МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра естественно-научных дисциплин

ФИЗИКА

Пособие

Часть 4

Минск
БНТУ
2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра естественно-научных дисциплин

ФИЗИКА

Пособие

В 4 частях

Ч а с т ь 4

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Под редакцией Т.И. Развиной

М и н с к
Б Н Т У
2 0 1 4

УДК 543(075.4)
ББК 22.3я7
Ф50

Авторы:
Т.И. Развина, Л.И. Драпезо, В.А. Ласточкина,
Ю.В. Развин, М.И. Чертина

Рецензенты:
И.А. Хорунжий, С.И. Шеденков

Физика : пособие : в 4 ч. / Т.И. Развина [и др.] ; под ред. Т.И. Раз-
Ф50 виной. – Минск : БНТУ, 2007–2013. – Ч. 4 : Колебания и волны. –
2014. – 208 с.
ISBN 978-985-550-181-8 (Ч. 4).

Пособие предназначено для слушателей факультетов довузовской подготовки высших учебных заведений, а также учащихся старших классов школ, лицеев и гимназий.

Пособие включает краткие теоретические сведения, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения, тестовые задания.

Издается с 2007 г. Часть 3 «Электродинамика», авторы: Т.И. Развина, Л.И. Драпезо, О.В. Коваленкова и др., вышла в БНТУ в 2011 г.

УДК 543(075.4)
ББК 22.3я7

ISBN 978-985-550-181-8 (Ч. 4)
ISBN 978-985-479-715-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие «Колебания и волны» является одной из составных частей пособия по физике для поступающих в высшие учебные заведения, содержит 3 главы: механические колебания и волны; электромагнитные колебания и волны; переменный ток. Каждая глава включает краткое изложение теории (учащиеся должны научиться формулировать физические законы, определять физические величины и знать формулы); примеры решения задач (решения даны подробно, чтобы учащийся смог самостоятельно в них разобраться); задачи для самостоятельного решения (дают возможность преподавателю и учащимся разбирать их решения в аудитории и прорабатывать самостоятельно, тем самым развивать творческое мышление учащихся); тестовые задания (позволяют учащимся проверить уровень подготовки, понять, насколько успешно усвоены основные методы и приемы решения задач данной темы). Ко всем задачам и тестовым заданиям даны ответы.

Большое количество подобранных задач поможет учащимся и абитуриентам систематизировать знания и суметь применить их при решении задач любого уровня сложности.

Предлагаемое учебное пособие создавалось авторами с учетом опыта работы в общеобразовательных и физико-математических классах школ и лицеев, на подготовительном отделении БНТУ.

Глава 1. Механические колебания и волны

1.1. Теория

Механическое колебательное движение, или механическое колебание	процесс периодического или почти периодического изменения состояния колеблющейся системы, при котором система поочередно смещается то в одну, то в другую сторону от положения устойчивого равновесия, проходя это положение.
Колебательная система, или осциллятор	система, способная совершать колебательное движение. Простейшими примерами механических колебательных систем (осцилляторов) являются маятники.
Маятник	представляет собой тело, закрепленное так, что точка подвеса тела располагается выше его центра тяжести. Примеры: математический, пружинный и физический маятники.
Свободные (или собственные) колебания системы	колебания, совершаемые колебательной системой за счет первоначально (одноразово) сообщенной ей энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на нее. Свободные колебания в консервативной идеализированной системе, т. е. в которой механическая энергия сохраняется, являются незатухающими: амплитуда этих колебаний не зависит от времени. Свободные колебания в реальной диссипативной системе, т. е. в которой механическая энергия не сохраняется (рассеивается), являются затухающими: амплитуда этих колебаний с течением времени уменьшается.
Гармонические колебания (кинематическое определение)	простейший тип периодических колебаний, когда колеблющаяся величина изменяется с течением времени по закону синуса или косинуса.
$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A\sin(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0)$ или $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A\cos(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0)$	x – смещение колеблющегося тела (в идеализированном случае – материальной точки) от положения равновесия то в одну, то в другую сторону в любой момент времени t.

Амплитуда колебания $A = \lvert x \rvert_{\max}$ $[A] = [x] = 1$ м	максимальное смещение колебательной системы (в дальнейшем будем пользоваться понятиями «тело» или «материальная точка») от положения равновесия.
Период колебаний, T $[T] = 1$ с	время между двумя последовательными прохождениями колебательной системой через одно и то же положение в пространстве в одном и том же направлении
	или
$T = \dfrac{t_0}{N}$	время, в течение которого совершается одно полное колебание (t_0 – время, за которое совершается N полных колебаний).
Частота колебаний $\nu = \dfrac{N}{t_0} = \dfrac{1}{T}$ $[\nu] = 1$ с$^{-1}$ = 1 Гц	число колебаний, совершаемых системой за 1 с.
Собственная частота свободных колебаний	частота, с которой совершаются свободные колебания и которая зависит только от свойств колебательной системы.
Циклическая (круговая) частота $\omega_0 = 2\pi\nu = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi N}{t_0}$ $[\omega_0] = 1$ рад/с	величина, определяемая числом полных колебаний, совершаемых колебательной системой за 2π с.
Фаза колебания $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ или $\varphi = \dfrac{2\pi}{T} t + \varphi_0$ $[\varphi] = 1$ рад	величина, определяющая часть периода, прошедшего с начала наблюдения колебания. При данной амплитуде колебаний фаза полностью определяет смещение колебательной системы в любой момент времени и по модулю, и по знаку.
Начальная фаза колебаний φ_0 $[\varphi_0] = 1$ рад	фаза колебаний в начальный момент времени ($t = 0$), определяющая положение колебательной системы в этот момент времени.

Примечание

Актуальность изучения гармонических колебаний заключается в том, что любые колебания, встречающиеся в природе и технике, имеют характер, близкий к гармоническому, а также любые периодические процессы можно представить как суперпозицию (сложение) гармонических колебаний.

Зависимость смещения x колеблющейся точки от времени t

$$x = A\sin\omega_0 t = A\sin\frac{2\pi}{T}t$$

используется в случаях, когда в начальный момент времени ($t = 0$) точка находится в положении равновесия.

Скорость материальной точки

$$\upsilon = x' = \omega_0 A\cos\omega_0 t$$

Из тригонометрических формул приведения:

$$\upsilon = \omega_0 A\cos\omega_0 t = \omega_0 A\sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\upsilon_{\max} = \omega_0 A = \frac{2\pi}{T}A$$

максимальная скорость материальной точки.

Ускорение материальной точки

$$a = \upsilon' = x'' = -\omega_0^2 A\sin\omega_0 t$$

Из тригонометрических формул приведения:

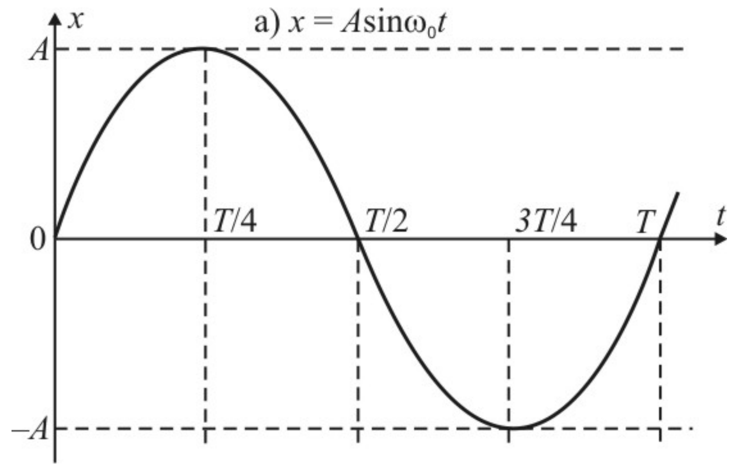
$$a = -\omega_0^2 A\sin\omega_0 t = \omega_0^2 A\sin(\omega_0 t + \pi).$$

$$a_{\max} = -\omega_0^2 A = \frac{4\pi^2}{T^2}A$$

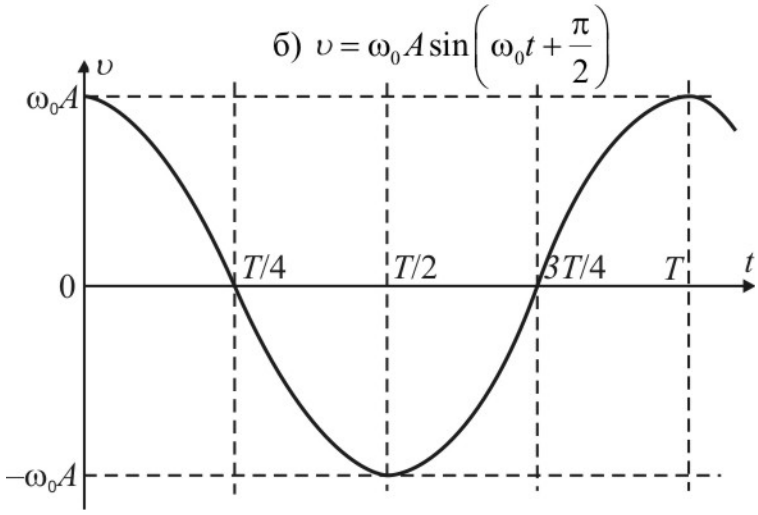
или $a_{\max} = -\omega_0 \upsilon_{\max}$

максимальное ускорение материальной точки.

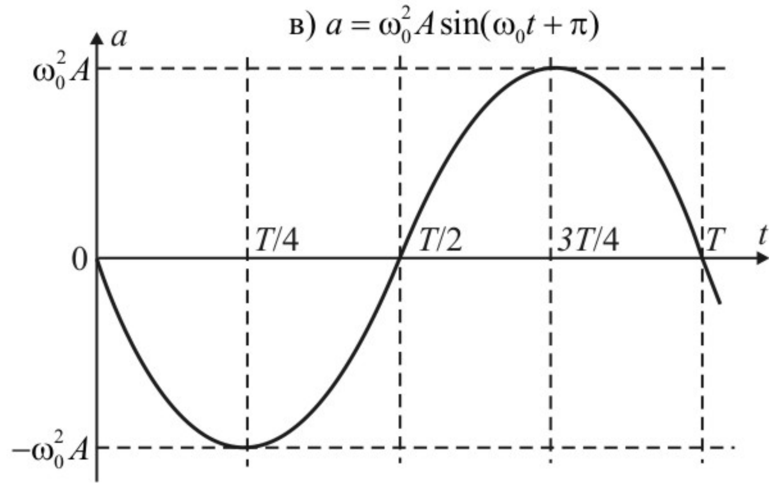
Графики зависимостей:
а) смещения x материальной точки от времени t при гармонических колебаниях



б) скорости υ материальной точки от времени t при гармонических колебаниях



в) ускорения a материальной точки от времени t при гармонических колебаниях



Зависимость смещения x колеблющейся точки от времени t

$$x = A\cos\omega_0 t = A\cos\frac{2\pi}{T}t$$

используется в случаях, когда в начальный момент времени (t = 0) колебательная система максимально смещена от положения равновесия.

Скорость колеблющейся точки

$$\upsilon = x' = -\omega_0 A \sin\omega_0 t$$

Из тригонометрических формул приведения:

$$\upsilon = \omega_0 A \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\upsilon_{\max} = -\omega_0 A = -\frac{2\pi}{T}A$$

максимальная скорость точки.

Ускорение колеблющейся точки

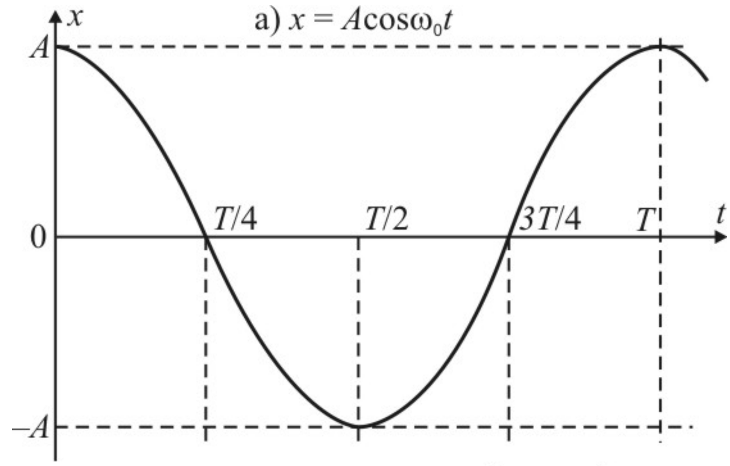
$$a = \upsilon' = x'' = -\omega_0^2 A \cos\omega_0 t$$

Из тригонометрических формул приведения:

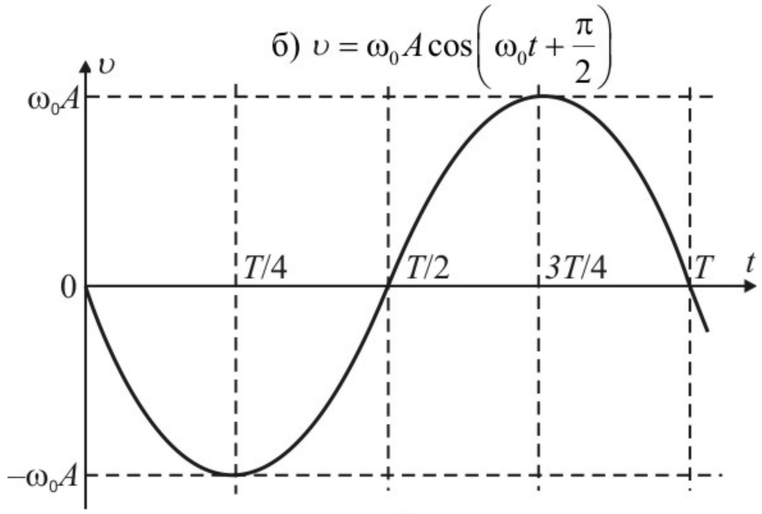
$$a = \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \pi).$$

$$a_{\max} = -\omega_0^2 A = -\frac{4\pi^2}{T^2}A$$

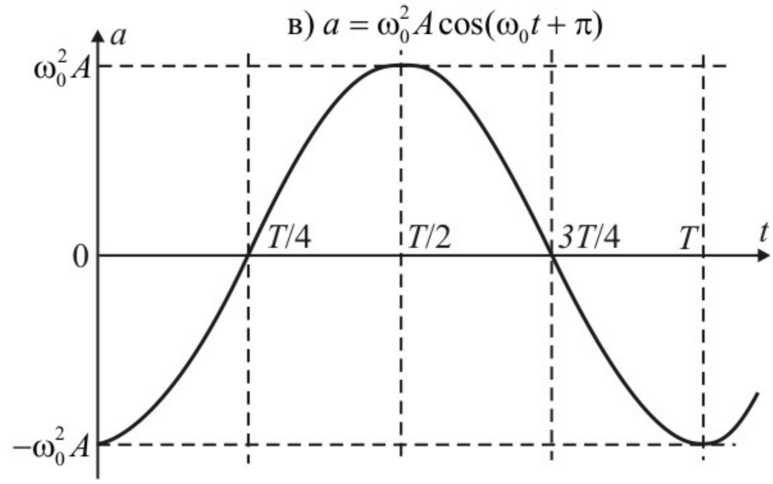
Графики зависимостей:
а) смещения x материальной точки от времени t при гармонических колебаниях



б) скорости υ материальной точки от времени t при гармонических колебаниях



в) ускорения a материальной точки от времени t при гармонических колебаниях

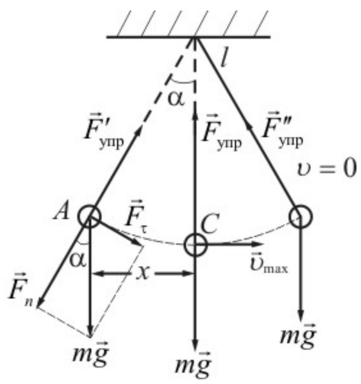


$$a_{\max} = \omega_0 \upsilon_{\max} = \omega_0^2 A$$
$$a_{\max} = 2\pi\nu\upsilon_{\max} = 4\pi^2\nu^2 A$$
$$a_{\max} = \frac{2\pi}{T}\upsilon_{\max} = \frac{4\pi^2}{T^2} A$$

Связь амплитуды, максимальной скорости и максимального ускорения при гармонических колебаниях.

Примечание

Если тело (материальная точка) совершает гармонические колебания, то и скорость и ускорение также изменяются по гармоническому закону.

	При максимальном смещении тела от положения равновесия его скорость равна нулю, а ускорение максимально и направлено к положению равновесия. При прохождении телом положения равновесия его скорость максимальна, а ускорение равно нулю. Таким образом, фаза скорости опережает фазу смещения (или координаты) на $\pi/2$, а фаза ускорения – на π.
Гармоническое колебание (динамическое определение)	периодическое колебательное движение, совершающееся с ускорением, пропорциональным смещению тела x и противоположно ему направленным.
Динамическое уравнение гармонического колебания $a = -\omega_0^2 x$ или $a + \omega_0^2 x = 0$	решением этого уравнения является выражение $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ или $x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$. Гармонический осциллятор представляет собой систему, совершающую колебания, описываемые уравнением $a + \omega_0^2 x = 0$.
Математический маятник  	идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m, подвешенной на нерастяжимой невесомой нити длиной l, и совершающая колебания под действием силы тяжести. Колебания маятника иллюстрирует рисунок. При отклонении нити от вертикали на малый угол α (точка A) на тело массой m действуют силы тяжести $m\vec{g}$ и упругости нити $\vec{F}'_{\text{упр}}$. Силу тяжести $m\vec{g}$ разложим на две составляющие: тангенциальную $\vec{F}_\tau$, направленную по касательной к траектории перпендикулярно нити, и нормальную $\vec{F}_n$, направленную вдоль нити. Результирующая силы упругости $\vec{F}'_{\text{упр}}$ и составляющей силы тяжести $\vec{F}_n$ перперндикулярна скорости маятника в этот момент времени и сообщает ему центростремительное (нормальное) ускорение $\vec{a}'_n$. Действие этих сил приводит к изменению направления скорости. Траектория движения маятника – дуга окружности радиусом l. Тангенциальная составляющая $\vec{F}_\tau$ силы тяжести создает тангенциальное ускорение $\vec{a}'_\tau$, приводящее к изменению скорости по модулю. Скорость оказывается

всегда направленной к положению равновесия и приводит к появлению колебаний маятника.

$$F_\tau = -mg\sin\alpha.$$

Минус в уравнении отражает то, что при отклонении маятника на угол α от вертикали (положения равновесия маятника) тангенциальная составляющая силы тяжести $\vec{F}_\tau$ направлена к положению равновесия.

Согласно второму закону Ньютона

$$ma_\tau = F_\tau$$

или

$$ma_\tau = -mg\sin\alpha \Rightarrow a_\tau = -g\sin\alpha.$$

Тогда $a_\tau = -\dfrac{g}{l}x.$

Период колебания математического маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

(формула Гюйгенса)

$$x(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \varphi_0\right)$$

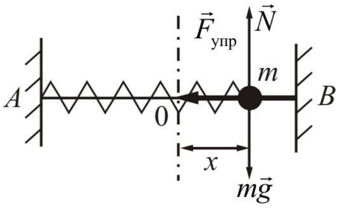
Обозначив $\dfrac{g}{l} = \omega_0^2,$ получим $a_\tau = -\omega_0^2 x$ – динамическое уравнение гармонических колебаний.

Движение математического маятника происходит по гармоническому закону.

смещение математического маятника от положения равновесия в любой момент времени.

Период колебаний математического маятника не зависит от его массы и амплитуды колебаний, а зависит от длины нити маятника и ускорения свободного падения.

Пружинный маятник



тело массой m, соединенное с абсолютно упругой пружиной жесткостью k и совершающее гармонические колебания в горизонтальной или вертикальной плоскостях под действием силы упругости.

а) по гладкому горизонтальному стержню AB скользит без трения, совершая свободные колебания, шарик массой m, прикрепленный к упругой пружине жесткостью k.

В момент времени, когда смещение шарика из положения равновесия составило x, на шарик действуют три силы. Сила тяжести $m\vec{g}$ уравновешивается силой реакции $\vec{N}$. Результирующей является сила упругости $\vec{F}_{упр}$, направленная в сторону, противоположную смещению x, и равная согласно закону Гука $F_{упр} = -kx$. С другой стороны, согласно второму закону Ньютона $F_{упр} = ma$. Тогда $-kx = ma$ или $a + \dfrac{k}{m}x = 0,$ т. е. получено динамическое уравнение гармонического колебания.

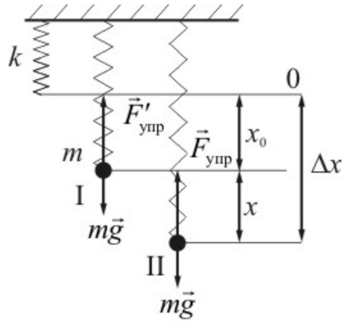
Период колебаний пружинного маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Следовательно, пружинный маятник совершает гармонические колебания, собственная циклическая частота которых $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

$$x(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right)$$

смещение пружинного маятника от положения равновесия в любой момент времени t.



б) шарик массой m подвешен на вертикальной упругой пружине жесткостью k.

В положении равновесия (состояние I) силы тяжести ($m\vec{g}$) и упругости ($\vec{F}'_{\text{упр}}$) уравновешивают друг друга.

Используя закон Гука, можно записать

$$mg - kx_0 = 0 \Rightarrow mg = kx_0. \quad (1)$$

Выведя маятник из положения равновесия (состояние II), растянув пружину на некоторое расстояние x, воспользовавшись вторым законом Ньютона, запишем:

$$mg - k\Delta x = ma, \quad (2)$$

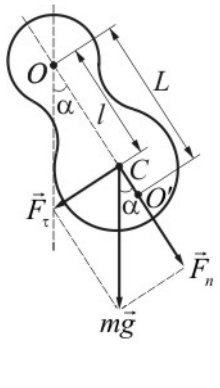
$\Delta x = x_0 + x$ – общее растяжение пружины.

Подставим в (2) выражение (1), запишем: $kx_0 - k(x_0 + x) = ma$ или $-kx = ma \Rightarrow$ получаем динамическое уравнение гармонических колебаний $a = -\dfrac{k}{m}x$.

$$x(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right)$$

Смещение пружинного маятника, колеблющегося в вертикальной плоскости в любой момент времени t (случаи *а* и *б* идентичны).

Физический маятник



твердое тело, совершающее колебания относительно неподвижной горизонтальной оси (точка О на рисунке) подвеса, не проходящей через центр масс (точка C) тела, под действием силы тяжести.

Разложив силу тяжести $m\vec{g}$ на две составляющие – тангенциальную $\vec{F}_\tau$ и нормальную $\vec{F}_n$, видим, что при отклонении маятника от положения равновесия на малый угол α ($\sin\alpha \approx \alpha$) возникает возвращающая сила $\vec{F}_\tau$, момент которой

$$\mathrm{M} = F_\tau l = -mgl\sin\alpha \approx \approx -mgl\alpha,$$

где l – расстояние от точки подвеса до центра масс маятника (знак «минус» свидетельствует о том, что направления возвращающей силы и угла отклонения маятника всегда противоположны).

С другой стороны, согласно уравнению динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси момент

$$\mathrm{M} = J\varepsilon,$$

где J – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса O, ε – угловое ускорение вращающегося тела, равное второй производной угла α: $\varepsilon = \alpha''$. Тогда

$$-mgl\alpha = J\alpha'' \Rightarrow \alpha'' + \frac{mgl}{J}\alpha = 0$$

или

$$\alpha'' + \omega_0^2\alpha = 0,$$

т. е. имеем уравнение гармонического колебания.

Период колебаний физического маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

(для малого углового смещения)

$$L = \frac{J}{ml} = \frac{J_C + ml^2}{ml} = \frac{J_C}{ml} + l > l$$

Циклическая частота колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}} = \sqrt{\frac{g}{L}},$$

где $L = \dfrac{J}{ml}$ – приведенная длина физического маятника.

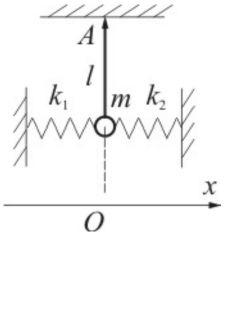
Примечание. Точка O' на продолжении прямой OC, отстоящая от точки O подвеса маятника на расстоянии приведенной длины L, называется центром качаний физического маятника.

Для нахождения момента инерции твердого тела J используется теорема Штейнера: момент инерции тела относительно любой оси вращения равен сумме момента инерции J_C относительно параллельной оси, проходящей через центр масс C тела, и произведения массы m тела на квадрат расстояния между осями:

$$J = J_C + ml^2.$$

Точка подвеса O и центр качания O' физического маятника взаимозаменяемы: при переносе точки подвеса в центр качания прежняя точка подвеса становится новым центром качания и период колебаний физического маятника не изменяется.

Комбинированный маятник



колебательная система, представляющая собой шарик массой m, одновременно соединенный со стержнем длиной l и одной или двумя абсолютно упругими пружинами, жесткость которых k_1 и k_2. Легкий стержень подвешен в точке A и может поворачиваться в вертикальной плоскости.

Общая жесткость этих пружин $k = k_1 + k_2$.

При малых отклонениях стержня на маятник действует результирующая сила, возвращающая его в положение равновесия $F = F_{мат.м} + F_{пр.м}$, где $F_{мат.м}$ – возвращающая сила, действующая в случае математического маятника; $F_{пр.м}$ – аналогично для пружинного маятника.

$$F = -mg\frac{x}{l} - (k_1 + k_2)x$$

(см. математический и пружинный маятники).

Эта сила сообщает шарику ускорение

$$a = -\left(\frac{g}{l} + \frac{k_1 + k_2}{m}\right)x.$$

При сравнении этого выражения с динамическим уравнением гармонических колебаний имеем

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{k_1 + k_2}{m}$$

или

$$\omega^2 = \omega^2_{\text{мат.м}} + \omega^2_{\text{пр.м}}$$

– это соотношение является общим для колебательных процессов: квадрат частоты свободных колебаний, происходящих при одновременном действии нескольких независимых сил, равен сумме квадратов частот свободных колебаний, которые происходили бы при действии каждой из этих сил в отдельности.

Колебания математического маятника в неинерциальной системе отсчета

шарик массой m с длиной нити l совершает колебания в системе отстчета, движущейся относительно неподвижной системы с постоянным ускорением $\vec{a}$.

При этом появляется дополнительная сила, приложенная к шарику, называемая силой инерции $\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}$.

Таким образом, к постоянной силе тяжести $\vec{F}_{\text{т}}$ добавляется постоянная сила инерции. Ее включение соответствует замене поля тяготения напряженностью $\vec{g} = \dfrac{\vec{F}_{\text{т}}}{m}$ полем тяготения напряженностью $\vec{g}_{\text{эфф}} = \dfrac{\vec{F}_{\text{т}} + \vec{F}_{\text{ин}}}{m}$.

$$\vec{g}_{\text{эфф}} = \vec{g} - \vec{a}$$

Период колебаний математического маятника в неинерциальной системе отсчета

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{|\vec{g} - \vec{a}|}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + a}}$$

Период колебаний маятника, подвешенного к потолку лифта, движущегося с ускорением $\vec{a}$, направленным вверх.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g - a}}$$

Период колебаний маятника, подвешенного к потолку лифта, движущегося с ускорением $\vec{a}$, направленным вниз.

Примечание:

– свободные колебания математического маятника в условиях невесомости не происходят;

– свободные колебания пружинного маятника в условиях невесомости происходят.

Энергия колебательной системы

Гармоническое колебание происходит по закону $x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$.

Обозначим фазу в любой момент времени $\omega_0 t + \varphi_0 = \varphi$

Рассматриваются классические гармонические осцилляторы – маятники (пружинные и математические). Силы, действующие в этих идеализированных колебательных системах, – консервативные: силы упругости и тяжести. Следовательно, в этих системах выполняется закон сохранения механической энергии.

Потенциальная энергия маятника в любой момент времени

$$E_п = \frac{1}{2}kx^2(t) = \frac{1}{2}kA^2\sin^2\varphi. \tag{1}$$

Кинетическая энергия маятника в любой момент времени

$$E_к = \frac{1}{2}m\upsilon^2(t) = \frac{1}{2}m\upsilon_m^2\cos^2\varphi. \tag{2}$$

Из тригонометрических преобразований известно

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)\ (3);\quad k = \omega_0^2 m\ (5);$$

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)\ (4);\quad \upsilon_{\max} = \omega_0 A\ (6).$$

Полная энергия $E = E_п + E_к$:

$$E = \frac{1}{4}kA^2(1-\cos 2\varphi) + \frac{1}{4}m\upsilon_m^2(1+\cos 2\varphi)$$

или с учетом (1)–(6):

$$E = \frac{1}{4}m\upsilon_0^2 A_m^2(1-\cos 2\varphi) + \frac{1}{4}m\upsilon_0^2 A_m^2(1+\cos 2\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_m^2 = \text{const}.$$

Полная механическая энергия классической колебательной системы (гармонического осциллятора) равна сумме потенциальной и кинетической энергий и остается постоянной в процессе колебаний, при этом происходит превращение потенциальной энергии в кинетическую и наоборот.

$$E = E_п + E_к = \frac{kx^2(t)}{2} + \frac{m\upsilon^2(t)}{2} = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\upsilon_m^2}{2} = \text{const}. \tag{7}$$

Из выражения (7) закона сохранения механической энергии при гармонических колебаниях получается соотношение

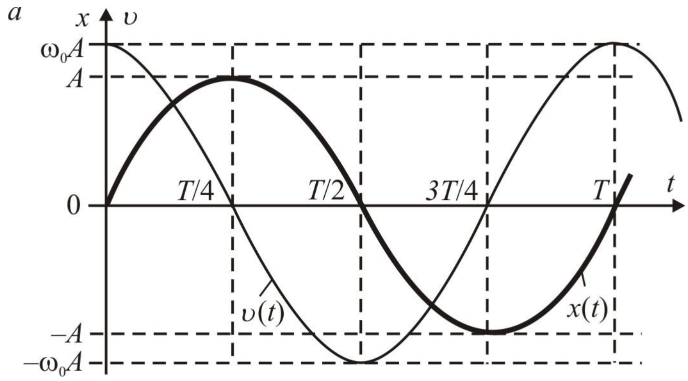
$$\upsilon = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}. \tag{8}$$

Если учесть, что $\upsilon_{max} = \omega_0 A$ или $\upsilon_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}}A$, то (8) примет вид

$$\upsilon = \pm\upsilon_{max}\sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}. \qquad (9)$$

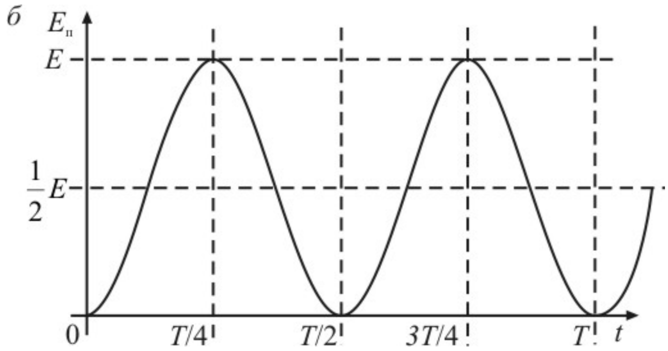
Из (9) видно, что при $x = 0$ скорость колебательной системы максимальна, а при $x = A$ – равна нулю.

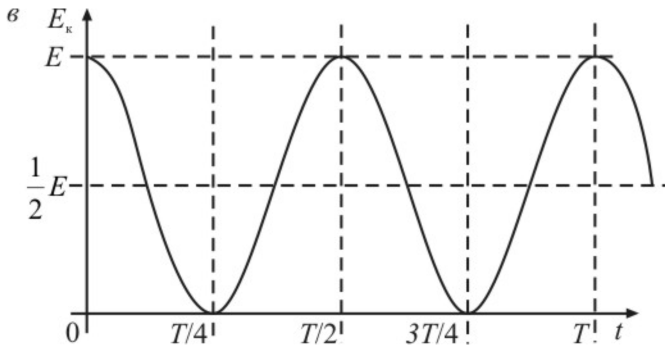
На рисунке *а* приведены графики смещения $x = A\sin\omega_0 t$ и скорости $\upsilon = \omega_0 A\cos\omega_0 t$ колеблющейся материальной точки, на рисунках *б* и *в* для сравнения показаны графики зависимостей потенциальной и кинетической энергий.



Потенциальная и кинетическая энергии периодически изменяются по гармоническому закону с циклической частотой $2\omega_0$, т. е. с удвоенной по сравнению с циклической частотой изменения $x(t)$ и $\upsilon(t)$.

Колебания потенциальной и кинетической энергий происходят в противофазе



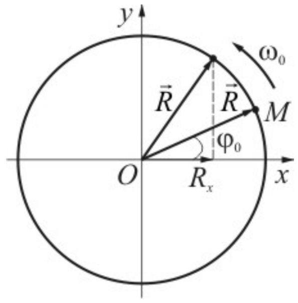


Связь гармонических колебаний с равномерным движением по окружности

Рассмотрим движение материальной точки M по окружности радиусом R с угловой скоростью ω_0.

Положение точки вдоль оси Ox определяется проекцией радиуса-вектора на эту ось:

$$R_x(t) = R\cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$



Эта формула описывает колебательное движение проекции точки M вдоль оси Ox около точки O, которую определим как положение равновесия.

Период изменения проекции равен периоду обращения точки M:

$$T = 2\pi/\omega_0,$$

где ω_0 – круговая (циклическая) частота колебаний.

Величина $(\omega_0 t + \varphi_0)$ – фаза колебания – величина, определяющая состояние колебательной системы в любой момент времени.

φ_0 – начальная фаза колебаний, т. е. фаза в момент времени $t = 0$.

Равномерное движение по окружности можно рассматривать как два гармонических колебательных движения, совершаемых одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях

Максимальное значение проекции $R_{x_{\max}}$ или максимальное отклонение точки M вдоль оси Ox от положения равновесия, амплитуда колебаний $R_{x_{\max}} = R = A$.

Проекция кругового движения на ось Oy также совершает гармоническое колебание.

Сложение колебаний

определение закона результирующих колебаний системы, участвующей в нескольких колебательных процессах.

Рассмотрим колебания одного направления.

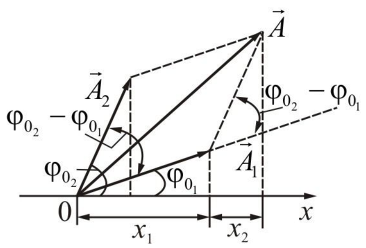
а) колебания с одинаковой циклической частотой одного направления

$$\omega_{0_1} = \omega_{0_2} = \omega_0$$

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_{0_1}),$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_{0_2}),$$

где A_1 и A_2 – амплитуды колебаний, φ_{0_1} и φ_{0_2} – их начальные фазы. Векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ (см. выше) вращаются с одинаковой угловой скоростью ω_0, равной циклической частоте колебаний. Разность фаз $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ с течением времени не изменяется и равна $(\varphi_{0_2} - \varphi_{0_1})$.



$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \times \cos(\varphi_{0_2} - \varphi_{0_1}) \quad (1)$$

Если складываемые колебания находятся в одной фазе, т. е. синфазны ($\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2k\pi$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$), то $A = A_1 + A_2$.

Если складываемые колебания находятся в противофазе ($\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2k + 1)\pi$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$) $A = A_1 - A_2$.

Вывод: сумма гармонических колебаний одного направления с одинаковой частотой является гармоническим колебанием с той же частотой.

б) колебания с разными циклическими частотами и разными амплитудами

Пусть $\omega_2 > \omega_1$, $A_1 \neq A_2$, допустим, что начальные фазы сладываемых колебаний одинаковы ($\varphi_{0_2} = \varphi_{0_1} = \varphi_0$).

$$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_0),$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_0).$$

Выражение (1) примет вид

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + +2A_1A_2(\omega_2 - \omega_1)t \qquad (2)$$

амплитуда результирующего колебания изменяется со временем с определенным периодом.

в) колебания с близкими циклическими частотами ω_1 и ω_2

Пусть $(\omega_1 - \omega_2) << \omega_1\omega_2$, для простоты амплитуды складываемых колебаний одинаковы, а начальные фазы равны нулю.

$$x_1 = A\cos\omega_1 t,$$

$$x_2 = A\cos\omega_2 t.$$

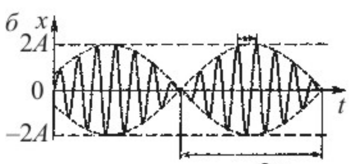
Результирующее колебание (после тригонометрических преобразований)

$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right).$$

Так как $\omega_1 \approx \omega_2$, то $(\omega_1 - \omega_2)$ – малая величина по сравнению с величиной $(\omega_1 + \omega_2)$, тогда результирующее колебание можно рассматривать как гармоническое с циклической частотой $\omega = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ и медленно меняющейся амплитудой $A_б = \left|2A\cos\left(\dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)\right|$.

$T = \dfrac{2\pi}{(\omega_1 + \omega_2)/2}$

На рисунке *а* представлены графики зависимостей смещений двух гармонических колебаний с близкими частотами.



$T_б = \dfrac{2\pi}{(\omega_1 - \omega_2)}$

На рисунке *б* сплошной кривой представлен график результирующего колебания, пунктирной – график медленно изменяющейся амплиуды.

Данные колебания называются биениями, частоту $(\omega_1 - \omega_2)$ называют циклической частотой биений.

Период биений

$$T_б = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}.$$

Свободные затухающие колебания

амплитуда которых с течением времени уменьшается из-за потерь энергии в реальной колебательной системе. Одной из причин диссипации (потерь) механической энергии в реальной колебательной системе является сила трения.

Рассмотрим малые колебания пружинного маятника массой m и жесткостью пружины k. Колебания совершаются под действием силы упругости $F_{упр} = -kx$. В реальной колебательной системе действует сила сопротивления (трения), пропорциональная скорости, $F_{тр} = -r\upsilon = rx''$, где r – коэффициент сопротивления, знак «минус» указывает на то, что направления сил трения и скорости противоположны.

Динамическое уравнение затухающих колебаний

$$a + 2\delta + \omega_0 x = 0$$

или

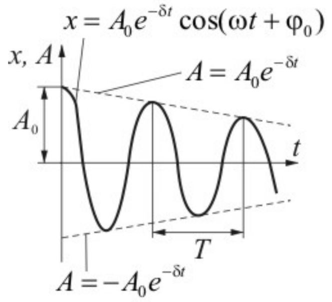
$$x'' + 2\delta x' + \omega_0 x = 0.$$

Решением этого уравнения является выражение

$$x = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi_0)$$

или

$$x = A_0 e^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi_0)$$



Согласно второму закону Ньютона

$$ma = -kx - r\upsilon \text{ или } a + \frac{r}{m}\upsilon + \frac{k}{m}x = 0,$$

где $\delta = \dfrac{r}{2m}$ – коэффициент затухания (δ = const); $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ – циклическая частота свободных незатухающих колебаний маятника, называемая собственной частотой колебательной системы, в отсутствие потерь энергии; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{r^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – циклическая частота затухающих колебаний.

$$A = A_0 e^{-\frac{r}{2m}t} = A_0 e^{-\delta t}$$

закон изменения амплитуды затухающих колебаний, A_0 – начальная амплитуда.

Затухающее колебание

не является периодическим и гармоническим.

Период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

в случае слабого затухания $\left(\delta = \dfrac{r}{2m} \ll \omega_0\right)$ понимают промежуток времени между двумя последовательными максимумами (или минимумами).

Вынужденные колебания — незатухающие колебания под действием внешней периодически изменяющейся силы

$$F = F_{max}\cos\omega t$$

или

$$F = F_{max}\sin\omega t,$$

где F_{max} и ω – амплитуда и частота вынуждающей силы.

Закон колебательного движения в реальной колебательной системе под действием периодически изменяющейся силы

$$-kx - r\upsilon + F_{max}\cos\omega t = ma \Rightarrow$$

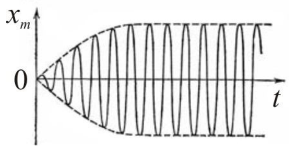
$$a + \frac{r}{m}\upsilon + \frac{k}{m}x = \frac{F_{max}}{m}\cos\omega t$$

или

$$x'' + 2\delta x' + \omega_0^2 x = \frac{F_{max}}{m}\cos\omega t,$$

где $\delta = \frac{r}{2m}$ – коэффициент затухания; ω_0 – собственная частота колебательной системы; ω – частота вынуждающей силы.

Амплитуда вынужденных колебаний



$$A = \frac{F_{max}/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \quad (1).$$

Процесс установления вынужденных колебаний графически представлен на рисунке. В установившемся режиме вынужденные колебания являются гармоническими и происходят с частотой ω внешней гармонической силы. Амплитуда зависит от частоты ω и свойств (характеристик) колебательной системы.

Резонансная частота

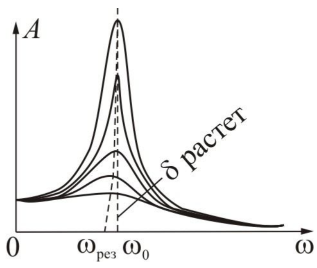
$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

Из выражения (1) следует, что амплитуда смещения в случае установившихся колебаний при некоторой частоте внешней силы, называемой резонансной частотой, достигает максимального значения. Исследуя значение A выражения (1) на экстремум, определим резонансную частоту.

Механический резонанс — явление резкого увеличения амплитуды вынужденных колебаний при совпадении частоты колебаний вынуждающей силы ω с собственной частотой колебательной системы ω_0.

Амплитуда вынужденных колебаний в условиях механического резонанса

$$A_{max} = \frac{F_{max}/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$



На рисунке приведено семейство резонансных кривых, т. е. зависимостей амплитуды вынужденных колебаний A от частоты вынуждающей силы ω при различных значениях коэффициента затухания δ. Видно, что с ростом коэффициента затухания, т. е. увеличением трения в системе, максимумы A лежат ниже и левее.

В системах с малым трением амплитуда вынужденных колебаний при резонансе может быть очень большой даже при малой вынуждающей силе

$$\delta = \frac{r}{2m} \Rightarrow 0,$$

тогда $A_{\max} = \dfrac{F_{\max}}{r\omega_0}$.

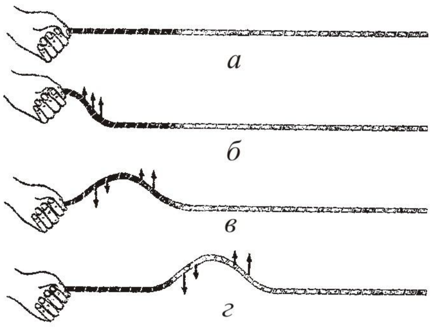
Возникновение резонанса следует учитывать при конструировании машин, приборов и механизмов, строительстве сооружений, так как при резонансе возникают вибрации (колебания), приводящие к разрушениям последних.

В радиотехнике, акустике, электротехнике явление резонанса позволяет обнаружить очень слабые колебания (сигналы).

Автоколебания — незатухающие колебания, поддерживаемые в диссипативной системе за счет источника энергии, содержащегося в самой системе, и устройства, регулирующего поступление к колеблющейся части системы порций энергии, компенсирующей потери, вызванные трением.

Автоколебательная система — система, согласовывающая поступление энергии определенными порциями в нужный момент. Форма, амплитуда и частота колебаний (т. е. свойства) задаются самой системой.

