < x \leq 4; \\ 0 & \text{при } x > 4; \end{cases}$$

$$2) \quad M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_0^4 x \frac{x}{8} dx = \frac{x^3}{24} \Big|_0^4 = \frac{8}{3};$$

3) дисперсию  $D(\xi)$  вычислим по формуле

$$D(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2.$$

Тогда

$$M(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx = \int_0^4 x^2 \frac{x}{8} dx = \frac{x^4}{32} \Big|_0^4 = 8;$$

$$D(\xi) = 8 - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = 8 - \frac{64}{9} = \frac{8}{9}; \quad \sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

## 2.7. Основные законы распределения случайных величин

### 2.7.1. Биномиальный закон распределения

Биномиальным называется закон распределения дискретной СВ  $\xi$ , если она может принимать целые неотрицательные значения  $0, 1, \dots, n$  с вероятностями

$$P(\xi = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad p \geq 0, \quad q \geq 0, \quad p + q = 1$$

Математическое ожидание и дисперсия СВ  $\xi$ , распределенные по биномиальному закону, вычисляются по формулам  $M(\xi) = np$ ;  $D(\xi) = npq$ .

**Пример 2.24.** Всхожесть семян данного сорта растений оценивается вероятностью 0,8. Составить закон распределения всхожести для 5 посеянных семян и найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

**Решение.** Случайная величина  $\xi$  – число взошедших из 5 посеянных семян – может принимать значения: 0, 1, 2, 3, 4 и 5. По формуле (2.8) найдем соответствующие им вероятности:

$$P_5(\xi = 0) = C_5^0 p^0 q^5 = 0,2^5 = 0,00032;$$

$$P_5(\xi = 1) = C_5^1 p q^4 = 5 \cdot 0,8 \cdot 0,2^4 = 0,0064;$$

$$P_5(\xi = 2) = C_5^2 p^2 q^3 = 10 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^3 = 0,0512;$$

$$P_5(\xi = 3) = C_5^3 p^3 q^2 = 10 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^2 = 0,2048;$$

$$P_5(\xi = 4) = C_5^4 p^4 q = 5 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2 = 0,4096;$$

$$P_5(\xi = 5) = C_5^5 p^5 q^0 = 0,8^5 = 0,32768.$$

Запишем закон распределения.

$x_i$	0	1	2	3	4	5
$P_i$	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

Математическое ожидание  $M(\xi) = np = 5 \cdot 0,8 = 4$ ; дисперсия

$$D(\xi) = npq = 5 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,8; \sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{0,8} = 0,8944.$$

### 2.7.2. Закон распределения Пуассона

Дискретная СВ  $\xi$  распределена по закону Пуассона (с параметром  $\lambda > 0$ ), если она может принимать целые неотрицательные значения

$$0, 1, 2, \dots \text{ с вероятностями } P(\xi = m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \lambda > 0, m = 0, 1, 2, \dots$$

Распределение Пуассона может быть использовано как приближенное в тех случаях, когда точным распределением случайной величины является биномиальное распределение и когда математическое ожидание мало отличается от дисперсии, т.е. когда  $np \approx npq$ .

**Пример 2.25.** Вероятность того, что станок с программным управлением изготовит бракованное изделие, составляет 0,004. Требуется определить с достоверностью 0,95, в каких пределах будет лежать число бракованных изделий в партии из 1000 штук.

**Решение.**  $n = 1000$ ;  $p = 0,004$ ;  $P = 0,95$ . Поскольку  $\lambda = np = 4$ , можно воспользоваться распределением Пуассона, согласно которому

$$p_m = P(\xi = m) = \frac{4^m e^{-4}}{m!}.$$

Вычислим последовательно эти вероятности:

$$p_0 = e^{-4} = 0,01832; \quad p_1 = 4 \cdot e^{-4} = 0,0732; \quad p_2 = \frac{4^2}{2} e^{-4} = 0,14656;$$
$$p_3 = \frac{4^3}{6} e^{-4} = 0,19608; \quad p_4 = \frac{4^4}{24} e^{-4} = 0,19608.$$

Суммируя вычисленные вероятности, начиная со второй, получим  $P(1 \leq m \leq 4) = 0,61192$ . Эта вероятность значительно меньше, чем требуемая достоверность 0,95. Поэтому продолжим процесс вычисления:

$$p_5 = \frac{4^5}{120} e^{-4} = \frac{4^4}{30} e^{-4} = 0,15633 \quad p_6 = \frac{4^6}{720} e^{-4} = 0,1042;$$

$$p_7 = \frac{4^7}{5040} e^{-4} = 0,05952 \quad p_8 = \frac{4^8}{40320} e^{-4} = 0,02976.$$

Суммируя их, получим:  $P(1 \leq m \leq 8) = 0,96173 > 0,95$ , тогда как  $P(1 \leq m \leq 7) = 0,93197 < 0,95$ . Следовательно, с нужной достоверностью ожидаемое число бракованных изделий в партии объемом 1000 находится в пределах от 1 до 8.

### 2.7.3. Равномерное распределение

*Равномерным* называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, все значения которой лежат на некотором отрезке  $[a, b]$  и имеют постоянную плотность вероятности на этом отрезке. Таким образом, ее плотность вероятности

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b; \\ 0 & \text{при } x < a \text{ или } x > b. \end{cases}$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое равномерно распределенной СВ определяются формулами

$$M(\xi) = \frac{a+b}{2}; \quad D(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}; \quad \sigma(\xi) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Вероятность попадания равномерно распределенной случайной величины на интервал  $(\alpha, \beta)$ , представляющий собой часть промежутка  $[a, b]$ , вычисляется по формуле

$$P(\alpha < \xi < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}. \quad (2.14)$$

**Пример 2.26.** Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого деле-



ния. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка: а) меньшая 0,04; б) большая 0,05.

**Решение.** Ошибку округления отсчета можно рассматривать как случайную величину, которая распределена равномерно в интервале между соседними делениями. В рассматриваемой задаче длина интервала, в котором заключены возможные значения, равна 0,2, поэтому

$$p(x) = \begin{cases} 5 & \text{при } 0 \leq x \leq 0,2; \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ или } x > 0,2. \end{cases}$$

а). Очевидно, что ошибка отсчета не превысит 0,04, если она будет заключена в интервалах (0; 0,04) или (0,16; 0,2). Тогда искомую вероятность получим по формуле (2.14):

$$p = P(0 < \xi < 0,04) + P(0,16 < \xi < 0,2) = 5 \cdot 0,04 + 5 \cdot 0,04 = 0,4.$$

б). Ошибка отсчета превысит 0,05, если она будет заключена в интервале (0,05; 0,15). Тогда искомую вероятность получим по формуле (2.14):

$$p = P(0,05 < \xi < 0,15) = 5 \cdot 0,1 = 0,5.$$

#### **2.7.4. Показательный (экспоненциальный) закон распределения**

Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной СВ  $\xi$ , плотность которой имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \end{cases}$$

где  $\lambda$  – постоянная положительная величина.

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение показательного распределения соответственно равны

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda}; \quad D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma(\xi) = \frac{1}{\lambda}.$$

### Функция распределения показательного закона

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Вероятность попадания в интервал  $(a, b)$  непрерывной СВ  $\xi$ , распределенной по показательному закону:

$$P(a < \xi < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Замечательным свойством показательного закона распределения является то, что при наступлении события  $\xi \geq x$  случайная величина  $\eta = \xi - x$  имеет такой же закон распределения, как и величина  $\xi$ . Это свойство объясняет, почему показательный закон распределения имеют такие случайные величины, как время работы различных технических и радиотехнических систем, механизмов, время распада радиоактивного атома, время обслуживания технической системы, длительность телефонного разговора и т.д.

**Пример 2.27.** Время  $T$  безотказной работы двигателя автомобиля распределено по показательному закону. Известно, что среднее время наработки двигателя на отказ между техническим обслуживанием — 100 ч. Определить вероятность безотказной работы двигателя за 80 ч.

**Решение.** По условию задачи математическое ожидание случайной величины  $T$  равно 100 часов. Следовательно,  $1/\lambda = 100$ . Отсюда  $\lambda = 10^{-2} = 0,01$ . Тогда плотность распределения времени безотказной работы двигателя будет иметь вид

$$p(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 0,01e^{-0,01t} & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

### Функция распределения

$$F(t) = P(T < t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 - e^{-0,01t} & \text{при } t \geq 0 \end{cases}$$

определяет вероятность отказа двигателя за время длительностью  $t$ . Тогда вероятность безотказной работы двигателя за это время будет

равна  $R(t) = 1 - P(T < t) = e^{-0,01t}$ . Функцию  $R(t)$  называют функцией надежности. Для случая нашей задачи эта вероятность будет равна

$$P = R(80) = e^{-0,01 \cdot 80} = e^{-0,8} \approx 0,45 .$$

### 2.7.5. Нормальный закон распределения

Распределение непрерывной случайной величины  $\xi$  называется нормальным, если ее плотность вероятности имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} ,$$

где  $a = M(\xi)$  – математическое ожидание;  $\sigma = \sqrt{D(\xi)}$  – среднее квадратическое отклонение СВ  $\xi$ . Вероятность попадания нормально распределенной СВ  $\xi$  в заданный интервал  $(\alpha, \beta)$  вычисляется по формуле

$$P(\alpha < \xi < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) , \quad (2.15)$$

где  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  – функция Лапласа. Вероятность того, что

модуль отклонения случайной величины  $\xi$  от своего математического ожидания меньше любого положительного числа

$$\varepsilon. P(|\xi - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

Вероятность отклонения относительной частоты  $\omega = m/n$  от постоянной вероятности  $p$  появления некоторого события в  $n$  независимых испытаниях выражается формулой

$$P(|\omega - p| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right), \quad (2.16)$$

где  $q = 1 - p$ .

**Пример 2.28.** Пусть случайной величиной  $\xi$  является предел текучести данной марки стали, замеренный на некотором количестве проб. Из опыта известно, что величина  $\xi$  распределена нормально с математическим ожиданием  $a = 310 \text{ МН/м}^2$  и средним квадратическим отклонением  $\sigma = 32 \text{ МН/м}^2$ . Найти вероятность того, что значение текучести заключено между 290 и 320  $\text{МН/м}^2$ .

**Решение.** Для решения этой задачи воспользуемся формулой (2.15).

$$\text{Вычислим значения } \frac{\beta - a}{\sigma} \text{ и } \frac{\alpha - a}{\sigma}.$$

В данной задаче

$$\beta = 320 \text{ МН/м}^2; \alpha = 290 \text{ МН/м}^2; a = 310 \text{ МН/м}^2; \sigma = 32 \text{ МН/м}^2.$$

Тогда

$$\frac{\beta - a}{\sigma} = \frac{320 - 310}{32} = \frac{10}{32} = 0,3125;$$

$$\frac{\alpha - a}{\sigma} = \frac{290 - 310}{32} = -\frac{20}{32} = -0,625.$$

Используя формулу (2.15), получим:

$$P(290 < \xi < 320) = \Phi(0,3125) - \Phi(-0,625) = \Phi(0,3125) + \Phi(0,625) = \\ 0,1217 + 0,2344 = 0,3561.$$

**Пример 2.29.** Диаметр втулок, изготовленных на заводе, можно считать нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием  $a = 25 \cdot 10^{-3} \text{ м}$  и среднеквадратическим откло-

нением  $\sigma = 10^{-4}$  м. В каких границах будет находиться величина диаметра втулки с вероятностью 0,98?

**Решение.** Вероятность того, что абсолютная величина отклонения случайной величины  $\xi$  от своего математического ожидания  $a$  меньше любого  $\varepsilon > 0$ , равна

$$P(|\xi - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 0,98.$$

Из этого равенства получим  $\Phi\left(\frac{\varepsilon}{10^{-4}}\right) = 0,49$ . По таблице значений

функции  $\Phi(x)$  находим:  $\frac{\varepsilon}{10^{-4}} = 2,33$ . Отсюда  $\varepsilon = 2,33 \cdot 10^{-4}$  м. Тогда ис-

комый интервал, в котором будет находиться диаметр втулки с вероятностью 0,98, можно записать:  $(24,767 \cdot 10^{-3}; 25,233 \cdot 10^{-3})$ .

**Пример 2.30.** Среди продукции, изготовленной на данном станке, брак составляет 2%. Сколько изделий необходимо взять, чтобы с вероятностью 0,995 можно было ожидать, что относительная частота бракованных изделий среди них отличается от 0,02 по модулю не более чем на 0,005?

**Решение.** Мы знаем, что если  $n$  – число независимых испытаний и  $p$  – вероятность появления события в отдельном испытании, то при любом  $\varepsilon > 0$  имеет место равенство (см. формулу (2.16))

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

В нашем случае  $p = 0,02$ ;  $q = 1 - 0,02 = 0,98$ ;  $P = 0,995$ ;  $\varepsilon = 0,005$ . Для определения  $n$  запишем указанное равенство с учетом данных задачи:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,02\right| \leq 0,005\right) = 2\Phi\left(0,005 \sqrt{\frac{n}{0,02 \cdot 0,98}}\right) = 0,995$$

или  $\Phi\left(0,005\sqrt{\frac{n}{0,0196}}\right) = 0,4975$ . Из таблицы значений функции  $\Phi(x)$

находим:  $0,005\sqrt{\frac{n}{0,0196}} = 2,81$ . Отсюда получаем:  $n = 6190$  изделий.