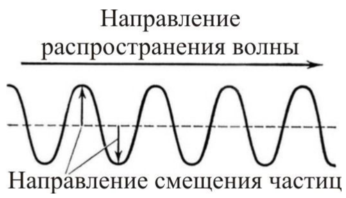
Примеры автоколебательных систем: маятниковые часы с гирькой, органные трубы, двигатели внутреннего сгорания, паровые турбины.

Волновой процесс (волна)	процесс распространения колебаний (возмущений) в пространстве (среде) с течением времени. При распространении волны частицы среды не движутся с волной, а колеблются около положения равновесия.
Основное свойство всех волн, независимо от их природы, – перенос энергии без переноса вещества.	Вместе с волной от частицы к частице передаются состояние колебательного движения и его энергия. Образование волны и ее распространение наглядно демонстрируется на примере возбуждения в шнуре уединенного волнового импульса (возмущения) быстрым движением руки вверх-вниз. Распространение этого возмущения обусловлено силами взаимодействия между соседними участками шнура.  Аналогичным образом распространяются волны в других средах. Основные типы волн: – волны на поверхности жидкости; – упругие волны; – электромагнитные волны.
Упругие (или механические) волны	механические колебания (возмущения), распространяющиеся в упругой среде.
Бегущая волна	волна, переносящая в пространстве энергию.
По характеру распространения различают:	
а) линейные (или одномерные) волны	волны, распростроняющиеся вдоль прямой линии (например, поперечные волны в натянутой струне или продольные волны в трубе, заполненной газом);
б) поверхностные (или двумерные) волны	волны, распространяющиеся на границе раздела двух сред (например, волны на поверхности воды);
в) пространственные (или трехмерные) волны	волны, распространяющиеся во всех направлениях (например, волны, создаваемые землетрясением в толще земли).

По ориентации возмущений частиц среды относительно направления распространения различают:

продольные волны — волны, частицы среды в которых колеблются в направлении распространения волны.
Продольные волны возбуждаются в твердых, жидких и газообразных средах, так как эти среды обладают упругостью к деформации сжатия (растяжения);

поперечные волны — волны, частицы среды в которых колеблются перпендикулярно направлению распространения волны.
Поперечные волны возбуждаются только в твердых телах, так как твердые тела обладают упругостью к деформации не только сжатия (растяжения), но и сдвига.

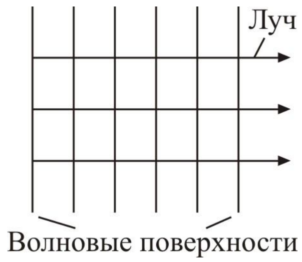


Волновой фронт — геометрическое место точек в пространстве, до которых доходят колебания к моменту времени t.

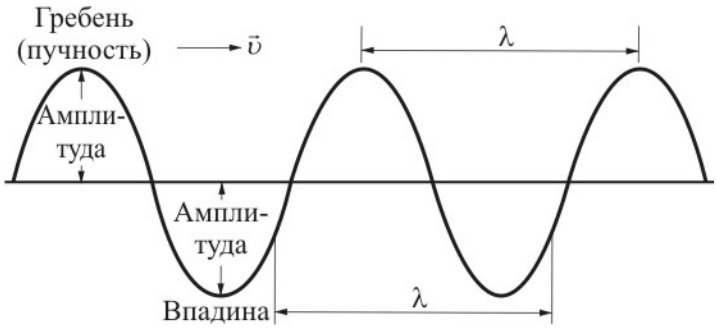
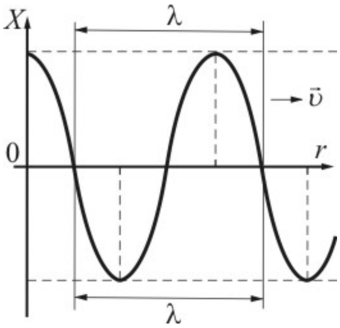
Волновая поверхность — геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе.
Волновой фронт в каждый момент времени – один; волновых поверхностей – бесчисленное множество.
Форма волнового фронта зависит от конфигурации источника колебаний и свойств среды (однородной – неоднородной; изотропной – анизотропной; см. часть II).

По форме волновых поверхностей различают:

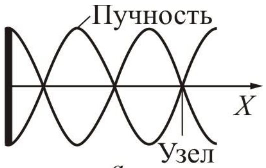
плоские волны — волны, волновые поверхности которых предствляют собой совокупность плоскостей, параллельных друг другу, сохраняющихся по мере распространения в среде.
В однородной изотропной среде волновые поверхности плоской волны перендикулярны направлению распространения волны, т. е. направлению переноса энергии, называемому лучом (см. рис.);



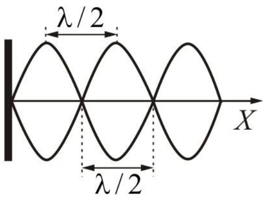
сферические волны — волны, волновые поверхности которых представляют собой совокупность концентрических сфер.
В однородной изотропной среде волновая поверхность от точечного источника колебаний – сфера (см. рис.)
По мере удаления от точечного источника кривизна поверхности сферической волны уменьшается и создаваемую волну можно считать плоской.

Гармоническая упругая волна	волна, в которой колебания среды происходят по гармоническому закону.
Основные параметры, используемые для характеристики периодической синусоидальной (поперечной) волны:	
пучности	высшие точки волнового движения;
впадины	низшие точки волнового движения;
амплитуда волны	высота гребня или глубина впадины, измеренная относительно нулевого уровня;
удвоенная амплитуда	полный размах колебаний от пучности до впадины;
длина волны, λ	расстояние между двумя соседними пучностями (или соседними впадинами);
скорость волны, υ	скорость перемещения в пространстве какой-либо фазы волны, в частности, гребня или впадины в поперечной волне, или сжатия или разрежения в продольной волне.
Скорость распространения упругих волн зависит от плотности, упругости и температуры среды	Скорость распространения продольных упругих волн $$\upsilon = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$ где E – модуль упругости среды (модуль Юнга, см. ч. 2), ρ – плотность среды.
Интенсивность волны (плотность потока энергии) $$I = \frac{W}{st}$$ $$[I] = 1\,\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2\text{с}} = 1\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$$	скалярная физическая величина, определяемая средней по времени энергией, переносимой волной в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения.
	На рисунке представлена гармоническая поперечная волна, распространяющаяся со скоростью υ вдоль некоторого направления r, т. е. приведена зависимость смещения X частиц среды, участвующих в волновом процессе, от расстояния r этих частиц от источника колебаний 0 для какого-то фиксированного момента времени t. (Следует понимать, что рисунок задает мгновенную картину распределения, возмущений вдоль направления распространения и не должно восприниматься как зримое изображение волны.)

Длина волны $$\lambda = \upsilon T = \frac{\upsilon}{\nu}$$ $$[\lambda] = 1\ \text{м}$$	кратчайшее расстояние между частицами волны, колеблющимися в одинаковой фазе, или расстояние, на которое распространяется определенная фаза колебания за период.
Уравнение волны	уравнение, выражающее зависимость смещения колеблющейся частицы, участвующей в волновом процессе, от координаты ее равновесного положения и времени).
Уравнение гармонической плоской волны $$X(r,t) = $$ $$= A\cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{\upsilon}\right) + \varphi_0\right]$$	волна распространяется вдоль положительного направления *r* в среде, не поглощающей энергии. X – смещение колеблющейся точки среды от положения равновесия, A – амплитуда колебаний, называемая амплитудой волны, ω – циклическая частота; φ_0 – начальная фаза, определяемая выбором начала отсчета r и t; $\left[\omega\left(t - \frac{r}{\upsilon}\right) + \varphi_0\right]$ – фаза плоской волны; $\frac{r}{\upsilon}$ – время запаздывания начала колебания в точке среды, расположенной на расстоянии r от источника волн, по сравнению с самим источником волн.
Рассмотрим две произвольные точки *1* и *2* волны, расположенные от источника волн на расстояниях r_1 и r_2 соответственно.	фаза колебаний для первой точки – $\varphi_1 = \omega\left(t - \frac{r_1}{\upsilon}\right)$; – фаза колебаний для второй точки – $\varphi_2 = \omega\left(t - \frac{r_2}{\upsilon}\right)$
Разность фаз колебаний двух точек, отстоящих от источника колебаний на расстояниях r_1 и r_2	$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \omega\frac{r_2 - r_1}{\upsilon}$$ или $$\Delta\varphi = 2\pi\nu\frac{r_2 - r_1}{\upsilon} = 2\pi\frac{\Delta r}{T\upsilon} = 2\pi\frac{\Delta r}{\lambda}$$ $\Delta r = r_2 - r_1$ – расстояние между колеблющимися точками в волне; ν – частота колебаний; T – период колебаний; $\lambda = \upsilon T$ – длина волны. Если расстояние между точками $\Delta r = \lambda$, то $\Delta\varphi = 2\pi$.
Стоячие волны	волны, образующиеся при наложении двух бегущих встречных гармонических волн с одинаковыми амплитудами и частотами. Получить стоячую волну можно отражением бегущей волны от границы раздела сред, при этом на границе может получаться пучность (рис. *а*) или узел (рис. *б*).



а



б

Если бегущая волна отражается от менее плотной среды, то на границе не происходит изменения фазы и складываются колебания с одинаковыми фазами, получается пучность.

Если бегущая волна отражается от более плотной среды, то на границе волна меняет фазу на противоположную и уже складываются колебания с противоположными фазами, возникает узел.

Отличие стоячей волны от бегущей — Стоячая волна не переносит энергию, так как встречные бегущие волны одинаковой амплитуды переносят равную по величине энергию в противоположных направлениях. Энергия колебания между двумя узлами остается постоянной, совершается лишь превращение кинетической энергии в потенциальную и наоборот.

Акустика — учение о звуке.

Звуковые (или акустические) волны — упругие продольные волны с диапазоном частот от 16 до 20 000 Гц, распространяющиеся в упругих средах и воспринимаемые органами слуха человека (границы условны, так как для разных людей они различны).

Источник звука — любое тело, колеблющееся в упругой среде со звуковой частотой (в струнных инструментах источник звука – струна, соединенная с корпусом инструмента).

Интенсивность звука — физическая величина, являющаяся энергетической характеристикой звука, определяемая отношением энергии, переносимой звуковой волной за время t через поверхность площадью S, перпендикулярную направлению распространения волны, к произведению площади S и времени t. Энергия колебаний в волне пропорциональна квадрату амплитуды. Следовательно, интенсивность звука определяется амплитудой колебаний.

Музыкальный тон — звук, издаваемый гармонически колеблющимся телом. Музыкальные тоны отличаются на слух громкостью и высотой.

Громкость звука — субъективная характеристика, связанная с интенсивностью и зависящая от частоты.

На рисунках представлены зависимости порогов слышимости и болевого ощущения от частоты звука. Область, расположенная между этими кривыми, является областью слышимости.

Высота звука

субъективная характеристика, определяемая человеком на слух и зависящая от частоты. С ростом частоты высота звука увеличивается, с уменьшением частоты понижается.

Тембр звука

субъективная характеристика, характеризующая качество звука (его окраску). По тембру определяют источник звука: звучащий инструмент, по голосу узнают человека.

Скорость звука

$$\upsilon = \lambda \nu = \frac{\lambda}{T}$$

скорость распространения фазы колебания, т. е. областей сжатия или разрежения в волне, зависит от температуры и свойств среды.
При температуре 20 °С скорость звука
в воздухе 343 м/с; воде ~1440 м/с; стали ~5000 м/с.
Чем более упругая среда, тем больше скорость звука.

Скорость звука в газах

$$\upsilon = \sqrt{\gamma RT / M}$$

$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ – отношение теплоемкостей газа при постоянных давлении (P) и объеме (V);
R – молярная газовая постоянная;
T – температура;
M – молярная масса.

Скорость звука в изотропных твердых телах

$$\upsilon = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Реальный звук

наложение гармонических колебаний с большим набором частот, т. е. звук обладает акустическим спектром. В зависимости от спектров звуки делятся на музыкальные звуки (звуки музыкальных инструментов) и шумы (шум морского прибоя). В шуме присутствуют колебания всевозможных частот.

Инфразвуковые волны (инфразвук)

не воспринимаемые органами слуха человека волны с частотой $\nu < 16$ Гц, вызывающие тревожные ощущения. Инфразвук возникает в природе при опасных и катастрофических событиях: землетрясениях, цунами, ураганах.

Ультразвуковые волны (ультразвук)	не воспринимаемые органами слуха волны в диапазоне частот 20…10^5 кГц (волны с частотами 10^5…10^7 кГц – гиперзвук).
Ультразвуковые волны характеризуются двумя особенностями:	могут обладать большой интенсивностью, так как интенсивность пропорциональна частоте, а также способны формировать направленное излучение, подобно световому излучению.
Ультразвук может	- дробить различные материалы; - очищать поверхность твердых тел (металлов) от ржавчины и жировых пленок; - производить механическую обработку материалов (резание, шлифование, сверление, точечная сварка); - использоваться в дефектоскопии для обнаружения микротрещин, малейших внутренних дефектов в различных объектах; - в гидроакустике для обнаружения подводных препятствий; – в медицине для диагностики внутренних органов человека, хирургического лечения.

1.2. Примеры решения задач

Кинематика, динамика и энергия колебаний

1.2.1. Материальная точка совершает гармонические колебания вдоль некоторой прямой с амплитудой $A = 10$ см и периодом $T = 1{,}0$ с. В начальный момент времени точка находилась в положении равновесия.

Построить график зависимости смещения x точки из положения равновесия от времени. Определите:

а) частоту колебаний;

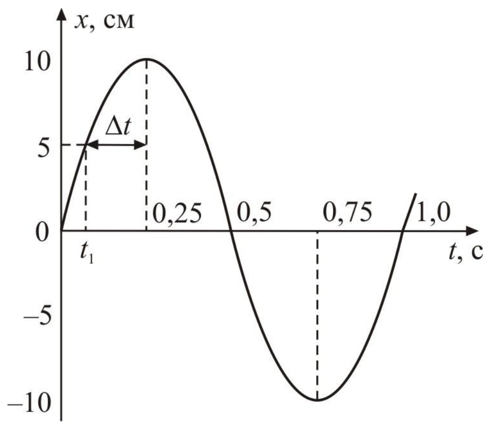
б) циклическую частоту колебаний;

в) время, в течение которого точка проходит из положения равновесия путь, равный половине амплитуды;

г) время, в течение которого точка проходит оставшуюся половину амплитуды.

Решение:

Согласно условию задачи $t = 0$, $x = 0$, – данное гармоническое колебание происходит по закону $x = A\sin\omega t = A\sin\frac{2\pi}{T}t$, где x – смещение точки из положения равновесия в любой момент времени t, A – максимальное смещение точки из положения равновесия (амплитуда), $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – циклическая частота, T – период колебаний точки.



а) Частота колебаний ν определяется числом N колебаний, совершаемых в единицу времени, т. е. $\nu = \frac{N}{t_0}$, а так как период колебаний $T = \frac{t_0}{N}$ (t_0 – время, за которое совершается N колебаний), то $\nu = \frac{1}{T} = 1$ Гц.

б) Циклическая частота колебаний определяет число колебаний, совершаемых системой за 2π с: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = 6{,}28$ рад/с.

Уравнение данного колебания будет иметь вид

$$x = 0{,}1\sin 6{,}28t \text{ (м)}. \qquad (1)$$

в) Смещение точки из положения равновесия $x_1 = A/2$ происходит за время t_1, которое определим из уравнения (1): $x_1 = \frac{A}{2} = A\sin\frac{2\pi}{T}t_1 \Rightarrow \sin\frac{2\pi}{T}t_1 = \frac{1}{2}$.

Тогда $\frac{2\pi}{T}t_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{12}$ или $t_1 = \frac{1}{12}$ с.

г) Оставшуюся половину амплитуды $\Delta x = A/2$ точка проходит за время $\Delta t = t_2 - t_1$, где $t_2 = \frac{T}{4}$ – время, за которое колеблющаяся точка проходит путь, равный амплитуде A, t_1 – время, за которое точка проходит половину амплитуды $A/2$ (найдено в пункте в).

$\Delta t = \frac{T}{4} - \frac{T}{12} = \frac{T}{6}$ или $\Delta t = \frac{1}{6}$ с.

Ответ: 1 Гц, 6,28 рад/с; $x = 0{,}1\sin 6{,}28t$; (1/12) с; (1/6) с.

1.2.2. Материальная точка совершает гармонические колебания с периодом $T = 2$ с. В начальный момент времени ($t = 0$) точка проходит положение равновесия ($x_0 = 0$) и ее скорость положительна и равна 12,56 см/с. Запишите уравнение колебаний точки $x = f(t)$.

Решение:

Уравнение гармонических колебаний

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{1}$$

где A – амплитуда, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ – циклическая частота, φ_0 – начальная фаза колебаний.

Если в начальный момент времени $t = 0$ смещение точки $x_0 = 0$, то начальная фаза φ_0 колебаний определяется из (1):

$x_0 = A\cos\varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ или $\varphi_0 = \frac{3}{2}\pi$, поскольку начальная фаза меньше периода функции косинуса $\varphi_0 < 2\pi$.

Скорость точки определяется первой производной смещения по времени:

$$\upsilon = x' = -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi_0). \tag{2}$$

Согласно условию задачи при $t = 0$ $\upsilon_0 = 12{,}56\cdot10^{-2}$ м/с $= -A\omega_0\sin\varphi_0$.

Отсюда видно, что при положительном значении скорости следует принять начальную фазу $\varphi_0 = \frac{3}{2}\pi$, тогда

$$\sin\frac{3}{2}\pi = -1 \text{ и } A\omega_0 = 12{,}56\cdot10^{-2} \text{ м/с}. \tag{3}$$

Циклическая частота $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$ (рад/с), следовательно из (3) амплитуда $A = \frac{12{,}56\cdot10^{-2}}{3{,}14} = 4\cdot10^{-2}$ (м).

Подставив значения ω_0, A и φ_0 в (1), запишем искомое уравнение колебаний:

$$x = 0,04\cos(\pi t + \frac{3}{2}\pi) \text{ (м)}.$$

Ответ: $0,04\cos(\pi t + \frac{3}{2}\pi)$ (м).

1.2.3. Материальная точка совершает гармонические колебания из положения равновесия. При смещении точки от положения равновесия на x_1 = 5,0 см ее скорость υ_1 = 13,0 см/с, при смещении на x_2 = 3,0 см ее скорость υ_2 = 18,0 см/с. Определите период T, амплитуду A колебаний и максимальную скорость $\upsilon_{\max}$ колеблющейся точки.

Решение:

Воспользуемся законом сохранения механической энергии при гармонических колебаниях:

$$\frac{m\upsilon_1^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} = \frac{m\upsilon_2^2}{2} + \frac{kx_2^2}{2} = \text{const}, \tag{1}$$

где $\frac{m\upsilon_1^2}{2}$ и $\frac{m\upsilon_2^2}{2}$ – кинетические энергии колеблющейся точки, $\frac{kx_1^2}{2}$ и $\frac{kx_2^2}{2}$ – ее потенциальные энергии, k – коэффициент пропорциональности квазиупругой силы, стремящейся вернуть тело в положение равновесия. Циклическая частота колебаний $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, искомый период $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Преобразуем выражение (1) к виду

$$\upsilon_1^2 + \omega_0^2 x_1^2 = \upsilon_2^2 + \omega_0^2 x_2^2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2}{x_2^2 - x_1^2}} = 3,1 \text{ рад/с}.$$

Тогда период $T = 2\pi\sqrt{\frac{x_2^2 - x_1^2}{\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2}} = 2,0$ (с).

Определим амплитуду колебаний, записав закон сохранения механической энергии в виде $\frac{m\upsilon_1^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$ ($\frac{kA^2}{2}$ – полная энергия системы). Преобразовав к виду $\upsilon_1^2 + \omega_0^2 x_1^2 = \omega_0^2 A^2$, определим амплитуду:

$$A = \sqrt{\frac{\upsilon_1^2 + \omega_0^2 x_1^2}{\omega_0^2}} = \sqrt{x_1^2 + \left(\frac{\upsilon_1}{\omega_0}\right)^2} = 6,5 \text{ (см)}.$$

Аналогично определим максимальную скорость колеблющейся точки: $\frac{m\upsilon_1^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} = \frac{m\upsilon_{\max}^2}{2}$ ($\frac{m\upsilon_{\max}^2}{2}$ – полная энергия системы).

$$\upsilon_1^2 + \omega_0^2 x_1^2 = \upsilon_{\max}^2 \Rightarrow \upsilon_{\max} = \sqrt{\upsilon_1^2 + (\omega_0 x_1)^2} = 20,2 \text{ (см/с)}.$$

Ответ: T = 2,0 с; A = 6,5 см; $\upsilon_{\max}$ = 20,2 см/с.

1.2.4. Максимальная скорость колеблющейся материальной точки $\upsilon_{max} = 2$ см/с, а ее максимальное ускорение $a_{max} = 1$ см/с^2. Определите циклическую частоту и амплитуду колебаний, а также скорость точки в моменты времени, когда ее смещение от положения равновесия составляет половину максимального.

Решение:

Пусть уравнение гармонических колебаний точки имеет вид

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1)$$

Взяв последовательно дважды производные (1) по времени, получим зависимости скорости υ и ускорения a колеблющейся точки от времени:

$$\upsilon = x' = \omega_0 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0); \quad (2)$$

$$a = x'' = -\omega_0^2 A\sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (3)$$

Из уравнений (2) и (3) максимальная скорость точки

$$\upsilon_{max} = \omega_0 A; \quad (4)$$

максимальное ускорение

$$a_{max} = \omega_0^2 A. \quad (5)$$

Из выражений (4) и (5) циклическая частота колебаний $\omega_0 = \dfrac{a_{max}}{\upsilon_{max}} = 4$ (см).

Для определения скорости точки в момент времени, соответствующий определенному значению положения x, воспользуемся уравнениями (1) и (2), приведя их к виду $\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \dfrac{x}{A}$, $\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \dfrac{\upsilon}{\omega_0 A}$. Возведем эти выражения в квадрат и сложим почленно:

$$\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon}{\omega_0 A}\right)^2 = 1.$$

Отсюда скорость точки $\upsilon = \pm\omega_0\sqrt{A^2 - x^2}$,

так как $x = A/2$, то $\upsilon = \pm\dfrac{\omega_0 A\sqrt{3}}{2} = \pm\dfrac{\upsilon_{max}\sqrt{3}}{2} = \pm 1{,}73$ (см/с).

Ответ: $\omega_0 = 0{,}5$ рад/с; $A = 4$ см; $\upsilon = 1{,}73$ см/с.

1.2.5. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону $x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$. В некоторый момент времени t_1 смещение точки $x_1 = 3$ см. В момент времени t_2, когда фаза увеличилась вдвое, смещение точки стало $x_2 = 5$ см. Определите амплитуду колебаний точки.

Решение:

Уравнения для смещения колеблющейся точки в первом и втором случаях будут иметь вид:

$$x_1 = A\sin(\omega_0 t_1 + \varphi_0), \quad (1)$$

$$x_2 = A\sin(\omega_0 t_2 + \varphi_0), \quad (2)$$

где A – амплитуда; ω_0 – циклическая частота колебаний; φ_0 – начальная фаза колебаний; $\omega_0 t_1 + \varphi_0 = \varphi_1$ – фаза колебаний в момент времени t_1; $\omega_0 t_2 + \varphi_0 = \varphi_2$ – фаза в момент времени t_2. Из условия задачи $\varphi_2 = 2\varphi_1$. Тогда (1) и (2) можно записать в следующем виде:

$$x_1 = A\sin\varphi_1; \quad (3)$$

$$x_2 = A\sin 2\varphi_1 = 2A\sin\varphi_1\cos\varphi_1. \quad (4)$$

Уравнение (4) приведем к виду

$$\frac{x_2}{2} = A\sin\varphi_1\cos\varphi_1. \quad (5)$$

Возведем (3) и (5) в квадрат и вычтем из первого уравнения второе:

$$x_1^2 - \frac{x_2^2}{4} = A^2\sin^2\varphi_1(1-\cos^2\varphi_1) = A^2\sin^4\varphi_1.$$

С учетом выражения (3) получим: $x_1^2 - \dfrac{x_2^2}{4} = \dfrac{x_1^4}{A^2} \Rightarrow$ амплитуда колебаний $A = \sqrt{\dfrac{4x_1^4}{4x_1^2 - x_2^2}} = 5{,}4$ (см).

Ответ: 5,4 см.

1.2.6. Материальная точка совершает гармонические колебания вдоль прямой с амплитудой $A = 4$ см и частотой $\nu = 2$ Гц. Запишите уравнение движения точки, если в начальный момент времени $t = 0$ ее координата $x_0 = 2$ с. Определите скорость и ускорение точки в момент времени $t = 2$ с.

Решение:

Кинематическое уравнение гармонических колебаний имеет вид:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1)$$

где $\omega_0 = 2\pi\nu$ (2) – циклическая частота; φ_0 – начальная фаза колебаний.

Согласно условию задачи в начальный момент времени $t = 0$ смещение точки из положения равновесия составляло x_0, поэтому (1) примет вид $x_0 = A\cos\varphi_0$. Отсюда начальная фаза колебаний

$$\varphi_0 = \arccos\frac{x_0}{A} = \frac{\pi}{6}. \quad (3)$$

Тогда с учетом (2) и (3) уравнение (1) запишем в виде

$$x = 0{,}04\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ (м)}. \quad (4)$$

Скорость и ускорение точки определяются следующим образом: скорость – первая производная смещения точки по времени:

$$\upsilon = x' = -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi_0); \quad (5)$$

ускорение – вторая производная смещения по времени или первая производная скорости по времени:

$a = x'' = \upsilon' = -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ (6).

Согласно выражениям (2) и (3) перепишем выражения (5) и (6) в виде

$$\upsilon = -2\pi\nu A\sin\left(2\pi\nu t + \frac{\pi}{3}\right); \; a = -4\pi^2\nu^2 A\cos\left(2\pi\nu t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Подставив числовые значения величин, получим:
$\upsilon \approx 0{,}44$ м/с = 44 см/с;
$a \approx 3{,}16$ м/с^2 = 316 см/с^2.

Ответ: $x = 0{,}04\cos\left(4\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ (м); $\upsilon = 44$ см/с; $a = 316$ см/с^2.

1.2.7. Материальная точка совершает гармонические колебания из положения равновесия с циклической частотой $\omega_0 = 2{,}0$ рад/с. В некоторый момент времени t смещение точки и ее скорость равны соответственно $x_1 = 30$ см, $\upsilon_1 = 8{,}0$ см/с. Определите смещение x_2 и скорость точки υ_2 через время $t_2 = 2$ с после начала колебаний.

Решение:

Смещение точки в некоторый момент времени t

$$x_1 = A\sin\omega_0 t, \tag{1}$$

а скорость

$$\upsilon_1 = \omega_0 A\cos\omega_0 t. \tag{2}$$

Из этих двух уравнений определим амплитуду A колебаний точки следующим образом. Из уравнения (1):

$$\sin\omega_0 t = \frac{x_1}{A}, \tag{3}$$

из уравнения (2):

$$\cos\omega_0 t = \frac{\upsilon_1}{\omega_0 A}. \tag{4}$$

Возведем (3) и (4) в квадрат и почленно сложим:

$$\sin^2\omega_0 t + \cos^2\omega_0 t = 1 = \left(\frac{x_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon_1}{\omega_0 A}\right)^2 \Rightarrow A = \sqrt{x_1^2 + \left(\frac{\upsilon_1}{\omega_0}\right)^2} = 5 \text{ (см)}.$$

Смещение точки через время t_2 после начала колебаний
$x_2 = A\sin\omega_0 t_2 = 5\sin 4$ (см) $= 0{,}05\sin 229°$ м $\approx -0{,}038$ м $= -3{,}8$ см.
Скорость частицы в этот момент времени
$\upsilon_2 = \omega_0 A\cos\omega_0 t_2 = 2\cdot 0{,}05\cos 229° \approx -0{,}066$ м/с $= -6{,}6$ см/с.

Ответ: –3,8 см; –6,6 см/с.

1.2.8. Материальная точка совершает гармонические колебания вдоль оси Ox с периодом $T = \dfrac{\pi}{2}$ с. Если начало координат совпадает с положением равновесия точки, определите минимальное время Δt после прохождения положения равновесия ($x = 0$), когда смещение точки составит $x = 25$ см, а скорость $\upsilon_x = 1$ м/с.

Решение:

Смещение и скорость точки в условиях данной задачи определяется уравнениями: $x = A\sin\omega_0 t$; $\upsilon_x = \omega_0 A\cos\omega_0 t$, где A – амплитуда, $\omega_0 = 2\pi/T$ – циклическая частота колебаний.

Преобразуем эти уравнения к виду:

$$\sin\omega_0 t = \frac{x}{A}, \tag{1}$$

$$\cos\omega_0 t = \frac{\upsilon_x}{\omega_0 A}. \tag{2}$$

Разделив почленно (1) и (2), получим

$$\operatorname{tg}\omega_0 t = \frac{\omega_0 x}{\upsilon_x} \Rightarrow \operatorname{arctg}\frac{\omega_0 x}{\upsilon_x} = \omega_0 t. \tag{3}$$

Циклическая частота $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 4$ (рад/с).

Пусть точка, пройдя положение равновесия, движется в положительном направлении оси Ox, искомое время определится из (3):

$$\Delta t = t = \frac{1}{\omega_0}\operatorname{arctg}\frac{\omega_0 x}{\upsilon_x} = \frac{\pi}{4\omega_0} \Rightarrow \Delta t \approx 0{,}2 \text{ (с)}.$$

Если точка, пройдя положение равновесия, движется в отрицательном направлении оси Ox, то выражение (3) имеет вид

$$\omega_0 t = \operatorname{arctg}\frac{\omega_0 x}{\upsilon_x} + \pi \Rightarrow \Delta t = t = \frac{1}{\omega_0}\left(\operatorname{arctg}\frac{\omega_0 x}{\upsilon_x} + \pi\right) = \frac{5\pi}{4\omega_0} \approx 1 \text{ (с)}.$$

Ответ: 0,2 с и 1 с.

1.2.9. Материальная точка совершает гармонические колебания и в некоторый момент времени имеет смещение x = 5 см, скорость υ = 10 см/с и ускорение a = 100 см/с^2. Определите период T и амплитуду колебаний A, максимальные скорость υ_{max} и ускорение a_{max} колеблющейся точки, а также фазу φ колебаний в рассматриваемый момент времени.

Решение:

Уравнение гармонических колебаний материальной точки имеет вид

$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$,

где A – амплитуда, $\omega_0 = 2\pi/T$ – циклическая частота, φ_0 – начальная фаза колебаний.

Пусть $\varphi_0 = 0$, тогда уравнение гармонических колебаний примет вид:

$$x = A\cos\omega_0 t. \tag{1}$$

Скорость колеблющейся точки изменяется также по гармоническому закону и является первой производной смещения x по времени:

$$\upsilon = x' = -\omega_0 A\sin\omega_0 t. \tag{2}$$

Из (2) модуль максимальной скорости точки

$$\upsilon_{\max} = \omega_0 A = \frac{2\pi}{T}A. \tag{3}$$

Ускорение колеблющейся точки определится второй производной смещения или первой производной скорости по времени:

$$a = x'' = \upsilon' = -\omega_0^2 A\cos\omega_0 t. \tag{4}$$

Из (4) модуль максимального ускорения

$$a_{\max} = \omega_0^2 A = \frac{4\pi^2}{T^2} A. \qquad (5)$$

Разделив (4) на (1) почленно

$$\frac{|a|}{|x|} = \left|-\omega_0^2\right| = \frac{4\pi^2}{T^2}, \qquad (6)$$

определим $\omega_0 = \sqrt{20}$ рад/с, а период колебаний $T = \sqrt{\dfrac{4\pi^2 x}{a}} = 1{,}4$ (с).

Для нахождения амплитуды приведем (1) и (2) к виду $\dfrac{x}{A} = \cos\omega_0 t$ и $\dfrac{\upsilon}{\omega_0 A} = -\sin\omega_0 t$, возведем левые и правые части этих выражений в квадрат и почленно сложим:

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon}{\omega_0 A}\right)^2 = \cos^2\omega_0 t + \sin^2\omega_0 t = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_0^2 x^2 + \upsilon^2}{\omega_0^2 A^2} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{\frac{a}{x}x^2 + \upsilon^2}{\frac{a}{x}}} = \sqrt{x^2 + \frac{\upsilon^2 x}{a}} \approx 5{,}5 \text{ см}.$$

Из (3) $\upsilon_{\max}$ = 24,7 см/с; из (5) $a_{\max}$ = 111 см/с^2.

Для нахождения фазы $\varphi = \omega_0 t$ колебаний при заданных x, υ и a разделим выражения (1) и (2) почленно:

$$\frac{x}{\upsilon} = -\frac{1}{\omega_0}\mathrm{ctg}\omega_0 t \Rightarrow \mathrm{tg}\omega_0 t = \mathrm{tg}\varphi = -\frac{\upsilon}{\omega_0 x} \Rightarrow \varphi = \mathrm{arctg}\left(-\frac{\upsilon}{\omega_0 x}\right) \approx 0{,}134\pi.$$

Ответ: 1,4 с; 5,5 см; 24,7 см/с; 111 см/с^2; 0,134π.

1.2.10. Материальная точка начинает совершать гармонические колебания вдоль оси Ox. В некоторый момент времени точка находится в координате x_1 = 2 см, имея скорость υ_{x_1} = 8 см/с и ускорение a_{x_1} = –8 м/с^2. Определите амплитуду A, максимальную скорость $\upsilon_{\max}$, циклическую частоту ω и период T гармонических колебаний точки.

Решение:

Уравнение гармонических колебаний точки в данном случае (t = 0, x = 0) будет иметь вид

$$x = A\sin\omega_0 t, \qquad (1)$$

где x – смещение точки от положения равновесия в момент времени t, A – амплитуда колебаний, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ (2) – циклическая частота колебаний.

Скорость точки определится

$$\upsilon_x = x' = \omega_0 A\cos\omega_0 t, \tag{3}$$

ускорение $a_x = \upsilon_x' = x'' = -\omega_0^2 A\sin\omega_0 t$ или с учетом (1)

$$a_x = -\omega_0^2 x. \tag{4}$$

Из условий задачи в некоторый момент времени $t = t_1$, $x = x_1$, $\upsilon_x = \upsilon_{x_1}$, $a_x = a_{x_1}$, т. е.

$$x_1 = A\sin\omega_0 t_1; \tag{1$'$}$$

$$\upsilon_{x_1} = \omega_0 A\cos\omega_0 t_1; \tag{3$'$}$$

$$a_{x_1} = -\omega_0^2 x_1. \tag{4$'$}$$

Имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными A, ω_0, t_1. Из (4′) определим циклическую частоту колебаний:

$$\omega_0 = \sqrt{-\frac{a_{x_1}}{x_1}} = \sqrt{-\frac{-8}{2\cdot 10^{-2}}} = 20 \text{ (рад/с).}$$

Тогда из (2) определим период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{6,28}{20} = 0,314$ (с).

Амплитуду колебаний определим из закона сохранения энергии при гармонических колебаниях. Полная механическая энергия гармонических колебаний равна сумме кинетической и потенциальной энергий колебательной системы и остается постоянной:

$$\frac{m\upsilon_{x_1}^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\upsilon_{\max}^2}{2} = \text{const}, \tag{5}$$

где m – масса точки; k – коэффициент квазиупругой силы, возвращающей точку в положение равновесия. Собственная циклическая частота колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = m\omega_0^2. \tag{6}$$

Для нахождения амплитуды воспользуемся выражением (5), преобразуя его к виду

$$m\upsilon_{x_1}^2 + m\omega_0^2 x_1^2 = m\omega_0^2 A^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{\upsilon_{x_1}^2 + \omega_0^2 x_1^2}{\omega_0^2}} = \sqrt{\frac{64\cdot 10^{-4} + 400\cdot 4\cdot 10^{-4}}{400}} \approx 2,04\cdot 10^{-2} \text{ (м)} = 2,04 \text{ м.}$$

Воспользовавшись выражением (5), определим максимальную скорость колеблющейся точки:

$$\upsilon_{\max} = \sqrt{\upsilon_{x_1}^2 + \omega_0^2 x_1^2} = \sqrt{64\cdot 10^{-4} + 400\cdot 4\cdot 10^{-4}} \approx 40,8\cdot 10^{-2} \text{ (м/с)} = 40,8 \text{ см/с.}$$

Ответ: 20 рад/с; 0,314 с; 2,04 м; 40,8 см/с.

1.2.11. Материальная точка совершает гармонические колебания вдоль оси Ox с периодом $T = 1,2$ с и амплитудой $A = 20$ см. Определите среднюю скорость точки за время, в течение которого она проходит путь, равный половине амплитуды: а) из положения равновесия; б) из крайнего положения и в) среднюю скорость, когда точка проходит путь, равный двум амплитудам.

Решение:

а) Уравнение гармонического колебания, когда в начальный момент времени $t = 0$ точка находится в начале координат $x_0 = 0$ (в положении равновесия), можно записать в виде

$$x(t) = A\sin\frac{2\pi}{T}t. \qquad (1)$$

Тогда координата точки в момент времени t_1 окажется равной $x_1(t_1) = A/2$. Воспользуемся выражением (1) и запишем:

$$\frac{A}{2} = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t_1\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{T}t_1\right) = \frac{1}{2},$$

это значит, что аргумент $\frac{2\pi}{T}t_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$ время прохождения точкой пути, равного половине амплитуды $A/2$ $t_1 = \frac{T}{12}$.

Средняя скорость на этом участке пути $\langle \upsilon_1 \rangle = \frac{s_1}{t_1} = \frac{A\cdot 12}{2T} = \frac{6A}{T} = 1{,}0$ м/с.

б) При движении из крайнего положения, когда в начальный момент времени $t = 0$ точка находится в координате $x = A$, уравнение гармонического колебания примет вид

$$x = A\cos\frac{2\pi}{T}t. \qquad (2)$$

Тогда координата точки в момент времени t_2 окажется равной $x_2(t_2) = A/2$. Воспользовавшись выражением (2), получим:

$$\frac{A}{2} = A\cos\frac{2\pi}{T}t_2 \Rightarrow \cos\frac{2\pi}{T}t_2 = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\frac{2\pi}{T}t_2 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow$ время прохождения точкой пути, равного половине амплитуды $A/2$, в данном случае $t_2 = \frac{T}{6}$.

Средняя скорость на этом участке пути $\langle \upsilon_2 \rangle = \frac{s_2}{t_2} = \frac{A\cdot 6}{2T} = \frac{3A}{T} = 0{,}5$ (м/с).

в) Колеблющаяся точка за время, равное периоду колебаний T, проходит путь $s = 4A$. Следовательно, время прохождения пути $s_3 = 2A$ $t_3 = \frac{T}{2}$.

Средняя скорость колебательного движения точки на этом участке

$$\langle \upsilon_3 \rangle = \frac{s_3}{t_3} = \frac{2A\cdot 2}{T} = \frac{4A}{T} \approx 0{,}67 \text{ м/с}.$$

Примечание. Второй способ решения задач подобного типа частично изложен в 1.2.1. Установлено:

а) если колебания материальной точки происходят из положеня равновесия, то путь, равный половине амплитуды, точка проходит за время $t_1 = \dfrac{T}{12}$, оставшуюся половину амплитуды – за время $\Delta t_1 = \dfrac{T}{6}$;

б) если колебания материальной точки происходят из крайнего положения, то путь, равный половине амплитуды, точка проходит за время $t_2 = \dfrac{T}{6}$, а оставшуюся половину амплитуды – за время $\Delta t_2 = \dfrac{T}{12}$.

Из этих данных видно, что время прохождения точкой пути, равного амплитуде, $t = t_1 + \Delta t_1 = t_2 + \Delta t_2 = \dfrac{T}{12} + \dfrac{T}{6} = \dfrac{T}{4}$, т. е. четверть периода.

Ответ: 1 м/с; 0,5 м/с; 0,67 м/с.

1.2.12. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону $x = 0{,}1\sin(2\pi t)$ (м). Определите среднюю путевую скорость точки: а) за половину периода; б) за первую 1/8 часть периода; в) за вторую 1/8 часть периода.

Решение:

Уравнение гармонических колебаний точки имеет вид $x = A\sin\omega_0 t$,

где A – амплитуда колебаний, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ – циклическая частота колебаний.

При сравнении этого уравнения с уравнением, данным в условии задачи, видно, что амплитуда колебаний $A = 0{,}1$ м, циклическая частота $\omega_0 = 2\pi \Rightarrow$ период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 1$ с.

а) Путь, проходимый точкой за половину периода $t_1 = \dfrac{T}{2}$, равен двум амплитудам: $s = 2A$. Тогда средняя скорость точки $\langle \upsilon \rangle_1 = \dfrac{4A}{T} = 0{,}4$ (м/с).

б) Определим путь, проходимый за время $t_2 = \dfrac{T}{8}$ = (1/8) с:

$$x_2 = 0{,}1\sin\left(2\pi \frac{1}{8}\right) = 0{,}07 \text{ (м)}.$$

Средняя скорость за этот промежуток времени $\langle \upsilon \rangle_2 = 0{,}56$ (м/с).

в) Среднюю скорость за вторую восьмую часть периода определим следующим образом:

$$\langle \upsilon \rangle_3 = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2},$$

где x_3 – смещение точки за время, равное $2\cdot(T/8)$, т. е. $t_3 = \frac{T}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)$ с; x_2 – смещение за время $t_2 = \frac{T}{8}$.

Смещение $x_3 = A\sin 2\pi t_3 = 0{,}1\sin\left(2\pi\frac{1}{4}\right) = 0{,}1$ м; смещение x_2 уже определено в (б): $x_2 = 0{,}07$ (м).

$$\langle \upsilon \rangle_3 = \frac{0{,}1 - 0{,}07}{(1/4)-(1/8)} = 0{,}24 \text{ (м/с)}.$$

Ответ: 0,4 м/с; 0,56 м/с; 0,24 м/с.

1.2.13. Материальная точка массой $m = 10$ г совершает гармонические колебания с частотой $\nu = 0{,}5$ Гц и амплитудой $A = 5$ см. Определите скорость, ускорение и силу, действующую на точку в момент, когда ее смещение от положения равновесия $x = 3$ см.

Решение:

Пусть уравнение гармонических колебаний имеет вид

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1)$$

где $(\omega_0 t + \varphi_0)$ – фаза колебаний, $\omega_0 = 2\pi\nu$ – циклическая частота, φ_0 – начальная фаза, t – время.

Уравнение скорости точки, совершающей гармонические колебания:

$$\upsilon = x' = \omega_0 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (2)$$

Для определения скорости точки выразим из (1)

$$\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{x}{A}, \quad (3)$$

из (2)

$$\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{\upsilon}{\omega_0 A}. \quad (4)$$

Возведем эти уравнения в квадрат и сложим:

$$\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon}{\omega_0 A}\right)^2 = 1.$$

Учитывая, что $\omega_0 = 2\pi\nu$, запишем $\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon}{2\pi\nu A}\right)^2 = 1$. Решим это уравнение относительно скорости υ: $\upsilon = \pm 2\pi\nu\sqrt{A^2 - x^2} \approx \pm 12{,}6$ (см/с).

Ускорение $a = x'' = \upsilon' = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2 x = -4\pi^2\nu^2 x \approx -29{,}6$ (см/с^2).

Из второго закона Ньютона определим силу, действующую на точку: $F = ma = -2{,}96\cdot 10^{-3}$ (Н) $= -2{,}96$ мН.

Ответ: ±12,6 см/с; –29,6 см/с^2.