## 2.8. Статистическая проверка гипотезы о нормальном распределении

Важнейшим среди законов непрерывных распределений является нормальный закон, плотность и функция распределения которого имеют вид

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (a = M(\xi), \sigma = \sqrt{D(\xi)}); \quad F_0(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right);$$

где  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$  – функция Лапласа.

Нормальный закон является предельным законом распределения и для ряда других законов распределения. Поэтому основные методы математической статистики разработаны применительно к нормальному закону.

Пусть  $F(x)$  – функция распределения изучаемой СВ  $\xi$ . Обозначим через  $H_0$  гипотезу о нормальном распределении СВ  $\xi$ .

$$F(x) = F_0(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

где  $a$  и  $\sigma$  – конкретные значения параметров нормального закона. Эту гипотезу называют нулевой. Для ее проверки производят серию из  $n$  независимых испытаний. В результате получают выборочную совокупность  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , по которой делают вывод о правильности гипотезы  $H_0$ . Так как СВ  $\xi$  может принимать бесконечное множество значений, выборочная совокупность содержит неполную информацию о законе распределения СВ  $\xi$ .

По этой причине при оценке гипотезы  $H_0$  может быть допущена ошибка. Вероятность ошибочного отклонения правильной нулевой гипотезы называют уровнем значимости. Обычно при проверке гипотезы уровень значимости  $\alpha$  берут равным 0,001; 0,01; 0,05. Если уровень значимости взят 0,05, это значит, что примерно в 5% случаев может быть ошибочно отвергнута верная нулевая гипотеза.

Одним из методов статистической проверки гипотезы о законе распределения является критерий согласия  $\chi^2$  (*хи-квадрат*). Опишем алгоритм проверки с помощью этого критерия гипотезы о нормальном распределении:  $F(x) = F_0(x)$ .

В серии независимых испытаний получаем  $n$  значений СВ  $\xi$ . Интервал  $(x_0', x_k')$ , содержащий всю выборочную совокупность, разбиваем точками  $x_1', x_2', \dots, x_{k-1}'$  на  $k$  частичных интервалов. Статистический закон распределения СВ  $\xi$  записываем в форме таблицы, называемой интервальным статистическим рядом. В верхней строке таблицы выписываются частичные интервалы, в нижней – частоты  $m_i$  – число значений СВ  $\xi$ , попавших в соответствующий интервал.

Для каждого частичного интервала рассчитываем относительные частоты (частости)  $w_i = \frac{m_i}{n}$  и строим гистограмму и полигон частостей. Исходя из вида гистограммы и полигона, а также механизма образования СВ  $\xi$ , формулируем гипотезу о виде закона распределения. Если полигон по форме напоминает колокол и значения СВ  $\xi$  формируются под действием большого числа случайных факторов, приблизительно равнозначных по своему влиянию на рассеивание значений СВ  $\xi$ , то есть основания предположить нормальный закон распределения.

Допуская нормальное распределение СВ  $\xi$ , находим точечные оценки его параметров:

$$a \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^* m_i; \quad \sigma \approx \bar{S} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k (x_i^* - a)^2 m_i},$$

где  $x_i^*$  - середины частичных интервалов.

Записываем предполагаемый вид функции распределения

$$F_0(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x - \bar{x}}{S}\right).$$

Вычисляем теоретические частоты  $np_i$  попадания значений СВ  $\xi$  в  $i$ -й частичный интервал, где

$$p_i = F_0(x'_i) - F_0(x'_{i-1}) = P(x'_{i-1} \leq \xi < x'_i).$$

При этом полагаем  $x'_0 = -\infty$ ;  $x'_k = +\infty$ . Получаем значение случайной величины, называемое  $\chi^2$  – статистикой Пирсона:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i},$$

приближенно имеющей  $\chi^2$  – распределение с  $\nu = k-3$  степенями свободы. Чем точнее  $F_0(x)$  воспроизводит закон распределения СВ  $\xi$ , тем ближе теоретические частоты  $np_i$  к эмпирическим  $m_i$  и, следовательно, тем меньше значение  $\chi^2$ .

Из таблицы  $\chi^2$  – распределения по выбранному уровню значимости  $\alpha$  и числу  $\nu = k-3$  выбираем значение  $\chi^2_{\alpha, \nu}$ , удовлетворяющее условию  $P(\chi^2_{\nu} \geq \chi^2_{\alpha, \nu}) = \alpha$ .

Сравниваем вычисленное значение  $\chi^2$  с табличным. Если  $\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha, \nu}$  – в единственном испытании (результат испытания – вычисленное значение  $\chi^2$ ) произошло событие пренебрежимо малой вероятности. Поэтому следует усомниться в исходном предположении  $H_0$ , давшем маловероятное событие в единственном испытании. Нулевая гипотеза отклоняется с вероятностью ошибки  $\alpha$ . Если  $\chi^2 < \chi^2_{\alpha, \nu}$ , считается, что нет оснований для отклонения нулевой ги-



потезы. Гипотетическая функция  $F_0(x)$  согласуется с опытными значениями СВ  $\xi$ .

*Замечание.* Число интервалов  $k$  и точки деления выбирают так, чтобы все теоретические частоты (кроме, может быть, крайних) удовлетворяли требованию  $np_i \geq 10$ . Это необходимо для того, чтобы обеспечить близость закона распределения  $\chi^2$  – статистики Пирсона к  $\chi^2$  – распределению. Если указанные неравенства не выполняются, следует либо выбрать новые точки деления, либо объединить некоторые соседние интервалы. При этом не следует брать очень крупные интервалы, чтобы вероятности  $p_i$  достаточно точно отражали вид предполагаемой функции распределения.