1.2.14. Материальная точка массой $m = 0{,}1$ кг совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 5$ см. Максимальная сила, действующая на точку, $F_{max} = 20$ мН. Определите циклическую частоту ω_0, период T колебаний точки и ее полную механическую энергию.

Решение:

Согласно второму закону Ньютона результирующая сила, действующая на тело, прямо пропорциональна ускорению, сообщаемому телу этой силой: $\vec{F} = m\vec{a}$. Тогда для гармонически колеблющейся точки максимальная сила прямо пропорциональна максимальному ускорению:

$$F_{max} = ma_{max}. \tag{1}$$

Максимальное ускорение

$$a_{max} = \omega_0^2 A, \tag{2}$$

где $\omega_0 = 2\pi/T$ – циклическая частота колебаний точки.

С учетом (2) запишем выражение (1): $F_{max} = m\omega_0^2 A \Rightarrow$ циклическая частота колебаний $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{F_{max}}{mA}} = 2$ (рад/с). Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{mA}{F_{max}}} = 3{,}14$ (с).

Определение полной энергии колеблющейся точки проведем следующим способом.

Из закона сохранения энергии ясно, что полная энергия остается постоянной, равной или максимальной кинетической, или максимальной потенциальной энергии, т. е.

$$E = \frac{kA^2}{2}, \tag{3}$$

где k – коэффициент пропорциональности при определении возвращающей силы, действующей на точку в процессе колебания: $F = -kx$, для максимальной силы

$$F_{max} = -kA. \tag{4}$$

Знак «–» в выражениях указывает лишь на то, что сила направлена в сторону, противоположную смещению.

Поделим почленно (3) на (4):

$\dfrac{E}{F_{max}} = \dfrac{A}{2} \Rightarrow$ полная энергия в колебательном процессе;

$$E = \frac{F_{max}A}{2} = \frac{20\cdot 10^{-3}\cdot 5\cdot 10^{-2}}{2} = 50\cdot 10^{5}\ \text{Дж} = 0{,}5\ \text{мДж}.$$

Ответ: 2 рад/с; 3,14 с; 0,5 мДж.

Маятники

1.2.15. На сколько процентов следует уменьшить длину математического маятника, чтобы период его колебаний на высоте $h = 10$ км был равен периоду колебаний маятника на поверхности Земли? Радиус Земли $R_З = 6400$ км.

Решение:

Периоды колебаний маятника равны:

на Земле – $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$,

на высоте h над Землей – $T_h = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_h}{g_h}}$,

где l и l_h – длины маятника; g и g_h – ускорения свободного падения на Земле и на высоте h соответственно.

Согласно условию задачи периоды должны быть равны:

$$T = T_h \Rightarrow \frac{l}{g} = \frac{l_h}{g_h}. \qquad (1)$$

Ускорение свободного падения на поверхности Земли

$$g = \frac{GM_З}{R_З^2}, \qquad (2)$$

где G – гравитационная постоянная; $M_З$ – масса Земли;
g_h – ускорение свободного падения на высоте h уменьшается:

$$g_h = \frac{GM_З}{(R_З + h)^2}. \qquad (3)$$

Длины нитей маятников отличаются на $\Delta l = l - l_n$. Тогда (1) можно записать как

$$\frac{l}{g} = \frac{l - \Delta l}{g_h} \Rightarrow \frac{g_h}{g} = \frac{l - \Delta l}{l} = 1 - \frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \frac{\Delta l}{l} = 1 - \frac{g_h}{g}.$$

С учетом выражений (2) и (3):

$$\frac{\Delta l}{l} = 1 - \left(\frac{R}{R + h}\right)^2 = 1 - \left(\frac{6400}{6410}\right)^2 = 0{,}003 \text{ или } 0{,}3\ \%.$$

Ответ: 0,3 %.

1.2.16. Точные маятниковые астрономические часы установлены на поверхности Земли. Определите, на сколько будут отставать эти часы за сутки, если их перенести на крышу здания высотой h = 200 м. Радиус Земли считать R = 6400 км.

Решение:

Период колебаний математического маятника зависит от ускорения свободного падения g в месте нахождения маятника. Так, на поверхности Земли период $T_З = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_З}}$, на высоте h от поверхности период $T_h = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_h}}$. За сутки точные маятниковые часы совершили число колебаний $N_З = \dfrac{t_0}{T_З} = \dfrac{t_0}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g_З}{l}}$ (t_0 – длительность суток). На высоте h число колебаний за сутки $N_h = \dfrac{t_0}{T_h} = \dfrac{t_0}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g_h}{l}}$.

Следовательно, за сутки число колебаний на высоте h уменьшится на величину

$$\Delta N = N_з - N_h = \frac{t_0}{2\pi}\left(\sqrt{\frac{g_з}{l}} - \sqrt{\frac{g_h}{l}}\right)$$

и часы отстанут на время

$$\Delta t = T_h \cdot \Delta N = t_0\left(\sqrt{\frac{g_з}{g_h}} - 1\right). \qquad (1)$$

Для определения ускорения свободного падения на высоте h над Землей воспользуемся законом всемирного тяготения. На поверхности Земли: $G\dfrac{M_m}{R_з^2} = mg_з$;

на высоте h: $G\dfrac{M_m}{(R_з + h)^2} = mg_h$. Из этих двух выражений

$$\frac{g_з}{g_h} = \left(\frac{R_з + h}{R_з}\right)^2. \qquad (2)$$

Подставим (2) в (1), получим время отставания часов:

$\Delta t = t_0\left(\dfrac{R_з + h}{R_з} - 1\right) = t_0\dfrac{h}{R_з}$ или $\Delta t = 2{,}7$ с.

Ответ: $\Delta t = 2{,}7$ с.

1.2.17. Определите периоды колебаний математического маятника, если его точку подвеса перемещать с ускорением $\vec{a}$, направленным а) вертикально вверх; б) вертикально вниз; в) горизонтально.

Решение:

Маятник совершает свободные колебания в системе отсчета, которая движется с постоянным ускорением $\vec{a}$ относительно неподвижной системы. В этом случае к шарику маятника помимо сил тяжести $m\vec{g}$ и натяжения нити $\vec{F}_н$ приложена сила инерции $\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}$. Как и сила тяжести, она постоянна и ее добавление соответствует замене реального поля тяготения, характеризующегося напряженностью $\vec{g} = \dfrac{\vec{F}_т}{m}$, полем тяготения напряженностью $\vec{g}_{эфф} = \dfrac{\vec{F}_т + \vec{F}_{ин}}{m} = \vec{g} - \vec{a}$, называемой эффективной напряженностью. Формула для периода колебаний математического маятника в неинерциальной системе отсчета преобразуется к виду

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{|\vec{g} - \vec{a}|}}. \qquad (1)$$

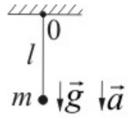
а) Рассмотрим движение точки подвеса с ускорением $\vec{a}$, направленным вверх:

$g_{эфф} = |\vec{g} - \vec{a}| = g + a$.

Период гармонических колебаний маятника согласно (1)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + a}}.$$

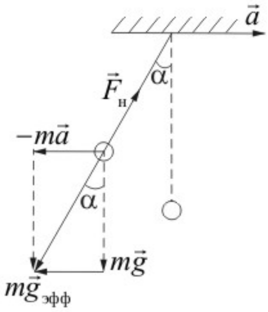
б) При движении точки подвеса с ускорением $\vec{a}$, направленным вниз ($\vec{g} \uparrow\uparrow \vec{a}$), $g_{эфф} = |\vec{g} - \vec{a}| = g - a$.



В этом случае период гармонических колебаний маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}.$$

При движении с ускорением $\vec{a} = \vec{g}$, т. е. в состоянии невесомости, период колебаний математического маятника должен стать бесконечно большим ($T \Rightarrow \infty$). Поэтому в состоянии невесомости свободные колебания математического маятника не происходят. Свободные колебания пружинного маятника, осуществляющиеся под действием силы упругости, в невесомости происходят, причем период их такой же, как и на Земле.



в) На рисунке видно, что $g_{эфф} = |\vec{g} - \vec{a}| = \sqrt{g^2 + a^2}$.

Искомый период гармонических колебаний в неинерциальной системе отсчета, движущейся с ускорением $\vec{a}$, направленным горизонтально, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}}$.

При этом направление нити, соответствующее положению маятника в состоянии равновесия, составит угол α, который определится через любую тригонометрическую функцию, например: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{a}{g}$. Гармонические колебания маятника будут происходить относительно этого положения.

Ответ: а) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g+a}}$; б) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g-a}}$;

в) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}}$.

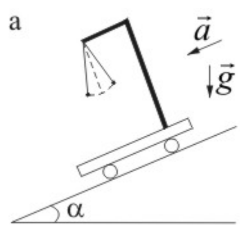
1.2.18. Математический маятник с нитью длиной l закреплен на тяжелой тележке, которая скатывается по наклонной плоскости и далее движется по горизонтальной поверхности. Угол наклона плоскости к горизонту α, трение при движении тележки отсутствует. Определите периоды колебаний маятника при скатывании тележки по наклонной плоскости (T) и при ее движении по горизонтальной поверхности (T'), а также направление нити, соответствующее равновесному положению маятника.

Решение:

Тележка представляет собой неинерциональную систему, движущуюся в отсутствие сил трения с ускорением

$$a = g\sin\alpha \qquad (1)$$

(второй закон Ньютона), направленным под углом $\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$ к



направлению вектора $\vec{g}$. На рисунке а видно, что $g_{эфф} = |\vec{g} - \vec{a}|$.

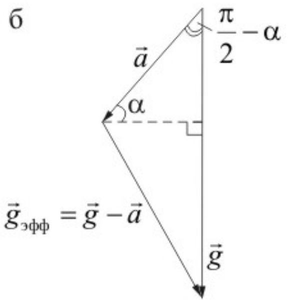
По теореме косинусов определим

$$g_{эфф} = \sqrt{a^2 + g^2 - 2ag\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}. \qquad (2)$$

Подставив (1) в (2), получим

$$g_{эфф} = \sqrt{g^2 - g^2 \sin\alpha} = g\cos\alpha. \qquad (3)$$

б



Искомый период гармонических колебаний математического маятника в данном случае $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha}}$.

Воспользовавшись выражениями (1) и (3), определим

$$g_{эфф}^2 + a^2 = g^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = g^2. \qquad (4)$$

Из (4) очевидно, что треугольник векторов, изображенный на рисунке б, – прямоугольный.

Отсюда следует, что вектор $\vec{g}_{эфф}$ направлен перпендикулярно наклонной плоскости. Это соответствует направлению нити при равновесном положении маятника.

При дальнейшем движении тележки по горизонтальной поверхности (угол $\alpha = 0°$) с постоянной скоростью ($a = 0$) система, связанная с тележкой, оказывается инерциальной. Нить маятника в положении равновесия перпендикулярна горизонтальной поверхности. Период колебаний маятника такой же, как и на неподвижной тележке: $T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha}}$; $T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

1.2.19. Математический маятник находился в положении равновесия, когда ему сообщили горизонтальную скорость υ_0. При возникших гармонических колебаниях нить маятника в его крайних положениях составляла с вертикалью малый угол α. Определите период T таких гармонических колебаний.

Решение:

Искомый период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad (1)$$

где l – длина нити маятника; $\vec{g}$ – ускорение свободного падения.

Определим длину нити l.

Из условия задачи очевидно, что маятник в начальный момент времени ($t = 0$) находился в положении равновесия ($x_0 = 0$), поэтому уравнение его гармонических колебаний будет иметь вид:

$$x = A\sin\omega_0 t = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \qquad (2)$$

где A – амплитуда колебаний; $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ – циклическая частота колебаний.

Поскольку маятнику в положении равновесия сообщили скорость υ_0, то амплитуду колебаний $A = \dfrac{\upsilon_0}{\omega_0} = \dfrac{\upsilon_0 T}{2\pi}$ и уравнение (2) запишем в виде:

$$x = \frac{\upsilon_0 T}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right). \qquad (3)$$

В момент времени, равный четверти периода $\left(\dfrac{T}{4}\right)$, маятник достигнет крайнего положения, при котором нить маятника составит с вертикалью угол α. Тогда смещение грузика маятника по дуге окружности радиусом, равным длине нити l, будет $x = \alpha l$. Уравнение (3) примет вид:

$$\alpha l = \frac{\upsilon_0 T}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right) \Rightarrow \alpha l = \frac{\upsilon_0 T}{2\pi}$$

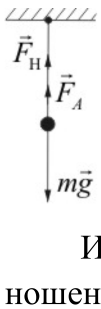
и длина нити маятника $l = \dfrac{\upsilon_0 T}{2\pi\alpha}$. (4)

Подставим (4) в (1), получим $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\upsilon_0 T}{2\pi\alpha g}}$. Возведем это выражение в квадрат и выразим период T: $T = \dfrac{2\pi\upsilon_0}{\alpha g}$.

Ответ: $T = \dfrac{2\pi\upsilon_0}{\alpha g}$.

1.2.20. Математический маятник представляет собой шарик, плотность материала которого ρ, подвешенный на невесомой нити длиной l. Определите период колебаний маятника при помещении его в жидкость плотностью $\rho_ж$, если маятник обладает обтекаемой формой и трение его о жидкость отсутствует.

Решение:



В процессе колебаний маятника в жидкости кроме силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения $\vec{F}_Н$ нити действует постоянная, направленная вертикально вверх сила Архимеда $\vec{F}_A$.

В положении равновесия маятника

$$m\vec{g} + \vec{F}_Н + \vec{F}_A = 0. \qquad (1)$$

Из этого выражения следует, что эти силы лежат в одной плоскости. Соотношение (1) можно записать в виде $m\vec{g}_{эфф} + \vec{F}_н = 0$,

где $m\vec{g}_{эфф} = m\vec{g} + \vec{F}_A \Rightarrow \vec{g}_{эфф} = \vec{g} + \dfrac{\vec{F}_A}{m}$. (2)

Нить маятника расположена вдоль вектора $\vec{g}_{\text{эфф}}$. В этом случае нить маятника в положении равновесия вертикальна, период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_{\text{эфф}}}}, \tag{3}$$

где $g_{\text{эфф}} = \left|\vec{g} + \frac{\vec{F}_A}{m}\right| = g - \frac{F_A}{m}$. (4)

Сила Архимеда равна весу вытесненной жидкости в объеме погруженного в жидкость шарика:

$$F_A = \rho_{\text{ж}} g V; \tag{5}$$

масса шарика $m = \rho V$. (6)

С учетом (5) и (6) соотношение (4) примет вид:

$$g_{\text{эфф}} = g\left(1 - \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho}\right). \tag{7}$$

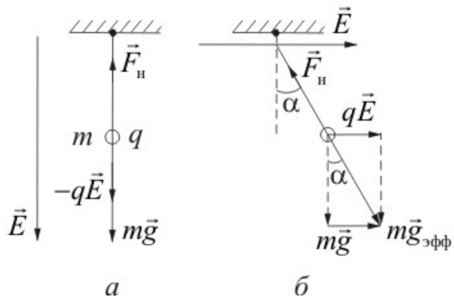
Подставим (7) в выражение (3), определим период колебаний математического маятника в жидкости:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\left(1 - \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho}\right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho l}{g(\rho - \rho_{\text{ж}})}}.$$

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\left(1 - \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho}\right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho l}{g(\rho - \rho_{\text{ж}})}}$.

1.2.21. Определите период малых колебаний математического маятника, представляющего собой шарик массой m с зарядом $q > 0$, подвешенного на нити длиной l и помещенного в однородное электрическое поле, вектор напряженности $\vec{E}$ которого направлен: а) вдоль силы тяжести $m\vec{g}$; б) под углом 90° к направлению силы тяжести $m\vec{g}$.

Решение:



На маятник в любой момент будет действовать постоянная по величине сила $F_{\text{эл}} = qE$, направленная вдоль силовых линий электрического поля. Период гармонических колебаний математического маятника, на который помимо силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения $\vec{F}_{\text{н}}$ нити действует постоянная внешняя сила, определяется по формуле $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_{\text{эфф}}}}$, где $\vec{g}_{\text{эфф}} = \vec{g} + \frac{\vec{F}_{\text{эл}}}{m}$.

В случае (a), когда вектор напряженности электрического поля сонаправлен с силой тяжести $m\vec{g}$,

$$g_{эфф} = g + \frac{F_{эл}}{m} = g + \frac{qE}{m}.$$

Тогда период колебаний маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg + qE}}.$$

Положение равновесия маятника вертикальное.

В случае (*б*), когда вектор напряженности электрического поля перпендикулярен силе тяжести $m\vec{g}$,

$$g_{эфф} = \sqrt{g^2 + \left(\frac{F_{эл}}{m}\right)^2} = \sqrt{g^2 + \left(\frac{qE}{m}\right)^2}.$$

Период колебаний маятника в этом случае

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{\sqrt{m^2g^2 + q^2E^2}}}.$$

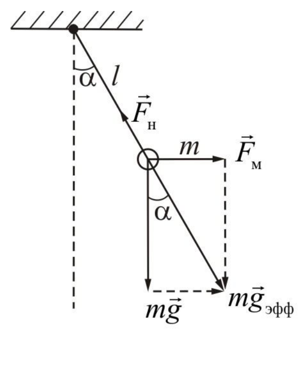
Положение равновесия маятника в этом случае направлено вдоль $\vec{g}_{эфф}$ и составляет с вертикалью некоторый угол α, который легко выразить через $\mathrm{tg}\alpha = \frac{qE}{mg}$.

Ответ*:* а) $T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg + qE}}$; б) $T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{\sqrt{m^2g^2 + q^2E^2}}}$.

1.2.22. Математический маятник представляет собой стальной шарик массой m, подвешенный на нити длиной l. Маятник совершает гармонические колебания между полюсами магнита с периодом T. В процессе колебаний на маятник действует горизонтальная магнитная сила. Определите величину этой магнитной силы.

Решение:

В процессе колебаний на шарик помимо силы тяжести и силы натяжения нити действует постоянная внешняя сила, обусловленная действием магнитного поля и направленная горизонтально. Маятник будет совершать колебания около положения равновесия, в котором нить совпадает по направлению с вектором $\vec{g}_{эфф} = \vec{g} + \frac{\vec{F}_м}{m}$, с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_{эфф}}}$. На рисунке видно, что $g_{эфф} = \sqrt{g^2 + \left(\frac{F_м}{m}\right)^2}$.

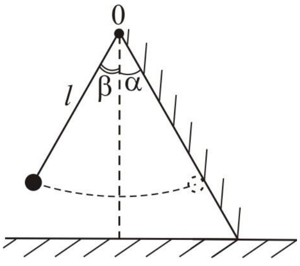


Тогда период $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + \left(\frac{F_м}{m}\right)^2}}}$.

Выразим из этого выражения силу притяжения $\vec{F}_м$, действующую на стальной шарик со стороны магнитного поля:

$$F_м = m\sqrt{\frac{16\pi^4 l^2}{T^4} - g^2}\ .$$

Ответ: $F_м = m\sqrt{\frac{16\pi^4 l^2}{T^4} - g^2}$.



1.2.23. Математический маятник с нитью длиной l крепится на наклонной стенке, как показано на рисунке. Маятник отклоняется от положения равновесия на угол β в плоскости, перпендикулярной стенке, причем угол β больше угла α (β > α). Определите период колебаний маятника, считая его удары о стенку абсолютно упругими.

Решение:

Уравнение гармонических колебаний имеет вид $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. Для данных колебаний с учетом того, что углы β и α малы, амплитуда колебаний $A = \beta l$, начальная фаза $\varphi_0 = 0$, собственная циклическая частота $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Следовательно,

$$x = \beta l \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right). \tag{1}$$

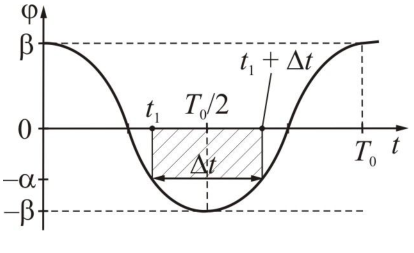
Если учесть, что координата маятника в момент удара о стенку $x_1 = \alpha l$, то уравнение (1) запишется в виде:

$$-\alpha l = \beta l \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t_1\right), \tag{2}$$

где t_1 = время движения шарика из исходного положения до момента удара его о стенку:

$$t_1 = \sqrt{\frac{l}{g}} \arccos\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Тогда период колебаний определится $T = 2t_1 = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \arccos\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right).$ (3)



Примечание. Если представить графически зависимость угла отклонения шарика от вертикали с течением времени, то период колебаний $T = T_0 - \Delta t$.

На графике видно, что

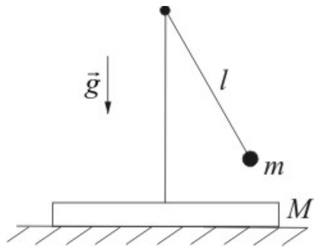
$\Delta t = 2\left(\frac{T_0}{2} - t_1\right) = 2\left(\pi\sqrt{\frac{l}{g}} - \sqrt{\frac{l}{g}} \arccos\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)\right).$ Тогда

$$T = T_0 - 2\left(\frac{T_0}{2} - t_1\right) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} - 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} + 2\sqrt{\frac{l}{g}} \arccos\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right) = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \arccos\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right). \tag{4}$$

Определение периода аналитически (3) и графически (4) даст одинаковый результат.

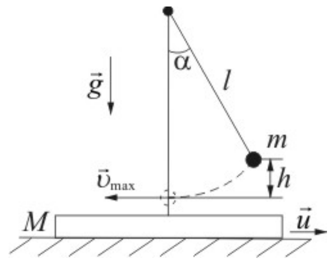
Ответ: $T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\arccos\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)$.

1.2.24. На гладкой горизонтальной поверхности находится брусок массой M = 150 г. Математический маятник с нитью длиной l = 30 см и шариком массой m = 50 г крепится к вертикальному легкому стержню, установленному на бруске. Нить с шариком отклоняют на небольшой угол от вертикали и отпускают. Определите период T возникающих колебаний шарика, считая их гармоническими.



Решение:

При прохождении шариком положения равновесия его скорость направлена горизонтально и максимальна:



$$\upsilon_{max} = \omega_0 A = \frac{2\pi}{T} A, \tag{1}$$

где $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ – циклическая частота колебаний, A – амплитуда колебаний; в силу малости угла α

$$A = \alpha l. \tag{2}$$

Из (1) с учетом (2) период колебаний

$$T = \frac{2\pi\alpha l}{\upsilon_{max}}. \tag{3}$$

Система «шарик–брусок» в горизонтальном направлении замкнута. Для нахождения максимальной скорости воспользуемся законом сохранения импульса и механической энергии:

$$m\upsilon_{max} = Mu \tag{4}$$

и

$$mgh = \frac{m\upsilon_{max}^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}. \tag{5}$$

Из этих двух выражений определим максимальную скорость

$$\upsilon_{max} = \sqrt{\frac{2Mgh}{M+m}}. \tag{6}$$

На рисунке видно, что высота, с которой начинает движение шарик, $h = l(1-\cos\alpha) = 2l\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

Тогда $\upsilon_{max} = \sqrt{\dfrac{4Mgl\sin^2\frac{\alpha}{2}}{M+m}} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\dfrac{Mgl}{M+m}}$. (7)

Подставим (7) в выражение (3), получим

$$T = \frac{2\pi\alpha l}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{Mgl}{M+m}}}. \qquad (8)$$

Поскольку угол α мал, то $\sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$ и (8) примет вид:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{(M+m)l}{Mg}}$ = 1,26 (с).

Ответ: 1,26 с.

1.2.25. Если к невесомой пружине подвесить груз массой m = 300 г, то пружина удлиняется на Δl = 0,15 м. Пружину с грузом растягивают еще на Δl_1 = 0,1 м от положения равновесия и груз отпускают. Определите:

а) жесткость k пружины;

б) амплитуду A возникших колебаний;

в) максимальную скорость υ_{max} груза при колебаниях;

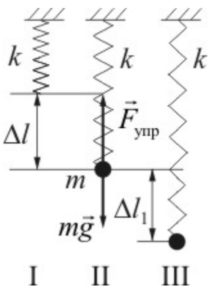
г) максимальное ускорение a_{max};

д) период T, частоту v и циклическую частоту ω_0 колебаний;

е) зависимость смещения x от времени t;

ж) скорость груза в момент времени t_1 = 0,15 с.

Решение:



а) Подвешенный к пружине груз (тело) растягивает пружину на Δl. При этом сила тяжести $m\vec{g}$ становится равной по модулю силе упругости $\vec{F}_{упр}$ (положение II на рисунке). Согласно закону Гука $F_{упр} = k\Delta l$. Тогда $k\Delta l$ = mg и жесткость пружины $k = \frac{mg}{\Delta l}$ или k = 20 Н/м.

б) Амплитуда A колебаний равна величине Δl_1, так как после растяжения пружины на Δl_1 груз отпускают, не сообщая ему начальной кинетической энергии: $A = \Delta l_1$ = 0,1 м.

в) Максимальную скорость колеблющегося тела можно определить из условия, что при гармонических колебаниях полная энергия колебаний остается постоянной, равной максимальной кинетической или максимальной потенциальной энергии: $\frac{m\upsilon_{max}^2}{2} = \frac{kA^2}{2} = \text{const}$ (1) $\Rightarrow \upsilon_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}}A$ (2) или $\upsilon_{max} \approx$0,82 м/с.

Второй способ определения максимальной скорости следующий: скорость колеблющегося груза определяется первой производной от смещения груза по времени. Уравнение движения груза имеет вид:

$$x = A\cos\omega_0 t \text{ (3)} \Rightarrow x' = \upsilon = -\omega_0 A\sin\omega_0 t \text{ (4)},$$

где x – смещение колеблющегося тела в момент времени t, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – циклическая частота колебаний. Из (4) модуль максимальной скорости груза

$$\upsilon_{max} = \omega_0 A = \sqrt{\frac{k}{m}} A, \tag{5}$$

$\upsilon_{max} = \sqrt{\frac{20}{0,3}} \cdot 0,1 \approx 0,82$ (м/с).

г) Максимальное ускорение колеблющегося тела также можно определить двумя способами.

Максимальная сила, возвращающая тело в положение равновесия, согласно второму закону Ньютона,

$$F_{max} = ma_{max}. \tag{6}$$

С другой стороны, модуль этой силы пропорционален амплитуде A колебаний:

$$F_{max} = kA. \tag{7}$$

Приравняв правые части (6) и (7), имеем $ma_{max} = kA \Rightarrow a_{max} = \frac{k}{m} A$.

Второй способ сводится к определению ускорения как второй производной смещения или первой производной скорости тела по времени: $a = \upsilon' = x''$. С учетом выражений (3) и (4) получаем:

$a = -\omega_0^2 A \cos\omega_0 t = -\frac{k}{m} A \cos\sqrt{\frac{k}{m}} t \Rightarrow$ модуль максимального ускорения

$a_{max} = \omega_0^2 A = \frac{k}{m} A$ или $a_{max} \approx 6,7$ м/с^2.

д) Период колебаний пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \cdot 3,14\sqrt{\frac{0,3}{20}} = 0,77 \text{ (с)}.$$

Частота $\nu = \frac{1}{T} \approx 1,3$ (Гц), циклическая частота $\omega_0 = 2\pi\nu = 8,16$ рад/с.

е) Зависимость смещения x от времени в данном случае, когда тело выведено из положении равновесия, будет иметь вид:

$x = \cos\omega_0 t = A\cos\frac{2\pi}{T} t$ или $x = 0,1\cos 8,16t$ (м).

ж) Скорость груза в момент времени $t_1 = 0,15$ с определим из (4):

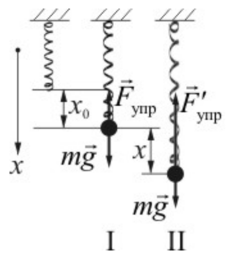
$\upsilon = -8,16 \cdot 0,1\sin 8,16 \cdot 0,15 = -0,816\sin(1,224) = -0,28$ (м/с).

Ответ: 20 Н/м; 0,1 м; 0,82 м/с; 6,7 м/с^2;
$x = 0,1\cos 8,16t$ (м); –0,28 м/с.

1.2.26. Тело, подвешенное на цилиндрической пружине, растягивает ее на величину $x_0 = 2,5$ см. Затем тело смещают из положения равновесия вниз по вертикали и отпускают. Определите период возникших колебаний тела.

Решение:

Когда тело совершает колебания под действием силы упругости $F_{упр} = -kx$, то период его колебаний можно определить по формуле $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. В данном случае на тело действуют силы упругости и тяжести $m\vec{g}$. Определим влияние силы тяжести на колебания тела.



Если тело неподвижно (состояние I на рисунке), то равнодействующая сил, приложенных к телу, равна нулю. В проекции на ось Ox имеем $mg - F_{упр} = 0$ или $mg - kx_0 = 0$ (1) $\Rightarrow mg = kx_0$. (2)

Сместив тело из положения равновесия на x (состояние II на рисунке), пружина растянется на величину ($x_0 + x$). В этом положении равнодействующая сил тяжести и упругости:

$$F = mg - k(x_0 + x). \tag{3}$$

С учетом (2) выражение (3) примет вид

$$F = -kx, \tag{4}$$

а это значит, что равнодействующая сил тяжести $m\vec{g}$ и упругости $F'_{упр}$ пропорциональна растяжению пружины и противоположна ему по направлению, если только это растяжение отсчитывать от положения равновесия тела, подвешенного на пружине. Таким образом, и при наличии силы тяжести тело будет совершать гармонические колебания, период которых определится по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \tag{5}$$

С учетом (2): $\frac{m}{k} = \frac{x_0}{g}$, формулу для периода колебаний (5) запишем в виде

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{x_0}{g}} = 2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{0{,}025}{10}} \approx 0{,}3 \text{ (с).}$$

Ответ: 0,3 с.

1.2.27. Шарик, подвешенный на невесомой упругой пружине, совершает колебания с периодом T и амплитудой A по вертикали. Определите модуль максимального ускорения a_{max} шарика, модуль скорости шарика в моменты, когда модуль его ускорения равен $0{,}75a_{max}$.

Решение:

При гармонических колебаниях по закону $x = A\cos\omega_0 t$ скорость колеблющегося тела равна первой производной смещения тела по времени:

$$\upsilon = x' = -\omega_0 A\sin\omega_0 t. \tag{1}$$

Ускорение колеблющегося тела равно второй производной смещения по времени или первой производной скорости по времени:

$$a = x'' = \upsilon' = -\omega_0^2 A\cos\omega_0 t\,, \tag{2}$$

где $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ – собственная частота свободных колебаний тела.

Из (2) максимальное ускорение тела

$$a_{max} = -\omega_0^2 A = -\frac{4\pi^2}{T^2}A\,. \tag{3}$$

Для нахождения скорости колеблющегося тела в моменты, когда модуль ускорения $a = 0{,}75a_{max}$, преобразуем (1) и (2) к виду:

$$\sin\omega_0 t = -\frac{\upsilon}{\omega_0 A} = -\frac{\upsilon}{\upsilon_{\max}} \quad (\omega_0 A = \upsilon_{\max} \text{ – модуль максимальной скорости}); \tag{4}$$

$$\cos\omega_0 t = -\frac{a}{\omega_0^2 A} = -\frac{a}{a_{\max}}. \tag{5}$$

Возведем обе части выражений (4) и (5) в квадрат и сложим почленно:

$$\sin^2\omega_0 t + \cos^2\omega_0 t = \left(\frac{\upsilon}{\upsilon_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{a}{a_{\max}}\right)^2 = 1. \tag{6}$$

Из равенства (6), с учетом, что $a = \frac{3}{4}a_m$, получим $\frac{\upsilon}{\upsilon_m} = \sqrt{\frac{7}{16}}$.

Тогда скорость в этот момент $\upsilon = \frac{\sqrt{7}}{4}\upsilon_m = \frac{\sqrt{7}}{4}\omega_0 A = \frac{\sqrt{7}\,2\pi A}{4T} = \frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{\pi A}{T}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{7}\pi A}{2T}$.

1.2.28. К пружине поочередно подвешивают два груза. Период колебаний первого груза T_1 = 13 с, второго – T_2 = 4 с. Определите период T колебаний, если оба груза одновременно подвесить к этой пружине.

Решение:

Период колебаний груза массой m_1, подвешенного к пружине жесткостью k,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}, \tag{1}$$

период колебаний груза массой m_2 на той же пружине

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}. \tag{2}$$

Если к этой пружине подвесить оба груза, период

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}. \tag{3}$$

Выразив из (1) m_1, из (2) – m_2 и подставив их выражения в (3), получим:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{kT_1^2}{4\pi^2} + \frac{kT_2^2}{4\pi^2}}{k}} = \sqrt{T_1^2 + T_2^2} = 4 \text{ (с)}.$$

Ответ: 4 с.

1.2.29. Груз массой m = 450 г, подвешенный на пружине жесткостью k = 20 Н/м, совершает гармонические колебания, полная механическая энергия которых W = 225 мДж. Определите период и амплитуду колебаний, а также максимальную скорость груза в процессе колебаний.

Решение:

Период гармонических колебаний груза массой m, подвешенного на пружине жесткостью k,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0{,}94 \text{ (с).}$$

Известно, что при гармонических колебаниях полная механическая энергия остается постоянной, равной сумме кинетической $W_к$ и потенциальной $W_п$ энергий системы, или максимальной кинетической энергии $W_{к_{max}}$, или максимальной потенциальной энергии $W_{п_{max}}$, т. е.

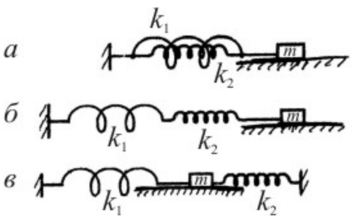
$$W_к + W_п = W = \text{const} = \frac{m\upsilon_{max}^2}{2} = \frac{kA^2}{2}.$$

Из этого выражения

$$\upsilon_{max} = \sqrt{\frac{2W}{m}} \approx 3{,}2 \text{ (м/с)}; \; A = \sqrt{\frac{2W}{k}} = 0{,}15 \text{ (м).}$$

Ответ: 0,94 с; 3,2 м/с; 0,15 м.

Колебательные системы



1.2.30. Грузик массой m закреплен на горизонтальных пружинах, как изображено на рисунках *а*, *б*, *в*. Коэффициенты жесткости пружин – k_1 и k_2. Трение в колебательных системах отсутствует. Определите периоды колебаний в данных системах.

Решение:

а) При параллельном соединении пружин при небольшом смещении тела массой m от положения равновесия деформация (сжатие или растяжение) обеих пружин будет одинакова: $x_1 = x_2 = x$, а возникающие при этом силы упругости F_1 и F_2 будут различны и направлены в сторону, противоположную смещению тела, т. е. результирующая сила $F = F_1 + F_2$. Коэффициент жесткости (упругости)

$$k = \frac{F}{x} = \frac{F_1}{x} + \frac{F_2}{x} = k_1 + k_2.$$

Тогда период колебаний такой системы

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}.$$

б) Пружины соединены последовательно. При небольшом смещении тела массой m деформация пружин

$$x = x_1 + x_2, \tag{1}$$

где x_1 и x_2 – деформация каждой пружины.

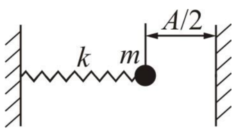
В силу невесомости пружин, согласно третьему закону Ньютона, каждая пружина деформируется одинаковой силой F. Поэтому выражение (1) можно записать в виде $\dfrac{F}{k} = \dfrac{F}{k_1} + \dfrac{F}{k_2} \Rightarrow \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$ или $k = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$.

Период колебаний в данной системе

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}.$$

в) При небольшом смещении тела массой m из положения равновесия деформация каждой пружины будет одинакова: $x = x_1 = x_2$. Одна пружина растягивается на x, другая – на такую же величину сжимается. На одну действует возвращающая сила $F_1 = -k_1 x$, на другую – $F_2 = -k_2 x$. Обе силы одного направления. Результирующая сила $F = -kx$ окажется $F = F_1 + F_2$. Таким образом, имеем общую жесткость $k = k_1 + k_2$, как в случае *а*, т. е. общая жесткость определяется как при параллельном соединении. Период $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1 + k_2}}$.

Ответ: *а* и *в*) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1 + k_2}}$; *б*) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$.



1.2.31. Колебательная система представляет пружинный маятник, совершающий колебания в горизонтальной плоскости с амплитудой A и периодом T_0. На расстоянии $A/2$ от положения равновесия устанавливается массивная стальная плита. Определите период колебаний данной системы, если соударения маятника с плитой абсолютно упругие.

Решение:

Период T колебаний такой системы складывается из времени t_1 прохождения расстояний, равных двум амплитудам колебаний влево (отклонения от положения равновесия и возвращения к нему), и времени t_2 прохождения двух расстояний $A/2$ каждое при отклонении от положения равновесия на $A/2$ и возвращении к нему.

Время t_1 равно полупериоду $\dfrac{T_0}{2}$:

$$t_1 = \frac{T_0}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (1)$$

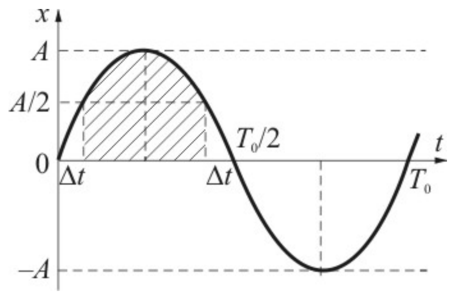
Время t_2 определим из уравнения колебаний

$$x = A\sin\frac{2\pi}{T_0}\cdot\frac{t_2}{2} = \frac{A}{2}.$$

$$\sin\frac{\pi t_2}{T_0} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi t_2}{T_0} = \frac{\pi}{6} \text{ и время } t_2 = \frac{T_0}{6} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (2)$$

С учетом (1) и (2) $T = t_1 + t_2 = \pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} + \dfrac{\pi}{3}\sqrt{\dfrac{m}{k}} = \dfrac{4}{3}\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = \dfrac{2}{3}T_0$.

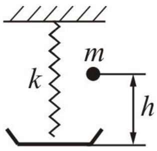
Примечание. При рассмотрении графика зависимости смещения колеблющейся точки по закону $x = A\sin\dfrac{2\pi}{T}t$ видно, что период колебаний такой системы



включает времена $\frac{T_0}{2}$ и $2\Delta t$. Из ряда решенных задач известно, что на прохождение расстояния $A/2$ необходимо время $\Delta t = T_0/12$. Поэтому период колебаний такой системы составит

$$T = \frac{T_0}{2} + 2\frac{T_0}{12} = \frac{2}{3}T_0.$$

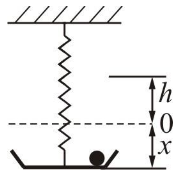
Ответ: $\frac{2}{3}T_0$.



1.2.32. На чашку, неподвижно висящую на невесомой пружине жесткостью k, с высоты h свободно падает пластилиновый шарик массой m. Определите амплитуду A возникших колебаний, полагая удар пластилинового шарика о чашку абсолютно неупругим. (Рассмотрим два случая: а) массой чашки пренебречь; б) масса чашки M.)

Решение:

а) Пластилиновый шарик попадает на невесомую чашку, обладая кинетической энергией, которая практически полностью переходит в кинетическую энергию системы «чашка–шарик». Пусть при этом максимальное смещение системы вниз до остановки станет равным x, пружина при этом растянется на величину x. Поэтому можно считать, что потенциальная энергия шарика в поле тяготения $W_{\text{п.т}} = mg(h + x)$ полностью переходит в потенциальную энергию упругодеформированной пружины $W_{\text{п.упр}} = \frac{kx^2}{2}$: $mg(h+x) = \frac{kx^2}{2}$. Решая квадратное уравнение $kx^2 - 2mgx - 2mgh = 0$, получаем

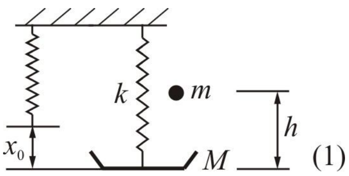


$$x_{1,2} = \frac{2mg \pm \sqrt{(2mg)^2 + 8kmgh}}{2k}$$

или

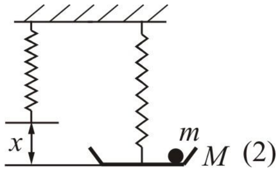
$$x_{1,2} = \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgh}{k}}.$$

Оба полученных значения соответствуют равенству нулю скорости системы, т. е. крайним (нижнему и верхнему) положениям колеблющейся системы. Значение $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{mg}{k}$ определяет положения равновесия системы «чашка–шарик». Тогда $x_{1,2} = \frac{mg}{k} \pm A \Rightarrow A = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgh}{k}} = \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}$.



б) Подвесив чашку массой M к пружине жесткостью k, наблюдаем деформацию растяжения пружины на величину x_0. Это состояние равновесия соответствует условию

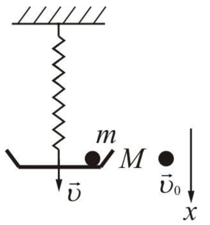
$$Mg = kx_0. \quad (1)$$



Если шарик массой m положить на чашку, новое состояние равновесия системы будет соответстовать условию

$$(M+m)g = kx. \tag{2}$$

Относительно этого положения и возникнут колебания системы, полная механическая энергия которых постоянна и равна $\frac{kA^2}{2}$ (A – амплитуда возникших после падения шарика на чашку колебаний).



Для нахождения амплитуды воспользуемся законом сохранения энергии: после падения шарика на чашку система обладает кинетической энергией $\frac{(m+M)\upsilon^2}{2}$ и потенциальной энергией деформированной пружины относительно положений равновесия (1–2) $\frac{k(x-x_0)^2}{2}$:

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{(m+M)\upsilon^2}{2} + \frac{k(x-x_0)^2}{2} = \text{const}. \tag{3}$$

Скорость υ определим из закона сохранения импульса для неупругогоудара шарика о чашку в проекции на ось Ox: $m\upsilon_0 = (m+M)\upsilon$. Отсюда скорость, с которой движется чашка с шариком, $\upsilon = \frac{m}{m+M}\upsilon_0$, где $\upsilon_0 = \sqrt{2gh}$ – скорость шарика в момент падения на чашку. С учетом этого

$$\upsilon = \frac{m}{m+M}\sqrt{2gh}. \tag{4}$$

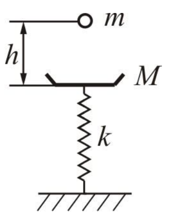
Из равенств (1) и (2) деформация пружины

$$(x-x_0) = \frac{mg}{k}. \tag{5}$$

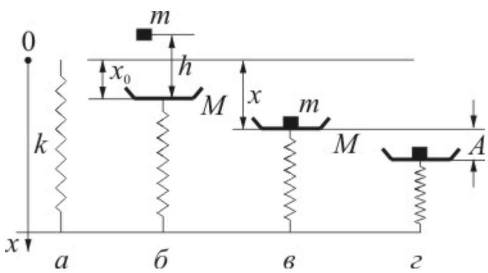
Подставим (4) и (5) в (3), получим $\frac{kA^2}{2} = \frac{m^2gh}{m+M} + \frac{m^2g^2}{2k} \Rightarrow$ амплитуда возникших колебаний $A = \sqrt{\frac{2m^2gh}{k(m+M)} + \left(\frac{mg}{k}\right)^2} = \frac{mg}{k}\sqrt{\frac{2hk}{(m+M)g}+1}$.

Ответ: а) $A = \frac{mg}{k}\sqrt{\frac{2kh}{mg}+1}$; б) $A = \frac{mg}{k}\sqrt{\frac{2hk}{(m+M)g}+1}$.