**Пример 2.33.** Даны 100 значений температуры масла двигателя БелАЗ при средних скоростях:

52	48	52	51	52	48	52	51	48	46	52	47
50	52	49	53	51	53	48	47	47	48	47	49
53	50	53	49	51	52	49	49	53	49	54	50
49	50	51	50	52	50	50	52	51	52	53	52
51	49	52	51	50	51	50	49	50	51	50	49
55	46	48	47	46	50	49	50	50	49	49	55
49	46	49	50	47	49	50	51	52	53	52	55
49	50	51	52	51	52	53	54	55	53	51	56
51	54	52	49								

Требуется:

- 1) составить интервальные статистические ряды частот и частостей наблюдаемых значений непрерывной СВ  $\xi$ ;
- 2) построить полигон и гистограмму частостей СВ  $\xi$ ;
- 3) по виду гистограммы и полигона и исходя из механизмов образования исследуемой СВ  $\xi$  сделать предварительный выбор закона распределения;
- 4) предполагая, что исследуемая СВ  $\xi$  распределена по нормальному закону, найти точечные оценки параметров нормального распределения, записать гипотетическую функцию распределения СВ  $\xi$ ;
- 5) найти теоретические частоты нормального распределения, проверить согласие гипотетической функции распределения с нормальным законом с помощью критерия согласия  $\chi^2$  (уровень значимости принять равным  $\alpha = 0,05$ );
- 6) найти интервальные оценки параметров нормального распределения (доверительную вероятность принять равной  $\gamma = 1 - \alpha = 0,95$ ).

**Решение.** Температура масла в двигателе является непрерывной случайной величиной. Обозначим ее  $\xi$ .

1). Для построения интервального статистического ряда выбираем наибольшее  $x_{\max}$  и наименьшее  $x_{\min}$  из имеющихся значений СВ  $\xi$ :  $x_{\max} = 56$ ,  $x_{\min} = 46$ .

Диапазон имеющихся значений разобьем на 6 частичных интервалов равной длины  $h$  (обычно число интервалов  $k$  выбирают в пределах от 5 до 15). Разбиение произведем так, чтобы  $x_{\min}$  было серединой первого частичного интервала,  $x_{\max}$  – серединой последнего ( $k$ -го интервала). Очевидно, длина отрезка  $[x_{\min}, x_{\max}]$  будет равной  $(k-1)h$ .

Отсюда находим  $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k-1} = \frac{56-46}{5} = 2$ . Начальную точку берем равной  $x_{\min} - h/2 = 46 - 1 = 45$ . Получаем частичные интервалы  $[45, 47)$ ,  $[47, 49)$ ,  $[49, 51)$ , ...,  $[55, 57)$ . Подсчитываем для каждого интервала частоты  $m_i$  и вычисляем частоты  $w_i = \frac{m_i}{n}$ , где  $n = 100$  – число выборочных значений СВ  $\xi$ . Строим интервальный статистический ряд частот и частостей СВ  $\xi$ .

$x_i$	[45, 47)	[47, 49)	[49, 51)	[51, 53)	[53, 55)	[55, 57)
$m_i$	4	13	34	32	12	5
$w_i$	0,04	0,13	0,34	0,32	0,12	0,05
$w_i/h$	0,02	0,065	0,17	0,16	0,06	0,025

2). Для получения гистограммы частостей на каждом из интервалов строим прямоугольник высотой  $w_i/h$ . Соединяя середины верхних сторон прямоугольников, получаем полигон частостей.

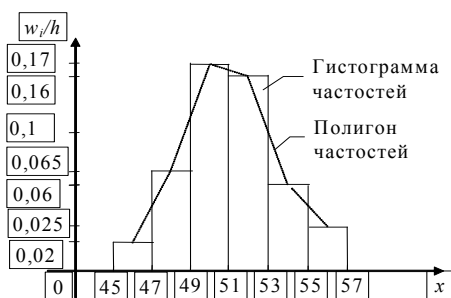


Рис. 2.5

3). Вид полигона и гистограммы частостей напоминает кривую нормального распределения. Кроме того, температура масла складывается под воздействием большого числа независимых случайных факторов (обороты двигателя, нагрузка двигателя, температура охлаждающей жидкости и др.), сравнимых по своему рассеиванию. Сказанное позволяет сделать предположение о нормальном распределении СВ  $\xi$ .

4). Вычисляем точечные оценки параметров нормального распределения:  $a \approx \bar{x} = \frac{46 \cdot 4 + 48 \cdot 13 + 50 \cdot 34 + 52 \cdot 32 + 54 \cdot 12 + 56 \cdot 5}{100} = 51$ .

При вычислении удобно пользоваться формулой

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \sqrt{\frac{n}{n-1}(\overline{x^2}) - (\bar{x})^2}; \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i)^2 m_i = \\ &= \frac{46^2 \cdot 4 + 48^2 \cdot 13 + 50^2 \cdot 34 + 52^2 \cdot 32 + 54^2 \cdot 12 + 56^2 \cdot 5}{100} = 2606,17; \end{aligned}$$

$$\sigma \approx \bar{S} = \sqrt{\frac{100}{100-1}(2606,17 - 2601)} = 2,285.$$

Записываем функцию распределения нормального закона

$$F_0(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x - 51}{2,285}\right).$$

5). Вычисляем вероятности  $p_i$  попадания значений рассматриваемой СВ  $\xi$  с функцией распределения  $F_0(x)$  в  $i$ -й частичный интервал и теоретические частоты  $np_i$ . Значения функции  $\Phi(x)$  берем из таблицы (прил. 2). Контролируем выполнение неравенства  $np_i > 10$  ( $i = \overline{1,5}$ ).

$$p_1 = P(-\infty < \xi < 47) = \Phi\left(\frac{47-51}{2,285}\right) - \Phi(-\infty) = -0,4599 + 0,5 = 0,0401,$$

$$np_1 = 4,01;$$

$$p_2 = P(47 \leq \xi < 49) = \Phi\left(\frac{49-51}{2,285}\right) - \Phi\left(\frac{47-51}{2,285}\right) = -0,3078 + 0,4599 = 0,1521,$$

$$np_2 = 15,21 > 10;$$

$$p_3 = P(49 \leq \xi < 51) = \Phi\left(\frac{51-51}{2,285}\right) - \Phi\left(\frac{49-51}{2,285}\right) = 0 + 0,3078 = 0,3078,$$

$$np_3 = 30,78 > 10;$$

$$p_4 = P(51 \leq \xi < 51) = \Phi\left(\frac{53-51}{2,285}\right) - \Phi\left(\frac{51-51}{2,285}\right) = 0,3078 ,$$

$$np_4 = 30,78 > 10;$$

$$p_5 = P(53 \leq \xi < 55) = \Phi\left(\frac{55-51}{2,285}\right) - \Phi\left(\frac{53-51}{2,285}\right) = 0,1521 ,$$

$$np_5 = 15,21 > 10;$$

$$p_6 = P(55 \leq \xi < +\infty) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{55-51}{2,285}\right) = 0,5 - 0,4599 = 0,0401 ,$$

$$np_6 = 4,01 .$$

Находим  $\chi^2$  – статистику Пирсона

$$\begin{aligned} \chi^2 = \sum_{i=1}^5 \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} &= \frac{(4 - 4,01)^2}{4,01} + \frac{(13 - 15,21)^2}{15,21} + \frac{(34 - 30,78)^2}{30,78} + \\ &+ \frac{(32 - 30,78)^2}{30,78} + \frac{(15 - 15,21)^2}{15,21} + \frac{(5 - 4,01)^2}{4,01} = 1,6305 . \end{aligned}$$

Из таблицы  $\chi^2$  – распределения (прил. 3) по уровню значимости  $\alpha = 0,05$  и числу  $\nu = k-3 = 6-3 = 3$  выбираем значение  $\chi_{0,05;3}^2 = 7,815$ . Сравниваем вычисленное значение  $\chi^2$  с табличным:  $1,6305 < 7,815$ . Поскольку  $\chi^2 < \chi_{0,05;3}^2$ , гипотеза о нормальном распределении темпе-

ратуры масла с параметрами  $a = 51$ ,  $\sigma = 2,285$  согласуется с опытными данными.