1.2.33. На чашку пружинных весов с высоты h свободно падает грузик массой m. Жесткость пружины весов k. Масса чашки M, массой пружины можно пренебречь. Определите циклическую частоту ω_0 и амплитуду A возникших свободных гармонических колебаний груза с чашкой весов. Считать соударение грузика с чашкой весов абсолютно неупругим, но грузик к чашке весов не прилипает.



Решение:



На недеформированную пружину жесткостью k (*а*) установили чашку массой M. Условие равновесия чашки весов до падения на нее грузика (*б*) имеет вид $Mg = kx_0$, (1)
где x_0 – деформация пружины под действием чашки. После падения грузика на чашку возникают колебания относительно положения равновесия чашки весов с грузиком:

$$(M + m)g = kx, \tag{2}$$

где x – деформация пружины под действием чашки весов с грузом.

Амплитуду гармонических колебаний определим, воспользовавшись законом сохранения механической энергии. После падения грузика на чашку относительно нулевого уровня, показанного на рисунке, энергия

$$W_{\text{I}} = \frac{(m+M)\upsilon^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2} - (m+M)gx_0 \tag{3}$$

($\frac{(m+M)\upsilon^2}{2}$ – кинетическая энергия системы «чашка–грузик» после падения грузика на чашку; $\frac{kx_0^2}{2}$ – потенциальная энергия деформированной пружины под действием чашки; $-(M + m)gx_0$ – потенциальная энергия системы в гравитационном поле Земли относительно нулевого уровня).

В процессе колебаний, когда система окажется в крайнем нижнем положении (*г*), кинетическая энергия в системе отсутствует и полная энергия станет

$$W_{\text{II}} = \frac{k(x+A)^2}{2} - (m+M)g(x+A) \tag{4}$$

((x + A) – сжатие пружины; $\frac{k(x+A)^2}{2}$ – потенциальная энергия сжатой пружины; $-(m+M)g(x+A)$ – потенциальная энергия системы в гравитационном поле Земли). Приравняем правые части (3) и (4):

$$\frac{(m+M)\upsilon^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2} - (m+M)gx_0 = \frac{k(x+A)^2}{2} - (m+M)g(x+A). \tag{5}$$

Скорость υ системы «чашка–грузик» определим из закона сохранения импульса для неупругого удара в проекции на ось Ox:

$$m\upsilon_0 = (m+M)\upsilon \Rightarrow \upsilon = \frac{m}{m+M}\upsilon_0.$$

Скорость шарика в момент падения с высоты h $\upsilon_0 = \sqrt{2gh}$.

Тогда $\upsilon = \frac{m}{m+M}\sqrt{2gh}$. (6)

Решение системы уравнений (1), (2), (5) и (6) относительно A дает результат:

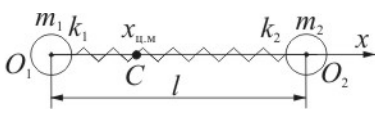
$$A=\sqrt{\frac{2m^2gh}{k(m+M)}+\left(\frac{mg}{k}\right)^2}=\frac{mg}{k}\sqrt{\frac{2kh}{(m+M)g}+1}\,.$$

Ответ: $A=\dfrac{mg}{k}\sqrt{\dfrac{2kh}{(m+M)g}+1}$.

1.2.34. Колебательная система состоит из двух шаров массами m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$), соединенных невесомой пружиной, как показано на рисунке. Если закрепить не-

подвижно первый шар, то второй шар будет совершать горизонтальные колебания с циклической частотой ω_2 = 4 рад/с, если закрепить второй шар, то циклическая частота горизонтальных колебаний первого шарастанет ω_1 = 3 рад/с. Определите циклическую частоту возникающих горизонтальных колебаний системы двух шаров после того, как пружины сжимают на некоторую величину и отпускают. Трение не учитывать.

Решение:



При горизонтальных колебаниях двух шаров, соединенных пружиной, центр масс системы всегда остается в покое (точка C на рисунке). При отсутствии внешних сил в соответствии с теоремой о движении центра масс оба незакрепленных шарика колеблются с одинаковой циклической частотой относительно положения центра масс, т. е.

$$\omega=\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}=\sqrt{\frac{k_2}{m_2}}\,, \tag{1}$$

где k_1 и k_2 – жесткости частей пружины от центра масс до шаров.

Из закона Гука известно, что жесткость пружины обратно пропорциональна ее длине:

$$k_1=k\frac{l}{|O_1C|}\,, \tag{2}$$

$$k_2=k\frac{l}{|CO_2|} \tag{3}$$

(k – жесткость всей пружины; l – ее длина; O_1C – расстояние от первого шара до центра масс; CO_2 – расстояние от центра масс до второго шара).

Задача сводится к определению положения центра масс. Выберем ось Ox, проходящую через центры шаров, с началом в центре первого шара (точка O_1). Тогда для координаты $x_{ц.м}$ центра масс выполняется равенство: $x_{ц.м}=\dfrac{m_2l}{m_1+m_2}$ ($O_1C=x_{ц.м}$; $CO_2=l-x_{ц.м}$). Выражения (2) и (3) примут вид

$$k_1=k\frac{m_1+m_2}{m_2}\,; \tag{4}$$

$$k_2=k\frac{m_1+m_2}{m}\,. \tag{5}$$

Подставим (4) и (5) в (1), получим:

$$\omega = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}. \qquad (6)$$

Приведем (6) к виду

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2} + \frac{k}{m_1}}. \qquad (7)$$

Из условия задачи циклические частоты колебаний одного из шаров при удержании другого равны соответственно

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}}, \qquad (8)$$

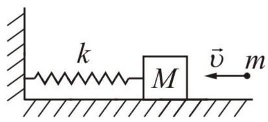
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_2}}. \qquad (9)$$

Тогда $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = 5$ (рад/с).

Примечание. Выражение $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = m_{пр}$ в формуле (6) называется приведенной массой системы тел, поэтому циклическая частота колебаний системы определяется: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_{пр}}}$; период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_{пр}}{k}}$.

Ответ: 5 рад/с.

1.2.35. На гладкой горизонтальной поверхности покоится брусок массой M = 9,99 кг, соединенный с вертикальной стенкой горизонтальной невесомой пружиной жесткостью k. Пуля массой m = 10 г, летящая горизонтально со скоростью υ = 600 м/с, направленной вдоль оси пружины, застревает в бруске. При этом возникают колебания с амплитудой A = 12 см. Определите период возникших колебаний.

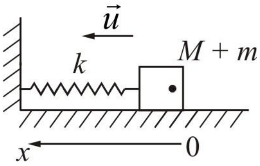


Решение:

После попадания пули в брусок система «брусок–пуля» в отсутствие внешних сил начинает совершать гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + M}{k}}, \qquad (1)$$

где (M + m) – масса колеблющейся системы, представляющей собой горизонтальный пружинный маятник.



Жесткость k невесомой пружины определим из закона сохранения и превращения энергии при гармонических колебаниях:

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{(m + M)u^2}{2} = \text{const}, \qquad (2)$$

где $\dfrac{kA^2}{2}$ – максимальная потенциальная энергия сжатой пружины; $\dfrac{(m+M)u^2}{2}$ – максимальная кинетическая энергия системы «брусок–пуля», приобретенная в системе после неупругого взаимодействия пули с бруском.

Из (2) жесткость пружины

$$k = \frac{(m+M)u^2}{A^2}. \qquad (3)$$

Для определения скорости $\vec{u}$ системы после взаимодействия пули с бруском воспользуемся законом сохранения импульса в проекции на ось Ox:

$$m\upsilon = (M+m)u \Rightarrow u = \frac{m\upsilon}{M+m}. \qquad (4)$$

Подставим (4) в (3):

$$k = \frac{(m+M)m^2\upsilon^2}{A^2(m+M)^2} = \frac{m^2\upsilon^2}{(m+M)A^2}. \qquad (5)$$

Период колебаний с учетом (1) и (5)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(m+M)(m+M)A^2}{m^2\upsilon^2}} = 2\pi\frac{(m+M)A}{m\upsilon}.$$

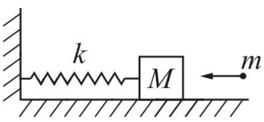
Проверка единицы измерения:

$$[T] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}}{\text{кг}\cdot\text{м}} = \text{с}.$$

Расчет показывает:

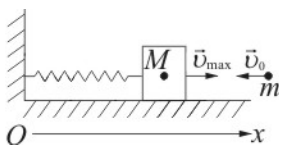
$$T = 2\cdot 3{,}14\frac{(10+9990)\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}12}{10\cdot 10^{-3}\cdot 600} \approx 1{,}26 \text{ (с)}.$$

Ответ: 1,26 с.



1.2.36. На гладкой горизонтальной поверхности брусок массой *M*, соединенный с вертикальной стенкой невесомой пружиной, совершает гармонические колебания с амплитудой *A* и периодом *T*. Вдоль оси пружины (в горизонтальном направлении) летит пуля массой *m*. После взаимодействия пули с бруском она застревает в бруске и колебания прекращаются. Определите скорость $\vec{\upsilon}_0$ пули.

Решение:



Колебания бруска могут прекратиться только в случае, когда он будет находить положение равновесия навстречу летящей пуле. На рисунке видно, что брусок должен двигаться слева направо и его скорость будет максимальной $\vec{\upsilon}_{max}$. Из закона сохранения импульса в проекции на ось Ox:

$$M\upsilon_{max} - m\upsilon_0 = 0 \Rightarrow \text{скорость пули } \upsilon_0 = \frac{M}{m}\upsilon_{max}. \qquad (1)$$

Максимальную скорость бруска в процессе гармонических колебаний определим из закона сохранения и превращения механической энергии:

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{M\upsilon_{\max}^2}{2} = \text{const} \Rightarrow \upsilon_{\max} = \sqrt{\frac{k}{M}}A, \tag{2}$$

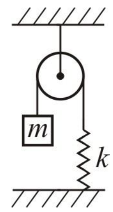
где k – жесткость пружины; $\sqrt{\frac{k}{M}} = \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ (3) – циклическая частота гармонических колебаний бруска, связанная с периодом T колебаний соотношением (3).

С учетом (2) и (3) выражение (1) для определения скорости пули примет вид:

$$\upsilon_0 = \frac{M}{m} \cdot \sqrt{\frac{k}{M}}A = 2\pi\frac{MA}{mT}.$$

Проверка единицы: $[\upsilon] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{с}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Ответ: $2\pi\frac{MA}{mT}$.



1.2.37. Груз массой m связан с невесомой пружиной жесткостью k с помощью нерастяжимой нити, перекинутой через неподвижный невесомый блок. Нижний конец пружины закреплен, как изображено на рисунке. Определите период малых колебаний этой системы. Масса нити пренебрежимо мала, трение в системе отсутствует.

Решение:

В момент, когда система находится в равновесии, сила тяжести, действующая на груз, будет равна силе упругости нити, которая, в свою очередь, согласно третьему закону Ньютона окажется равной силе, с которой пружина действует на нить, т. е.

$$mg = kx_0, \tag{1}$$

где x_0 – деформация пружины.

Выведем систему из равновесия, опустив груз на малую величину x, и предоставим ее самой себе. Система начнет совершать гармонические колебания. Закон сохранения энергии при гармонических колебаниях будет иметь вид:

$$-mg(x + x_0) + \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{k(x + x_0)^2}{2} = \text{const}, \tag{2}$$

где $-mg(x + x_0)$ – потенциальная энергия груза относительно положения равновесия (отрицательная); $\frac{m\upsilon^2}{2}$ – кинетическая энергия груза; $\frac{k(x + x_0)^2}{2}$ – потенциальная энергия деформированной пружины.

Скорость груза равна первой производной перемещения $(x + x_0)$ по времени: $\upsilon = (x + x_0)' = x'$.

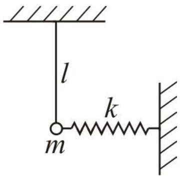
Тогда закон сохранения энергии (2) запишем в виде:

$$-mgx - mgx_0 + \frac{m(x')^2}{2} + \frac{k(x + x_0)^2}{2} = \text{const}.$$

Продифференцируем это уравнение по времени (t):

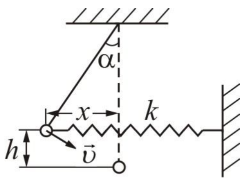
$$-mgx' + \frac{m2x'x''}{2} + \frac{k2(x+x_0)x'}{2} = 0 \Rightarrow x'' + \frac{k}{m}x = 0$$ – получаем дифференциальное уравнение гармонических колебаний, циклическая частота которых $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, а период $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Ответ: $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.



1.2.38. Колебательная система представляет собой маятник с пружинной связью. Определите период T малых колебаний маятника в виде груза массой m на легком стержне длиной l, к концу стержня крепится невесомая пружина жесткостью k. В положении равновесия пружина не деформирована, ее ось горизонтальна.

Решение:



Полную механическую энергию при малых колебаниях маятника в любой момент времени можно считать постоянной, равной сумме потенциальной и кинетической энергий системы. Пусть в некоторый момент времени, когда отклонение маятника от положений равновесия будет составлять небольшой угол α, полная энергия будет складываться из потенциальной энергии груза в поле тяготения

$$W_{\text{тяг}} = mgh \qquad (1)$$

($h = l(1-\cos\alpha) = 2l\sin^2\frac{\alpha}{2}$ (2) – высота подъема груза относительно положения равновесия) и потенциальной энергии упруго деформированной пружины $W_{\text{упр}} = \frac{kx^2}{2}$ (3) ($x = l\sin\alpha$ (4) – деформация растяжения пружины относительно положения равновесия), а также кинетической энергии, которой обладает движущийся со скоростью υ грузик массой m:

$$W_{\text{к}} = \frac{m\upsilon^2}{2} \text{ } (\upsilon \text{ – мгновенная скорость маятника}). \qquad (5)$$

Тогда по закону сохранения энергии с учетом (1)–(5) получаем

$$mg2l\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{kl^2\sin^2\alpha}{2} + \frac{m\upsilon^2}{2} = \text{const}. \qquad (6)$$

Так как угол α мал, то $\sin^2\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha^2}{4}$, $\sin^2\alpha = \alpha^2$, а скорость $\upsilon = l\alpha'$, α' – первая производная угла отклонения маятника, равная мгновенной угловой скорости, l – радиус дуги, описываемой грузиком на стержне.

С учетом вышесказанного выражение (6) будет иметь вид:

$$\frac{1}{2}\left(mgl + kl^2\right)\alpha^2 + \frac{ml^2(\alpha')^2}{2} = \text{const}. \qquad (7)$$

Продифференцировав равенство (7) по времени, получим

$$\frac{1}{2}\left(mgl + kl^2\right)2\alpha\alpha' + \frac{ml^2 2\alpha'\alpha''}{2} = 0$$

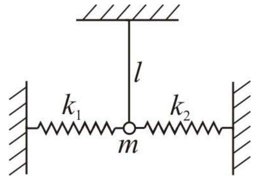
или

$(mgl + kl^2)\alpha + ml^2\alpha'' = 0 \Rightarrow \alpha'' + \left(\dfrac{g}{l} + \dfrac{k}{m}\right)\alpha = 0$ (8) – это выражение представляет собой уравнение гармонического колебания с циклической частотой $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l} + \dfrac{k}{m}}$. Отсюда период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{g}{l} + \dfrac{k}{m}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{mg + kl}{ml}}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg + kl}}.$$

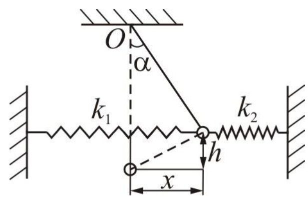
Ответ: $2\pi\sqrt{\dfrac{ml}{mg + kl}}$.

1.2.39. Определите период T малых колебаний маятника в виде шарика массой m, закрепленного на конце легкого стержня длиной l. К этому же концу стержня крепятся две невесомые пружины, жесткость которых k_1 и k_2. Данная колебательная система представлена на рисунке, малые колебания совершаются в плоскости рисунка.



Решение:

Первый способ (*энергетический подход*). Если вывести систему из положения равновесия и предоставить ее себе самой, то полная энергия системы будет оставаться постоянной, равной в любой момент времени сумме потенциальной энергии шарика mgh, его кинетической энергии $\dfrac{m\upsilon^2}{2}$, потенциальной энергии упругой деформации пружин $\dfrac{k_1x^2}{2}$ и $\dfrac{k_2x^2}{2}$:



$$mgh + \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{k_1x^2}{2} + \frac{k_2x^2}{2} = \text{const}.$$

По рисунку находим $h = l - l\cos\alpha = l(1 - \cos\alpha) = 2l\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$, $x = l\sin\alpha.$ Так как угол отклонения маятника от положения равновесия мал, то $\sin\dfrac{\alpha}{2} \approx \dfrac{\alpha}{2}$; $\sin\alpha \approx \alpha$, то

$$h = \frac{2l\alpha^2}{4} = \frac{l\alpha^2}{2}; \tag{1}$$

$$x = l\alpha. \tag{2}$$

Скорость шарика в любой момент времени $\upsilon = \omega l$, где ω – угловая скорость движения шарика по дуге окружности радиусом, равным длине стержня. Угловая скорость ω вращения шарика относительно точки подвеса O равна первой производной по времени от угла: $\omega = \alpha'$. Соответственно скорость

$$\upsilon = l\alpha'. \qquad (3)$$

С учетом (1)–(3) закон сохранения энергии запишем в виде:

$$\frac{mgl\alpha^2}{2} + \frac{ml^2(\alpha')^2}{2} + \frac{k_1 l^2\alpha^2}{2} + \frac{k_2 l^2\alpha^2}{2} = \text{const}.$$

Продифференцируем это выражение по времени t:

$$\frac{mgl^2\alpha\alpha'}{2} + \frac{ml^2 2\alpha'\alpha''}{2} + \frac{k_1 l^2 2\alpha\alpha'}{2} + \frac{k_2 l^2 2\alpha\alpha'}{2} = 0.$$

Преобразуем это выражение и получим

$(mgl + k_1 l^2 + k_2 l^2)\alpha + ml^2\alpha'' = 0 \Rightarrow \alpha'' + \left(\frac{g}{l} + \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m}\right)\alpha = 0$ – это дифференциальное уравнение гармонических колебаний, циклическая частота колебаний которых $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m}} = \sqrt{\frac{mg + k_1 l + k_2 l}{ml}}$, а период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg + k_1 l + k_2 l}}.$$

Ответ: $2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg + k_1 l + k_2 l}}$.

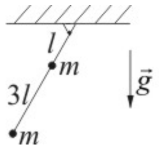
Второй способ (*динамический подход*).

Как видно на рисунке, при малом отклонении маятника от положения равновесия на шарик действуют составляющая силы тяжести $mg\sin\alpha$, со стороны пружин силы упругости k_1x и k_2x. Все силы направлены в сторону, противоположную направлению смещения шарика, и согласно второму закону Ньютона

$$-mg\sin\alpha - k_1 x - k_2 x = ma. \qquad (4)$$

Учитывая, что $\sin\alpha = \frac{x}{l}$ (см. рис.), равенство (4) перепишем в виде $a + \left(\frac{g}{l} + \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m}\right)x = 0$ – это уравнение гармонических колебаний, циклическая частота колебаний которых $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m}} = \sqrt{\frac{mg + k_1 l + k_2 l}{ml}}$, а период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg + k_1 l + k_2 l}}$.

Ответ: $2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg + k_1 l + k_2 l}}$.

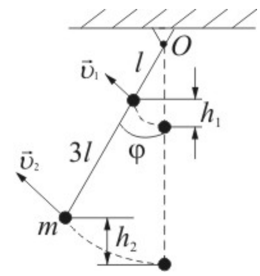


1.2.40. Маятник представляет собой шарнирно прикрепленный к потолку стержень длиной $4l$, на котором закреплены два маленьких груза массой m каждый (см. рис.). Определите период колебаний маятника при малых отклонениях его от положения равновесия. Трением в шарнире и сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение:

При решении задач данного типа необходимо за гармонически изменяющуюся величину принимать не координату, а угол φ, который является функцией времени. Следует получить уравнение гармонических колебаний $\varphi'' + \omega_0^2\varphi = 0$ и отсюда вычислить период $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

Воспользуемся законом сохранения механической энергии.



Для первого груза полная энергия равна сумме потенциальной энергии верхнего груза mgh_1 и его кинетической энергии $\dfrac{m\upsilon_1^2}{2}$:

$$mgh_1 + \frac{m\upsilon_1^2}{2} = W_1. \qquad (1)$$

Для второго груза полная энергия находится аналогично:

$$mgh_2 + \frac{m\upsilon_2^2}{2} = W_2. \qquad (2)$$

$$h_1 = l(1-\cos\varphi) = 2l\sin^2\frac{\varphi}{2} \; - \qquad (3)$$

высота, на которую поднят первый груз относительно положения равновесия; для второго груза, закрепленного на конце стержня,

$$h_2 = 4l(1-\cos\varphi) = 8l\sin^2\frac{\varphi}{2}. \qquad (4)$$

Скорости грузов будут отличаться в 4 раза, так как их угловые скорости равны, а радиусы описываемых дуг различны (l и $4l$): $\upsilon_1 = l\varphi'$ (5) и $\upsilon_2 = 4l\varphi'$ (6) (φ' – угловая скорость маятника – первая производная от угла отклонения φ по времени).

Запишем с учетом (1)–(6) полную энергию колебательной системы:

$$mg2l\sin^2\frac{\varphi}{2} + mg8l\sin^2\frac{\varphi}{2} + \frac{m(l\varphi')^2}{2} + \frac{m(4l\varphi')^2}{2} = \text{const}. \qquad (7)$$

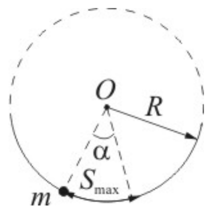
Так как угол φ мал, то $\sin^2\dfrac{\varphi}{2} \approx \dfrac{\varphi^2}{4}$ и равенство (7) примет вид $10gl\dfrac{\varphi^2}{4} + \dfrac{17(l\varphi')^2}{2} = \text{const}$ или $10g\varphi^2 + 34(l\varphi')^2 = \text{const}$.

Продифференцируем это выражение по времени, получим

$10g2\varphi\varphi' + 34l2\varphi'\varphi'' = 0$.

Это уравнение гармонических колебаний $\varphi'' + \dfrac{5g}{17l}\varphi = 0 \Rightarrow$ циклическая частота колебаний $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{5g}{17l}}$, а период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{17l}{5g}}$.

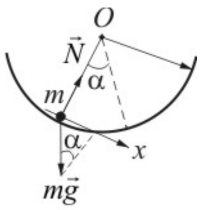
Ответ: $2\pi\sqrt{\dfrac{17l}{5g}}$.



1.2.41. Небольшой шарик массой m = 10 г совершает гармонические колебания внутри гладкой сфорической поверхности, радиус кривизны которой R = 10 см. Наибольшее смещение шарика из положения равновесия S_{max} = 5 мм. Определите циклическую частоту и энергию колебаний шарика.

Решение:

Так как колебания шарика гармонические, то сила, возвращающая шарик в положение равновесия, должна быть пропорциональна смещению шарика, т. е.



$$F_x = -kx, \qquad (1)$$

где k – коэффициент пропорциональности. Выбрав ось $0x$ перпендикулярно направлению силы реакции поверхности $\vec{N}$, получим, что $F_x = -mg\sin\alpha$ или ввиду малости угла

$$\alpha \ F_x = -mg\alpha. \qquad (2)$$

Величина смещения шарика от положения равновесия $x = \alpha R$. Тогда, объединив (1) и (2), можно записать

$$k\alpha R = mg\alpha \Rightarrow k = \frac{mg}{R}. \qquad (3)$$

Циклическая частота колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{R}} = 10 \ \text{(рад/с)}. \qquad (4)$$

Полная энергия колебаний такой гармонической системы будет оставаться постоянной:

$$W = \frac{kA^2}{2} \ \text{или} \ W = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}. \qquad (5)$$

Если учесть, что максимальное смещение точки S_x = A, то с учетом (4) $W = \dfrac{mgS_{max}^2}{2R} = 12{,}5 \cdot 10^{-6}$ (Дж) = 12,5 мкДж.

Ответ: ω_0 = 10 рад/с; W = 12,5 мкДж.

1.2.42. Тело (вертикально ориентированные пробирка с ртутью, деревянный брусок, ареометр и т. п.) массой m плавает в жидкости плотностью $\rho_ж$. Если тело вывести из положения равновесия легким толчком вертикально вниз, возникают малые колебания тела. Считая колебания незатухающими, площадь поперечного сечения тела *S*, определите период его колебаний.

Решение:

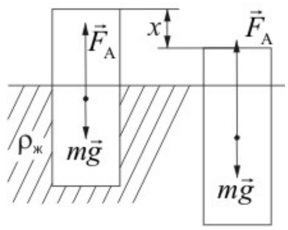
При решении задач данного типа необходимо определить силу, стремящуюся вернуть тело в положение равновесия, установить, пропорциональна ли она смещению тела от положения, т. е. необходимо оценить, является ли эта сила квазиупругой. Тогда независимо от природы этой силы циклическая частота и период колебаний, которые будут гармоническими, определятся по формулам $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, где k – коэффициент квазиупругой силы. (В частности, в случае пружинного маятника $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, где коэффициент k – жесткость пружины, а сила упругости $F_{\text{упр}} = -kx$ и обусловливает колебания.)

На погруженное в жидкость тело в положении равновесия действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и равная ей, направленная вертикально вверх, выталкивающая сила Архимеда $\vec{F}_\text{А}$, определяемая весом вытесненной телом жидкости:

$$mg = F_\text{А} = \rho_\text{ж} V g\,, \qquad (1)$$

где V – объем погруженного в жидкость тела.

Смещение тела по вертикали из положения равновесия на величину x приводит к изменению объема погруженной части тела, а следовательно, и выталкивающей силы. Равнодействующая приложенных к телу сил, направленная вертикально, $F = mg - \rho_\text{ж} g(V + \Delta V)$, (2)



где $\Delta V = Sx$ – изменение объема погруженной части тела. Учитывая выражение (1), получаем (2) в виде

$$F = -\rho_\text{ж} g\Delta V = -\rho_\text{ж} gSx = -kx\,. \qquad (3)$$

Из (3) видно, что на тело действует сила, пропорциональная смещению x, взятому с обратным знаком, т. е. квазиупругая сила. Коэффициент квазиупругой силы $k = \rho_\text{ж} gS$ – величина постоянная. Все это позволяет считать колебания гармоническими, циклическая частота которых $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\rho_\text{ж} gS}{m}}$, а период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho_\text{ж} gS}}\,.$$

Ответ: $2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho_\text{ж} gS}}$.

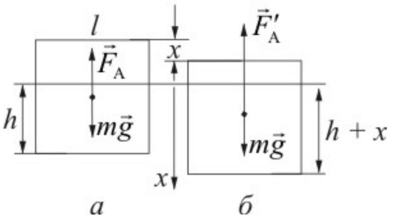
1.2.43. Льдина в форме куба с ребром длиной l = 60 см плавает в воде ($\rho = 10^3$ кг/м^3). При погружении льдины в воду на небольшую глубину и предоставлении самой себе она начинает совершать гармонические колебания с амплитудой A = 5 см. Пренебрегая силами вязкого трения, определите энергию происходящих колебаний льдины.

Решение:

Полная энергия возникших гармонических колебаний W будет равна максимальной потенциальной энергии $W_{п\max} = \frac{kA^2}{2}$, т. е.

$$W = \frac{kA^2}{2}, \tag{1}$$

где k – коэффициент пропорциональности при определении возвращающей силы, стремящейся вернуть тело в положение равновесия. Определим этот коэффициент. В положении равновесия сила тяжести $m\vec{g}$ льдины и сила Архимеда $\vec{F}_А$, действующая на нее, равны по модулю и противоположно направлены:



$$mg = F_А = \rho g h l^2, \tag{2}$$

где hl^2 – объем погруженной в воду части льдины ($а$).

При погружении льдины в воду на небольшую величину x объем погруженной в воду части льдины составил $(h + x)l^2$, сила Архимеда увеличилась и стала равной

$$F'_А = \rho g(h + x)l^2. \tag{3}$$

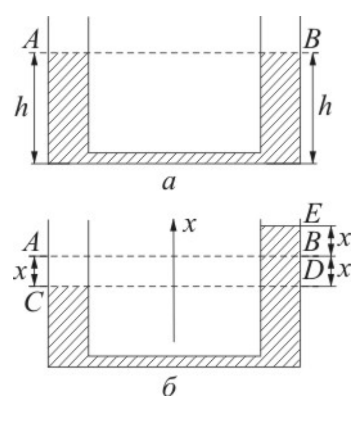
Результирующая сила, действующая на льдину в этом случае ($б$), в проекции на вертикальную ось Oy равна

$F_y = mg - F'_А = mg - \rho g(h + x)l^2$ (4).

С учетом условия равновесия (2) $F_x = -\rho g x l^2$, направлена к положению равновесия и пропорциональна смещению x льдины относительно этого положения, т. е. $F_x = -kx$, где $k = \rho g x l^2$. Тогда полная энергия (1) колебаний льдины $W = \frac{\rho g l^2 A^2}{2} = 4{,}5$ Дж.

Ответ: 4,5 Дж.

1.2.44. В сообщающихся сосудах цилиндрической формы налита однородная жидкость протностью ρ. Определите период малых колебаний жидкости, если площадь поперечного сечения каждого сосуда S, а масса жидкости в сосудах m. Трением в системе пренебречь.



Решение:

Если однородная жидкость находится в равновесии, ее свободные поверхности находятся на одном уровне в сообщающихся сосудах, т. е. на рисунке уровень AB.

При выведении жидкости из равновесия в левом колене ее уровень понизился на малую величину x, в правом – на эту же высоту поднялся.

Силы тяжести столбов жидкости до уровня CD одинаковы. Тогда на жидкость действует сила, стремящаяся вернуть ее в положение равновесия, равная силе тяжести столба жидкости высотой $ED = 2x$. Масса этого столба жидкости $\Delta m = \rho V = \rho S 2x$.

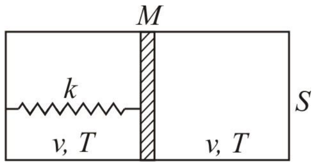
Так как величина x мала по сравнению с первоначальной высотой столбов жидкости ($x << h$), то можно считать, что возвращающая сила Δmg действует на всю массу жидкости m. Используя второй закон Ньютона, получим в проекции на вертикальную ось Ox:

$$-\rho S 2xg = ma \Rightarrow -2\rho Sgx = mx''.$$

Запишем последнее уравнение в виде $x'' + \frac{2\rho Sg}{m}x = 0$ или $x'' + \omega_0^2 x = 0$ – это уравнение гармонических колебаний с собственной частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{2\rho Sg}{m}}$ и периодом $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\rho Sg}}$.

Ответ: $2\pi\sqrt{\frac{m}{2\rho Sg}}$.

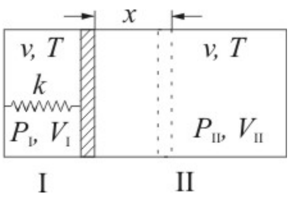
1.2.45. Горизонтально расположенный цилиндрический сосуд с основанием площадью S разделен массивным поршнем на две одинаковые части объемом V каждая. В каждом объеме содержится ν молей идеального газа при постоянной температуре T. Поршень соединен невесомой пружиной жесткостью k с основанием сосуда и может свободно перемещаться в горизонтальном направлении. Определите период $T_п$ малых колебаний поршня.



Решение:

При перемещении поршня влево относительно положения равновесия на небольшую величину x в левой части установится давление P_I, в правой – P_{II}.

Тогда на поршень сос стороны газа будут действовать силы давления $F_I = P_I S$ и $F_{II} = P_{II} S$, а также слева будет действовать сила упругости деформированной пружины $F_{упр} = kx$.



Согласно второму закону Ньютона результирующая сил, действующих на поршень, $P_{II}S - P_I S - kx = ma$. (1)

Для нахождения давлений P_I и P_{II} воспользуемся уравнением Клайперона-Менделеева:

$$P_I(V - \Delta V) = \nu RT; \qquad (2)$$

$$P_{II}(V + \Delta V) = \nu RT; \qquad (3)$$

где $\Delta V = xS$ – изменение объема каждой части при смещении поршня на x относительно положения равновесия.

Из (2) и (3) определим давления:

$$P_I = \frac{\nu RT}{V - xS};\ P_{II} = \frac{\nu RT}{V + xS}.$$

Подставим эти выражения в (1):

$$ma = \frac{vRT}{V + xS}S - \frac{vRT}{V - xS}S - kx = -x\left(\frac{2vRTS^2}{V^2 - (xS)^2} + k\right). \quad (4)$$

В задаче рассматриваются малые колебания поршня, поэтому можно полагать, что $V^2 - (xS)^2 \approx V^2$. Тогда выражение (4) преобразуется к виду

$a + \frac{2vRTS^2 + kV^2}{mV^2}x = 0$, а это есть уравнение гармонических колебаний, в котором $\sqrt{\frac{2vRTS^2 + kV^2}{mV^2}} = \omega$ – циклическая частота гармонических колебаний, связанная с периодом соотношением $T_п = \frac{2\pi}{\omega}$.

Таким образом, период малых колебаний поршня

$$T_п = 2\pi\sqrt{\frac{mV^2}{2vRTS^2 + kV^2}}.$$

Ответ: $2\pi\sqrt{\frac{mV^2}{2vRTS^2 + kV^2}}$.

1.2.46. Груз лежит на платформе, совершающей горизонтальные колебания с частотой v = 2 Гц и амплитудой A = 1 см. Коэффициент трения груза о платформу μ = 0,2. Определите, возможно ли скольжение груза по платформе.

Решение:

На груз, лежащий на платформе, действуют в вертикальном направлении сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$ со стороны платформы, при этом $N - mg = 0$ $\Rightarrow N = mg$. В горизонтальном направлении на груз действует сила трения покоя со стороны платформы

$$F_{тр} = \mu N = \mu mg. \quad (1)$$

Согласно второму закону Ньютона $F_{тр} = ma$. Максимальное значение силы трения покоя должно соответствовать максимальному значению ускорения платформы, с которым груз вместе с платформой совершает колебания: $F_{max} = ma_{max}$.

Если платформа с грузом, покоящимся относительно нее, совершает колебания по закону $x(t) = A\sin 2\pi vt$, то ускорение системы

$$a = x'' = -(2\pi v)^2 A\sin 2\pi vt = -a_{max}\sin 2\pi vt,$$

где $a_{max} = (2\pi v)^2 A$.

Тогда

$$F_{max} = 4\pi^2 v^2 mA. \quad (2)$$

Если груз покоится относительно платформы, то $F_{max} < \mu N \Rightarrow ma_{max} < \mu mg$ или $(2\pi v)^2 A$ (3) должно быть меньше μg (4).

Подставим числовые значения и сравним полученные значения выражений (3) и (4):

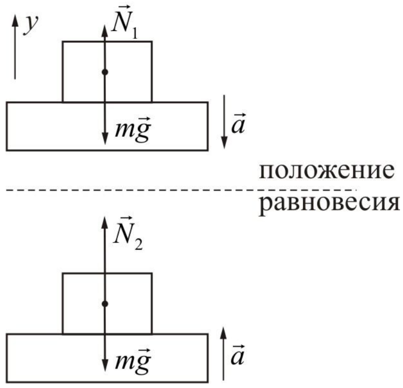
$(2\pi v)^2 A = 1{,}58$; $\mu g = 2$.

Следовательно, груз по платформе скользить не будет.

Ответ: скольжение груза невозможно.

1.2.47. На горизонтальной платформе, совершающей в вертикальном направлении гармонические колебания с амплитудой A = 40 см, лежит небольшое тело. Определите наименьший период колебаний системы, чтобы тело, лежащее на платформе, не отрывалось от нее.

Решение:



При движении платформы в вертикальном направлении на тело будут действовать сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции со стороны платформы $\vec{N}$. Тело не будет отрываться от платформы, если сила реакции $\vec{N}$ будет отлична от нуля во всех точках траектории движения.

Согласно второму закону Ньютона в проекции на ось Oy:

$$N - mg = ma_y \Rightarrow N = m(g + a_y). \tag{1}$$

Из (1) следует, что тело может отрываться от платформы в момент времени, когда ускорение $\vec{a}$ будет направлено противоположно оси Oy ($a_y < 0$). При гармонических колебаниях ускорение всегда направлено к положению равновесия. Поэтому очевидно, что отрыв тела возможен в момент времени, когда платформа с телом будет находиться выше положения равновесия. Если тело не отрывается от платформы, то $N > 0$, из (1)

$$mg + ma_y > 0 \Rightarrow g > -a_{y_{\max}}, \tag{2}$$

где максимальное ускорение колеблющегося тела

$$a_y = -\omega_0^2 A = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A \tag{3}$$

($\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ – циклическая частота, T – период колебаний, A – амплитуда колебаний, при которой тело еще не оторвется от платформа).

Подставим (3) в (2), получим

$$g > \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A. \tag{4}$$

При амплитуде колебаний A тело не отрывается от платформы при минимальном периоде колебаний, равном из (4): $T_{\min} = 2\pi\sqrt{\dfrac{A}{g}}$ = 1,3 с.

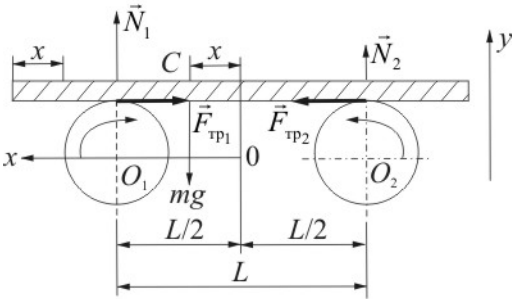
Примечание. Если бы был дан период T и амплитуда A_0 колебаний, то из (4) необходимо было выразить амплитуду возникающих при данном периоде T колебаний $A = g\left(\dfrac{T}{2\pi}\right)^2$ и провести анализ полученной амплитуды с заданной в задаче. Если A_0 окажется меньше A, тело не оторвется от платформы, если A_0 будет больше A, то тело будет отрываться от платформы.

Ответ: T = 1,3 с.

1.2.48. На двух одинаковых цилиндрических катках расположена однородная доска. Катки приводят в быстрое вращение навстречу друг другу. Расстояние между осями O_1 и O_2 катков L = 25 см, коэффициент трения между доской и катками μ = 0,2. Докажите, что доска будет совершать гармонические колебания. Определите период этих колебаний.

Решение:

Доска будет оставаться в равновесии, если центр ее будет расположен между осями цилиндрических катков. При быстром вращении катков между ними и доской будет происходить проскальзывание. Силы трения, действующие со стороны катков на доску, будут равны и направлены внутрь к центру доски.



Выведем доску из положения равновесия, сместив ее на малое расстояние x влево. В проекции на ось Ox возникает сила, стремящаяся вернуть доску в исходное положение,

$$F_x = -(F_{тр_1} - F_{тр_2}), \tag{1}$$

где $F_{тр_1} = \mu F_{д_1}$ – сила трения со стороны левого катка на доску, $F_{тр_2} = \mu F_{д_2}$ – сила трения со стороны правого катка на доску.

Силы давления доски на катки $F_{д_1}$ и $F_{д_2}$ согласно третьему закону Ньютона равны соответственно: $F_{д_1} = N_1$ и $F_{д_2} = N_2$.

Выражение (1) примет вид:

$$F_x = -\mu(N_1 - N_2). \tag{2}$$

Определим силы реакции со стороны катков N_1 и N_2 из условия равновесия доски в вертикальном направлении в проекции на ось Oy:

$$N_1 + N_2 - mg = 0, \tag{3}$$

и условия равенства моментов этих сил относительно оси, проходящей через точку C (см. рис.):

$$N_1\left(\frac{L}{2} - x\right) - N_2\left(\frac{L}{2} + x\right) = 0. \tag{4}$$

Из уравнения (3):

$$N_1 + N_2 = mg. \tag{5}$$

Из уравнения (4) с учетом (5):

$$(N_1 - N_2)\frac{L}{2} = (N_1 + N_2)x = mgx \Rightarrow N_1 - N_2 = 2\frac{mgx}{L}.$$

Возвращающая сила окажется $F_x = -2\frac{\mu mgx}{L}$. Отсюда коэффициент квазиупругой силы $k = 2\frac{\mu mg}{L}$.

Следовательно, доска совершает гармонические колебания с циклической частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{2\mu g}{L}}$.

Период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2\mu g}}$. Расчет показывает $T = 1{,}57$ с.

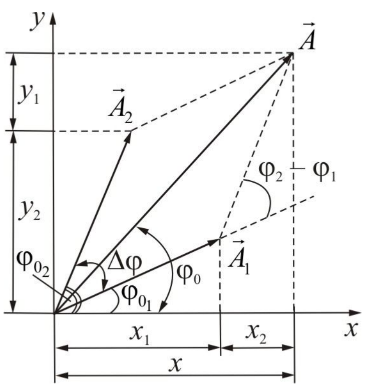
Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2\mu g}} = 1{,}57$ с.

Сложение колебаний

1.2.49. Два гармонических колебания одного направления совершаются по законам $x_1 = 0{,}02\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ (м) и $x_2 = 0{,}02\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ (м). Сложите эти колебания с помощью метода векторных диаграмм. Запишите уравнение результирующего колебания, определите его амплитуду и начальную фазу.

Решение:

Из условия задачи видно, что складываемые гармонические колебания имеют одинаковые амплитуды $A_1 = A_2 = 0{,}02$ м и одинаковые циклические частоты колебаний $\omega_1 = \omega_2 = \omega = 4\pi c^{-1}$. Начальная фаза первого колебания $\varphi_{0_1} = \frac{\pi}{3}$, второго – $\varphi_{0_2} = \frac{\pi}{6}$. Поскольку векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ вращаются с одинаковой угловой скоростью ω, равной циклической частоте колебаний, то разность фаз Δφ между ними будет оставаться постоянной: $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{6}$. Складывая два колебания методом векторных диаграмм (см. рис.), получаем результирующее колебание



$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{1}$$

где

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi} \text{ –} \tag{2}$$

амплитуда результирующего колебания. Так как амплитуды складываемых колебаний равны, то $A = A_1\sqrt{2(1+\cos\Delta\varphi)}$.

Начальная фаза φ_0 результирующего колебания определится по рисунку:

$$\mathrm{tg}\varphi_0 = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{A_1\sin\varphi_{0_1} + A_2\sin\varphi_{0_2}}{A_1\cos\varphi_{0_1} + A_2\cos\varphi_{0_2}}. \tag{3}$$

Учитывая, что $A_1 = A_2$, $\mathrm{tg}\varphi_0 = \frac{\sin\varphi_{0_1} + \sin\varphi_{0_2}}{\cos\varphi_{0_1} + \cos\varphi_{0_2}}$.

Расчет показывает, что $A \approx 0{,}039$ м = 3,9 см.

$\mathrm{tg}\varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = \mathrm{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$.

Уравнение (1) с учетом полученных данных будет иметь вид:

$$x = 3{,}9\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ (см).} \qquad (4)$$

Таким образом, сумма двух гармонических колебаний одного направления с одинаковыми частотами является гармоническим колебанием (4) с той же частотой, амплитуда и начальная фаза которого определяется формулами (2) и (3).

Ответ: A = 3,9 см; $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{4}$; $x = 3{,}9\cos\left(4\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ (см).

Затухающие колебания

1.2.50. Энергия затухающих колебаний маятника массой m = 400 г, происходящих в некоторой среде, за время t = 1,5 мин уменьшилась в n = 64 раза. Определите коэффициент сопротивления r среды.

Решение:

Коэффициент сопротивления r связан с коэффициентом затухания δ и массой m тела соотношением

$$r = 2\delta m. \qquad (1)$$

Для нахождения коэффициента затуханий δ воспользуемся уравнением затухающих колебаний

$$x = A_0 e^{-\delta t}\sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где $A = A_0 e^{-\delta t}$ (2) – убывающая со временем амплитуда смещения; ω – цикическая частота колебаний; A_0 и φ_0 – начальные амплитуда и фаза.

Из определения полной энергии W_0 тела в начальный момент времени ($W_0 = \dfrac{kA_0^2}{2}$) и энергии спустя время t – $W = \dfrac{kA^2}{2}$ видим, что энергия колебаний всегда пропорциональна квадрату амплитуды. Тогда

$$\frac{W_0}{W} = \left(\frac{A_0}{A}\right)^2 = n \Rightarrow \frac{A_0}{A} = \sqrt{n} = 8{,}0. \qquad (3)$$

Из выражения (2) с учетом (3) получаем

$$e^{\delta t} = 8{,}0 \Rightarrow \delta t = \ln 8{,}0 \Rightarrow \delta = \frac{\ln 8{,}0}{t}. \qquad (4)$$

Подставим (4) в (1), получим выражение для коэффициента сопротивления: $r = 2m\dfrac{\ln 8{,}0}{t}$.

Подставим числовые значения, получим значение коэффициента сопротивления $r = 2\cdot 0{,}4\dfrac{2{,}079}{90} = 0{,}018$ (кг/с).

Ответ: 0,018 кг/с.

Резонанс

1.2.51. Поезд движется со скоростью $\upsilon = 72$ км/ч. Расстояние между стыками рельсов $L = 20$ м. Определите длину нити маятника, подвешенного в вагоне поезда, если маятник интенсивно раскачивается.

Решение:

При прохождении колесами вагона стыков рельсов на маятник периодически действует внешняя сила, ее период действия определится как $T = \dfrac{L}{\upsilon}$. Циклическая частота колебаний этой силы $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\dfrac{\upsilon}{L}$. Собственная циклическая частота колебаний маятника $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$.

Если наблюдается интенсивное раскачивание маятника, то наступает резонанс, а это значит, что частота вынуждающей силы и собственная частота колебаний маятника оказываются равными: $\omega = \omega_0$ или $2\pi\dfrac{\upsilon}{L} = \sqrt{\dfrac{g}{l}} \Rightarrow l = \dfrac{gL^2}{4\pi^2\upsilon} = 0,5$ (м).

Ответ: 0,5 м.

Упругие волны

1.2.52. Упругая волна распространяется со скоростью $\upsilon = 60,0$ м/с. Частота колебаний $\nu = 30$ Гц. Определите разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух частиц среды, расположенных на расстоянии $\Delta r = 1$ м друг от друга в направлении распространения волны.

Решение:

Колебания частиц среды отстают по фазе от колебаний источника. Если фаза колебаний первой частицы среды $\varphi_1 = 2\pi\nu\left(t - \dfrac{r_1}{\upsilon}\right)$ (где r_1 – расстояние от источника до колеблющейся частицы; $\dfrac{r_1}{\upsilon} = \tau_1$ – время запаздывания возмущения в первую точку; t – время колебаний источника), то фаза φ_2 колебаний второй частицы, находящейся от источника на расстоянии r_2, определится аналогично $\varphi_2 = 2\pi\nu\left(t - \dfrac{r_2}{\upsilon}\right)$.

Разность фаз колебаний $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi\nu\dfrac{r_2 - r_1}{\upsilon} = \dfrac{2\pi\nu\Delta r}{\upsilon} = \pi$ ($\Delta r = r_2 - r_1$ – расстояние между колеблющимися частицами среды в волне).

Ответ: $\Delta\varphi = \pi = 3,14$ рад.

1.2.53. Уравнение упругой волны имеет вид $X = A\sin(ct - br)$, где A = 0,5 см; c = 628 рад/с; b = 2 м$^{-1}$. Определите частоту колебаний, длину волны, скорость распространения волны, максимальные значения скорости и ускорения частиц среды.

Решение:

Уравнение упругой волны согласно условию задачи запишем

$$X = 0{,}5\sin(628t - 2r)\ (\text{см}). \qquad (1)$$

В общем виде это уравнение имеет вид

$$X = A\sin\left(\omega t - \frac{\omega r}{\upsilon}\right), \qquad (2)$$

где $A = X_{max}$ – амплитуда колебаний частиц среды; $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая частота колебаний; ν – частота колебаний; υ – скорость распространения волны.

Анализ уравнений (1) и (2) позволяет получить A = 0,5 см = $5\cdot10^{-3}$ м; ω = 628 рад/с; $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 100$ Гц; сравнив $\frac{\omega r}{\upsilon} = 2r$, получим значение скорости распространения волны $\upsilon = \frac{\omega}{2} = 314$ м/с. Длина волны $\lambda = \frac{\upsilon}{\nu} = 3{,}14$ м. Закон изменения скорости υ_r колебаний частиц определим через первую производную по времени функции смещения частиц от положения равновесия:

$$\upsilon_r = X' = A\omega\cos\left(\omega t - \frac{\omega r}{\upsilon}\right).$$

Максимальное значение скорости частиц $\upsilon_{r_{max}} = A\omega = 3{,}14\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Взяв вторую производную по времени функции смещения частиц от положения равновесия, определим ускорение частиц:

$$a = X'' = -A\omega^2\sin\left(\omega t - \frac{\omega r}{\upsilon}\right).$$

Максимальное значение ускорения $a_{r_{max}} = A\omega^2 \approx 1972\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Ответ: 100 Гц; 3,14 м; 314 м/с; 3,14 м/с; 1972 м/с^2.

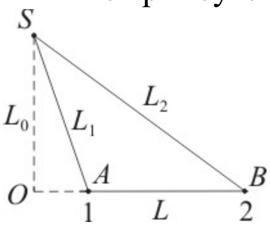
Звуковые волны

1.2.54. В безветренную погоду звук артиллерийского выстрела доходит до двух наблюдателей, расположенных на расстоянии L друг от друга, через время τ_1 = 3 с и τ_2 = 5 с после вспышки света. Определите местоположение орудия и расстояние L между наблюдателями, если кратчайшее расстояние от прямой, соединяющей наблюдателей, до орудия L_0 = 560 м. Скорость звука считать равной υ = 340 м/с.

Решение:

Местоположение орудия определим графически. Пусть источник звука является точечным источником, образующим сферическую волну. Мысленно поменяем местами источник звука (орудие) и приемник (наблюдателя). Местоположение орудия (точка S) определится точкой пересечения двух дуг, радиусы которых равны расстояниям $L_1 = \upsilon\tau_1 = 1020$ м и $L_2 = \upsilon\tau_2 = 1700$ м.

Из прямоугольных треугольников ΔSOA и ΔSOB выразим:



$$OA = \sqrt{L_1^2 - L_0^2} \ (1); \ OB = OA + L = \sqrt{L_2^2 - L_0^2} \qquad (2).$$

Искомое расстояние L между наблюдателями определим вычитанием из (2) выражения (1):

$$L = \sqrt{L_2^2 - L_0^2} - \sqrt{L_1^2 - L_0^2} = \sqrt{(\upsilon\tau_2) - L_0^2} - \sqrt{\upsilon\tau_1^2 - L_0^2} = 752 \text{ м}.$$

Ответ: 752 м.

1.3. Задачи для самостоятельного решения

Колебательное движение

1. Два тела с одинаковыми массами подвесили к двум одинаковым пружинам. Тело *1* оттянули вниз на 5 см, а тело *2* – на 8 см. Тела одновременно отпустили. Какое из них первым пройдет положение равновесия? (Одновременно)

2. Амплитуда колебаний материальной точки составляет A = 20 мм, а частота ν = 100 Гц. Определите путь, пройденный точкой за время t = 3 с. (24 м)

3. Точка, совершающая гармонические колебания, проходит за 4 полных колебания 1,6 м. Определите амплитуду колебаний точки. (0,1 м)

4. Мальчик, качающийся на качелях, достигает максимальной скорости 30 раз в минуту. Опеределите частоту колебаний качелей. (0,25 Гц)

5. Амплитуду колебаний гармонически колеблющегося тела увеличили в 3 раза. Как изменяется период колебаний тела, его максимальная скорость, максимальное ускорение, механическая энергия? (Период не изменится, максимальные скорость и ускорение увеличатся в 3 раза, полная энергия колебаний увеличится в 9 раз)

6. Тело совершает 72 колебания в минуту. Определите период и циклическую частоту колебаний. (0,83 с; 7,54 рад/с)

7. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону $x = 20\sin(100\pi t)$ см. Определите смещение точки при фазе $\varphi = \frac{\pi}{3}$. (17,3 см)

8. Материальная точка совершает колебания по закону $x = 0{,}2\sin\pi\,(t + 0{,}6)$. Определите период T и начальную фазу φ_0 колебаний. (2 с; $0{,}6\pi$)

9. Материальная точка совершает синусоидальные колебания с амплитудой A = 4 м, циклической частотой $\omega = \pi$ рад/с и начальной фазой $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ рад. Определите минимальное время после начала движения точки, когда она пройдет через положение равновесия. (0,5 с)

10. Уравнение движения точки имеет вид $x = 4\cos\pi\left(\frac{2t}{3} + \frac{1}{4}\right)$ (длина выражена в миллиметрах, время – в секундах). Определите амплитуду, циклическую частоту, период и начальную фазу колебаний. (4 мм; $\frac{2}{3}\pi$ рад/с; 3 с; $\frac{\pi}{4}$ рад)

11. Используя условие предыдущей задачи, определите максимальные значения скорости и ускорения точки. (8,37 мм/с; 17,5 мм/с^2)

12. Гармонические колебания происходят по закону $x = A\sin(\omega t)$. Определите амплитуду колебаний, если при фазе $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ рад смещение составляет 6 мм. (12 мм)

13. Материальная точка совершает колебания по закону $x = x_0\sin(\omega t)$ см. На сколько изменится ее координата за время, в течение которого фаза колебания φ изменится на 2π рад. (0 см)

14. Шарик на пружине совершает вертикальные колебания по закону $x = A\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot t\right)$. Сколько секунд понадобится, чтобы он прошел путь, равный амплитуде его колебаний. (1 с)

15. Материальная точка совершает косинусоидальные колебания с амплитудой $A = 0{,}06$ м, периодом $T = 0{,}02$ с и начальной фазой $\varphi_0 = 0$ рад. Какой вид имеет уравнение этой точки? ($x_{(t)} = 0{,}06\cos 100\pi t$)

16. Через какое минимальное время, считая от начала колебания, смещение колеблющейся материальной точки составит половину амплитуды? Период колебаний $T = 48$ с. В начальный момент времени точка находится в положении равновесия. (4 с)

17. Через какое минимальное время, считая от начала колебания, смещение колеблющейся материальной точки составит половину амплитуды? Период колебаний $T = 48$ с. В начальный момент времени точка находится на максимальном расстоянии от положения равновесия. (8 с)

18. В начальный момент времени материальная точка, совершающая гармонические колебания, находится в положении максимального отклонения от положения равновесия. Период колебаний $T = 0{,}2$ с, амплитуда колебаний $A = 0{,}3$ м. Какой вид имеет уравнение колебания? ($x_{(t)} = 0{,}3\cos 10\pi t$ м)

19. Материальная точка совершает гармонические колебания с циклической частотой $\omega_0 = 2$ рад/с и амплитудой $A = 20$ см. Определите скорости точки при прохождении положения равновесия и на расстоянии $x = 10$ см от положения равновесия. (0,4 м/с; 0,35 м/с)

20. Во сколько раз различаются средние скорости материальной точки, колеблющейся по закону $x_{(t)} = x_0\sin\omega t$, на первой и второй половинах амплитуды? (2)

21. Тело совершает гармонические колебания. Определите циклическую частоту колебаний, если максимальная сила, действующая на тело в процессе колебаний, $F = 8$ Н, а максимальный импульс $P = 16$ кг·м/с. (0,5 рад/с)

22. Гармонически колеблющееся тело имеет амплитуду $A = 0{,}4$ м и период колебаний $T = 1$ с. Определите максимальную скорость и максимальное ускорение колеблющегося тела. (2,51 м/с; 15,77 м/с^2)

23. Материальная точка массой $m = 10$ г колеблется по закону $x_{(t)} = 2\cos 10t$. Определите величину максимальной силы, действующей на точку. (0,2 Н)

24. Амплитуда гармонических колебаний маятника 6 см. Какую часть периода груз маятника находится не далее 3 см от положения равновесия? (1/3)

25. Запишите уравнение гармонических колебаний материальной точки, совершающей колебания с амплитудой $A = 5$ см, причем за время $t_0 = 2$ мин ею совершается $N = 300$ полных колебаний. Начальная фаза колебаний $\varphi_0 = 60°$. ($x = 0{,}05\cos\left(5\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ м)

26. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 2$ см и частотой $\nu = 2$ Гц. Запишите уравнение движения точки, если в начальный момент времени $t_0 = 0$ ее положение соответствует координате $x_0 = 1$ см. ($x = 0{,}02\cos\left(4\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ м)

27. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону $x = 0{,}02\cos\left(\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ м. Определите скорость и ускорение точки в момент времени $t = 2$ с. (–5,44 см/с; –9,86 см/с^2)

28. Материальная точка совершает гармонические колебания с периодом $T = 1$ с. Запишите уравнение колебаний точки, если в начальный момент времени она проходит положение равновесия с положительной скоростью $\upsilon_0 = 6{,}28$ см/с. ($x = 0{,}01\cos\left(2\pi t + \dfrac{3\pi}{2}\right)$ м)

29. Определите, используя единицы СИ, зависимость смещения материальной точки от времени, если известно, что она совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 30$ см, периодом $T = 2$ с, а в начальный момент времени точка находилась в положении равновесия. ($x_{(t)} = 0{,}3\sin\pi t$ или $x_{(t)} = 0{,}3\cos\left(\pi t - \dfrac{\pi}{2}\right)$)

30. Материальная точка массой m = 10 г совершает гармонические колебания с амплитудой A = 10 см. Определите частоту ν колебаний, если максимальная сила, действующая на точку, F_{max} = 10 мН. (ν = 0,5 Гц)

31. Материальная точка массой m = 10 г совершает гармонические колебания, описываемые уравнением $x = 0{,}1\cos 3\pi t$ (м). Определите полную энергию E колеблющейся точки. (44,4 мДж)

32. Материальная точка, совершающая гармонические колебания, в некоторый момент времени имеет смещение x = 4 см, скорость υ = 5 см/с и ускорение a = 80 см/с. Определите амплитуду A, период T и начальную фазу φ_0 колебаний, а также максимальные скорость и ускорение точки. (1,12 м; 15 с; 0,115π; 47 см/с; 19,5 см/с^2)

33. Используя условие предыдущей задачи, запишите математические выражения зависимостей скорости, кинетической, потенциальной и полной механической энергии колеблющейся точки от времени, если ее масса m = 20 г. ($\upsilon(t) = 0{,}3\pi\cos\pi t$; $W_к = 9\cdot10^{-4}\pi^2\cos^2\pi t$; $W_п = 9\cdot10^{-4}\pi^2\sin^2\pi t$; $W = 9\cdot10^{-4}\pi^2$)

34. Зависимость скорости материальной точки массой m от времени при гармонических колебаниях имеет вид $\upsilon(t) = \upsilon_{max}\cos\left(\omega_0 t + \dfrac{\pi}{6}\right)$. Определите смещение, потенциальную энергию точки в момент времени t = 0, потенциальную энергию в момент времени t и полную механическую энергию колеблющейся точки. ($\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\upsilon_{max}}{\omega_0}$; $\dfrac{m\upsilon_{max}^2}{8}$; $\dfrac{1}{2}m\upsilon_{max}^2\sin^2\left(\omega_0 t + \dfrac{\pi}{6}\right)$; $\dfrac{1}{2}m\upsilon_{max}^2$)

35. Используя условие предыдущей задачи, определите моменты времени, когда материальная точка оказывается в положении равновесия и максимально смещена от него. ($t_1 = \dfrac{n\pi - \frac{\pi}{6}}{\omega}$; $t_2 = \dfrac{n\pi + \frac{\pi}{3}}{\omega}$ (n – целые числа))

Маятники

36. Шарик, подвешенный на нити, отклонили на 8 см и отпустили. Период колебаний шарика T = 32 с. Какой путь пройдет шарик за 72 с? (72 см)

37. Зависит ли скорость, с которой маятник проходит положение равновесия, от амплитуды колебаний? Какова эта зависимость? (υ ~ кА)

38. Две материальные точки массами m_1 и m_2 подвешены на нерастяжимых невесомых нитях одинаковой длины и колеблются под действием силы тяжести. Каково отношение периодов T_1/T_2 колебаний этих математических маятников, если $m_2 = 3m_1$? (1)

39. Математический маятник, подвешенный на нити длиной l = 1 м, совершает косинусоидальные колебания с амплитудой A = 10 см. Начальная фаза φ_0 = 0. Напишите уравнение, описывающее зависимость смещения x от времени. ($x_{(t)}$ = 0,1cos3,165t м)

40. Математический маятник совершает косинусоидальные колебания с периодом T = 0,314 и амплитудой A = 2 см. Определите величину скорости точки в момент, когда смещение точки из положения равновесия равно 1 см. (0,346 м/с)

41. Математический маятник с нитью длиной l = 1 м находится в горизонтально летящем с ускорением a = 6 м/с^2 самолете. Определите период колебаний T маятника? (1,84 с)

42. Определите модуль ускорения $\vec{a}$ шарика, колеблющегося на легкой нити длиной l= 1 м, в момент времени t, когда смещение его от положения равновесия x = 4 см. Начальная фаза колебаний φ_0 = 0. (0,4 м/с^2)

43. На сколько изменится период колебаний математического маятника в ракете, вертикально стартующей с Земли с ускорением a = 45 м/с^2? Длина нити маятника l = 0,5 м. (Уменьшится на 1,27 с)

44. Два математических маятника начинают колебаться одновременно. Когда первый маятник совершил N_1 = 40 полных колебаний, второй совершил N_2 = 20 полных колебаний. Найдите длину нити второго маятника, если длина нити первого l_1 = 1 м. (4 м)

45. Период колебания маятника на поверхности Луны в ξ = 2,46 раза больше его периода колебаний на Земле. Радиус Земли $R_З$ = 6370 км, масса Земли в n = 81 раз больше массы Луны. Определите радиус Луны. (1740 м)

46. При какой длине нити математического маятника период его колебаний на высоте h = 50 км над уровнем моря будет таким же, как у маятника той же массы на нити длиной l_0 = 4 м, находящегося на уровне моря? Радиус Земли $R_З$ = 6370 км. (394 см)

47. Как надо изменить длину маятника часов, считая его математическим, чтобы они шли точно при подъеме на высоту, равную радиусу Земли? (Уменьшить в 4 раза)

48. Точно идущие на Земле часы с маятником подняты на высоту h = 2 км над уровнем моря. На сколько будут отставать эти часы за сутки, т. е. за время $t = 8{,}64 \cdot 10^4$ с? Радиус Земли $R_З$ = 6370 км. (27 с)

49. Груз массой m_1 = 0,3 кг, подвешенный на пружине, совершает гармонические колебания, к нему прикрепляют груз массой m_2 = 0,9 кг. Во сколько раз увеличится период колебаний? (В 2 раза)

50. Определитt период колебаний груза массой m = 1 кг, подвешенного на пружине с коэффициентом жесткости k = 100 Н/м. (0,628 с)

51. Во сколько раз нужно увеличить коэффициент жесткости пружины, чтобы период колебаний груза, подвешенного на ней, уменьшился в 3 раза? (В 9 раз)

52. Шарики массами m_1 и m_2, подвешенные на пружинах с коэффициентами k_1 = 100 Н/м и k_2 = 50 Н/м, колеблются с одинаковыми периодами. Каково соотношение масс шариков? ($m_1/m_2 = 2$)

53. Как изменится частота колебаний пружинного маятника, если его масса уменьшится в 4 раза? (Увеличится в 2 раза)

54. Подвешенный на пружине груз растягивает ее на величину Δl = 25 мм. Определите частоту ν и период колебаний T гармонических колебаний такого пружинного маятника. (0,314 с)

55. Шарик неподвижно висит на пружине, пружина растянута на 6 см. Определите период колебаний такого вертикального пружинного маятника. (0,49 с)

56. Две пружины с коэффициентами жесткости k_1 = 100 Н/м и k_2 = 400 Н/м соединены последовательно. Каким будет период колебаний груза массой m = 0,1 кг, подвешенного на таких пружинах? (0,22 с)

57. Две пружины с коэффициентами жесткости k_1 = 100 Н/м и k_2 = 400 Н/м соединены параллельно. Определите период колебаний груза массой m = 0,1 кг, подвешенного на таких пружинах. (0,09 с)

58. Чему равна масса тела, которое, будучи подвешено к некоторой пружине, колеблется с тем же периодом, что и тело массой m, подвешенное к двум таким пружинам, соединенным последовательно? ($2m$)

59. Тело массой m подвешено к соединенным последовательно четырем одинаковым пружинам жесткостью k каждая. Определите период колебаний тела. $\left(4\pi\frac{\sqrt{m}}{R}\right)$

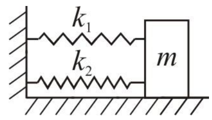
60. Тело массой m подвешено на трех параллельных одинаковых пружинах жесткостью k каждая. Определите период колебаний тела. $\left(2\pi\sqrt{\frac{m}{3R}}\right)$

61. Под действием силы F = 4 Н пружина растянулась на 25 см. К этой пружине прикрепили груз массой m = 1 кг. Определите частоту ν колебаний полученного пружинного маятника. (0,637 $с^{-1}$)

62. Два малых бруска массами m_1 = 0,02 кг и m_2 = 0,03 кг связаны пружиной с коэффициентом жесткости k = 500 Н/м. В начальный момент пружина сжата, а бруски удерживаются нитью. Определите период возникших колебаний брусков, если нить пережечь. Трение не учитывать. (0,03 с)

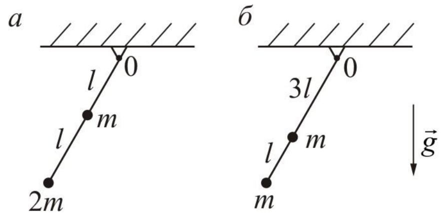
63. Когда груз, колеблющийся на вертикальной пружине, имел массу m_1, период его колебаний составлял T_1 = 6 с, а когда масса груза стала равной m_2, то период колебаний увеличился до T_2 = 8 с. С каким периодом T будут происходить колебания, если масса груза будет $m_3 = m_1 + m_2$? (10 с)

64. В начальный момент пружина k_1 растянута на l_1, а пружина k_2 сжата на l_2. Определите апмлитуду и период колебаний бруска массой m. ($A = \dfrac{k_2 l_2 - k_1 l_1}{k_1 + k_2}$; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1 + k_2}}$)



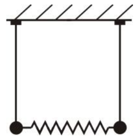
65. На вертикально расположенной пружине с коэффициентом жесткости k подвешен груз массой m. Грузу сообщают начальную скорость υ_0, направленную вертикально вниз. Определите период и амплитуду колебаний груза. ($T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$; $A = \upsilon_0\sqrt{\dfrac{m}{k}}$)

66. Определите период малых колебаний систем, изображенных на рисунках. (а) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{9l}{5g}}$; б) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{25l}{7g}}$)



67. Определите период T малых колебаний математического маятника с нитью длиной l = 20 см, если он находится в жидкости с плотностью, в n = 3 раза меньшей плотности материала шарика. Сопротивлением жидкости пренебречь. (1,1 с)

68. Два одинаковых маятника, изображенных на рисунке, соединены невесомой пружиной. В одном случае оба маятника колеблются так, что они в каждый момент времени отклонены на одинаковый угол в одну сторону. В другом случае они колеблются так, что в каждый момент времени они отклонены на одинаковый угол в разные стороны. В каком случае период колебаний будет меньше? (Во втором)

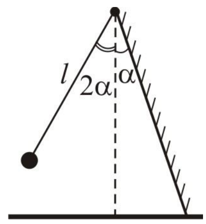


69. Подставка совершает в вертикальном направлении гармонические колебания, причем амплитуда этих колебаний A = 0,5 м. Определи-

те, каким должен быть наименьший период этих колебаний, чтобы лежащее на подставке тело не отделялось от нее. (T = 1,4 с)

70. Подставка совершает в горизонтальном направлении гармонические колебания с периодом T = 5 с. Находящееся на ней тело начинает по ней скользить, когда амплитуда колебаний достигает значения A = 0,6 м. Определите коэффициент трения μ между телом и подставкой. (0,1)

71. К стенке, наклоненной под углом α к вертикали, подвешен маятник длиной l (см. рис.). Маятник отклонили на небольшой угол 2α от положения равновесия в плоскости, перпендикулярной стенке, и отпустили. Определите период колебаний T маятника, если удар шарика о стенку абсолютно упругий. $\left(\frac{4}{3}\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right)$



72. Математический маятник совершает гармонические колебания с периодом T_0 = 0,40 с. Маятник закрепляют на тяжелой тележке, которая сначала скатывается по наклонной плоскости, а затем движется по горизонтальной поверхности. Угол между наклонной плоскостью и горизонтальной поверхностью α = 30°. Во время движения тележка не испытывает действия силы трения. Определите периоды колебаний маятника при движении тележки по наклонной плоскости и по горизонтальной поверхности. (0,43 с; 0,40 с)

73. Деревянный брусок постоянного сечения плавает в воде в вертикальном положении так, что под водой находится большая часть бруска. Период малых колебаний бруска в отсутствие сил вязкого трения T = 2 с. Определите длину l бруска. (1 м)

Вынужденные колебания. Резонанс

74. Определите скорость поезда υ, при которой математический маятник длиной l = 20 см, подвешенный в вагоне горизонтально движущегося поезда, начинает сильно раскачиваться, если расстояние между стыками L = 15 м. (16,7 м/с)

75. Определите скорость поезда υ, при которой тело массой m = 0,1 кг, подвешенное в вагоне на пружине жесткостью k = 10 Н/м, особенно сильно колеблется, если длина рельсов L = 12,5 м? (19,9 м/с)

76. Автомобиль с двухколесным прицепом движется по дороге, выложенной из неплотно пригнанных бетонных плит длиной l = 15 м каждая. Масса прицепа m = 100 кг, жесткость пружин амортизаторов каждого из колес k = 2,5 кН/м. Определите скорость автомобиля, при которой прицеп будет наиболее сильно подпрыгивать на стыках. (16,9 м/с)

77. Частота вынуждающей силы, при которой наступает резонанс колебаний математического маятника, равна 1 Гц. Определите длину нити маятника. (l = 0,25 м)

Упругие волны

78. Рыболов за время t = 20 с заметил, что поплавок совершил на волнах n = 40 колебаний. Расстояние между соседними гребнями волн λ = 1,5 м. Определите скорость распространения волн. (3 м/с)

79. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью υ = 15 м/с. Период колебаний точек шнура T = 1,2 с, амплитуда A = 2 см. Определите длину волны λ, фазу колебаний, смещение, скорость и ускорение точки шнура, находящейся на расстоянии r = 45 см от источника волн в момент времени t = 4 с. (18 м; 5,24 рад; 1 см; 9 см/с; 27,4 см/с^2)

80. Мальчик с берега бросил в воду камень и заметил, что образовавшаяся волна дошла до него через время t_1 = 5 с. Наблюдая за волнами, он оценил, что расстояние между соседними гребнями Δr = 0,5 м, а за время t_2 = 2 с он услышал N = 7 всплесков о берег. Определите расстояние l, на которое был брошен камень. (7,5 м)

81. Определите разность фаз колебаний двух точек, лежащих на луче и отстоящих на расстоянии Δr = 3 м друг от друга, если длина волны λ = 1 м. (6π)

82. Волны распространяются вдоль резинового шнура со скоростью υ = 4 м/с и частотой ν = 2 Гц. Определите разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек шнура, отстоящих друг от друга на расстоянии Δr = 1 м. (π)

83. Уравнение упругой волны имеет вид $X = A\sin(Ct - Br)$, где X – смещение частиц среды от положения равновесия, A = 0,2 см, C = 314 рад/с, B = 3,14 м$^{-1}$. Определите циклическую частоту ω, частоту колебаний, длину волны λ, скорость распространения волны, максимальные значения скорости υ_{max} и ускорения a_{max} частиц среды. (314 рад/с; 50 Гц; 2 м; 100 м/с; 0,63 м/с; 197 м/с^2)

Звуковые волны

84. Определите скорость распространения звука в материале, в котором колебания с частотой ν = 100 с$^{-1}$ вызывают звуковую волну с длиной λ = 12,5 м. (1250 м/с)

85. Длина звуковой волны в воздухе для самого низкого мужского голоса λ_1 = 4,5 м, а для самого высокого женского голоса λ_2 = 0,2 м. Считая, что скорость звука υ = 340 м/с, определите частоты колебаний этих голосов. (76 с$^{-1}$; 1700 с$^{-1}$)

86. Определите, во сколько раз изменится длина звуковой волны при переходе из воздуха в другую среду, если в воздухе звуковая волна распространяется

со скоростью υ_1 = 340 м/с, а в другой среде – υ_2 = 1700 м/с. (Увеличится в 5 раз)

87. Если скорость звука в воде υ = 1450 м/с, а его частота ν = 725 с$^{-1}$, то каково расстояние между ближайшими точками звуковой волны, совершающими колебания в противоположных фазах? (1 м)

88. Звуковая волна распространяется в среде со скоростью υ = 150 м/с. Определите частоту ν колебаний, если минимальное расстояние между точками среды, колеблющимися в противоположных фазах, Δr = 0,75 м. (100 Гц)

89. Расстояние до преграды, отражающей звук, S = 85 м, скорость звука υ = 340 м/с. Через какое время человек услышит эхо? (0,5 с)

90. Звук выстрела из винтовки и пуля одновременно достигают высоты h = 1200 м. Определите скорость звука, если начальная скорость пули υ_0 = 340 м/с. Выстрел произведен вертикально вверх. (321 м/с)

1.4. Тестовые задания

Колебательное движение

1. Движение колеблющегося маятника является:
$\boxed{1)}$ переменным; 2) равнопеременным;
3) равномерным; 4) нет правильного ответа.

2. Из перечисленных колебаний свободными являются:
А. Колебания листьев на деревьях во время ветра.
Б. Колебания струны после выведения ее из положения равновесия и предоставления самой себе.
В. Колебания шарика, подвешенного на нити.
Г. Колебания тела на пружине.
Д. Колебания поршня в цилиндре двигателя.
Е. Колебания иглы в швейной машине.
$\boxed{1)}$ БВГ; 2) АБД; 3) АВЕ; 4) БГД; 5) АДЕ.

3. Из перечисленных колебаний вынужденными являются:
А. Колебания листьев на деревьях во время ветра.
Б. Колебания струны после выведения ее из положения равновесия и предоставления самой себе.
В. Колебания шарика, подвешенного на нити.
Г. Колебания тела на пружине.
Д. Колебания поршня в цилиндре двигателя.
Е. Колебания иглы в швейной машине.
1) БВГ; 2) АБД; 3) АВЕ; 4) БГД; $\boxed{5)}$ АДЕ.

4. Амплитуда колебаний определяется:
А) смещением колеблющейся точки от положения равновесия в любой момент времени;
Б) смещением колеблющейся точки через время, равное половине периода колебаний;
В) наибольшим отклонением колеблющейся точки от положения равновесия.
1) Только А; 2) только Б; $\boxed{3)}$ только В; 4) А и В; 5) Б и В.

5. Шмель летит со скоростью $\upsilon = 4$ м/с, при этом крылья его колеблются с частотой $\nu = 240$ Гц. Расстояние, которое пролетит шмель, совершив крыльями $N = 30\,000$ взмахов, равно:
1) 300 м; 2) 350 м; 3) 450 м; $\boxed{4)}$ 500 м.

6. Частота колебаний крыльев пчелы $\nu_1 = 300$ Гц, а комар совершает $N_2 = 600$ взмахов крыльями в одну секунду. Если скорость пчелы $\upsilon_1 = 6$ м/с, комара – $\upsilon_2 = 10$ м/с, то на одинаковом расстоянии количество взмахов крыльями отличается следующим образом:

$\boxed{1)}$ у комара больше в 1,2 раза; 2) у комара меньше в 1,2 раза;
3) у комара больше в 2,0 раза; 4) у комара меньше в 2,0 раза.

7. Если колеблющаяся точка за N = 2 полных колебания проходит путь s = 0,4 м, то амплитуда колебаний равна:
1) 0,02 м; $\boxed{2)}$ 0,05 м; 3) 0,08 м; 4) 0,1 м.

8. Если частота колебаний материальной точки ν = 420 Гц, то N = 6300 колебаний точка совершит за время, равное^
1) 12 с; $\boxed{2)}$ 15 с; 3) 18 с; 4) 21 с.

9. Если частота колебаний материальной точки ν = 40 Гц, то число колебаний, совершаемых ею за одну минуту, равно:
1) 2000; 2) 1800; $\boxed{3)}$ 2400; 4) 3000.

10. Если качели проходят положение равновесия 20 раз в минуту, то период их колебаний равен^
$\boxed{1)}$ 6 с; 2) 8 с; 3) 5 с; 4) 3 с.

11. Если материальная точка за время t = 20 с совершает N = 20 полных колебаний и проходит путь, равный 80 см, то период и амплитуда колебаний равны:
1) T = 2 с; A = 1 см^2; 2) T = 4 с; A = 1 см^3; 3) T = 2 с; A = 2 см;
$\boxed{4)}$ T = 1 с; A = 1 см; 5) T = 1 с; A = 2 см.

12. Материальная точка совершает колебания с амплитудой A = 2 см. Если период колебаний T = 2 с, то средняя скорость движения точки от положения равновесия до максимального отклонения от него равна^
1) 0,5 см/с; 2) 1,0 см/с; 3) 2,0 см/с; 4) 2,5 см/с; $\boxed{5)}$ 4,0 см/с.

13. Если начало отсчета времени гармонических колебаний соответствует положению равновесия колеблющейся точки, то уравнение данного гармонического колебания может быть записано в виде:
1) $x = A\cos\omega_0 t$; 2) $x = A\cos\left(\omega_0 t + \dfrac{\pi}{4}\right)$; $\boxed{3)}$ $x = A\sin\omega_0 t$;
4) $x = A\sin\left(\omega_0 t + \dfrac{\pi}{6}\right)$; 5) $x = A\sin\left(\omega_0 t + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

14. Период свободных колебаний матtриальной точки T = 0,8 с. Время, за которое материальная точка преодолеет расстояние от крайнего положения до положения равновесия, равно:
1) 0,1 с; 2) 0,3 с; 3) 0,4 с; $\boxed{4)}$ 0,2 с.

15. Тело, совершающее гармонические колебания с периодом T, проходит весь путь от среднего положения до крайнего за время, равное:
1) T/2; 2) T/3; $\boxed{3)}$ T/4; 4) T/6.

16. Четыре тела совершают гармонические колебания вдоль оси Ox, зависимость координаты от времени выражается формулами: 1) $x = A\sin\omega t$; 2) $x = A\cos\omega t$; 3) $x = A\cos^2\omega t$; 4) $x = A\sin^2\omega t$. В каком случае колебания гармонические?
1) Только 1; 2) только 2; 3) 1 и 4; 4) 1 и 2.

17. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону $x = 3\sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)$. Период колебаний точки равен:
1) 1,5 с; 2) 2 с; 3) 5 с; $\boxed{4)}$ 6 с.

18. Если гармонические колебания точки происходят по закону $x = A\sin\omega t$ и при фазе $\varphi = \frac{\pi}{6}$ рад ее смещение составляет 5 см, то амплитуда колебаний равна:
1) 7,5 см; $\boxed{2)}$ 10 см; 3) 15 см; 4) 20 см.

19. Колебания материальной точки происходят по закону $x = A\sin\omega t$. Время прохождения колеблющейся точкой первой половины амплитуды меньше времени прохождения второй половины в … раз(а).
1) 1,0; 2) 1,5; $\boxed{3)}$ 2,0; 4) 2,5; 5) 4,0.

20. Материальная точка совершает колебания по закону $x = A\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ (м). Период колебаний и время, за которое точка сместится от положения равновесия на половину амплитуды, соответственно равны:
1) 12 с и 2 с; $\boxed{2)}$ 24 с и 2 с; 3) 24 с и 4 с;
4) 12 с и 6 с; 5) 24 с и 6 с.

21. Материальная точка, совершающая колебания по закону $x = A\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ (м), проходит от начала колебаний путь, равный половине амплитуды, за время:
1) 1,5 с; 2) 3,0 с; $\boxed{3)}$ 4,0 с; 4) 4,5 с; 5) 6,0 с.

22. Материальная точка совершает колебания по закону $x = A\cos\left(\frac{\pi t}{16}\right)$ (м). После начала движения точка проходит путь, равный трем амплитудам, за время:
1) 8 с; 2) 16 с; $\boxed{3)}$ 24 с; 4) 32 с; 5) 40 с.

23. Если материальная точка совершает гармонические колебания по закону $x = 2\sin\left(\frac{\pi t}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$ (м), то период колебаний равен:
1) 1/3 с; 2) 2/3 с; 3) 3,0 с; 4) 4,5 с; $\boxed{5)}$ 6,0 с.

24. Гармонические колебания происходят по закону $x = A\cos\omega t$. Если при фазе $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ рад смещение точки от положения равновесия x = 4 см, то амплитуда колебаний равна:

$\boxed{1)}$ 2 см; 2) 4 см; 3) 6 см; $\boxed{4)}$ 8 см; 5) 12 см.

25. Если материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой A = 8 см, то время, в течение которого точка находится не дальше 4 см от положения равновесия, составляет часть периода, равную:

1) $T/12$; 2) $T/8$; 3) $T/6$; $\boxed{4)}$ $T/3$; 5) $T/4$.

26. Если материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой A = 6 см, то время, в течение которого она находится от положения равновесия дальше 3 см, составляет часть периода, равную:

1) $T/6$; 2) $T/4$; $\boxed{3)}$ $2T/3$; 4) $T/3$; 5) $T/2$.

27. Если материальная точка совершает колебания по закону $x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, где A = 2 см, ω = 2,5π с$^{-1}$, $\varphi_0 = \pi$, то смещение точки в начальный момент времени равно:

$\boxed{1)}$ 0; 2) 0,5 см; 3) 1,0 см; 4) 2,0 см; 5) 2,5 см.

28. Если материальная точка совершает гармонические колебания по закону $x = A\sin\omega(t + t_0)$, где A = 4 см, ω = 2,5π с$^{-1}$, t_0 = 0,4 с, то период и начальная фаза колебаний равны:

1) T = 0,8 с, $\varphi_0 = \pi/2$; 2) T = 0,4 с, $\varphi_0 = \pi$; $\boxed{3)}$ T = 0,8 с, $\varphi_0 = \pi$;
4) T = 0,2 с, $\varphi_0 = \pi$; 5) T = 0,4 с, $\varphi_0 = \pi/2$.

29. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону $x = A\cos\omega t$. Если первую половину амплитуды точка проходит за время t_1 = 0,05 с, то вторую половину амплитуды она пройдет за время Δt, равное:

1) 5,0 мс; 2) 15,0 мс; $\boxed{3)}$ 25,0 мс; 4) 30,0 мс; 5) 45,0 мс.

30. Если материальная точка совершает колебания по закону $x = 0{,}4\sin\pi\left(2t - \dfrac{1}{2}\right)$ (м), то ее скорость в момент времени t_1 = 2 с равна:

1) –0,2 м; 2) –0,1 м; $\boxed{3)}$ 0; 4) 0,2 м; 5) 0,1 м.

31. Материальная точка совершает гармонические колебания. При смещении точки от положения равновесия на x_1 = 4 см ее скорость υ_1 = 6 см/с, при смещении на x_2 = 3 см – скорость υ_2 = 8 см/с. Амплитуда и период колебаний точки равны:

$\boxed{1)}$ A = 5,0 см, T = 3,14 с; 2) A = 5,0 см, T = 2 с; 3) A = 4,5 см, T = 3,14 с;
4) A = 4,5 см, T = 2 с; 5) A = 6,0 см, T = 3,14 с.

32. Две материальные точки совершают гармонические колебания. Если период колебаний первой точки в 3 раза меньше, амплитуда колебаний в 6 раз меньше, чем у второй точки, то максимальные скорости колеблющихся точек отличаются в … раз.

1) 1; $\boxed{2)}$ 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.

33. Если максимальное ускорение колеблющейся точки a_{max} = 49,3 см/с^2, период ее колебаний T = 2 с, то амплитуда A колебаний составит:

1) 4 см; 2) 1 см; 3) 3 см; $\boxed{4)}$ 5 см.

34. Если амплитуда колебаний материальной точки A = 6 см, а ее максимальная скорость υ_m = 1,2 м/с, то период колебаний равен:

$\boxed{1)}$ 0,3 с; 2) 0,4 с; 3) 0,5 с; 4) 2,0 с; 5) 20 с.

35. Материальная точка совершает гармонические колебания с частотой ν = 0,1 Гц и амплитудой A = 5 см. Скорость точки в момент, когда смещение x = 2,5 см, равна:

1) 5,8 см/с; $\boxed{2)}$ 2,71 см/с; 3) 4,2 см/с; 4) 5,1 см/с.

36. Если циклическая частота гармонических колебаний материальной точки ω = 20 рад/с, амплитуда A = 0,12 м, то максимальная скорость точки υ_{max} будет:

1) 1,2 м/с; $\boxed{2)}$ 2,4 м/с; 3) 2,8 м/с; 4) 3,2 м/с.

37. Колебания материальной точки начинаются из положения равновесия и происходят с периодом T. Скорость точки составит половину от максимальной скорости υ_{max} через время, равное:

$\boxed{1)}$ T/6; 2) T/4; 3) T/3; 4) T/2.

38. Если максимальная скорость колебаний материальной точки υ_{max} = 62,8 см/с, амплитуда A = 2 см, то период колебаний равен

$\boxed{1)}$ 0,2 с; 2) 0,6 с; 3) 1 с; 4) 0,5 с.

39. Если максимальное ускорение колеблющейся точки a_{max} = 49,3 см/с^2, максимальная скорость υ_{max} = 15,7 см/с, то период колебаний равен:

1) 3 с; $\boxed{2)}$ 2 с; 3) 1,5 с; 4) 4 с.

40. Если амплитуды колебаний двух материальных точек одинаковы, а циклические частоты колебаний отличаются в 3 раза, максимальные ускорения точек отличаются в … раз(а).

1) 3; 2) 6; $\boxed{3)}$ 9; 4) 12.

41. Если модуль максимального ускорения колеблющейся точки a_m = 1,58 м/с^2, период колебаний T = 1 с, то уравнение таких гармонических колебаний имеет вид:

1) $x = 2\cdot10^{-2}\sin 2\pi t$ (м); $\boxed{2)}$ $x = 4\cdot10^{-2}\sin 2\pi t$ (м); 3) $x = 2\cdot10^{-2}\sin \pi t$ (м);
4) $x = 4\cdot10^{-2}\sin \pi t$ (м); 5) $x = 1{,}6\sin 2\pi$ (м).

42. Если амплитуда колебаний материальной точки A = 1 см, ее максимальная скорость υ_m = 3,14 м/с, то период колебаний точки и ее максимальное ускорение равны:
1) T = 2 мс, a_m = 986 м/с^2; $\boxed{2)}$ T = 20 мс, a_m = 986 м/с^2; 3) T = 2 мс, a_m = 9,9 км/с^2; 4) T = 20 мс, a_m = 9,9 км/с^2; 5) T = 20 мс, a_m = 9,86 м/с^2.