б). Чтобы записать доверительный интервал для  $a = M(\xi)$ , из таблицы  $t$ -распределения (прил. 5) по данным  $\gamma = 0,95$  и  $n = 100$  выбираем  $t_{\gamma,n}$ :  $t_{\gamma,n} = 1,984$ . Вычисляем  $t_{\gamma,n} \cdot \frac{\bar{S}}{\sqrt{n}} = 1,984 \cdot \frac{2,285}{10} = 0,4533$ . С вероятностью  $0,95$  неизвестное значение покрывается интервалом  $51 - 0,4533 < a < 51 + 0,4533$ ;  $50,547 < a < 51,453$ . Чтобы записать доверительный интервал для  $\sigma = \sqrt{D(\xi)}$ , из специальной таблицы (прил. 6) по доверительной вероятности  $\gamma = 0,95$  и числу  $\nu = n - 1 = 100 - 1 = 99$  берем коэффициенты  $q_1 = 0,878$  и  $q_2 = 1,161$ . С вероятностью  $0,95$  неизвестное значение  $\sigma$  покрывается интервалом  $2,285 \cdot 0,878 < \sigma < 2,285 \cdot 1,161$ ;  $2,006 < \sigma < 2,653$ .

### КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 3

#### 1. Найти область сходимости степенного ряда:

- 1.1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$ ;      1.2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$ ;      1.3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n}$ ;
- 1.4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2}$ ;      1.5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^n}{n^2}$ ;      1.6.  $\sum_{n=1}^{\infty} (2+x)^n$ ;
- 1.7.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$ ;      1.8.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt{n^2+1}}$ ;      1.9.  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2}(x+2)^n$ ;
- 1.10.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \ln(n+1)}$ ;      1.11.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+10)^n}{n^n}$ ;      1.12.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{(n+1)^n}$ ;
- 1.13.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln^3(n+1)}}{n+1}(x+1)^n$ ;      1.14.  $\sum_{n=0}^{\infty} (2-x)^n \sin \frac{n}{2^n}$ ;      1.15.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-2x)^n}{n - \ln^2 n}$ ;

$$\begin{aligned}
1.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}; & \quad 1.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}; & \quad 1.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}; \\
1.19. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1} (x-2)^n; & \quad 1.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n4^n}; & \quad 1.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^n (x+1)^n}{2^{n-1} n^n}; \\
1.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}; & \quad 1.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^n}; & \quad 1.24. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{2n}; \\
1.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}.
\end{aligned}$$

**2. Для данной случайной величины (СВ)ξ:**

**1) составить закон распределения СВ;**

**2) найти математическое ожидание  $M(\xi)$  и дисперсию  $D(\xi)$ ;**

**3) найти функцию распределения  $F(x)$ .**

2.1. На участке имеется 5 одинаковых станков, коэффициент использования которых по времени составляет 0,8. СВ  $\xi$  – число работающих станков.

2.2. Охотник, имеющий 5 патронов, стреляет в цель до первого попадания или пока не израсходует все патроны. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. СВ  $\xi$  – число израсходованных патронов.

2.3. Охотник стреляет в цель до первого попадания, но успевает сделать не более 4 выстрелов. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7. СВ  $\xi$  – число выстрелов, производимых охотником.

2.4. В партии деталей – 10% нестандартных. Наудачу отобраны 4 детали. СВ  $\xi$  – число нестандартных деталей среди четырех отобранных.

2.5. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. СВ  $\xi$  – число отказавших элементов в одном опыте.

2.6. Имеется 4 заготовки для одной и той же детали. Вероятность изготовления годной детали из каждой заготовки равна 0,9. СВ  $\xi$  – число заготовок, оставшихся после изготовления первой годной детали.

2.7. Два стрелка стреляют по одной мишени независимо друг от друга. Первый стрелок выстрелил один раз, второй – два раза. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,4, для второго – 0,3. СВ  $\xi$  – общее число попаданий.

2.8. Из урны, содержащей 4 белых и 2 черных шара, наудачу извлекают два шара. СВ  $\xi$  – число черных шаров среди этих двух.

2.9. Партия, насчитывающая 50 изделий, содержит 6 бракованных. Из всей партии случайным образом выбрано 5 изделий. СВ  $\xi$  – число бракованных изделий среди отобранных.

2.10. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. В городе 4 библиотеки. СВ  $\xi$  – число библиотек, которые посетит студент.

2.11. Испытуемый прибор состоит из четырех элементов. Вероятности отказа каждого из них соответственно равны: 0,2; 0,3; 0,4; 0,5. Отказы элементов независимы. СВ  $\xi$  – число отказавших элементов.

2.12. Батарея состоит из трех орудий. Вероятности попадания в цель при одном выстреле из I, II, III орудия батареи равны соответственно 0,5; 0,6; 0,8. Каждое орудие стреляет по цели один раз. СВ  $\xi$  – число попаданий в цель.

2.13. Из ящика, содержащего 3 бракованных и 5 стандартных деталей, наугад извлекают 3 детали. СВ  $\xi$  – число вынутых стандартных деталей.

2.14. Два стрелка стреляют по одной мишени, делая независимо друг от друга по два выстрела. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,5, для второго – 0,6. СВ  $\xi$  – общее число попаданий.

2.15. В группе из десяти изделий имеется одно бракованное. Чтобы его обнаружить, выбирают наугад одно изделие за другим и каждое взятое проверяют. СВ  $\xi$  – число проверенных изделий.

2.16. Монету подбрасывают 6 раз. СВ  $\xi$  – число появлений герба.

2.17. На пути движения автомашины – 4 светофора, каждый из них либо разрешает, либо запрещает дальнейшее движение с вероятностью 0,5. СВ  $\xi$  – число пройденных автомашиной светофоров до первой остановки.