43. Две материальные точки колеблются с циклическими частотами ω_1 = 36 рад/с и ω_2 = 9 рад/с соответственно. Если амплитуды колебаний точек одинаковы, то величина максимального ускорения первой точки больше максимального ускорения второй в … раз(а).
1) 4; 2) 8; 3) 12; $\boxed{4)}$ 16; 5) 20.

Пружинный маятник

44. Если грузик на пружине за промежуток времени Δt = 8 с совершил N = 40 колебаний, то период колебаний равен:
$\boxed{1)}$ 0,2 с; 2) 0,5 с; 3) 0,7 с; 4) 0,3 с.

45. Если период колебаний груза на пружине T = 1,5 с, то за одну минуту груз совершит число N колебаний, равное:
1) 20; 2) 60; $\boxed{3)}$ 40; 4) 50.

46. Если подвешенный на пружине груз растягивает ее на величину Δl = 3,6 см, то период и частота возникающих гармонических колебаний такого пружинного маятника соответственно равны:
$\boxed{1)}$ 0,38 с, 2,6 Гц; 2) 0,42 с, 2,4 Гц; 3) 0,48 с, 2,1 Гц; 4) 0,5 с, 2 Гц.

47. Груз неподвижно висит на пружине, когда она растянута на величину Δl. Период свободных вертикальных колебаний такого маятника вычисляется по формуле:
1) $\pi\sqrt{\dfrac{\Delta l}{g}}$; 2) $2\pi\dfrac{\Delta l}{g}$; 3) $2\pi\sqrt{\Delta l\cdot g}$; $\boxed{4)}$ $2\pi\sqrt{\dfrac{\Delta l}{g}}$.

48. Тело массой m_1 = 0,1 кг подвешено на пружине и совершает гармонические колебания. Если к этому телу прикрепить груз массой m_2 = 0,3 кг, то период колебаний увеличится в … раз(а).
1) 4; $\boxed{2)}$ 2; 3) 3; 4) 8.

49. Если два шарика, подвешенные на пружинах с жесткостями k_1 = 100 Н/м и k_2 =400 Н/м, совершают гармонические колебания с одинаковыми частотами, то массы шариков отличаются в … раз(f).
1) 16; 2) 8; $\boxed{3)}$ 4; 4) 2.

50. Чтобы период колебаний груза, подвешенного на пружине, увеличился в четыре раза, жесткость пружины следует увеличить в … раз.

1) 20; 2) 18; $\boxed{3)}$ 16; 4) 10.

51. К пружине, закрепленной вертикально, подвесили груз. Если груз стал совершать гармонические колебания с циклической частотой $\omega = 5$ рад/с, то деформация пружины после полного прекращения колебаний груза равна:

1) 0,25 м; $\boxed{2)}$ 0,4 м; 3) 0,2 м; 4) 0,1 м.

52. К шарику массой m_1, колеблющемуся на пружине, подвесили снизу еще один шарик массой $m_2 = 300$ г. Если частота колебаний уменьшилась при этом в 2 раза, то масса первого шарика равна:

1) 0,2 кг; 2) 0,25 кг; 3) 0,3 кг; $\boxed{4)}$ 0,1 кг.

53. Шарик на пружине колеблется вдоль прямой с периодом $T = 4$ с и амплитудой $A = 8$ см. Средняя скорость $\langle \upsilon \rangle$ движения шарика от положения равновесия до точки максимального отклонения составляет:

1) 5 см/с; 2) 4,8 см/с; 3) 6 см/с; $\boxed{4)}$ 8 см/с.

54. Период T колебаний груза массой m на пружине жесткостью k определяется по формуле:

1) $2\pi\sqrt{\dfrac{k}{m}}$; $\boxed{2)}$ $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$; 3) $\sqrt{\dfrac{m}{k}}$; 4) $\sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

55. Если шарик массой $m = 250$ г подвешен на легкой пружине жесткостью $k = 100$ Н/м, то циклическая частота ω возникающих гармонических колебаний равна

1) 15 рад/с; 2) 30 рад/с; 3) 25 рад/с; $\boxed{4)}$ 20 рад/с.

56. Тело, подвешенное на пружине, совершает колебания по закону $x = A\sin\left(\dfrac{\pi}{8}t\right)$. Время, необходимое телу для прохождения от начала движения пути, равного амплитуде колебаний, составляет:

$\boxed{1)}$ 4 с; 2) 6 с; 3) 8 с; 4) 12 с.

57. Тело, подвешенное на пружине, совершает колебания по закону $x = A\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t\right)$. Время, необходимое телу для прохождения от начала движения пути, равного половине амплитуды колебаний, составляет:

$\boxed{1)}$ 2 с; 2) 4 с; 3) 6 с; 4) 8 с.

58. Шарик, подвешенный на пружине, совершает гармонические колебания по закону $x = A\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$. Время, необходимое для прохождения пути, численно равного пяти амплитудам, составляет:
1) 12 с; 2) 24 с; $\boxed{3)}$ 30 с; 4) 36 с.

59. Тело, подвешенное на пружине, совершает гармонические колебания. Если максимальный импульс тела p_{max} = 400 Н·с, а максимальная сила, действующая на тело в процессе колебаний, F_{max} = 628 Н, то частота ν колебаний равна:
$\boxed{1)}$ 0,25 Гц; 2) 0,4 Гц; 3) 0,6 Гц; 4) 0,5 Гц.

60. Шарик массой m = 100 г, подвешенный на пружине, совершает гармонические колебания с амплитудой A = 10 см. Если циклическая частота колебаний ω = 2 рад/с, величина максимальной возвращающей силы, действующей на шарик, равна
1) 0,08 Н; $\boxed{2)}$ 0,04 Н; 3) 0,05 Н; 4) 0,10 Н.

61. Масса груза, который необходимо прикрепить к пружине жесткостью k = 10 Н/м, чтобы период его колебаний был T = 5 с, должна быть равной:
1) 5,80 кг; $\boxed{2)}$ 6,34 кг; 3) 7,20 кг; 4) 6,05 кг.

62. Тело массой m = 0,2 кг подвешено на пружине и совершает гармонические колебания. Если максимальная скорость тела υ_{max} = 1 м/с, амплитуда его колебаний A = 4 см, то жесткость пружины равна:
1) 260 Н/м; $\boxed{2)}$ 125 Н/м; 3) 140 Н/м; 4) 150 Н/м.

63. Если на резиновом шнуре подвесить груз, то шнур растягивается на Δl = 10 см. Период малых вертикальных колебаний груза на таком шнуре будет равен:
$\boxed{1)}$ 0,63 с; 2) 0,52 с; 3) 0,40 с; 4) 0,60 с.

64. Период колебаний груза на пружине T = 0,5 с. Если с пружины снять груз, то длина пружины уменьшится на величину, равную:
1) 5,9 см; 2) 8,0 см; 3) 7,2 см; $\boxed{4)}$ 6,3 см.

65. Груз колеблется на пружине жесткостью k = 600 Н/м. Если амплитуда колебаний груза A = 4 см, его максимальная скорость υ_m = 2 м/с, то масса груза равна:
1) 0,42 кг; $\boxed{2)}$ 0,24 кг; 3) 0,3 кг; 4) 0,36 кг.

66. Груз, подвешенный на пружине, растягивает ее на Δl = 25 мм. Если груз будет совершать вертикальные колебания с амплитудой A = 25 мм, то его максимальная скорость будет равна:
$\boxed{1)}$ 0,5 м/с; 2) 0,3 м/с; 3) 0,6 м/с; 4) 0,4 м/с.

67. Тело массой $m = 0{,}2$ кг совершает гармонические колебания на пружине жесткостью $k = 125$ Н/м. Если амплитуда колебаний груза $A = 8$ см, то его максимальное ускорение a_{max} равно:
$\boxed{1)}$ 50 м/с^2; 2) 45 м/с^2; 3) 60 м/с^2; 4) 20 м/с^2.

68. Если пружинный маятник колеблется в кабине лифта, то период колебаний маятника при подъеме лифта с ускорением:
1) увеличится; 2) уменьшится; $\boxed{3)}$ не изменится.

Математический маятник

69. Длина нити математического маятника с периодом колебаний $T = 1$ с равна:
1) 0,18 м; $\boxed{2)}$ 0,26 м; 3) 0,32 м; 4) 0,38 м.

70. Математический маятник с нитью длиной $l = 4{,}9$ м за время $t = 10$ мин совершит число колебаний N, равное:
1) 120; 2) 128; $\boxed{3)}$ 136; 4) 149.

71. Период свободных колебаний математического маятника с длиной нити $l = 10$ м при увеличении амплитуды колебаний от $A_1 = 10$ см до $A_2 = 20$ см:
1) увеличится в 2 раза; 2) уменьшится в 2 раза;
$\boxed{3)}$ не изменится; 4) уменьшится в $\sqrt{2}$ раз.

72. Один математический маятник имеет период $T_1 = 6$ с, другой – $T_2 = 8$ с. Период колебаний математического маятника, длина которого равна сумме длин двух нитей этих маятников, равен:
$\boxed{1)}$ 10 с; 2) 18 с; 3) 15 с; 4) 14 с.

73. Если длины нитей двух математических маятников отличаются в $n = 4$ раза, то отношение частот их колебаний равно:
1) 16; 2) 4; $\boxed{3)}$ 2; 4) 1.

74. Если два математических маятника за одинаковое время совершают $N_1 = 80$, $N_2 = 40$ колебаний соответственно, то длина нити l_2 второго маятника больше длины нити l_1 первого маятника в … раз(а).
1) 8; 2) 16; 3) 2; $\boxed{4)}$ 4.

75. Если период гармонических колебаний математического маятника $T = 3{,}6$ с, начальная фаза $\varphi_0 = 0$, то промежуток времени, за который маятник сместится от положения равновесия на половину амплитуды, равен:
1) 0,1 с; $\boxed{2)}$ 0,3 с; 3) 0,6 с; 4) 0,9 с.

76. Маленький шарик, подвешенный на невесомой нерастяжимой нити длиной $l = 1$ м, выводят из положения равновесия так, что нить составляет ма-

лый угол с вертикалью, и отпускают. Промежуток времени, за который угол между нитью и вертикалью уменьшится вдвое, равен:

$\boxed{1)}$ 0,33 с; 2) 0,42 с; 3) 0,54 с; 4) 0,6 с.

77. Математический маятник длиной l = 40 см совершает гармонические колебания с амплитудой A = 2 см. Модуль ускорения маятника в положении, когда его смещение из положения равновесия равно половине максимального, равен:

1) 0,2 м/с^2; $\boxed{2)}$ 0,25 м/с^2; 3) 0,40 м/с^2; 4) 0,60 м/с^2.

78. Один конец нити маятника длиной l = 1 м прикреплен к потолку лифта, а на другом конце нити укреплен груз пренебрежимо малого размера. Если лифт опускается с ускорением a = 0,8 м/с^2, то период малых колебаний груза равен:

1) 1,6 с; 2) 1,8 с; $\boxed{3)}$ 1,9 с; 4) 2,0 с.

79. Математический маятник длиной l = 1 м подвешен в вагоне, движущемся горизонтально с ускорением a = 6 м/с^2. Период колебаний этого маятника и угол, который составляет линия отвеса маятника с вертикалью в движущемся вагоне при отсутствии колебаний, соответственно равны:

1) 1,92 с, 40°; 2) 1,88 с, 38°; 3) 1,70 с, 35°; $\boxed{4)}$ 1,85 с, 31°.

80. Математический маятник помещен на тележку, которая скатывается с наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α = 30°. Если период колебаний этого маятника на горизонтальной поверхности T = 1 с, то период его колебаний во время соскальзывания равен:

1) 0,9 с; $\boxed{2)}$ 1,4 с; 3) 2,1 с; 4) 3,0 с.

81. Если циклическая частота колебаний математического маятника на некоторой планете ω = 5 рад/с при длине нити маятника l = 0,4 м, то ускорение свободного падения на этой планете равно:

1) 10,4 м/с^2; 2) 8,4 м/с^2; 3) 9,6 м/с^2; $\boxed{4)}$ 10 м/с^2.

82. Два шарика подвешены на нитях одинаковой длины l. Первый шарик поднимают по вертикали вверх до точки подвеса, второй при натянутой нити отклоняют на малый угол α от вертикали. Если шарики одновременно отпустить, то раньше достигнет положения равновесия:

1) второй шарик; $\boxed{2)}$ первый шарик; 3) оба шарика одновременно.

83. Математический маятник перенесли с Земли на другую планету, радиус которой R в два раза меньше радиуса Земли. Если при этом период колебаний маятника T увеличился в 3 раза, то масса Земли M больше массы планеты m в … раз.

1) 18; 2) 24; $\boxed{3)}$ 36; 4) 40.

84. Если математический маятник на Земле имеет длину нити l_1 = 108 см и период колебаний такой же, как период колебаний на Луне математического ма-

ятника с нитью длиной l_2 = 18 см, то ускорения свободного падения на этих планетах отличаются в … раз(а).

1) 3; 2) 5; 3) 4; $\boxed{4)}$ 6.

Превращение энергии при гармонических колебаниях

85. Тело совершает гармонические колебания вдоль оси Ox. Масса тела m = 10 г. Если движение тела описывается кинематическим уравнением $x = 0{,}4\sin 3t$ (м), то уравнение кинетической энергии тела в любой момент времени имеет вид:

1) $14{,}4\cdot 10^{-3}\sin 3t$ Дж; $\boxed{2)}$ $7{,}2\cdot 10^{-3}\cos^2 3t$ Дж;

3) $3{,}6\cdot 10^{-3}\sin^2 3t$ Дж; 4) $3{,}6\cdot 10^{-3}\cos^2 3t$ Дж.

86. Ребенок раскачивается на веревочных качелях. Если на максимальном удалении от положения равновесия его центр масс поднимается на высоту h = 1,25 м, то максимальная скорость движения ребенка будет равна:

$\boxed{1)}$ 5 м/с; 2) 4 м/с; 3) 4,8 м/с; 4) 6 м/с.

87. Тело совершает гармонические колебания с частотой ν = 3 Гц и амплитудой A = 4 см. Если амплитуду колебаний увеличить в 2 раза, то полная энергия возрастет в … раз(а).

1) 1; 2) 8; 3) 2; $\boxed{4)}$ 4.

88. Если тело массой m = 0,5 кг совершает гармонические колебания с периодом T = 2 с и амплитудой A = 8 см, то кинетическая энергия тела в тот момент времени, когда смещение его относительно положения равновесия x = 8 см, составляет:

1) 0,25 Дж; 2) 0,15 Дж; 3) 0,1 Дж; $\boxed{4)}$ 0 Дж.

89. Груз массой m = 100 г колеблется на пружине жесткостью k = 50 Н/м. Если амплитуда колебаний A = 4 см, то:

а) полная механическая энергия колебания равна:

1) 0,2 Дж; $\boxed{2)}$ 0,4 Дж; 3) 0,8 Дж; 4) 1,6 Дж;

б) потенциальная энергия колебания, когда смещение точки от положения равновесия x = 2 см, составляет:

$\boxed{1)}$ 0,01 Дж; 2) 0,02 Дж; 3) 0,04 Дж; 4) 0,08 Дж;

в) кинетическая энергия точки в процессе колебания, когда смещение ее от положения равновесия x = 2 см, составляет:

1) 0,09 Дж; 2) 0,19 Дж; $\boxed{3)}$ 0,39 Дж; 4) 0,79 Дж;

г) скорость точки, когда смещение ее от положения равновесия x = 2 см, составляет:

1) 1,4 м/с; 2) 2,2 м/с; $\boxed{3)}$ 2,8 м/с; 4) 3,2 м/с.

90. Тело, подвешенное на пружине, совершает гармонические колебания с частотой ν. Частота, с которой происходит изменение потенциальной энергии тела, равна:

$\boxed{1)}$ 2ν; 2) ν; 3) не меняется; 4) $\dfrac{\nu}{2}$.

91. Тело массой m = 1 кг совершает свободные колебания вдоль оси Ox. Если его координата меняется по закону $x = 2\sin 3t$ (м), то потенциальная энергия колеблющегося тела изменяется по закону, имеющему вид
1) $18\cos^2 3t$; $\boxed{2)}$ $18\sin^2 3t$; 3) $9\sin^2 3t$; 4) $9\cos^2 3t$.

92. При свободных колебаниях груза на пружине максимальное значение его кинетической энергии 10 Дж, максимальное значение потенциальной энергии – 10 Дж. Определите пределы изменения полной механической энергии.
$\boxed{1)}$ Энергия не изменяется и равна 10 Дж; 2) изменяется от 0 до 10 Дж;
3) изменяется от 0 до 20 Дж; 4) не изменяется и равна 20 Дж.

93. Полная механическая энергия груза массой m = 100 г, совершающего гармонические колебания на невесомой пружине жесткостью k = 250 Н/м с амплитудой A = 5 см, равна:
1) 0,25 Дж; $\boxed{2)}$ 0,31 Дж; 3) 0,40 Дж; 4) 0,38 Дж.

94. Если полная механическая энергия колебаний материальной точки с массой m, совершающей гармонические колебания с частотой ν, равна E, то амплитуда колебаний материальной точки равна:
$\boxed{1)}$ $A = \sqrt{\dfrac{E}{2m\pi^2\nu^2}}$; 2) $A = \sqrt{\dfrac{2E}{m\pi\nu}}$; 3) $A = \sqrt{\dfrac{E}{m^2\pi^2\nu^2}}$; 4) $A = \sqrt{\dfrac{2m}{\pi E}}$.

95. Если полная энергия гармонических колебаний материальной точки $E = 5\cdot10^{-6}$ Дж, максимальная сила, действующая на нее, $F_{\max} = 2{,}5\cdot10^{-3}$ Н при частоте колебаний $\nu = 5$ с$^{-1}$ и начальной фазе $\varphi_0 = 30°$, то уравнение гармонических колебаний точки имеет вид:
1) $0{,}02\sin\left(2\pi t + \dfrac{\pi}{6}\right)$; $\boxed{2)}$ $0{,}04\sin\left(10\pi t + \dfrac{\pi}{6}\right)$;
3) $0{,}04\cos\left(5\pi t + \dfrac{\pi}{6}\right)$; 4) $0{,}04\sin\left(10\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

96. Если полная энергия тела, совершающего гармонические колебания, E = 0,1 Дж, максимальная сила, действующая на него, $F_{\max}$ = 4 Н, то амплитуда колебаний тела равна:
$\boxed{1)}$ 2,5 см; 2) 2 см; 3) 4 см; 4) 8 см.

97. Период колебаний пружинного маятника T = 2 с. Маятник вывели из положения равновесия и отпустили. Кинетическая энергия колеблющегося тела будет равна потенциальной энергии деформированной пружины через промежуток времени, прошедший от начала колебаний, равный:
1) 0,2 с; $\boxed{2)}$ 0,25 с; 3) 0,3 с; 4) 0,4 с.

98. Тело совершает гармонические колебания по закону $x = x_m \cos\omega t$. Частота свободных колебаний тела ν = 2,5 с$^{-1}$. Через какое наименьшее время его

кинетическая энергия уменьшится вдвое по сравнению со своим наибольшим значением?
1) 0,100 с; 2) 0,157 с; $\boxed{3)}$ 0,314 с; 4) 0,628 с.

99. Груз, прикрепленный к пружине, колеблется на горизонтальном гладком стержне. Определите отношение кинетической энергии груза к потенциальной энергии системы в момент, когда груз находится в точке, расположенной посередине между крайним положением и положением равновесия.
1) 6; 2) 4; 3) 2; $\boxed{4)}$ 3.

100. Движение тела массой m = 1 кг описывается законом $x = 0,6 \sin \pi t$. Полная энергия E колеблющегося тела и максимальная сила F_m, действующая на него, соответственно равны:
1) 1,6 Дж, 5,0 Н; $\boxed{2)}$ 1,8 Дж, 5,9 Н; 3) 2,0 Дж, 6,3 Н; 4) 3,0 Дж, 6,5 Н.

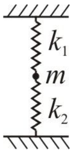
101. Два пружинных маятника с пружинами различной жесткостью и массами, отличающимися в два раза ($\frac{m_1}{m_2} = 2$), получают одинаковое удлинение. Если амплитуды колебаний маятников одинаковы, то отношение энергий их колебаний равно:
1) 1; $\boxed{2)}$ 2; 3) 4; 4) 8.

102. К двум различным пружинам подвешены грузы одинаковой массы, отношение удлинений пружин $\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = 2$. Если колебания этих систем совершаются с амплитудами, отношение которых $\frac{A_2}{A_1} = 2$, то отношение энергий колебаний этих грузов равно:
1) 2; 2) 4; $\boxed{3)}$ 8; 4) 16.

103. Два математических маятника с нитами длиной l_1 = 20 см и l_2 = 40 см совершают колебания с одинаковыми угловыми амплитудами. Если массы маятников одинаковы, то отношения периодов колебаний (T_2/T_1) и их энергий (E_2/E_1) соответственно равны:
1) $\sqrt{2}$, 2; 2) 2, 4; $\boxed{3)}$ $\sqrt{2}$, 4; 4) 2, 2.

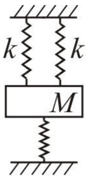
104. Математический маятник длиной l = 0,5 м отклоняют на малый угол и отпускают. К моменту времени t = 7 с от начала колебательного процесса кинетическая энергия маятника будет достигать максимального значения:
1) 2 раза; 2) 5 раз; 3) 7 раз; $\boxed{4)}$ 10 раз.

Колебательные системы



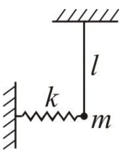
105. Шарик массой m подвешен между двумя невесомыми пружинами жесткостями k_1 = 30 Н/м и k_2 = 10 Н/м, как показано на рисунке. Если период колебаний такого маятника равен периоду колебаний математического маятника длиной l = 10 см, то масса шарика равна:

1) 100 г; 2) 200 г; 3) 300 г; $\boxed{4)}$ 400 г.



106. Брусок массой M подвешен между вертикально расположенными невесомыми вертикальными пружинами так, как показано на рисунке. Жесткость каждой верхней пружины k, а нижней – $2k$. Если k = 500 Н/м и брусок совершает колебания с периодом T = 0,31 с, то его масса M равна:

1) 2,5 кг; $\boxed{2)}$ 5,0 кг; 3) 7,5 кг; 4) 10,0 кг.



107. На рисунке представлена колебательная система: математический маятник с нитью длиной l = 80 см и подвешенное к ней тело массой m = 200 г с пружинной связью. Если пружина невесома и ее жесткость k = 50 Н/м, то циклическая частота малых колебаний системы равна:

1) 14,2 рад/с; $\boxed{2)}$ 16,2 рад/с; 3) 18,2 рад/с; 4) 20,2 рад/с.

108. Если деревянный цилиндр массой m = 300 г с основанием площадью S = 30 см^2 плавает в воде ($\rho = 10^3$ кг/м^3) в вертикальном положении, то период возникающих гармонических колебаний цилиндра будет равен:

1) 31,4 мс; 2) 62,8 мс; 3) 314 мс; $\boxed{4)}$ 628 мс.

109. В U-образной трубке сечением S = 10 см^2 находится вода ($\rho = 10^3$ кг/м^3) массой m = 400 г. При отсутствии силы трения циклическая частота вертикальных колебаний жидкости в трубке будет равна:

1) 3 рад/с; 2) 5 рад/с; $\boxed{3)}$ 7 рад/с; 4) 9 рад/с.

Вынужденные колебания

110. Если в вагоне поезда подвешенный на нити длиной l = 0,4 м шарик раскачивается из-за толчков на стыках рельсов, длина которых s = 31,4 м, то скорость поезда, при которой амплитуда колебаний шарика максимальна, равна:

1) 10 м/с; 2) 20 м/с; 3) 15 м/с; $\boxed{4)}$ 25 м/с.

111. Когда девочка стоит на тонкой доске, переброшенной через ров, то доска прогибается на Δx = 0,1 м. Если она идет по этой доске со скоростью υ = 0,5 м/с, то доска начинает сильно раскачиваться. При этом длина шага девочки равна:

$\boxed{1)}$ 0,3 м; 2) 0,4 м; 3) 0,5 м; 4) 0,6 м.

112. Поезд движется равномерно. Длина рельсов l = 12,56 м. Скорость поезда, при которой тело массой m = 0,1 кг, подвешенное в вагоне поезда на невесомой пружине жесткостью k = 10 Н/м, сильно колеблется, равна
1) 10 м/с; 2) 15 м/с; $\boxed{3)}$ 20 м/с; 4) 25 м/с.

113. По дороге, выложенной из неплотно пригнанных бетонных плит длиной l = 10 м каждая, движется автомобиль с двухколесным автоприцепом массой m = 100 кг. Если жесткость пружин амортизаторов каждого из колес $k = 5\cdot10^3$ Н/м, то скорость автомобиля, при которой прицеп будет сильно «подпрыгивать» на стыках, равна:
1) 6 м/с; 2) 12 м/с; $\boxed{3)}$ 16 м/с; 4) 18 м/с.

Механические волны

114. Упругие волны возбуждаются источником колебаний, расположенным в среде. Если период колебаний T = 4 мс, а волны распространяются со скоростью υ = 7,5 м/с, то длина волны равна:
1) 3 мм; $\boxed{2)}$ 30 мм; 3) 30 см; 4) 3 м.

115. Поплавок на поверхности воды совершает N = 180 колебаний за время t = 60 с. Если расстояние между соседними гребнями возникающих волн равно l = 0,4 м, то скорость распространения волн составляет:
1) 0,9 м/с; $\boxed{2)}$ 1,2 м/с; 3) 1,8 м/с; 4) 2,4 м/с.

116. Если упругая волна переходит из среды, в которой ее скорость равна υ_1, в среду, где ее скорость в полтора раза меньше, то частота и длина волны становятся равными:
1) $\nu_2 = 1{,}5\nu_1$, $\lambda_2 = 1{,}5\lambda_2$; $\boxed{2)}$ $\nu_2 = \nu_1$, $\lambda_2 = \lambda_1/1{,}5$;
3) $\nu_2 = \nu_1$, $\lambda_2 = 1{,}5\lambda_2$; 4) $\nu_2 = \nu_1/1{,}5$, $\lambda_2 = \lambda_1$.

117. Поперечные волны могут распространяться:
1) только в газах; 2) только в жидкостях;
$\boxed{3)}$ только в твердых телах; 4) в газах, жидкостях и твердых телах.

118. Продольные волны могут распространяться:
1) только в газах; 2) только в жидкостях;
3) только в твердых телах; $\boxed{4)}$ в газах, жидкостях и твердых телах.

119. Уравнение $X = A\sin\omega\left(t - \frac{r}{\upsilon}\right)$ описывает волну:
1) продольную; 2) поперечную;
$\boxed{3)}$ продольную и поперечную; 4) нет правильного ответа.

120. Период колебаний источника T = 3,0 с. Если смещение точки среды, находящейся на расстоянии l = 10 см от источника, равно половине амплитуды через время t = 1,0 с после начала колебаний источника, то длина волны равна:
1) 10 см; 2) 20 см; 3) 30 см; $\boxed{4)}$ 40 см.

121. Если разность фаз двух точек, лежащих на луче на расстоянии Δr = 6 м, составляет 6π, то длина волны равна:
$\boxed{1)}$ 2 м; 2) 3 м; 3) 6 м; 4) 4 м.

122. Две точки находятся на прямой, вдоль которой распространяются волны со скоростью υ = 75 м/с. Если частота колебаний $\nu = 20\ с^{-1}$, расстояние между точками Δr = 1,5 м, то разность фаз колебаний в этих точках равна:
1) $0,5\pi$; 2) π; 3) $0,4\pi$; $\boxed{4)}$ $0,8\pi$.

123. Надувной матрац качается на волнах, распространяющихся со скоростью υ = 2 м/с. Если расстояние между двумя ближайшими гребнями волн Δr = 8 м, то период колебаний волны равен:
$\boxed{1)}$ 4 с; 2) 5 с; 3) 8 с; 4) 12 с.

124. Человек, находясь на берегу озера, определил, что расстояние между следующими друг за другом гребнями волн Δr = 15 м. Если за минуту мимо него прошло 10 волновых гребней, то скорость распространения волн равна:
1) 9,0 м/с; 2) 6,75 м/с; 3) 4,5 м/с; $\boxed{4)}$ 2,25 м/с.

125. Мальчик, находясь на берегу водоема, бросил мяч в воду и заметил, что возникшая волна дошла до него за время t_1 = 5,0 с. Если расстояние между двумя гребнями волн λ = 0,4 м, а за время t_2 = 2,0 с он услышал n = 6 всплесков о берег водоема, то мяч был брошен от берега на расстояние, равное:
$\boxed{1)}$ 5 м; 2) 7,5 м; 3) 10 м; 4) 12,5 м.

126. Если упругая волна распространяется по закону $X(r,t) = 0,5\cos(200\pi t - 2r)$ см, то частота колебаний и длина волны равны соответственно:
$\boxed{1)}$ 100 Гц, 3,14 м; 2) 200 Гц, 2 м; 3) 100π Гц, 3,14 м; 4) 200π Гц, 2 м.

127. Если упругая волна распространяется по закону $X(r,t) = 0,5\cos(200\pi t - 2r)$ см, то скорость распространения волны равна:
1) 3,14 м/с; 2) 31,4 м/с; $\boxed{3)}$ 314 м/с; 4) 3140 м/с.

128. Если упругая волна распространяется по закону $X(r,t) = 0,5\cos(200\pi t - 2r)$ см, то максимальная скорость и максимальное ускорение частиц среды равны:
$\boxed{1)}$ 0,314 м/с, 197 м/с^2; 2) 3,14 м/с, 197 м/с^2;
3) 314 м/с, 197 м/с^2; 4) 0,314 м/с, 1,97 м/с^2.

Звуковые волны

129. При переходе звуковой волны и воздуха в воду неизменной остается:
1) длина волны; 2) амплитуда волны;
$\boxed{3)}$ частота волны; 4) скорость волны.

130. Звуковые волны распространяются в воде со скоростью $\upsilon_1 = 1480$ м/с, а в воздухе – со скоростью $\upsilon_2 = 340$ м/с. При переходе звука из воздуха в воду длина звуковой волны:
$\boxed{1)}$ увеличивается в 4,35 раза; 2) уменьшается в 4,35 раза; 3) не изменяется.

131. Скорость звука в воде $\upsilon = 1450$ м/с. Если расстояние между ближайшими точками в направлении распространения волны, в которых колебания частиц совершаются в противофазе, $\Delta r = 0{,}1$ м, то частота ν звуковой волны равна:
1) 2900 Гц; 2) 3625 Гц; 3) 4350 Гц; $\boxed{4)}$ 7250 Гц.

132. Скорость звука $\upsilon = 340$ м/с. Если расстояние до преграды, отражающей звук, $r = 68$ м, то человек услышит эхо через время, равное:
$\boxed{1)}$ 0,4 с; 2) 0,6 с; 3) 0,8 с; 4) 0,9 с.

133. Скорость звука в воздухе $\upsilon = 340$ м/с. Если ухо человека воспринимает звуковые волны в диапазоне частот от $\nu_1 = 20$ Гц до $\nu_2 = 20\,000$ Гц, то максимальная и минимальная длины звуковых волн равны:
1) 20 м, 20 мм; 2) 30 м, 3 мм; $\boxed{3)}$ 17 м, 17 мм; 4) 15 м, 15 мм.

134. Звуковые волны распространяются в среде со скоростью $\upsilon = 320$ м/с при частоте $\nu = 10^3$ Гц. Разность фаз колебаний двух частиц среды, расположенных на расстоянии $\Delta r = 8$ см вдоль линии распространения волны, равна:
1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; $\boxed{4)}$ $\frac{\pi}{2}$.

135. Скорость звука в металле $\upsilon = 6400$ м/с. Если расстояние между ближайшими частицами в металле, колеблющимися с разностью фаз $\Delta\varphi = \pi$, равно $l = 3{,}2$ м, то частота звуковых колебаний в металле равна:
1) 0,25 кГц; 2) 0,5 кГц; $\boxed{3)}$ 1,0 кГц; 4) 1,5 кГц.

136. Скорость звука в воздухе $\upsilon_1 = 340$ м/с, в железнодорожном рельсе $\upsilon_2 = 5200$ м/с. Если звук от удара по рельсу приходит к наблюдателю по воздуху на время $\Delta t = 2{,}5$ с позже, чем по рельсу, то место удара находится от наблюдателя на расстоянии, равном:
1) 680 м; $\boxed{2)}$ 910 м; 3) 1010 м; 4) 1340 м.

137. Звуковая волна распространяется со скоростью $\upsilon = 330$ м/с. Если наименьшее расстояние между точками волны, совершающими колебания в одинаковой фазе, $\Delta r = 0{,}33$ м, то длина звуковой волны равна:

1) 3,3 мм; 2) 33 мм; $\boxed{3)}$ 33 см; 4) 33 м.

138. Звуковая волна распространяется со скоростью $\upsilon = 330$ м/с. Если наименьшее расстояние между точками, совершающими колебания в противофазе, $\Delta r = 0{,}17$ м, то длина звуковой волны равна:

1) 85 мм; 2) 17 см; $\boxed{3)}$ 34 см; 4) 66 см.

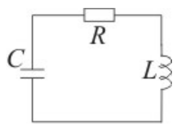
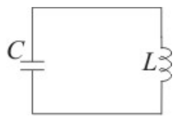
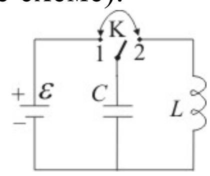
139. Скорость звука в воде $\upsilon = 1450$ м/с. Если частота колебаний частиц среды $\nu = 725$ Гц, то минимальное расстояние Δr между частицами, совершающими колебания в противоположных фазах, равно:

1) 0,5 м; $\boxed{2)}$ 1 м; 3) 1,5 м; 4) 2,0 м.

Глава 2. Электромагнитные колебания и волны

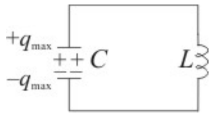
2.1. Теория

Электромагнитные колебания

Колебательный контур (реальный)  	Электрическая цепь, состоящая из последовательно соединенных конденсатора емкостью C, катушки индуктивностью L и омического сопротивления R, равного сумме сопротивлений соединительных проводов и витков катушки.
Идеальный колебательный контур, или контур Томсона  	электрическая цепь, содержащая последовательно соединенные конденсатор емкостью C и катушку индуктивностью L. Омическое сопротивление контура ничтожно мало. Колебательный контур используется для возбуждения электромагнитных колебаний.
Электромагнитные колебания	периодические изменения заряда q и напряжения U на обкладках конденсатора и силы тока I, протекающего через катушку индуктивности в колебательном контуре, которые сопровождаются превращениями энергии электрического поля конденсатора и магнитного поля катушки.
Условия возникновения электромагнитных колебаний в колебательном контуре	– можно зарядить конденсатор от внешнего источника напряжения (ключ К в положении 1 на приведенной ниже схеме).  При этом между обкладками конденсатора возникает электрическое поле, обладающее энергией. Далее ключ К переводят в положение 2 и в колебательном контуре (системе) возникают свободные электромагнитные колебания; – можно поместить катушку индуктивности в изменяющееся магнитное поле, возбудить в ней ЭДС индукции. Катушка создаст собственное магнитное поле, обладающее энергией.

Свободные (собственные) электромагнитные колебания

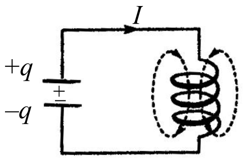
электромагнитные колебания, происходящие в колебательном контуре за счет первоначальной однократно сообщенной контуру энергии. (В идеальном колебательном контуре колебания незатухающие, в реальном контуре – затухающие.)



Полная энергия колебательного контура $W = W_{\max_{эл}}$

последовательные стадии колебательного процесса в идеальном колебательном контуре.

Отсчет проводится от момента подключения заряженного конденсатора к катушке: $t_0 = 0$, энергия электрического поля конденсатора максимальна, $W_{\max_{эл}} = \dfrac{CU_{\max}^2}{2} = \dfrac{q_{\max}^2}{2C}$. Конденсатор начинает разряжаться ($q_{\max}$ и $U_{\max}$ – максимальные значения заряда и напряжения на обкладках конденсатора).



Полная энергия колебательного контура

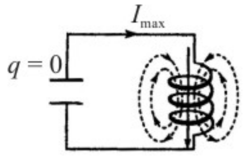
$$W = W_{эл} + W_{м}$$

или

$$W = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}$$

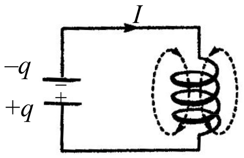
Конденсатор разряжается, энергия электрического поля конденсатора уменьшается, энергия магнитного поля катушки возрастает и в контуре течет возрастающий со временем ток I. Ток увеличивается не мгновенно, а постепенно из-за возникающей в катушке ЭДС самоиндукции, препятствующей нарастанию тока (правило Ленца).

Поскольку в идеальном колебательном контуре $R \approx 0$, то полная энергия согласно закону сохранения остается постоянной, равной сумме энергий электрического поля конденсатора $\left(W_{эл} = \dfrac{q^2}{2C} = \dfrac{CU^2}{2} \right)$ и магнитного поля катушки $\left(W_{м} = \dfrac{LI^2}{2} \right)$.



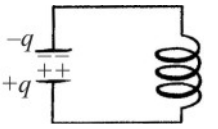
Полная энергия колебательного контура $W = W_{\max_{м}}$

К моменту времени t_1 конденсатор полностью разряжается ($q = 0$), сила тока в катушке достигает максимального значения ($I_{\max}$). Вся энергия сосредоточена в катушке и равна $W_{\max_{м}} = \dfrac{LI_m^2}{2}$.



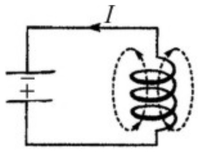
Полная энергия колебательного контура $W = W_{м} + W_{эл}$

Далее ток в катушке уменьшается, возникающая в катушке ЭДС самоиндукции препятствует мгновенному исчезновению тока. Ток в контуре того же направления. Конденсатор перезаряжается, на его пластинах возникают заряды, противоположные по знаку исходным.

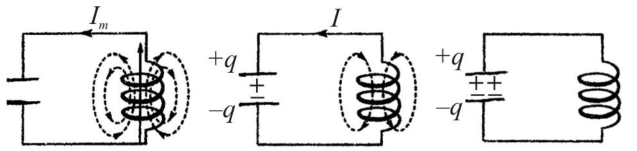


Полная энергия колебательного контура $W = W_{m_{\text{эл}}}$

Заряд и напряжение на обкладках конденсатора возрастают до максимального значения. Энергия магнитного поля катушки полностью преобразуется в энергию электрического поля конденсатора.



Конденсатор начинает разряжаться, ток в контуре начинает идти в противоположном направлении, против часовой стрелки.



Процесс повторяется, конденсатор перезаряжается и колебательный контур возвращается в исходное состояние.

Превращения энергии в колебательном контуре

$W = W_{\text{эл}} + W_{\text{м}} =$

$= W_{\max_{\text{эл}}} = W_{\max_{\text{м}}} = \text{const}$

или

$$W = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} =$$

$$= \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} =$$

$$= \frac{q^2_{\max}}{2C} = \frac{CU^2_{\max}}{2} = \frac{LI^2_{\max}}{2}$$

В колебательном контуре происходит периодическая перекачка энергии электрического поля конденсатора в энергию магнитного поля катушки и наоборот. При этом полная энергия идеального колебательного контура остается постоянной, равной сумме энергий электрического поля конденсатора ($W_{\text{эл}}$) и магнитного поля катушки ($W_{\text{м}}$) или максимальной энергии электрического поля конденсатора ($W_{\max_{\text{эл}}}$) или максимальной энергии поля катушки ($W_{\max_{\text{м}}}$).

Основное уравнение для процессов в идеальном контуре

$q'' + \omega_0^2 q = 0$ или

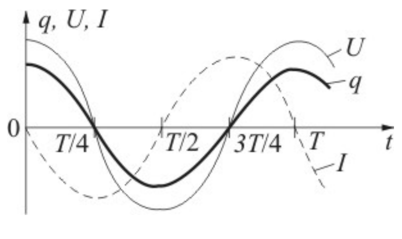
$$q'' + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Решение этого уравнения гармонического колебания (см. гл. 1: $x'' + \omega_0 x = 0$) $q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, где q – мгновенное значение; $q_{\max}$ – амплитудное значение заряда на конденсаторе; $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ – циклическая частота колебаний; φ_0 – начальная фаза колебаний.

Период свободных колебаний в идеальном колебательном контуре

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

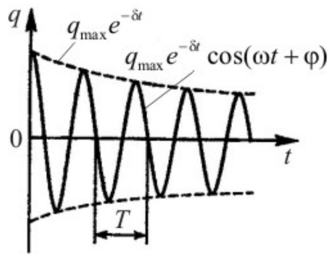
(формула Томсона)

Амплитудное (максимальное) значение напряжения $U_{max} = \dfrac{q_{max}}{C}$	Напряжение на конденсаторе $U_C = \dfrac{q}{C} = \dfrac{q_{max}}{C}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = U_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.
Амплитудное значение силы тока $I_{max} = \omega_0 q_{max} = \dfrac{q_{max}}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\dfrac{C}{L}}U_{max}$	Сила тока в колебательном контуре $I = q' = -\omega_0 q_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = I_{max}\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \dfrac{\pi}{2}\right)$. Колебания силы тока I смещены относительно колебаний заряда на $\dfrac{\pi}{2}$.
Энергия электрического поля конденсатора в любой момент времени t	$W_{эл} = \dfrac{q^2}{2C} = \dfrac{q_{max}^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2C} = \dfrac{q_{max}^2}{4C}(1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0))$.
Энергия магнитного поля катушки в любой момент времени t	$W_{м} = \dfrac{LI^2}{2C} = \dfrac{LI_{max}^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2} = \dfrac{LI_{max}^2}{4}(1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0))$.
Графики зависимостей заряда, напряжения и силы тока в идеальном колебательном контуре от времени	Рассмотрим случай, когда в начальный момент времени ($t_0 = 0$) заряд и напряжение на конденсаторе максимальны и их изменение происходят по закону: $q = q_{max}\cos\omega_0 t$; $U = U_{max}\cos\omega_0 t$. Закон изменения силы тока имеет вид: $I = -I_{max}\sin\omega_0 t$. 
Свободные затухающие электромагнитные колебания	возникают в любых колебательных контурах, сопротивление которых $R \neq 0$ (т. е. RLC-контурах), и описываются уравнением $q'' + 2\delta q' + \omega_0^2 q = 0$, где $\delta = \dfrac{R}{2L}$ – коэффициент затухания, $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ – собственная циклическая частота колебаний в

контуре. Решение этого уравнения имеет вид $q = q_{max} e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$,

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}$ – циклическая частота затухающих колебаний.

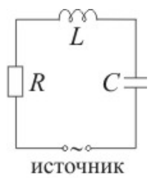
График зависимости заряда q на конденсаторе колебательного контура в случае затухающих электромагнитных колебаний



Аналогично механическим затухающим колебаниям период затухающих электромагнитных колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}}$, $q_{max} e^{-\delta t}$ – амплитуда затухающих колебаний (изменение амплитуды колебаний показано на рисунке пунктирной линией).

Затухающие колебания не являются периодическими и тем более гармоническими.

Вынужденные электромагнитные колебания



незатухающие колебания заряда q и напряжения U_C на обкладках конденсатора, силы тока I, вызванные внешними периодически изменяющимися по гармоническому закону, подводимыми к контуру ЭДС или напряжения:

$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{max} \cos \omega t$,

$U = U_{max} \cos \omega t$,

где $\mathcal{E}_{max}$ и U_{max} – амплитудные значения ЭДС и напряжения соответственно, ω – циклическая частота их изменения.