2.18. Из партии в 15 изделий, среди которых имеются 2 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. СВ  $\xi$  – число бракованных изделий в выборке.

2.19. В некотором цехе брак составляет 5% всех изделий. СВ  $\xi$  – число бракованных изделий из 6 наудачу взятых изделий.

2.20. Вероятность выпуска нестандартного изделия равна 0,1. Из партии контролер берет изделие и проверяет его на качество. Если изделие оказывается нестандартным, дальнейшие испытания прекращаются, а партия задерживается. Если же изделие оказывается стандартным, контролер берет следующее и т.д. Всего он проверяет не более 5 изделий. СВ  $\xi$  – число проверяемых изделий.

2.21. В шестиламповом радиоприемнике (все лампы различны) перегорела одна лампа. С целью устранения неисправности наугад выбранную лампу заменяют заведомо годной из запасного комплекта, после чего сразу проверяется работа приемника. СВ  $\xi$  – число замен ламп.

2.22. Рабочий обслуживает 3 независимо работающих станка. Вероятности того, что в течение часа 1-й, 2-й и 3-й станок не потребуют внимания рабочего, равны соответственно 0,7; 0,8; 0,9. СВ  $\xi$  – число станков, которые не потребуют внимания рабочего в течение часа.

2.23. Срок службы шестерен коробок передач зависит от следующих факторов: усталости материала в основании зуба, контактных напряжений, жесткости конструкции. Вероятность отказа каждого фактора в одном испытании равна 0,1. СВ  $\xi$  – число отказавших факторов в одном испытании.

2.24. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. СВ  $\xi$  – число стандартных деталей среди отобранных.

2.25. Имеется 5 ключей, из которых только один подходит к замку. СВ  $\xi$  – число опробований при открывании замка при условии, что испробованный ключ в последующих испытаниях не участвует.

### **3. Случайная величина $\xi$ задана функцией распределения $F(x)$ .**

**Требуется:**

- 1) найти плотность распределения вероятности  $p(x)$ ;**
- 2) вычислить математическое ожидание  $M(\xi)$ , дисперсию  $D(\xi)$  и среднее квадратическое отклонение  $\sigma(\xi)$ ;**
- 3) построить графики функций  $F(x)$  и  $p(x)$ .**



$$3.1. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{x^3}{8} & \text{при } 0 < x \leq 2; \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases} \quad 3.2. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1; \\ (x-1)^3 & \text{при } 1 < x \leq 2; \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

$$3.3. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{16} & \text{при } 0 < x \leq 2; \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases} \quad 3.4. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -\frac{\pi}{2}; \\ \cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0; \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

$$3.5. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 2; \\ \frac{1}{3}(x-2) & \text{при } 2 < x \leq 5; \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases} \quad 3.6. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 2; \\ \frac{1}{5}(x^2-4) & \text{при } 2 < x \leq 3; \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

$$3.7. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ x^3 & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases} \quad 3.8. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1; \\ \frac{1}{4}(x+1) & \text{при } -1 < x \leq 3; \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

$$3.9. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq \frac{3}{4}\pi; \\ \cos 2x & \text{при } \frac{3}{4}\pi < x \leq \pi; \\ 1 & \text{при } x > \pi. \end{cases} \quad 3.10. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq \frac{1}{3}; \\ 6x-2 & \text{при } \frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}; \\ 1 & \text{при } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$3.11. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -3; \\ \frac{1}{6}(x+3) & \text{при } -3 < x \leq 3; \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

$$3.12. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ 1 - \cos x & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 1 & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$3.13. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ 3x^2 + 2x & \text{при } 0 < x \leq \frac{1}{3}; \\ 1 & \text{при } x > \frac{1}{3}. \end{cases} \quad 3.14. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq \frac{1}{4}; \\ \frac{4}{3}x - \frac{1}{3} & \text{при } \frac{1}{4} < x \leq 1; \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

$$3.15. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -\frac{\pi}{4}; \\ \frac{1}{2}(1 + \sin 2x) & \text{при } -\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{4}; \\ 1 & \text{при } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$3.16. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -\frac{\pi}{2}; \\ \frac{1}{2}(1 + \sin x) & \text{при } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 1 & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$3.17. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -2; \\ \frac{1}{2}(x + 2) & \text{при } -2 < x \leq 0; \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad 3.18. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{x^2}{25} & \text{при } 0 < x \leq 5; \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

$$3.19. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1; \\ \frac{1}{2}(x^2 - x) & \text{при } 1 < x \leq 2; \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

$$3.20. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ \sin 2x & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{4}; \\ 1 & \text{при } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$3.21. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{x^2}{4} & \text{при } 0 < x \leq 2; \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases} \quad 3.22. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -\frac{1}{3}; \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} & \text{при } -\frac{1}{3} < x \leq 1; \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

$$3.23. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1; \\ \frac{1}{2}(x-1) & \text{при } 1 < x \leq 3; \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases} \quad 3.24. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 2; \\ \frac{1}{2}x - 1 & \text{при } 2 < x \leq 4; \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

$$3.25. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{x^2}{9} & \text{при } 0 < x \leq 3; \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

**4. Дан интервальный статистический ряд распределения частот экспериментальных значений случайной величины  $\xi$ .**

**Требуется:**

- 1) составить интервальный статистический ряд частостей (относительных частот) наблюдаемых значений непрерывной СВ  $\xi$ ;**
- 2) построить полигон и гистограмму частостей СВ  $\xi$ ;**
- 3) по виду гистограммы и полигона и исходя из механизма образования исследуемой СВ  $\xi$  сделать предварительный выбор закона распределения;**
- 4) предполагая, что исследуемая СВ  $\xi$  распределена по нормальному закону, найти точечные оценки параметров нормального распределения, записать функцию распределения СВ  $\xi$ ;**
- 5) найти теоретические частоты нормального распределения, проверить гипотезу о нормальном законе распределения с помощью критерия согласия  $\chi^2$  (уровень значимости принять равным  $\alpha = 0,05$ );**
- 6) найти интервальные оценки параметров нормального распределения (доверительную вероятность принять равной  $\gamma = 1 - \alpha = 0,95$ ).**

4.1. В таблице приведены статистические данные о трудоемкости операции (в минутах) «ремонт валика водяного насоса автомобиля ЗИЛ-130».

$x_i$ – трудоемкость операции (в мин)	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
Частота $m_i$	7	25	36	24	8

4.2. Даны результаты определения содержания фосфора (в процентах) в 100 чугуновых образцах.

$x_i$ – содержание фосфора в чугуне, %	0,1 – 0,2	0,2 – 0,3	0,3 – 0,4	0,4 – 0,5	0,5 – 0,6
Частота $m_i$	6	24	36	26	8

4.3. В таблице приведены статистические данные о трудоемкости операции (в мин) «контроль механического состояния автомобиля ЗИЛ-130 после возвращения в гараж».

$x_i$ – трудоемкость операции (в мин)	2,0 – 3,0	3,0 – 4,0	4,0 – 5,0	5,0 – 6,0	6,0 – 7,0
Частота $m_i$	8	22	38	26	6

4.4. Даны результаты измерения толщины (в мм) 100 слюдяных прокладок:

$x_i$ – толщина слюдяных прокл. (мм)	2,4 – 2,8	2,8 – 3,2	3,2 – 3,6	3,6 – 4,0	4,0 – 4,4
Частота $m_i$	9	16	45	22	8

4.5. Даны результаты испытаний стойкости 100 фрез (в часах):

$x_i$ – стойкость фрез (час)	22,5 – 27,5	27,5 – 32,5	32,5 – 37,5	37,5 – 42,5	42,5 – 47,5
Частота $m_i$	7	22	44	21	6

4.6. Даны результаты испытания стойкости 100 сверл (в часах):

$x_i$ – стойкость сверл (час)	17,5 – 22,5	22,5 – 27,5	27,5 – 32,5	32,5 – 37,5	37,5 – 42,5
Частота $m_i$	6	21	45	21	7

4.7. Даны результаты измерения твердости 100 фрез (по шкале HRC):

$x_i$ – твердость по шкале HRC	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
Частота $m_i$	7	20	44	21	8

4.8. Даны статистические данные о среднесуточном пробеге 100 автомобилей ЗИЛ-130 автоколонны (в сотнях км):

$x_i$ – среднесут. пробег авт. в сотн. км	1,2 – 1,6	1,6 – 2,0	2,0 – 2,4	2,4 – 2,8	2,8 – 3,2
Частота $m_i$	7	20	48	19	6

4.9. Даны результаты исследования 100 напыленных образцов на прочность напыленного слоя (в кг/мм<sup>2</sup>):

$x_i$ – прочность напыл. слоя (кг/мм <sup>2</sup> )	2,0 – 2,2	2,2 – 2,4	2,4 – 2,6	2,6 – 2,8	2,8 – 3,0
Частота $m_i$	8	18	45	20	9

4.10. Даны результаты измерения твердости 100 сверл (по шкале HRC):

$x_i$ – твердость сверла по шкале HRC	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
Частота $m_i$	8	18	45	20	9

4.11. Даны результаты измерения диаметров втулок, обрабатываемых автоматом:

$x_i$ – диаметры втулок (в мм)	20,00 – 20,04	20,04 – 20,08	20,08 – 20,12	20,12 – 20,16	20,16 – 20,20
Частота $m_i$	8	18	45	20	9

4.12. Даны результаты исследования грануляции порошка (в мкм):

$x_i$ – грануляция порошка (в мкм)	0 – 40	40 – 80	80 – 120	120 – 160	160 – 200
Частота $m_i$	8	18	32	26	9

4.13. Даны результаты измерения диаметров валиков (в мм):

$x_i$ – диаметр валика (в мм)	9,74 – 9,76	9,76 – 9,78	9,78 – 9,80	9,80 – 9,82	9,82 – 9,84
Частота $m_i$	8	24	48	14	6

4.14. Даны результаты исследования 100 напыленных образцов на прочность напыленного слоя (в кг/мм<sup>2</sup>):

$x_i$ – прочность (кг/мм <sup>2</sup> )	2,0 – 2,2	2,2 – 2,4	2,4 – 2,6	2,6 – 2,8	2,8 – 3,0
Частота $m_i$	6	24	40	22	8

4.15. Даны результаты измерения диаметров валиков, обрабатываемых одношпиндельным автоматом:

$x_i$ – диаметр валика (в мм)	19,80 – 19,82	19,82 – 19,84	19,84 – 19,86	19,86 – 19,88	19,88 – 19,90
Частота $m_i$	8	22	44	19	7

4.16. Даны результаты испытания на разрыв 100 образцов дюралюминия (в кг/мм<sup>2</sup>):

$x_i$ – предел прочно- сти на разрыв (в кг/мм <sup>2</sup> )	42 – 43	43 – 44	44 – 45	45 – 46	46 – 47
Частота $m_i$	7	25	37	23	8

4.17. Даны сведения о расходе воды, используемой заводом для технических нужд, в течение 100 дней:

$x_i$ – расход воды (в м <sup>3</sup> )	8 – 10	10 – 12	12 – 14	14 – 16	16 – 18
Частота $m_i$	8	24	36	23	9

4.18. Даны квартальные данные о среднесуточном пробеге 100 автомобилей:

$x_i$ – среднесут. пробег автомобиля в км	150 – 170	170 – 190	190 – 210	210 – 230	230 – 250
Частота $m_i$	7	25	34	24	10

4.19. Даны результаты наблюдений за сроком службы 100 однотипных станков до выхода за пределы норм точности (в месяцах двухсменной работы):

$x_i$ – срок службы до выхода за пределы норм точн. в мес.	20 – 25	25 – 30	30 – 35	35 – 40	40 – 45
Частота $m_i$	9	24	35	22	10

4.20. Даны значения температуры масла в двигателе автомобиля ЗИЛ-130 при средних скоростях:

$x_i$ – значения темпер. масла в градусах	40 – 42	42 – 44	44 – 46	46 – 48	48 – 50
Частота $m_i$	8	25	35	22	10

4.21. Даны размеры диаметров 100 отверстий, просверленных одним и тем же сверлом:

$x_i$ – диаметр отверстия (в мм)	40,10 – 40,20	40,20 – 40,30	40,30 – 40,40	40,40 – 40,50	40,50 – 40,60
Частота $m_i$	7	24	34	26	9

4.22. Даны размеры 100 деталей после шлифовки:

$x_i$ – размер после шлиф. (в мм)	3,45 – 3,65	3,65 – 3,85	3,85 – 4,05	4,05 – 4,25	4,25 – 4,45
Частота $m_i$	8	22	38	25	7

4.23. Дана трудоемкость операции «проверка привода подачи топлива автомобиля БелАЗ»:

$x_i$ – трудоемкость (в с)	8 – 10	10 – 12	12 – 14	14 – 16	16 – 18
Частота $m_i$	7	16	54	15	8

4.24. Дана трудоемкость операции «смазка подшипников подвески БелАЗ»:

$x_i$ – трудоемкость (в с)	30 – 35	35 – 40	40 – 45	45 – 50	50 – 55
Частота $m_i$	8	24	36	22	10

4.25. Даны отклонения диаметров валиков, обработанных на станке, от заданного диаметра (в мкм):

$x_i$ – отклонения диаметров валиков от номинала в мкм	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25
Частота $m_i$	8	20	42	24	6

## Литература

1. Гусак А.А. Высшая математика: Учебник для студентов вузов. В 2 т. Т. 2. – 3-е изд., стереотип. – Мн.: ТетраСистемс, 2001.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1980.
3. Учебно-методическое пособие по высшей математике по разделу «Теория вероятностей и математическая статистика» / А.В. Метельский, И.М. Морозов, Р.Ф. Наумович, М.Н. Показилова. – Мн.: БГПА, 1999.
4. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 4 ч. Ч. 3,4 / Под общ ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Высшэйшая школа, 1990.
5. Щипачев В.С. Высшая математика. – М.: Высшэйшая школа, 1985.