Уравнение колебательного контура (RLC-контура), к которому подключена внешняя периодически изменяющаяся по гармоническому закону ЭДС (или напряжение)

$$q'' + \frac{R}{L} q' + \frac{1}{LC} q = \frac{\mathcal{E}_{max}}{L} \cos \omega t$$

или

$$q'' + 2\delta q' + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}_{max}}{L} \cos \omega t,$$

где аналогично вынужденным механическим колебаниям (см. гл. 1) $\delta = \frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – собственная частота колебательного контура.

Возникающие колебания незатухающие, так как к контуру периодически подводится энергия, необходимая для восстановления ее потерь на электрическом сопротивлении.

В установшемся режиме вынужденные колебания происходят с частотой ω и являются гармоническими.

Решение приведенного уравнения, отвечающее установившимся вынужденным колебаниям заряда, имеет вид $q = q_{\max}\cos(\omega t - \varphi_0)$, где $q_{\max}$ – амплитудное значение заряда на обкладках конденсатора, φ_0 – разность фаз между колебаниями заряда в контуре и внешним напряжением U (или внешней ЭДС).

Максимальное (амплитудное) значение заряда $q_{\max}$ и разность фаз φ_0 определяются как частотой, так и характеристиками колебательного контура (подчеркиваем: аналогично вынужденным механическим колебаниям, см. гл. 1).

$$q_{\max} = \frac{\varepsilon_{\max}}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} = \frac{\varepsilon_{\max}}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\mathrm{tg}\varphi_0 = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}$$

Сила тока при установившихся вынужденных колебаниях в контуре

$$I = q' = -\omega q_{\max}\sin(\omega t - \varphi_0) = = I_{\max}\cos\left(\omega t - \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = I_{\max}\cos(\omega t - \varphi).$$

Амплитудное значение силы тока

$$I_{\max} = \omega q_{\max} = \frac{\varepsilon_{\max}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega t - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Сдвиг по фазе φ между током и внешним напряжением U (или ЭДС)

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{\pi}{2},$$

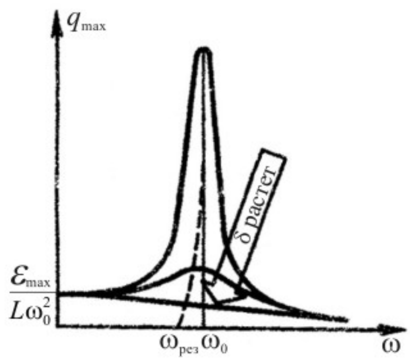
$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\mathrm{tg}\varphi_0} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Из этого выражения следует, что ток отстает по фазе от внешнего напряжения (т. е. $\varphi > 0$), если $\omega L > \frac{1}{\omega C}$, и опережает внешнее напряжение, если $\omega L < \frac{1}{\omega C}$.

Анализ зависимостей амплитудных значений заряда q_{max} и силы тока I_{max} вынужденных колебаний от частоты ω показывает, что при определенной частоте, называемой резонансной частотой $\omega_{рез}$, эти величины достигают *максимума*.

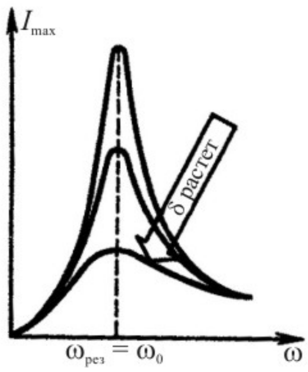
Электрический резонанс

явление резкого возрастания амплитудных значений q_{max} и I_{max} вынужденных колебаний при приближении частоты ω вынуждающего переменного напряжения к резонансной частоте $\omega_{рез}$.



На рисунке приведены резонансные кривые зависимости амплитуды заряда q_{max} на конденсаторе от частоты ω внешней ЭДС (или напряжения). Резонансная частота для заряда

$$\omega_{q_{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{(2L)^2}} \le \omega_0.$$

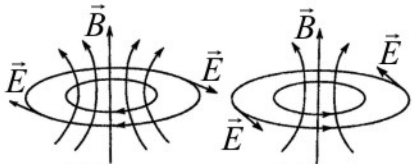


На рисунке приведены резонансные кривые зависимости амплитуды силы тока I_{max} от частоты ω внешней ЭДС (или напряжения). Резонансная частота для силы тока совпадает с собственной частотой контура $\omega_{I_{рез}} = \omega_0 = \frac{1}{LC}$.

Примечание. Выражения для резонансных частот $\omega_{q_{рез}}$ и $\omega_{I_{рез}}$ получены при исследовании на экстремум формулы для амплитуд заряда q_{max} и силы тока I_{max} при установившихся вынужденных колебаниях в контуре (см. выше).

Максимумы амплитуд q_{max} и I_{max} выше и острее при малых коэффициентах затухания $\delta = \frac{R}{2L}$. Резонансные кривые для заряда при $\omega \Rightarrow 0$ имеют одно и то же значение $\frac{\mathcal{E}_{max}}{L\omega_0^2}$, называемое статическим отклонением.

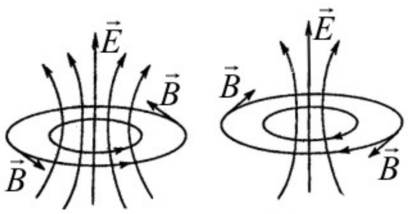
Электромагнитные волны



$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} > 0$ $\quad$ $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} < 0$

В 60-х годах XIX в. Дж. К. Максвелл создает единую теорию электрических и магнитных явлений, основанную на том, что переменные электрические и магнитные поля взаимосвязаны и не могут существовать отдельно друг от друга:

а) любое изменение магнитного поля приводит к появлению в окружающем пространстве индукционного электрического поля, линии напряженности которого замкнуты, поэтому это поле называется вихревым. (Это подтверждается явлением электромагнитной индукции.) Касательная к линии напряженности индукционного электрического поля перпендикулярна вектору магнитной индукции в данной точке пространства, т. е. $\vec{E} \perp \vec{B}$ (см. рис.);

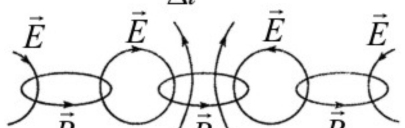


$\frac{\Delta E}{\Delta t} > 0$ $\quad$ $\frac{\Delta E}{\Delta t} < 0$

б) любое изменение напряженности электрического поля приводит к появлению в окружающем пространстве магнитного поля, которое, как и любое магнитное поле, является вихревым. Линии магнитной индукции расположены вокруг линий напряженности переменного электрического поля подобно линиям магнитной индукции вокруг проводников с электрическим током. Векторы индукции магнитного поля перпендикулярны вектору напряженности электрического поля в данной точке пространства, т. е. $\vec{B} \perp \vec{E}$ (см. рис.).

Электромагнитное поле — совокупность двух взаимосвязанных, порождающих друг друга переменных электрического и магнитного полей.

$\frac{\Delta E}{\Delta t} \neq 0$



Если в какой-либо области пространства существует переменное электрическое поле, то оно приводит к возникновению в соседних областях пространства переменного магнитного поля, линии индукции которого охватывают линии напряженности этого электрического поля (см. рис.).

Возникшее переменное магнитное поле приводит к возникновению в соседних областях пространства вихревого электрического поля, линии напряженности которого охватывают линии индукции данного магнитного поля. Эти процессы происходят в пространстве по всем направлениям.

Электромагнитная волна — процесс распространения в пространстве с течением времени электромагнитного поля.

Свойства и характеристики электромагнитных волн

Скорость распространения электромагнитной волны

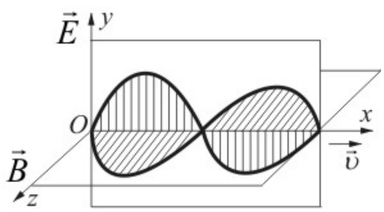
– является величиной конечной. В вакууме скорость распространения $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8$ м/с,

– в среде скорость распространения $\upsilon = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0}}$

(ε_0 = 8,85·10^{-12} Ф/м – электрическая постоянная; ε – диэлекрическая проницаемость среды; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная; μ – магнитная проницаемость среды).

Электромагнитные волны экспериментально обнаружены Г. Герцем в 1887 г.

– источник электромагнитных волн – любой ускоренно движущийся или колеблющийся заряд.



– электромагнитные волны строго поперечны. Зависимость мгновенных значений векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ от координаты x (направление скорости волны вдоль оси Ox).

Векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ взаимно перпендикулярны и перпендикулярны направлению распространения волны.

– объемная плотность энергии волны

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu\mu_0} \text{ или}$$

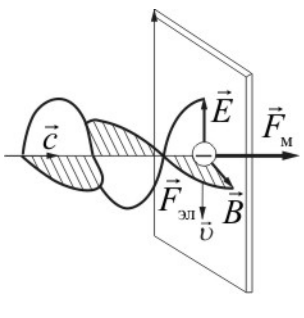
$$w = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu\mu_0}.$$

Интенсивность электромагнитной волны

$$I = \frac{\langle W \rangle}{St}$$

$$[I] = 1\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2\text{с}} = 1\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^3}$$

определяется средней по времени энергией, переносимой электромагнитной волной в единицу времени через единичную площадку, ориентированную перпендикулярно направлению распространения волны.



– электромагнитные волны оказывают давление на встречаемые преграды (тела, вещества). Это объясняется действием электрического поля волны на заряженные частицы вещества. В частности, электроны начинают двигаться упорядоченно под действием силы $\vec{F}_{\text{эл}}$ (см. рис.) и подвергаются уже действию силы Лоренца со стороны магнитного поля волны ($\vec{F}_{\text{м}}$ на рис.), направленной внутрь вещества. Эта сила, действующая на все частицы со

стороны элекромагнитной волны, и оказывает давление;
– электромагнитная волна обладает импульсом;
– электромагнитные волны поглощаются, отражаются, преломляются, интерферируют, дифрагируют, поляризуются. Эти свойства электромагнитных волн будут подробно рассматриваться в части «Оптика».

Радиосвязь

излучение и прием информации посредством электромагнитных волн в диапазоне частот от $\sim 3 \cdot 10^4$ Гц до $\sim 3 \cdot 10^{11}$ Гц (или от ~ 1 мм до ~ 10 км).
Применение электромагнитных волн для установления связи без проводов впервые продемонстрировано А.С. Поповым в 1895 г.

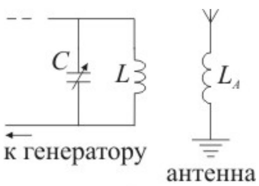
Излучение и прием электромагнитных волн

Закрытый колебательный контур, рассмотренный выше, практически не излучает электромагнитные волны в окружающее пространство: энергия электрического поля сосредоточена в конденсаторе, энергия магнитного поля – в катушке. Закрытый колебательный контур непригоден в качестве источника электромагнитных волн.

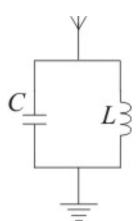
Открытый колебательный контур

а

б

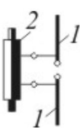


в

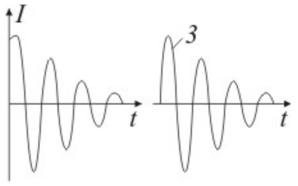


Для осуществления радиосвязи необходимо создать возможность излучения электромагнитных волн в пространство, т. е. сделать колебательный контур открытым. Это достигается расположением пластин конденсатора на противоположных концах прямой катушки (см. рис. *а*). В действительности открытый колебательный контур состоит из катушки и длинного провода – *антенны*, один конец которого заземлен, другой поднят над поверхностью земли (рис. *б*).
Катушка антенны L_A индуктивно свзяана с катушкой L колебательного контура генератора незатухающих колебаний (рис. *в*). Вынужденные колебания высокой частоты в антенне создают в окружающем пространстве переменное электромагнитное поле, являющееся источником электромагнитных волн.
Можно создать открытый колебательный контур из закрытого, присоединив к нему антенну и заземление.

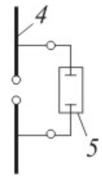
Вибратор Герца – представляет собой открытый колебательный контур. Состоит из двух проводников (*1*) одинаковой длины, разделенных небольшим воздушным зазором, называемым искровым промежутком. Проводники заряжаются до высокой разности потенциалов с помощью подключаемой к ним индукционной катушки Румкорфа (*2*). В воздушном промежутке возникает искра, цепь замыкается, и в открытом контуре происходят свободные колебания. Излучая волны, вибратор теряет энергию. После затухания колебаний индукционная катушка вновь повышает напряжение между проводниками вибратора до возникновения пробоя воздушного промежутка. Весь процесс повторяется сначала.



Излучаемые вибратором электромагнитные волны представляют серию затухающих импульсов малой длительности (*3*).



Прием электромагнитных волн в опытах Герца производился с помощью приемного вибратора (*4*) – точно такого же, как и излучающий вибратор. В подключенной к вибратору разрядной трубке (*5*) возникал газовый разряд, сопровождающийся слабым свечением. Это свидетельствовало о приеме электромагнитных волн вибратором.



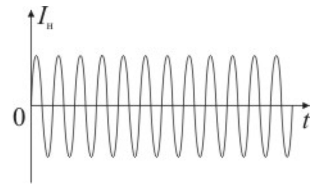
Принципы радиосвязи – Энергия излучаемых электромагнитных волн при одинаковой амплитуде колебаний силы тока в антенне пропорциональна четвертой степени частоты колебаний. На низких частотах звуковых сигналов (от десятков до тысяч герц) интенсивность излучения ничтожно мала. Поэтому для осуществления радиосвязи используются высокочастотные электромагнитные волны (от нескольких сотен тысяч герц до сотен тысяч мегагерц), т. е. радиосвязь осуществляется с помощью модулированных радиоволн.

Модуляция электромагнитной волны – изменения параметров электромагнитной высокочастотной волны (амплитуды, частоты, начальной фазы) низкочастотными колебаниями. Существуют амплитудная, частотная и фазовая модуляции.

Амплитудная модуляция (простейший вид модуляции) – процесс изменения амплитуды высокочастотных колебаний в соответствии с низкочастотным сигналом, получаемым через микрофон.

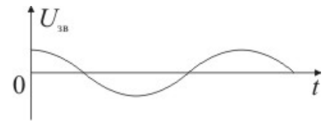
Данный способ модуляции проиллюстрирован на графиках:

а) график колебаний высокой частоты, называемой *несущей частотой*;



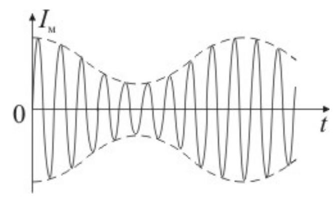
а

б) график колебаний звуковой частоты, т. е. модулирующих колебаний;



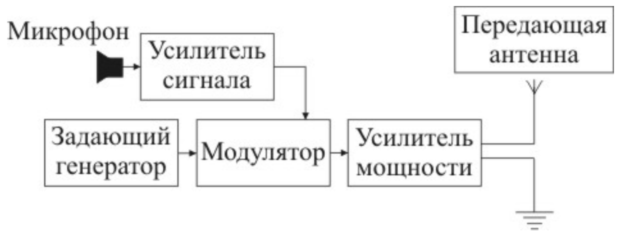
б

в) график модулированных по амплитуде высокочастотных колебаний.



в

Блок-схема для передачи информации с помощью амплитудно-модулированной волны

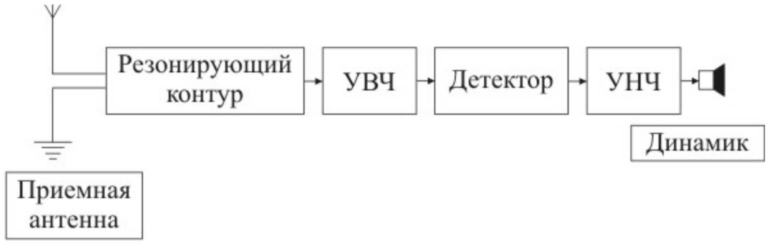


Задающий генератор создает (генерирует) высокочастотные электромагнитные колебания определенной частоты. В микрофоне происходит преобразование энергии звуковой волны в электрический сигнал, который проходит усилитель сигналов и попадает в модулятор, вольт-амперная характеристика которого нелинейна, что является принципиально важным. Если бы электрическая цепь модулятора была линейной, т. е. подчинялась закону Ома, то в нем произошла бы обычная суперпозиция двух колебаний с разными частотами и никакой модуляции амплитуды высокочастотной составляющей не было бы.

Модулированный сигнал усиливается в усилителе мощности до уровня, необходимого для передачи, и поступает в передающую антенну.

Электромагнитные волны улавливаются и преобразуются радиоприемником.

Блок-схема приемного устройства (радиоприемника)

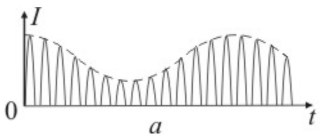


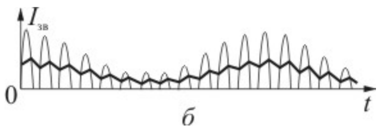
Основной частью радиоприемника также является открытый колебательный контур – приемная антенна, которая улавливает самые разные электромагнитные волны, излучаемые многими радиопередатчиками, грозовыми разрядами и т. п. Включение в цепь антенны колебательного контура, частота собственных колебаний которого может изменяться с помощью конденсатора переменной емкости, позволяет выделить из всех сигналов только один необходимый сигнал.

Такой контур называется резонирующим, так как его настраивают в резонанс с частотой электромагнитной волны, излучаемой выбранной радиостанцией.

Полученный высокочастотный модулированный сигнал усиливается до необходимого уровня в усилителе высоких частот (УВЧ) и поступает в детектор – устройство, обладающее односторонней проводимостью (полупроводниковый или ламповый диод).

Детектирование





процесс, обратный модуляции, заключающийся в выделении из модулированных колебаний высокой частоты звуковых колебаний. После прохождения детектора амплитудно-модулированный высокочастотный переменный ток превращается в импульсы одинаковой полярности, амплитуда которых меняется по закону звуковой частоты. График зависимости силы тока от времени для этого случая показан на рисунке *а*.

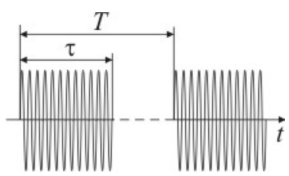
Сглаживание высокочастотной составляющей осуществляется за счет применения цепочки параллельно соединенных конденсатора с достаточно большой емкостью и резистора. Емкость конденсатора и сопротивление резистора подбирают такими, чтобы время разрядки конденсатора было велико по сравнению с периодом высокочастотной составляющей сигнала, но мало по сравнению с низкочастотной составляющей. Через резистор будет протекать ток, изменяющийся во времени со звуковой частотой, использованной при модуляции высокочастотных колебаний в радиопередатчике. Форма колебаний этого тока почти точно воспроизводит форму низкочастотного сигнала на передающей станции (рис. *б*). Полученный низкочастотный сигнал усиливается усилителем низкочастотных сигналов (УНЧ) до необходимого уровня и поступает на динамик (громкоговоритель).

Радиолокация

способ обнаружения и определения местонахождения различных объектов с помощью радиоволн. Основан на явлениях отражения и рассеяния радиоволн телами.

Блок-схема радиолокационной установки (радиолокатора или радара)

Радар представляет собой комбинацию ультракоротковолнового радиопередатчика и радиоприемника, имеющих общую приемно-передающую антенну, которая создает остронаправленное излучение. Антенна подвижна, способна поворачиваться в любом направлении. Излучение осуществляется короткими импульсами длительностью $\tau \approx 10^{-6}$ с. В промежутки времени между двумя последовательными импульсами излучения время $T \gg \tau$ антенна автоматически переключается на прием отраженного от цели сигнала.



Расстояние до цели

$$s = \frac{c\Delta t}{2}$$

c – скорость распространения электромагнитной волны; Δt – промежуток времени, прошедший от момента посылки сигнала до его возвращения в приемник установки. Расстояние определяется с помощью индикатора (электронно-лучевой трубки).

Приложение I к главам 1 и 2

Таблица сопоставления условий возникновения свободных механических и электромагнитных колебаний

Механическая система (маятники)	Колебательный контур
1. Наличие первоначального запаса энергии в системе	
а) колебательной системе сообщается потенциальная энергия, смещая материальную точку (тело) от положения равновесия;	а) конденсатор колебательного контура заряжается, в нем создается электрическое поле, обладающее энергией;
б) колебательной системе сообщается кинетическая энергия, придавая скорость материальной точке (телу).	б) катушка индуктивности колебательного контура помещается в переменное магнитное поле, через нее начинает протекать переменный электрический ток, создавая в ней собственное магнитное поле, обладающее энергией.
2. Наличие в системе силы, стремящейся вернуть ее в положение равновесия	
Упругая и квазиупругая сила, пропорциональная смещению x колеблющейся точки (тела).	Со стороны электрического поля, создаваемого заряженным конденсатором, на заряды действует сила $\vec{F} = q\vec{E}$.
3. Наличие инерционных явлений в колебательной системе	
Инертность колеблющейся точки (тела) массой m препятствует мгновенному изменению ее скорости.	Явление самоиндукции, возникающее в катушке, препятствует мгновенному изменению силы тока в ней.
4. Исключение потерь энергии в колебательной системе	
Трение и сопротивление среды пренебрежимо малы.	Электрическое сопротивление подводящих проводов и витков катушки пренебрежимо мало.

Приложение II к главам 1 и 2

Таблица сопоставления характеристик колебаний в механических системах и колебательном контуре

Описание механических колебаний	Описание электромагнитных колебаний
1. Наличие первоначального запаса энергии в системе	
Дифференциальные уравнения свободных	Дифференциальные уравнения свободных
а) гармонических колебаний $x'' + \frac{k}{m}x = 0$ или $x'' + \omega_0^2 x = 0;$	а) гармонических колебаний $q'' + \frac{1}{LC}q = 0$ или $q'' + \omega_0^2 q = 0;$

б) затухающих колебаний $x'' + \frac{r}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$ или $x'' + 2\delta x' + \omega_0^2 x = 0$	б) затухающих колебаний $q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{LC}q = 0$ или $q'' + 2\delta q' + \omega_0^2 q = 0$
Собственная циклическая частота колебаний пружинного маятника $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$; математического маятника $\omega_0 = \sqrt{\frac{q}{l}}$	Собственная циклическая частота колебательного контура $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Циклическая частота затухающих колебаний $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}$; коэффициент затухания $\delta = \frac{r}{2m}$	Циклическая частота затухающих колебаний $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$; коэффициент затухания $\delta = \frac{R}{2L}$
Изменяется координата x колеблющейся точки (смещение точки от положения равновесия)	Изменяется заряд q на обкладках конденсатора
Скорость изменения координаты $x' = \upsilon$ – это скорость движения точки (тела)	Скорость изменения заряда $q' = I$ – это величина силы тока
Мерой инертных свойств колеблющейся точки является ее масса m (препятствует мгновенному изменению скорости)	Инертные свойства контура зависят от индуктивности катушки L. Явление самоиндукции, возникающее в ней, препятствует мгновенному изменению тока в контуре
Коэффициент упругой (или квазиупругой) силы для пружинного маятника (коэффициент жесткости пружины), для математического маятника $\frac{mg}{l}$	Из сравнения $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ и $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ видно, что аналогом k является отношение $\left(\frac{1}{C}\right)$
Потенциальная энергия пружинного маятника $W_п = \frac{kx^2}{2}$, математического – $W_п = mgh$. Кинетическая энергия точки (тела) в механических колебаниях $W_к = \frac{m\upsilon^2}{2}$	Энергия электрического поля конденсатора $W_{эл} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}$. Энергия магнитного поля катушки $W_м = \frac{LI^2}{2}$

2.2. Примеры решения задач

Идеальный колебательный контур. Свободные электромагнитные колебания

2.2.1. Напряжение на обкладках конденсатора в идеальном колебательном контуре изменяется по закону $U_C = 100\cos(10^3 t)$ В. Емкость конденсатора $C = 10$ мкФ. Определите период T колебаний, индуктивность L контура, законы изменения силы тока I в контуре и заряда q на обкладках конденсатора.

Решение:

Из заданного уравнения изменения напряжения на обкладках конденсатора $U_C = 100\cos(10^3 t)$ В видно, что максимальное значение напряжения на конденсаторе $U_{max} = 100$ В, собственная циклическая частота колебаний $\omega_0 = 10^3$ рад/с.

Период колебаний связан с циклической частотой соотношением

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 6{,}28 \text{ мс.}$$

Учитывая, что циклическая частота $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, определим индуктивность контура $L = \dfrac{1}{\omega_0^2 C} = 0{,}1$ Гн.

Изменение заряда на обкладках конденсатора происходит также по гармоническому закону:

$$q = CU = CU_{max}\cos\omega_0 t = q_{max}\cos\omega_0 t,$$

где $q_{max} = CU_{max}$ – максимальный заряд на конденсаторе.

Тогда закон изменения заряда на обкладках конденсатора

$q = 10\cdot 10^{-6}\cdot 100\cos(10^3 t)$ (Кл) $= 1{,}0\cos(10^3 t)$ (мКл).

Закон изменения силы тока в колебательном контуре определим первой производной от заряда по времени:

$$I = q' = -\omega_0 q_{max}\sin\omega_0 t = -\omega_0 CU_{max}\sin\omega_0 t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = -10^3\cdot 10\cdot 10^{-6}\cdot 100\sin 10^3 t =$$

$$= -1{,}0\sin(10^3 t) \text{ (А) или } I = -1{,}0\cos\left(10^3 t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ А.}$$

Ответ: $T = 6{,}28$ мс; $L = 0{,}1$ Гн;

$I = 1{,}0\cos\left(10^3 t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ А;

$q = 1{,}0\cos 10^3 t$ мКл.

2.2.2. Дифференциальное уравнение для заряда на конденсаторе колебательного контура имеет вид: $q'' + 16\cdot 10^{10} q = 0$. Максимальное напряжение на конденсаторе $U_{max} = 100$ В, индуктивность катушки контура $L = 25$ мГн. Определите емкость конденсатора C и напишите уравнения для зависимостей заряда q, напряжения U и силы тока I в контуре от времени.

Решение:

В общем виде дифференциальное уравнение гармонических электромагнитных колебаний имеет вид: $q'' + \omega_0^2 q = 0$, где $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ – циклическая частота колебаний. Как видно из уравнения, приведенного в условии задачи, $\omega_0 = 14 \cdot 10^5$ рад/с.

Емкость конденсатора $C = \dfrac{1}{\omega_0^2 L} = 2,5 \cdot 10^{-10}$ Ф = 250 пФ. Из соотношения $q_{max} = CU_{max}$ определим максимальный заряд на конденсаторе: q_{max} = 25 нКл. Заряд и напряжение на конденсаторе изменяются синфазно и можно записать:

$q = 25 \cdot 10^{-9} \sin(4 \cdot 10^5 t)$ Кл = $25\sin(4 \cdot 10^5 t)$ нКл;

$U = 100\sin(4 \cdot 10^5 t)$ В.

Сила тока в контуре $I = q'$:

$$I = \omega_0 q_{max} \cos(\omega_0 t) = \omega_0 q_{max} \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ или}$$

$$I = 10 \cdot 10^{-3} \sin\left(4 \cdot 10^5 t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ А} = 10\sin\left(4 \cdot 10^5 t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ мА.}$$

Ответ: C = 250 пФ; $25\sin(4 \cdot 10^5 t)$ нКл;
$U = 100\sin(4 \cdot 10^5 t)$ В; $I = 10\sin\left(4 \cdot 10^5 t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ мА.

2.2.3. Электрический заряд на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по закону $q = 200\cos\left(4\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ мкКл. Определите амплитудное значение заряда q_{max} на обкладках конденсатора; циклическую частоту ω_0; частоту ν; период T; начальную фазу φ_0 колебаний заряда; модуль амплитудного значения силы тока I_{max} в контуре, а также заряд на обкладках q, силу тока I и фазу φ колебаний заряда в момент времени $t = \dfrac{1}{16}$ с.

Решение:

Из заданного закона изменения электрического заряда на обкладках конденсатора $q = 200\cos\left(4\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ мкКл и сравнения с законом гармонического изменения заряда $q = q_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ определим амплитудное значение заряда на обкладках конденсатора q_{max} = 200 мкКл (1), циклическую частоту $\omega_0 = 4\pi$ рад/с (2); начальную фазу колебаний $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{4}$ рад (3).

Значения периода $T_и$ частоты ν колебаний определяем из (2):

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0,5 \text{ с}; \quad \nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{T} = 2 \text{ Гц.}$$

Закон изменения силы тока в колебательном контуре определится как первая производная от заряда, т. е. $I = q' = -q_{\max}\omega\sin\left(4\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right) = -2,5\sin\left(4\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ мА $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ модуль амплитудного значения силы тока в контуре $I_{\max}$ = 2,5 мА.

Мгновенное значение заряда на обкладках конденсатора в момент времени $t = \dfrac{1}{16}$ с будет равно $q = 200\cos\left(4\pi\dfrac{1}{16} + \dfrac{\pi}{4}\right)$ мкКл $= 0$, мгновенное значение силы тока в этот момент времени $I = -2,5\sin\left(4\pi\dfrac{1}{16} + \dfrac{\pi}{4}\right)$ мА = –2,5 мА.

Фаза колебаний заряда $\varphi = 4\pi\dfrac{1}{16} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: 200 мкКл; 4π рад/с; $\dfrac{\pi}{4}$ рад, 0,5 с;

2 Гц; 2,5 мА; 0; –2,5 мА; $\dfrac{\pi}{2}$.

2.2.4. Максимальная энергия магнитного поля в катушке идеального колебательного контура $W_{\max_M}$ = 8 мкДж. Циклическая частота свободных незатухающих электромагнитных колебаний в контуре ω_0 = 314 рад/с, индуктивность катушки L = 250 мГн. Запишите уравнение изменения заряда на обкладках конденсатора данного контура в зависимости от времени.

Решение:

В идеальном колебательном контуре заряд на обкладках конденсатора изменяется по гармоническому закону:

$$q = q_{\max}\cos\omega_0 t. \tag{1}$$

Для определения максимального значения заряда q_m на обкладках конденсатора необходимо определить максимальное значение силы тока в контуре.

Воспользуемся формулой для определения максимальной энергии магнитного поля в катушке контура:

$$W_{\max_M} = \frac{LI_{\max}^2}{2} \Rightarrow I_{\max} = \sqrt{\frac{2W_{\max_M}}{L}}. \tag{2}$$

Известно, что сила тока определяется первой производной от заряда по времени:

$I = q' = -\omega_0 q_m \sin\omega_0 t$.

Отсюда амплитудное значение силы тока $I_{\max} = -\omega_0 q_m$. (3)

Объединив (2) и (3), получим $\omega_0 q_{\max} = \sqrt{\dfrac{2W_{\max_M}}{L}}$.

Амплитудное значение заряда на обкладках конденсатора

$q_{\max} = \dfrac{1}{\omega_0}\sqrt{\dfrac{2W_{\max_M}}{L}} = 25$ мкКл.

Выражение (1) примет вид:
$q = 25 \cdot 10^{-6}\cos(314t)$ Кл = $25\cos(314t)$ мкКл.

Ответ: $25\cos(314t)$ мкКл.

2.2.5. Определите период свободных колебаний в идеальном колебательном контуре, содержащем плоский конденсатор, площадь каждой пластины которого $S_1 = 100$ см^2, расстояние между ними $d = 1$ мм, и катушку без сердечника, число витков в которой $N = 100$, площадь поперечного сечения $S_2 = 2$ см^2, длина $l = 10$ см. Пространство между пластинами конденсатора заполнено диэлектриком ($\varepsilon = 2$), магнитную проницаемость внутри катушки считать равной 1.

Решение:

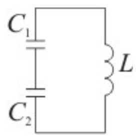
Период свободных колебаний в идеальном колебательном контуре определим по формуле Томсона: $T = 2\pi\sqrt{LC}$ (1), где индуктивность катушки $L = \dfrac{\mu\mu_0 N^2 S_2}{l}$ (2), емкость плоского конденсатора $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S_1}{d}$ (3) ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная).

С учетом (2) и (3) выражение (1) примет вид:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu\mu_0 N^2 S_2 \varepsilon\varepsilon_0 S_1}{ld}} \approx 0{,}4 \text{ мкс.}$$

Ответ: 0,4 мкс.

2.2.6. Идеальный колебательный контур содержит два последовательно соединенных конденсатора емкостями $C_1 = 9$ мкФ и $C_2 = 4{,}5$ мкФ и катушку индуктивностью $L = 75$ мкГн. Максимальное значение силы тока в контуре $I_{max} = 100$ мА. Определите период свободных колебаний в контуре, максимальные значения заряда и напряжений на каждом конденсаторе.



Решение:

Период колебаний в идеальном контуре определим по формуле Томсона: $T = 2\pi\sqrt{LC}$, где C – общая емкость двух последовательно соединенных конденсаторов, $C = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ = 3 мкФ. Тогда период $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{LC_1C_2}{C_1 + C_2}}$ = 94 мкс.

Для нахождения максимального значения заряда на конденсаторах воспользуемся законом сохранения энергии в идеальном контуре: полная энергия в колебательном контуре остается постоянной, равной сумме энергий электрического поля конденсатора $W_{эл}$ и магнитного поля катушки $W_м$, или максимальной энергии электрического поля конденсатора $W_{max_{эл}}$, или максимальной энергии магнитного поля катушки $W_{max_м}$, т. е.

$$W = W_{эл} + W_м = W_{max_{эл}} = W_{max_м} = \text{const.}$$

Отсюда

$$\frac{LI_{\max}^2}{2} = \frac{q_{\max}^2}{2C} \Rightarrow q_{\max} = I_{\max}\sqrt{LC}.$$

При последовательном соединении конденсаторов заряд на каждом из них одинаковый, поэтому $q_{\max_1} = q_{\max_2} = I_{\max}\sqrt{L\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}} = 1{,}5$ мкКл.

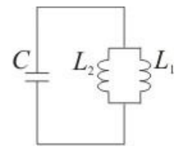
Максимальное значение напряжения на каждом из конденсаторов определим из формул взаимосвязи напряжения и заряда:

$$U_{\max_1} = \frac{q_{\max_1}}{C_1} = \frac{I_{\max}}{C_1}\sqrt{L\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}} \approx 0{,}17 \text{ В};$$

$$U_{\max_2} = \frac{q_{\max_2}}{C_2} = \frac{I_{\max}}{C_2}\sqrt{L\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}} \approx 0{,}33 \text{ В}.$$

Ответ: 94 мкс; 1,5 мкКл;
0,17 В; 0,33 В.

2.2.7. Заряженный конденсатор емкостью C подключен к двум параллельно соединенным катушкам интуктивностями L_1 и L_2 (см. рис.). Определите циклическую частоту ω_0 колебаний в контуре.



Решение:

Так как сопротивление R контура равно нулю и внешняя ЭДС отсутствует, полная энергия контура, т .е .сумма энергий электрического поля в конденсаторе и магнитного поля в катушках, остается постоянной:

$$\frac{q^2}{2C} + \frac{L_1I_1^2}{2} + \frac{L_2I_2^2}{2} = \frac{q_{\max}^2}{2C} = \frac{L_1I_{1\max}^2}{2} + \frac{L_2I_{2\max}^2}{2} = \text{const}, \quad (1)$$

где q, I_1 и I_2 – мгновенные значения заряда на конденсаторе и токов в катушках, $q_{\max}$, $I_{1\max}$ и $I_{2\max}$ – максимальные значения заряда и токов соответственно.

При параллельном соединении катушек мгновенные значения напряжений на них одинаковы и равны ЭДС самоиндукции, возникающей на катушках при разрядке конденсатора:

$$-L_1\frac{\Delta I_1}{\Delta t} = -L_2\frac{\Delta I_2}{\Delta t} \Rightarrow L_1I_1 = L_2I_2. \quad (2)$$

Тогда сила тока во второй катушке $I_2 = \dfrac{L_1I_1}{L_2}$. (3)

Подставив (3) в (1), получим:

$$\frac{q_{\max}^2}{C} = L_1I_{1\max}^2 + L_2I_{2\max}^2 = L_1I_{1_m}^2 + \frac{L_1^2I_{1_m}^2}{L_2} = L_1I_{1_m}^2\,\frac{L_2+L_1}{L_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{\max}^2 = L_1CI_{1\max}^2\,\frac{L_2+L_1}{L_2}. \quad (4)$$

Определим циклическую частоту ω_0 колебаний в контуре.

Способ 1.

Если учесть, что сила тока в контуре $I_{max} = I_{1_{max}} + I_{2_{max}}$, то сила тока во второй катушке $I_{2_{max}} = I_{max} - I_{1_{max}}$. Из выражения (2) $L_1 I_{1_{max}} = L_2 (I_{max} - I_{1_{max}})$ определим

$$I_{1_{max}} = I_{max} \frac{L_2}{L_1 + L_2}. \qquad (5)$$

Выражение (4) примет вид:

$$q_{max}^2 = L_1 C I_m^2 \frac{L_2^2 (L_1 + L_2)}{(L_1 + L_2)^2 L_2} = \frac{L_1 L_2 C}{L_1 + L_2} I_{max}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{max} = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}} q_{max}. \qquad (4)$$

Максимальная сила тока I_{max} в контуре связана с максимальным зарядом q_{max} на конденсаторе соотношением

$$I_{max} = \omega_0 q_{max}. \qquad (7)$$

Из сопоставлений выражений (6) и (7) $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}}$.

Способ 2.

ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке, $\varepsilon_{si} = -L_1 \dfrac{\Delta I_1}{\Delta t}$ равна напряжению на обкладках конденсатора

$U_C = \dfrac{q}{C}$, т. е. $-L_1 \dfrac{\Delta I_1}{\Delta t} = \dfrac{q}{C}$.

С учетом формулы (5)

$$-L_1 \frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{q}{C} \Rightarrow \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \frac{\Delta I}{\Delta t} + \frac{q}{C} = 0. \qquad (8)$$

С учетом связи силы тока с зарядом $I = q'$, $I' = q''$ выражение (8) примет вид $q'' + \dfrac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C} q = 0.$ Это уравнение гармонического колебания: $q'' + \omega_0^2 q = 0$. Отсюда циклическая частота $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}}$.

Ответ: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}}$.

2.2.8. Идеальный колебательный контур состоит из воздушного конденсатора емкостью $C = 10$ мкФ и катушки индуктивностью $L = 1$ мГн с числом витков на единицу длины катушки $n = 10^3$ м$^{-1}$. Определите индукцию магнитного поля катушки контура в момент времени $t_1 = 52$ мкс, если при $t_0 = 0$ заряд на конденсаторе $q_0 = 10$ мкКл, а сила тока в контуре $I_0 = 0$.

Решение:

В идеальном колебательном контуре происходят свободные незатухающие колебания. Индукцию магнитного поля катушки определим по формуле

$$B = \mu\mu_0 n I_1, \qquad (1)$$

где $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, μ – магнитная проницаемость среды в катушке, в данном случае для воздуха $\mu = 1$, I_1 – сила тока, протекающего в катушке в момент времени t_1.

Если в начальный момент времени заряд на конденсаторе q_0, а сила тока в катушке равна нулю, то заряд q_0 – это максимальный заряд q_{max} на обкладках конденсатора. Закон изменения заряда имеет вид $q = q_{max}\cos\omega_0 t = q_{max}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)$, где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – циклическая частота гармонических колебаний в идеальном колебательном контуре. Закон изменения со временем силы тока будет иметь вид $I = I_{max}\sin\omega_0 t = I_{max}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)$, так как изменение тока в контуре отстает по фазе на $\frac{\pi}{2}$ от изменения заряда на конденсаторе. Максимальное значение тока определим из закона сохранения энергии в контуре: $\frac{q_{max}^2}{2C} = \frac{LI_{max}^2}{2} = \text{const}$, максимальная энергия электрического поля конденсатора $\frac{q_{max}^2}{2C}$ равна максимальной энергии магнитного поля катушки $\frac{LI_{max}^2}{2}$. Из этого выражения

$$I_m = \frac{q_m}{\sqrt{LC}} \Rightarrow I = \frac{q_m}{\sqrt{LC}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right). \qquad (2)$$

Подставим (2) в (1), получим выражение для определения индукции магнитного поля внутри катушки в момент времени t_1:

$$B = \mu\mu_0 n\frac{q_m}{\sqrt{LC}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t_1\right) \text{ или } B \approx 6{,}2\cdot10^{-5} \text{ Тл} = 62 \text{ мкТл}.$$

Ответ: 62 мкТл.

2.2.9. Идеальный колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L = 400 мГн и конденсатора емкостью C = 40 мкФ. В начальный момент времени (t = 0) конденсатор заряжен до максимального напряжения U_{max} = 8 В. Определите значения тока, заряда и напряжения в контуре в моменты времени, когда энергия электрического поля в конденсаторе в два раза больше энергии магнитного поля катушки.

Решение:

Согласно условию задачи в начальный момент времени конденсатор максимально заряжен, следовательно, изменение напряжения U и заряда q на конденсаторе происходят по закону

$$U = U_{max}\cos\omega_0 t; \qquad (1)$$

$$q = q_{max}\cos\omega_0 t, \qquad (2)$$

а силы тока I в контуре – по закону

$$I = -I_{max}\sin\omega_0 t, \qquad (3)$$

где $q_{max} = CU_{max}$ (4) – максимальный заряд на конденсаторе, $I_{max} = \omega_0 q_{max}$ (5) – максимальное значение силы тока в контуре, $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ (6) – циклическая частота электромагнитных колебаний в контуре.

Для нахождения величин U, q и I необходимо определить момент времени t. Этот момент времени соответствует условию, когда энергия электрического поля конденсатора $W_{эл} = \dfrac{CU^2}{2} = \dfrac{q^2}{2C}$ (7) в два раза превышает энергию магнитного поля катушки $W_м = \dfrac{LI^2}{2}$ (8): $\dfrac{q^2}{2C} = 2\dfrac{LI^2}{2}$ (9) или $\dfrac{CU^2}{2} = 2\dfrac{LI^2}{2}$ (10).

С учетом выражений (1)–(6) равенство (9) запишем в виде:

$$\frac{q_{max}^2\cos^2\omega_0 t}{2C} = 2\frac{L\omega_0^2 q_{max}^2\sin^2\omega_0 t}{2} \Rightarrow \frac{\sin^2\omega_0 t}{\cos^2\omega_0 t} = \mathrm{tg}^2\omega_0 t = \frac{1}{2LC\omega_0^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{tg}\omega_0 t = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Фаза колебаний в этот момент времени $\varphi = \omega_0 t = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,2\pi$ (рад).

Тогда напряжение и заряд на конденсаторе в этот момент времени равны соответственно:

$U = U_{max}\cos 0,2\pi \approx 6,5$ (В);

$q = CU_{max}\cos 0,2\pi \approx 259\cdot 10^{-6}$ Кл $\approx 0,26$ мКл.

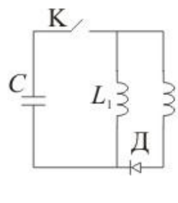
Сила тока $I = -\dfrac{1}{\sqrt{LC}}q_{max}\sin 0,2\pi = -\dfrac{CU_{max}\sin 0,2\pi}{\sqrt{LC}} = -\sqrt{\dfrac{C}{L}}U_{max}\sin 0,2\pi$;

$I = -47$ мА.

Ответ: –47 мА; 0,26 мКл; 6,5 В.