## ПРИЛОЖЕНИЯ

### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Значения функции  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

<i>x</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3084	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3025	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2804	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	989	973	957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0846	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0032	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0012	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0010	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Значения функции Лапласа  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	2,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,28	0,1103	0,6,	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	1,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Значения функции  $\chi^2_{\alpha;v}$ ;  $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;v}) = \alpha$

$v \backslash \alpha$	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,467
5	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515
6	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	18,151	21,064	23,685	26,683	29,141	36,123
15	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	30,675	34,382	37,652	41,566	44,312	52,620
26	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

## ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Распределение Стьюдента.

Значения  $t_{\alpha;v}$  удовлетворяют условию

$$P(t \geq t_{\alpha;v}) = \int_{t_{\alpha;v}}^{\infty} S(t, v) dt = \alpha$$

$v \backslash \alpha$	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,025	0,010	0,005	0,001	0,0005
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	32,60
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	5,032	5,893	6,859
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,405
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3,922
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725

$v \setminus \alpha$	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,025	0,010	0,005	0,001	0,0005
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,716	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,255	0,528	0,849	1,298	1,676	2,009	2,403	2,678	3,262	3,495
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
80	0,254	0,527	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
100	0,254	0,526	0,845	1,290	1,660	1,984	2,365	2,626	3,174	3,389
200	0,254	0,525	0,843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
500	0,253	0,525	0,842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,106	3,310
$\infty$	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

### ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Значения функции  $t_{\gamma;n}; \bar{x} - t_{\gamma;n} \frac{\bar{S}}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_{\gamma;n} \frac{\bar{S}}{\sqrt{n}}$

$n \setminus \gamma$	0,95	0,99	0,999	$n \setminus \gamma$	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	$\infty$	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Значения коэффициентов  $q_1$  и  $q_2$ ;  $q_1\bar{S} < \sigma < q_2\bar{S}$

	0,99		0,98		0,95		0,00	
	$q_1$	$q_2$	$q_1$	$q_2$	$q_1$	$q_2$	$q_1$	$q_2$
1	0,356	15,0	0,388	79,8	0,446	31,9	0,510	15,9
2	0,434	14,1	0,466	9,97	0,521	6,28	0,578	4,40
3	0,483	6,47	0,514	5,11	0,566	3,73	0,620	2,92
4	0,519	4,39	0,549	3,67	0,599	2,87	0,649	2,37
5	0,546	3,48	0,576	3,00	0,624	2,45	0,672	2,090
6	0,569	2,98	0,597	2,62	0,644	2,202	0,690	1,916
7	0,588	2,66	0,616	2,377	0,661	2,035	0,705	1,797
8	0,604	2,440	0,631	2,205	0,675	1,916	0,718	1,711
9	0,618	2,277	0,644	2,076	0,688	1,826	0,729	1,645
10	0,630	2,154	0,656	1,977	0,699	1,755	0,739	1,593
11	0,641	2,056	0,667	1,898	0,708	1,698	0,748	1,550
12	0,651	1,976	0,676	1,833	0,717	1,651	0,755	1,515
13	0,660	1,910	0,685	1,779	0,725	1,611	0,762	1,485
14	0,669	1,854	0,693	1,733	0,732	1,577	0,769	1,460
15	0,676	1,806	0,700	1,694	0,739	1,548	0,775	1,437
16	0,683	1,764	0,707	1,659	0,745	1,522	0,780	1,418
17	0,690	1,727	0,713	1,629	0,750	1,499	0,785	1,400
18	0,696	1,695	0,719	1,602	0,756	1,479	0,790	1,385
19	0,702	1,668	0,725	1,578	0,760	1,460	0,794	1,370
20	0,707	1,640	0,730	1,556	0,765	1,414	0,798	1,358
21	0,712	1,617	0,734	1,536	0,769	1,429	0,802	1,346
23	0,722	1,576	0,743	1,502	0,777	1,402	0,809	1,326
24	0,726	1,558	0,747	1,487	0,781	1,391	0,812	1,316
25	0,730	1,541	0,751	1,473	0,784	1,380	0,815	1,308
26	0,734	1,526	0,755	1,460	0,788	1,371	0,818	1,300
27	0,737	1,512	0,758	1,448	0,791	1,361	0,820	1,293
29	0,744	1,487	0,765	1,426	0,796	1,344	0,825	1,279
30	0,748	1,475	0,768	1,417	0,799	1,337	0,828	1,274
40	0,774	1,390	0,792	1,344	0,821	1,279	0,847	1,228
50	0,793	1,336	0,810	1,297	0,837	1,243	0,861	1,199
60	0,808	1,299	0,824	1,265	0,849	1,217	0,871	1,179
70	0,820	1,272	0,835	1,241	0,858	1,198	0,879	1,163
80	0,829	1,250	0,844	1,222	0,866	1,183	0,886	1,151
90	0,838	1,233	0,852	1,207	0,873	1,171	0,892	1,141
100	0,845	1,219	0,858	1,195	0,878	1,161	0,897	1,133
200	0,887	1,15	0,897	1,13	0,912	1,11	0,925	1,09

Учебное издание

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАДАНИЯ

к контрольной работе № 3  
по высшей математике  
для студентов-заочников  
по специальности 1–26 02 02 «Менеджмент»

Составители: АЛЕЙНИКОВА Зинаида Михайловна  
ПОКАТИЛОВА Маргарита Николаевна  
ШИДЛОВСКАЯ Анна Федоровна

Редактор Т.Н. Микулик  
Компьютерная верстка А.А. Бусько

---

Подписано в печать 10. 12. 2004.

Формат 60x84 1/16. Бумага типографская № 2.

Печать офсетная. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 4,2. Уч.-изд. л. 3,3. Тираж 150. Заказ 443.

---

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Белорусский национальный технический университет.  
Лицензия № 02330/0056957 от 01.04.2004.  
220013, Минск, проспект Ф.Скорины, 65.