2.2.10. Конденсатор емкостью C через ключ соединяется с двумя параллельно соединенными идеальными катушками индуктивностями L_1 и L_2, причем в цепи второй катушки включен идеальный диод Д, как показано на рисунке.

В начальный момент конденсатор заряжен до некоторого напряжения U и через время τ после замыкания ключа К напряжение на нем становится равным нулю. Когда конденсатор перезарядится, ток через диод станет равным $I_Д$.



Определите время τ разрядки конденсатора и первоначальное напряжение U на нем.

Решение:

После замыкания ключа ток пойдет только через катушку L_1, так как диод в это время «запирает» катушку L_2. Напряжение на конденсаторе станет равным нулю через время τ, равное четверти периода:

$$\tau = \frac{2\pi\sqrt{L_1 C}}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{L_1 C}\ .$$

Силу тока в этот момент определим из закона сохранения энергии:

$\frac{CU^2}{2} = \frac{L_1 I_{1\max}^2}{2} \Rightarrow$ максимальный ток через катушку L_1 равен

$$I_{1_m} = \sqrt{\frac{C}{L_1}}U. \qquad (1)$$

Когда начинается перезарядка конденсатора, диод открывается и через катушку L_2 начинает идти ток. Тогда сумма ЭДС индукции, возникающей в катушках, должна стать равной 0, т. е.

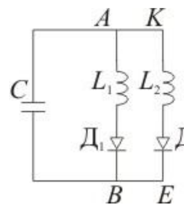
$L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + L_2 \frac{\Delta I_2}{\Delta t} = 0$ или $\Delta(\Phi_1 + \Phi_2) = 0$, где $\Delta\Phi_1$ и $\Delta\Phi_2$ – изменения магнитных потоков, пронизывающих катушки ($\Phi = LI$).

Отсюда вытекает закон сохранения магнитного потока $\Phi_1 + \Phi_2 = \text{const}$, т .е.

$$L_1 I_{1_m} = I_Д (L_1 + L_2). \qquad (2)$$

Из выражений (1) и (2) начальное напряжение на конденсаторе $U = I_Д \frac{L_1 + L_2}{\sqrt{L_1 C}}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}\sqrt{L_1 C}$; $I_Д \frac{L_1 + L_2}{\sqrt{L_1 C}}$.



2.2.11. Определите период колебаний напряжения на пластинах первоначально заряженного конденсатора C в схеме, приведенной на рисунке. $Д_1$ и $Д_2$ – идеальные диоды.

Решение:

В данной цепи происходят процессы разрядки и зарядки конденсатора, причем токи в ветвях AB и KE будут идти в противоположных направлениях: полпериода в контуре $ABCA$ и полпериода в контуре $KECA$. Период колебаний напряжения составит $T = \pi\sqrt{L_1 C} + \pi\sqrt{L_2 C} = \pi\sqrt{C}(\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2})$.

Ответ: $\pi\sqrt{C}(\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2})$.

Для решения следующих задач воспользуемся объяснениями и выводами, полученными при решении предыдущих задач.

2.2.12. Колебательный контур содержит конденсатор емкостью $C = 0{,}8$ нФ и катушку индуктивностью $L = 2$ мкГн. Определите период и частоту колебаний в контуре.

Решение:

Воспользуемся формулой Томсона: $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Период $T = 2\pi\sqrt{0{,}8 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 0{,}25 \cdot 10^{-6}$ (с) = 0,25 мкс.

Частота колебаний $\nu = \frac{1}{T} = 4 \cdot 10^6$ Гц = 4 МГц.

Ответ: 0,25 мкс; 4 МГц.

2.2.13. Определите, во сколько раз изменится частота собственных колебаний в колебательном контуре, если емкость конденсатора уменьшить в 16 раз, а индуктивность катушки увеличить в 25 раз.

Решение:

Частоты колебаний

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1C_1}},\ \nu_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2C_2}} \Rightarrow$$

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{L_1C_1}{L_2C_2}} = \sqrt{\frac{L_1C_1 \cdot 16}{25L_1C_1}} = \frac{4}{5} \text{ или } \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{5}{4} = 1{,}25,$$

т. е. частота колебаний уменьшится в 1,25 раза.

Ответ: в 1,25 раза.

2.2.14. Определите емкость C конденсатора, который необходимо подключить к катушке индуктивностью L = 5 мкГн, чтобы частота свободных колебаний в контуре стала ν = 5 МГц.

Решение:

Частота колебаний $\nu = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow C = \dfrac{1}{4\pi^2 L\nu^2}$;

$$C = \frac{1}{4\pi^2 5 \cdot 10^{-6}(5 \cdot 10^6)^2} = 0{,}2 \cdot 10^{-9} \text{ Ф} = 200 \text{ пФ}.$$

Ответ: C = 200 пФ.

2.2.15. Определите индуктивность L катушки, которую следует подключить к конденсатору емкостью C = 63 пФ, чтобы частота свободных колебаний в контуре составила ν = 20 МГц.

Решение:

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow L = \frac{1}{4\pi^2\nu^2 C} \Rightarrow L = \frac{1}{4\pi^2 400 \cdot 10^{12} \cdot 63 \cdot 10^{-12}} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ Гн} = 1 \text{ мкГн}.$$

Ответ: L = 1 мкГн.

2.2.16. В идеальном колебательном контуре, содержащем конденсатор емкостью C = 10 мкФ и катушку индуктивностью L = 1 мГн, максимальное (амплитудное) значение силы тока I_{max} = 200 мА. Определите максимальное значение напряжения U_{max} на конденсаторе.

Решение:

В идеальном колебательном контуре в процессе колебаний происходит периодическое превращение энергии электрического поля конденсатора в энергию магнитного поля катушки:

$$\frac{CU_{\max}^2}{2} = \frac{LI_{\max}^2}{2} \Rightarrow U_{\max} = \sqrt{\frac{L}{C}} I_{\max}.$$

$$U_{\max} = \sqrt{\frac{10^{-3}}{10 \cdot 10^{-6}}} \cdot 200 \cdot 10^{-3} = 2 \text{ (В).}$$

Ответ: $U_{\max} = 2$ В.

2.2.17. В идеальном колебательном контуре, содержащем конденсатор емкостью C = 10 мкФ и катушку индуктивностью L = 1 мГн, максимальное (амплитудное) значение напряжения $U_{\max}$ = 5 В. Определите максимальное значение силы тока $I_{\max}$ в контуре.

Решение:

Из закона сохранения энергии в идеальном контуре $\frac{CU_{\max}^2}{2} = \frac{LI_{\max}^2}{2}$ получаем $I_{\max} = \sqrt{\frac{C}{L}} U_m$, $I_m = \sqrt{\frac{10 \cdot 10^{-6}}{10^{-3}}} \cdot 5 = 0{,}5$ (А).

Ответ: $I_{\max} = 0{,}5$ А.

2.2.18. Идеальный колебательный контур содержит катушку индуктивностью L = 80 мГн и конденсатор емкостью C = 200 пФ. Максимальное значение силы тока в контуре $I_{\max}$ = 10 мА. Определите максимальное значение напряжения $U_{\max}$ на конденсаторе и напряжение U в момент веремени, когда сила тока в контуре станет равной 6 мА.

Решение:

Из закона сохранения энергии для идеального колебательного контура $W_{\max_{эл}} = W_{\max_{м}} = W_{эл} + W_{м}$ или $\frac{CU_{\max}^2}{2} = \frac{LI_{\max}^2}{2} = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2}$ определим:

а) $U_{\max} = \sqrt{\frac{L}{C}} I_{\max}$; $U_{\max}$ = 200 В;

б) $U = \sqrt{\frac{L(I_m^2 - I^2)}{C}}$; U = 160 В.

Ответ: 200 В; 160 В.

2.2.19. В идеальном колебательном контуре емкость конденсатора C = 2 мкФ, максимальное напряжение на нем $U_{\max}$ = 1,5 В, индуктивность катушки L = 20 мГн. Определите максимальное значение силы тока $I_{\max}$ в контуре и силу тока I в тот момент времени, когда напряжение на конденсаторе станет U = 1,0 В.

Решение:

Из закона сохранения энергии в идеальном колебательном контуре имеем

$$\frac{CU_{\max}^2}{2} = \frac{LI_{\max}^2}{2} = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2}.$$

Отсюда максимальное значение силы тока $I_{\max} = \sqrt{\dfrac{C}{L}} U_{\max}$ = 15 мА; сила тока в контуре в момент времени, когда напряжение на конденсаторе становится U = 1 В: $I = \sqrt{\dfrac{C(U_m^2 - U^2)}{L}} = 11$ мА.

Ответ: 15 мА; 11 мА.

2.2.20. В идеальном колебательном контуре происходят гармонические колебания. Определите, во сколько раз энергия электрического поля конденсатора $W_{эл}$ отличается от энергии магнитного поля $W_м$ в тот момент времени: а) когда заряд на конденсаторе становится в n = 3 раза меньше максимального значения заряда на конеденсаторе; б) когда сила тока в контуре становится в n = 3 раза меньше максимального значения силы тока в контуре.

Решение:

а) Из закона сохранения $W = \dfrac{q_{\max}^2}{2C} = \dfrac{LI_{\max}^2}{2} = \dfrac{q^2}{2C} + \dfrac{LI^2}{2} = \text{const}$ определим отношение $\dfrac{W_{эл}}{W_м} = \dfrac{W_{эл}}{W - W_{эл}} = \dfrac{q^2}{q_{\max}^2 - q^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{q_{\max}}{q}\right)^2 - 1} = \dfrac{1}{n^2 - 1} = 0{,}125$.

$W_{эл}$ и $W_м$ – мгновенные значения электрического поля конденсатора и магнитного поля катушки.

б) Аналогично для второго случая

$$\frac{W_{эл}}{W_м} = \frac{W - W_м}{W_м} = \frac{W}{W_м} - 1 = \left(\frac{I_{\max}}{I}\right)^2 - 1 = n^2 - 1 = 8.$$

Ответ: а) 0,125; б) 8.

2.2.21. Заряженный конденсатор подключают к катушке индуктивности. Определите, через какую часть периода после подключения энергия конденсатора станет: а) равной энергии магнитного поля катушки: $W_{эл} = W_м$; б) окажется в три раза больше энергии магнитного поля катушки: $W_{эл} = 3W_м$.

Решение:

а) Из закона сохранения энергии в идеальном колебательном контуре $W = W_{эл} + W_м = 2W_{эл}$, или $\dfrac{q_m^2}{2C} = 2\dfrac{q^2}{2C}$, или $q_{\max}^2 = 2q_{\max}^2 \cos^2 \dfrac{2\pi}{T} t_1 \Rightarrow \cos \dfrac{2\pi}{T} t_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Следовательно, $\dfrac{2\pi}{T} t_1 = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t_1 = \dfrac{T}{8}$, т. е. после начала разрядки коненсатора через $t_1 = \dfrac{T}{8}$ энергии конденсатора и катушки станут равными.

б) Согласно условию задачи

$$W = W_{\text{эл}} + W_{\text{м}} = 4W_{\text{м}} = \frac{4}{3}W_{\text{эл}} \text{ или } \frac{q_{\max}^2}{2C} = \frac{4}{3}\frac{q^2}{2C} \Rightarrow \frac{4}{3}\frac{q_m^2\cos^2\omega_0 t_2}{2C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\omega_0 t_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t_2 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_2 = \frac{T}{12},$$

т. е. после начала разрядки конденсатора через $t_2 = \frac{T}{12}$ энергия электрического поля конденсатора окажется в $n = 3$ раза больше энергии магнитного поля катушки.

Ответ: $t_1 = \frac{T}{8}$; $t_2 = \frac{T}{12}$.

Реальный колебательный контур. Затухающие колебания

2.2.22. Колебательный контур содержит катушку индуктивностью $L = 9$ мкГн, активным сопротивлением $R = 0{,}1$ Ом и конденсатор емкостью $C = 2$ нФ. Средняя мощность $\langle P\rangle$, потребляемая колебательным контуром, чтобы в нем поддерживались незатухающие колебания, составляет $\langle P\rangle = 2{,}5$ мВт. Определите амплитудное значение напряжения U_m на реактивном индуктивном сопротивлении.

Решение:

Средняя мощность переменного тока, потребляемая контуром,

$$P = \frac{1}{2}I_{\max}^2 R, \tag{1}$$

где $I_{\max}$ – амплитудное значение силы тока в контуре, которое определим из закона Ома: $I_{\max} = \frac{U_{\max L}}{\omega L}$.

В контуре поддерживаются незатухающие колебания, следовательно, циклическая частота ω равна собственной частоте колебаний $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Тогда $I_{\max} = U_{\max}\sqrt{\frac{C}{L}}$. Выражение (1) примет вид $P = \frac{1}{2}\cdot\frac{U_{\max L}^2 RC}{L} \Rightarrow$ максимальное значение напряжения на катушке $U_{\max L} = \sqrt{\frac{2L<P>}{RC}} = 15$ В.

Ответ: 15 В.

2.2.23. Колебательный контур содержит конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ и катушку индуктивностью $L = 250$ мГн и сопротивлением $R = 50$ Ом. В начальный момент времени заряд на конденсаторе максимальный $q_{\max} = 0{,}8$ мКл. Определите период колебаний T такого контура, коэффициент затухания. Запишите уравнения зависимостей заряда и напряжения на обкладках конденсатора от времени t.

Решение:

Период затухающих колебаний в реальном колебательном контуре определим по формуле $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}} = 10 \cdot 10^{-3}$ с = 10 мс.

Коэффициент затухания $\delta = \dfrac{R}{2L} = 100$ Ом/Гн.

Уравнения зависимости заряда и напряжения на конденсаторе от времени будут иметь вид:

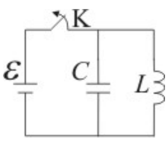
$$q = q_{\max} e^{-\delta t} \cos\omega t = q_{\max} e^{-\frac{R}{2L}t} \cos\frac{2\pi}{T} t = 8 \cdot 10^{-4} e^{-100t} \cos 200\pi t \text{ (Кл)} =$$

$$= 0{,}8 e^{-100t} \cos 200\pi t \text{ (мКл)};$$

$$U = U_{\max} e^{-\delta t} \cos\omega t = \frac{q_m}{C} e^{-\frac{R}{2L}t} \cos\frac{2\pi}{T} t = 80 e^{-100t} \cos 200\pi t \text{ (В)}.$$

Ответ: 10 мс; $q = 0{,}8 e^{-100t} \cos 200\pi t$ (мКл);
$U = 80 e^{-100t} \cos 200\pi t$ (В).

2.2.24. К источнику постоянного тока с ЭДС ε = 100 В и внутренним сопротивлением r = 50 м подлючены параллельно (см. рис.) конденсатор емкостью C = 10 мкФ и катушка индуктивностью L = 2,75 мГн и сопротивлением R = 15 Ом. Определите количество теплоты Q, которое выделится в контуре после отключения источника.



Решение:

Пока ключ замкнут, в цепи устанавливается ток через источник ЭДС и катушку L, величина которого согласно закону Ома

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}. \quad (1)$$

Напряжение на конденсаторе в данной цепи постоянного тока равно напряжению на катушке:

$$U_C = U_L = IR = \frac{\varepsilon R}{R + r}. \quad (2)$$

Полная энергия магнитного поля катушки и электрического поля конденсатора

$$W = \frac{LI^2}{2} + \frac{CU^2}{2}$$

или с учетом (1) и (2)

$$W = \frac{L\varepsilon^2}{2(R + r)^2} + \frac{C\varepsilon^2 R^2}{2(R + r)^2} = \frac{\varepsilon^2}{2(R + r)^2}(L + CR^2). \quad (3)$$

После отключения источника в контуре возникнут затухающие колебания, в результате которых вся запасенная в нем энергия перейдет в теплоту, т. е.

$$Q = W = \frac{\varepsilon^2}{2(R+r)^2}(L + CR^2) = 62{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ (Дж) или } Q = 62{,}5 \text{ мДж.}$$

Ответ: 62,5 мДж.

2.2.25. Конденсатор емкостью C = 40 мкФ, заряженный до максимального напряжения U_{max} = 2,0 кВ, разряжается через катушку индуктивностью L = 8,0 мГн, обладающую активным сопротивлением R. Определите количество теплоты, выделившееся в катушке к тому времени, когда напряжение на конденсаторе станет U = 1,2 кВ, а сила тока в катушке достигнет значения I = 40 А.

Решение:

Первоначальная энергия в реальном контуре равна максимальной энергии электрического поля конденсатора: $W_I = \frac{CU_{\text{max}}^2}{2}$. Спустя некоторое время часть этой энергии выделится на активном сопротивлении катушки в виде некоторого количества теплоты Q, а часть распределится между конденсатором и катушкой. Энергия электрического поля конденсатора станет $W_{\text{эл}} = \frac{CU^2}{2}$, энергия магнитного поля катушки $W_{\text{м}} = \frac{LI^2}{2}$, т. е. $W_{II} = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2}$.

Из закона сохранения энергии количество теплоты, выделившееся на активном сопротивлении катушки,

$$Q = W_I - W_{II} \text{ или } Q = \frac{CU_{\text{max}}^2}{2} - \frac{CU^2 + LI^2}{2} = \frac{C(U_{\text{max}}^2 - U^2)}{2} - \frac{LI^2}{2} = 44{,}8 \text{ Дж.}$$

Ответ: 44,8 Дж.

2.2.26. Реальный колебательный контур содержит конденсатор емкостью C = 2 мкФ, катушку индуктивностью L = 50 мГн и резистор сопротивлением R = 10 Ом. Определите период затухающих колебаний, время τ, в течение которого амплитуда тока в контуре уменьшается в e раз, и число полных колебаний, совершенных за это время τ.

Решение:

Период электромагнитных колебаний в контуре

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (1)$$

Циклическая частота затухающих колебаний $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ (2), где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (3) – собственная частота колебаний в контуре, $\delta = \frac{R}{2L}$ (4) – коэффициент затухания.

С учетом (3) и (4) период электромагнитных колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} = 1{,}98 \text{ мс} \approx 2 \text{ мс}.$$

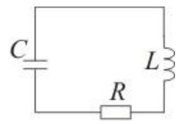
Время τ, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз, называется временем релаксации: $\tau = \frac{1}{\delta} = \frac{2L}{R} = 10$ мс.

Число полных колебаний, совершаемых за время релаксации τ, $N_e = \frac{\tau}{T}$.

В данной колебательной системе это число составит $N_e = \frac{\tau}{T} \approx 5$.

Ответ: 2 мс; 10 мс; 5.

2.2.27. Заряженный конденсатор емкостью C = 80 нФ замыкается на катушку индуктивностью L = 200 мкГн. Определите максимальное активное сопротивление контура, чтобы конденсатор не смог перезарядиться.



Решение:

В данном контуре имеется активное сопротивление, следовательно, в контуре будут происходить затухающие колебания, период которых

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

Если сопротивление R стремится к критическому значению, т. е. к такому значению сопротивления $R_{кр}$, при котором перезарядка конденсатора не произойдет, период будет стремиться к бесконечности, циклическая частота $\omega \Rightarrow 0$.

Тогда $\frac{1}{LC} = \left(\frac{R_{кр}}{2L}\right)^2 \Rightarrow R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 50$ Ом.

Ответ: 50 Ом.

2.2.28. Колебательный контур, содержащий конденсатор и катушку, активное сопротивление которой R = 100 Ом, а индуктивность L = 10 мГн, имеет резонансную частоту ν_0 = 5 кГц. Определите полное сопротивление Z этих элементов, включенных в цепь переменного тока частотой ν = 50 Гц.

Решение:

Полное сопротивление цепи переменного тока

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \tag{1}$$

где R – активное сопротивление; $X_L = \omega L = 2\pi\nu L$ (2) – реактивное индуктивное сопротивление; $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C}$ (3) – реактивное емкостное сопротивление; C – емкость конденсатора, которую необходимо определить.

Из формулы для резонансной частоты $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ определим емкость конденсатора

$$C = \frac{1}{4\pi^2\nu_0^2 L}. \tag{4}$$

Выражение полного сопротивления (1) с учетом (2)–(4) примет вид:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - \frac{4\pi^2\nu_0^2 L}{2\pi\nu}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - \frac{2\pi\nu_0^2 L\nu}{\nu^2}\right)^2} = \sqrt{R^2 + 4\pi^2\nu^2 L^2\left(1 - \frac{\nu_0^2}{\nu^2}\right)^2}.$$

Значение полного сопротивления Z = 31,4 кОм.

Ответ: 31,4 кОм.

Электромагнитные волны

2.2.29. Колебательный контур резонирует на длину волны λ = 400 м. Определите емкость C контура, если его индуктивность L = 3 мГн.

Решение:

Согласно формуле Томсона период колебаний в контуре $T_1 = 2\pi\sqrt{LC}$, где C – искомая емкость контура. С другой стороны период колебаний в электромагнитной волне $T_2 = \dfrac{\lambda}{c}$, где c – $3\cdot10^8$ м/с – скорость распространения электромагнитных волн в вакууме.

В условиях резонанса T_1 = T_2, следовательно, $2\pi\sqrt{LC} = \dfrac{\lambda}{c} \Rightarrow$ емкость контура $C = \dfrac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2 L}$.

Ответ: 15 пФ.

2.2.30. Определите диапазон длин волн работы приемника, если емкость конденсатора в колебательном контуте изменяется от C_1 = 40 пФ до C_2 = 360 пФ, а индуктивность катушки контура постоянна: L = 0,9 мкГн.

Решение:

Длина электромагнитной волны в воздухе (вакууме) определяется соотношением $\lambda = cT = 2\pi c\sqrt{LC}$, где c – $3\cdot10^8$ м/с – скорость распространения электромагнитных волн в вакууме, T – период собственных электромагнитных колебаний, определяемый по формуле Томсона: $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Длины волн, принимаемые радиоприемником, лежат в диапазоне от $\lambda_{min} = 2\pi c\sqrt{LC_1}$ до $\lambda_{max} = 2\pi c\sqrt{LC_2}$. Расчет дает результат: λ_{min} = 11,3 м; λ_{max} = 35,7 м.

Ответ: диапазон длин волн от 11,3 м до 35,7 м.

2.2.31. Скорость распространения электромагнитных волн в некоторой среде $\upsilon = 2{,}8 \cdot 10^8$ м/с. Определите длину волны в этой среде, если частота колебаний волн в вакууме ν_0= 1,4 МГц.

Решение:

При переходе из одной среды в другую частота колебаний волн (и механических, и электромагнитных) не изменяется, т. е. в данном случае ν_0 в вакууме равна ν в среде ($\nu_0 = \nu$). Тогда искомая длина волны $\lambda = \dfrac{\upsilon}{\nu}$ или λ = 200 м.

Ответ: λ = 200 м.

2.2.32. Электромагнитная волна переходит из вакуума в немагнитную ($\mu = 1$) среду с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4$, при этом длина волны уменьшается на $\Delta\lambda$ = 30 м. Определите частоту колебаний.

Решение:

При переходе из одной среды в другую изменяются длина волны и ее скорость. Неизменной остается частота (ν = const).

Длина волны в вакууме $\lambda_0 = \dfrac{c}{\nu}$ (1), в среде $\lambda = \dfrac{\upsilon}{\nu} = \dfrac{c}{\nu\sqrt{\varepsilon\mu}}$ (2) ($\upsilon = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ – скорость распространения электромагнитных волн в любой среде, характеризующейся магнитной проницаемостью μ и диэлектрической проницаемостью ε).

Уменьшение длины волны при переходе из вакуума в среду определим из выражений (1) и (2): $\Delta\lambda = \dfrac{c}{\nu} - \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \dfrac{c}{\nu}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) \Rightarrow$ частота $\nu = \dfrac{c}{\Delta\lambda}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)$, ν = 5МГц.

Ответ: 5МГц.

2.2.33. Сила тока в открытом колебательном контуре изменяется по закону $I = 0{,}2\sin(6{,}3 \cdot 10^5 \pi t)$ А. Определите длину излучаемой волны.

Решение:

Длина излучаемой волны связана со скоростью ее распространения соотношением $\lambda = cT$, где $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ – период, ω_0 – циклическая частота колебаний.

Из закона изменения силы тока $I = I_{max} \sin \omega_0 t$ и сравнения его с законом изменения, данным в условии задачи, определим циклическую частоту: $\omega_0 = 6{,}3 \cdot 10^5$ рад/с. Тогда длина волны $\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega_0}$ или $\lambda = 3 \cdot 10^3$ м.

Ответ: $\lambda = 3 \cdot 10^3$ м.

2.2.34. Входной контур радиоприемника содержит катушку индуктивностью L = 4 мГн и плоский конденсатор, площадь каждой пластины которого S = 20 см^2. Расстояние между пластинами d = 2 мм и все пространство между ними заполено слюдой с диэлектрической проницаемостью ε = 6. Определите длину волны, на которую настроен контур.

Решение:

Длину волны, на которую настроен контур, определим по формуле

$$\lambda = cT = 2\pi c\sqrt{LC}\,, \tag{1}$$

$c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света, L – индуктивность катушки, C – емкость конденсатора, которую определим по формуле для емкости плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}\,. \tag{2}$$

Подставив (2) в (1), получим $\lambda = 2\pi c\sqrt{\dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 SL}{d}} = 868$ (м).

Ответ: 868 м.

2.2.35. Максимальный ток в идеальном колебательном контуре I_{max} = 20 мА, а максимальный заряд на обкладках конденсатора q_{max} = 20 нКл. Определите емкость конденсатора и длину волны, на которую настроен колебательный контур, если индуктивность контура L = 20 мкГн.

Решение:

Используя закон сохранения энергии для колебательного контура в виде

$$\frac{LI_{max}^2}{2} = \frac{q_{max}^2}{2C}, \tag{1}$$

определим емкость конденсатора $C = \dfrac{q_{max}^2}{LI_{max}^2} = 50$ нФ.

Циклическая частота собственных колебаний в колебательном контуре

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\,. \tag{2}$$

С учетом (1) выражение (2) примет вид $\omega_0 = \dfrac{I_{max}}{q_{max}}$.

Длина волны, на которую настроен контур, $\lambda = cT = c\dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{2\pi c q_{max}}{I_{max}}$, где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме, λ = 1884 м.

Ответ: 50 нФ; 1884 м.

2.2.36. Определите, сколько колебаний происходит в электромагнитной волне длиной $\lambda_1 = 50$ м за время, равное периоду звуковых колебаний с частотой $v_2 = 250$ Гц.

Решение:

Период колебаний в электромагнитной и звуковой волнах равны соответственно: $T_1 = \frac{\lambda_1}{c}$ ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость распространения электромагнитных волн в вакууме или воздухе); $T_2 = \frac{1}{v_2}$.

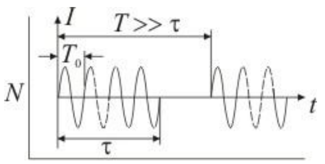
Число длин электромагнитных волн, укладывающихся за время одного полного звукового колебания, $N = \frac{T_2}{T_1} = \frac{c}{v_2 \lambda_1}$; $N = 24\,000$.

Ответ: 24 000.

2.2.37. Радиолокатор работает на длине волны $\lambda = 15$ см и дает $\frac{\Delta N}{\Delta t} = 5 \cdot 10^3\ \frac{1}{\text{с}}$ импульсов в секунду. Длительность каждого импульса $\tau = 2$ мкс. Определите число колебаний, содержащихся в каждом импульсе, наименьшую и наибольшую дальность обнаружения цели таким локатором.

Решение:

Число колебаний N в каждом импульсе длительностью τ определим из соотношения $N = \frac{\tau}{T_0}$, где T_0 – период одного колебания в импульсе: $T_0 = \frac{\lambda}{c}$. Отсюда число колебаний в импульсе $N = \frac{\tau c}{\lambda}$ или $N = 4000$.



Радиолокатор способен принимать отраженные импульсы только после окончания излучения очередного импульса. Таким образом, минимальная дальность обнаружения цели $s_{\min} = \frac{c\tau}{2} = 150$ м. Максимальная дальность – $s_{\max} = \frac{cT}{2}$, где T – периодичность запуска импульсов: $T = \frac{1}{v_0} = \frac{1}{\frac{\Delta N}{\Delta t}} = 0{,}2 \cdot 10^{-3}$ с = 0,2 мс. Тогда

$$s_{\max} = \frac{c}{2\frac{\Delta N}{\Delta t}} = 30 \cdot 10^3 \text{ м} = 30 \text{ км}.$$

Ответ: 4000; 150 м; 30 км.

2.3. Задачи для самостоятельного решения

Электромагнитные колебания

1. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C = 2 пФ и катушки индуктивностью L = 0,5 мкГн. Определите частоту колебаний ν. (160 МГц)

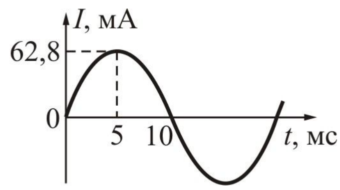
2. Индуктивность катушки колебательного контура L = 500 мкГн. Контур настроен на частоту ν = 1 МГц. Определите емкость конденсатора C. (500 пФ)

3. Во сколько раз уменьшится частота собственных колебаний контура, если его индуктивность L увеличить в n = 10 раз, а емкость C уменьшить в k = 5 раз. (2)

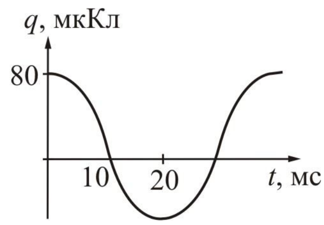
4. Во сколько раз уменьшится период собственных колебаний контура, если его индуктивность уменьшить в n = 100 раз, а емкость C увеличить в k = 4 раза. (5)

5. Определите диапазон частот собственных колебаний в контуре, если его индуктивность изменяется в пределах от L_1 = 0,1 мкГн до L_2 = 10 мкГн, а емкость – в пределах от C_1 = 50 пФ до C_2 = 5000 пФ. (от 710 кГц до 71 МГц)

6. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C = 10 мкФ и катушки, индуктивность которой изменяется в пределах от L_1 = 25 мГн до L_2 = 0,1 Гн. Определите, в каком интервале изменяется период электромагнитных колебаний в таком контуре. (от 3,1 мс до 6,3 мс)



7. На рисунке приведен график зависимости силы тока I в колебательном контуре от времени. Определите максимальный заряд q_m в этом контуре. (10 мкКл)



8. На рисунке приведен график зависимости заряда q в колебательном контуре от времени. Определите максимальную силу тока I_m в этом контуре. (12,56 мА)

9. Заряд на обкладках конденсатора колебательного контура меняется по закону $q = 200\sin 1000\pi t$. Определите частоту ν электромагнитных колебаний в контуре. (500 Гц)

10. Напряжение на обкладках конденсатора колебательного контура меняется по закону $U = 0{,}2\cos 2000\pi t$. Определите период T электромагнитных колебаний в контуре. (1 мс)

11. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L = 1 Гн и плоского конденсатора, площадь каждой пластины которого S = 50 см^2, расстоя-

ние между ними d = 2 мм. Конденсатор погружен в керосин (ε = 2,1). Определите период T электромагнитных колебаний в данном контуре. (43 мкс)

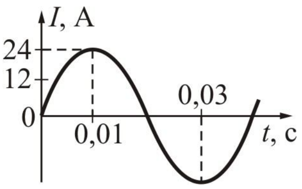
12. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L = 3 мГн и плоского воздушного конденсатора, пластины которого представляют два диска радиусом r = 1,2 см, расположенных на расстоянии d = 0,3 мм друг от друга. Определите, на сколько увеличится период колебаний ΔT, если конденсатор заполнить веществом с диэлектрической проницаемостью ε = 4. (1,25 мкс)

13. Колебательный контур состоит из конденсатора и катушки индуктивностью L. При внесении в катушку железного сердечника ее индуктивность увеличивается в n = 9 раз и период колебаний становится T_2 = 18 мкс. Определите период колебаний T_1 в контуре до внесения сердечника в катушку. (6 мкс)

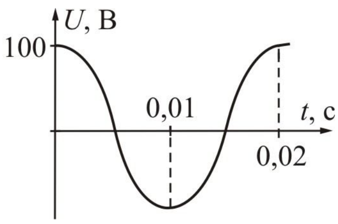
14. Период электромагнитных колебаний в контуре, содержащем катушку индуктивности и конденсатор, T_1 = 3 мкс. Определите период колебаний T_2 в данном контуре при увеличении числа витков в катушке в n = 3 раза. (T_2 = 9 мкс)

15. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности и четырех одинаковых конденсаторов. При последовательном соединении конденсаторов период колбаний в контуре T_1 = 4 мкс. Определите период колебаний в контуре при параллельном соединении конденсаторов. (16 мкс)

16. Период колебаний в контуре T_1 = 10 мкс. Параллельно конденсатору C_1 данного контура подключают конденсатор емкостью $C_2 = 3\cdot10^{-8}$ Ф, при этом период колебаний увеличивается в n = 2 раза. Определите емкость конденсатора C_1. (10 нФ)



17. По графику, изображенному на рисунке, запишите уравнение колебаний силы тока в колебательном контуре. ($I = 24\sin 50\pi t$)



18. По графику, изображенному на рисунке, запишите уравнение колебаний напряжения в колебательном контуре. ($U = 100\cos 100\pi t$)

19. Заряд на пластинах конденсатора колебательного контура изменяется по закону $q = 10^{-6}\cos 10^4\pi t$ (Кл). Запишите уравнение зависимости силы тока в контуре от времени $I(t)$. Определите амплитуды силы тока и заряда в колебательном контуре. ($I = 0{,}314\sin 10^4\pi t$; 0,314 А; 1 мкКл)

20. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C = 1 мкФ и катушки индуктивностью L = 4 Гн. Амплитуда колебаний заряда на конденсаторе q_{max} = 0,1 мКл. Запишите уравнения колебаний заряда $q = q(t)$; тока $I = I(t)$; напряжения $U = U(t)$ в контуре. ($q = 10^{-4}\cos 500t$; $I = -0{,}05\sin 500t$; $U = 100\cos 500t$)

21. Конденсатор емкостью C = 2,5 мкФ зарядили от источника тока с ЭДС ε = 100 В, а затем замкнули на катушку индуктивностью L = 9 мГн. Определите напряжение на конденсаторе спустя время $t = 5\pi\cdot 10^{-5}$ с после замыкания. (50 В)

22. Заряженный конденсатор емкостью C = 4 мкФ подключили к катушке с индуктивностью L = 90 мГн. Определите минимальное время t от момента подключения конденсатора, через которое заряд на конденсаторе уменьшится в n = 2 раза. (628 мкс)

23. Сила тока в катушке колебательного контура индуктивностью L = 50 мГн изменяется по закону $I = 20\sin\omega t$ (мА), а заряд на обкладках конденсатора – по закону $q = 2\cos\omega t$ (мкКл). Определите емкость конденсатора. (2 нФ)

24. В колебательном контуре, емкость конденсатора которого C = 10 мкФ, напряжение с течением времени изменяется по закону $U = 100\cos 1000t$ (А). Определите индуктивность катушки и запишите уравнение колебаний силы тока в контуре. (0,1 Гн; $I = -\sin 1000t$)

25. Заряд на обкладках конденсатора изменяется по закону $q = 10^{-4}\cos 10^5 t$ (Кл). Определите мгновенное значение силы тока через промежуток времени Δt = 0,75 периода от начала колебаний. (10 А)

26. Заряд на обкладках конденсатора изменяется по закону $q = 10\sin 10^5 t$ (мкКл). Определите мгновенное значение силы тока через промежуток времени Δt = 0,25 периода от начала колебаний. (0)

27. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L = 1,6 мГн и конденсатора емкостью C = 0,04 мкФ. Максимальное напряжение на обкладках конденсатора U_m = 200 В. Определите максимальную силу тока I_{max} в контуре. (1 А)

28. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L = 0,2 мГн и конденсатора емкостью C = 8 мкФ. Максимальная сила тока в катушке I_{max} = 12 А. Определите максимальный заряд q_m на обкладках конденсатора. (0,48 мКл)

29. Определите период колебаний в колебательном контуре, если энергия контура W = 0,3 Дж, амплитуда силы тока в катушке I_{max} = 3,14 А, амплитуда напряжения на конденсаторе U_{max} = 400 В. (3 мс)

30. Определите частоту колебаний колебательного контура с энергией $W = 0{,}2$ Дж, если амплитуда силы тока в катушке $I_{max} = 6{,}28$ А, а амплитуда напряжения на конденсаторе $U_{max} = 200$ В. (500 Гц)

31. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 30$ мкФ и катушки индуктивностью $L = 20$ мГн. В некоторый момент времени напряжение на конденсаторе $U_1 = 100$ В, а ток в катушке $I_1 = 2$ А. Определите заряд конденсатора q_2 в тот момент, когда ток в катушке $I_2 = 1$ А. (3,3 мКл)

32. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 20$ мГн и конденсатора емкостью $C = 10$ мкФ. В некоторый момент времени напряжение на конденсаторе $U_1 = 1$ В, сила тока в катушке $I_1 = 0{,}01$ А. Определите максимальную силу тока I_{max} в этом контуре. (12 мА)

33. Заряд на обкладках конденсатора колебательного контура емкостью $C = 4$ мкФ изменяется по закону $q = 80\cos\omega t$ (мкКл). Определите энергию $W_{эл}$ электрического поля конденсатора для фазы колебаний $\varphi = \frac{\pi}{3}$. (5 мкДж)

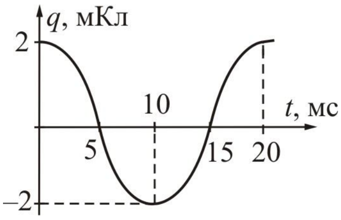
34. Сила тока в катушке колебательного контура индуктивностью $L = 15$ мГн изменяется по закону $I = 40\sin\omega t$ (мА). Определите энергию $W_м$ магнитного поля катушки для фазы колебаний $\varphi = \frac{\pi}{6}$. (3 мкДж)

35. Напряжение на обкладках конденсатора колебательного контура емкостью $C = 16$ мкФ изменяется по закону $U = 100\cos\omega t$. Определите энергию $W_м$ магнитного поля катушки для фазы колебаний $\varphi = \frac{\pi}{6}$. (20 мДж)

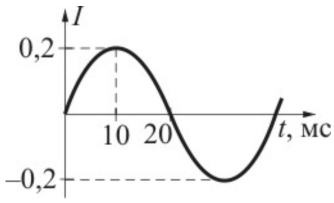
36. Сила тока в катушке колебательного контура индуктивностью $L = 12$ мГн изменяется по закону $I = 20\cos\omega t$ (мА). Определите энергию $W_м$ магнитного поля катушки для фазы колебаний $\varphi = \frac{\pi}{3}$. (1,8 мкДж)

37. Индуктивность катушки колебательного контура $L = 6$ мГн. Заряд на обкладках конденсатора изменяется по закону $q = 40\sin 10^4 t$ (мкКл). Определите энергию $W_м$ магнитного поля катушки для фазы колебаний $\varphi = 60°$. (120 мкДж)

38. Емкость конденсатора колебательного контура $C = 0{,}5$ мкФ. Сила тока изменяется по закону $I = 0{,}4\cos 10^5 t$ (А). Определите энергию $W_{эл}$ электрического поля конденсатора для фазы колебаний $\varphi = 30°$. (4 мкДж)



39. На рисунке приведен график зависимости заряда q на обкладках конденсатора колебательного контура от времени. Определите максимальную энергию W_{max} магнитного поля контура, если емкость конденсатора в контуре $C = 8$ мкФ. (62,5 мДж)



40. На рисунке приведен график зависимости силы тока в катушке колебательного контура, индуктивность которого $L = 40$ мкГн, от времени. Определите максимальную энергию W_{max} электрического поля конденсатора. (0,8 мкДж)

41. Определите отношение энергии магнитного поля катушки $W_м$ к энергии электрического поля конденсатора $W_{эл}$ колебательного контура спустя промежуток времени $\Delta t = \dfrac{T}{3}$ после начала колебаний, если в момент времени $t_0 = 0$ заряд конденсатора был максимальным. (3)

42. Определите отношение энергии электрического поля конденсатора $W_{эл}$ к энергии магнитного поля катушки $W_м$ спустя промежуток времени $\Delta t = \dfrac{T}{6}$ после начала колебаний, если в момент времени $t_0 = 0$ сила тока в катушке была максимальной. (3)

43. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 250$ нФ и катушки индуктивностью $L = 1250$ мГн. В момент времени $t = 0$ заряд конденсатора $q_m = 500$ мкКл. Определите зависимость энергии $W_м(t)$ магнитного поля катушки этого контура от времени. ($W = 1{,}25\sin^2 4000t$ (Дж))

44. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 0{,}5$ мкФ и катушки индуктивностью $L = 0{,}5$ Гн. В момент времени $t_0 = 0$ сила тока в катушке $I_m = 9$ А. Определите зависимость энергии $W_{эл}(t)$ электрического поля конденсатора от времени. ($W = 2{,}25\sin^2 2000t$ (Дж))

45. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 0{,}4$ мГн и конденсатора емкостью $C = 9$ мкФ. Определите промежуток времени Δt от момента, когда конденсатор полностью разряжен, до момента, когда его энергия втрое превышает энергию магнитного поля катушки. (62,8 мкс)

46. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 0{,}9$ мГн и конденсатора емкостью $C = 16$ мкФ. Определите промежуток времени Δt после начала разрядки конденсатора, через который энергия электрического поля конденсатора станет равной энергии поля катушки. (94,2 мкс)

47. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности и плоского конденсатора. Энергия этого контура $W = 2$ мДж. Пластины конденсатора мед-

ленно раздвинули так, что частота колебаний увеличилась в $n = 4$ раза. Определите работу A, совершенную в этом процессе. (6 мДж)

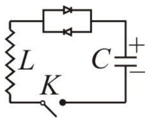


Рис. 1

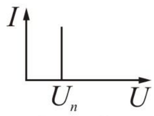


Рис. 2

48. В колебательный контур (рис. 1), состоящий из конденсатора емкостью $C = 10$ мкФ и катушки индуктивностью $L = 0{,}1$ Гн, включен «электронный ключ», состоящий из двух диодов. Вольтамперная характеристика диода показана на рисунке 2. Пороговое напряжение, при котором диод открывается, $U_п = 0{,}7$ В. Перед замыканием ключа напряжение на конденсаторе $U_0 = 4{,}5$ В. Определите время t, через которое колебания в контуре прекратятся. (9,42 мс)

Электромагнитные волны

49. Первая в мире радиограмма была передана А.С. Поповым в 1896 г. на расстояние $l = 250$ м. Определите промежуток времени Δt, за который радиосигнал прошел это расстояние. (0,83 мкс)

50. Определите расстояние от Земли до Луны, если радиосигнал проходит это расстояние за промежуток времени $\Delta t = 1{,}28$ с. ($3{,}844 \cdot 10^5$ см)

51. Искусственный спутник Земли движется по круговой орбите со скоростью $\upsilon = 4$ км/с. Определите, сколько времени t идет с него на Землю радиосигнал, если радиус Земли $R_З = 6400$ км. (64 мс)

52. С искусственного спутника радиосигнал доходит до поверхности Земли за промежуток времени $\Delta t = 10{,}67$ мс. Определите ускорение свободного падения на высоте, на которой находится данный спутник, если радиус Земли $R_З = 6400$ км. (4,4 м/с^2)

53. Определите, сколько времени Δt идет радиосигнал до поверхности Земли от точки, в которой сила притяжения тела к Земле равна силе притяжения тела к Луне, если масса Земли больше массы Луны в $n = 81$ раз, расстояние между их центрами $R = 384\,000$ км. (1,13 с)

54. Период обращения Луны вокруг Земли $T = 27$ суток, радиус Земли $R_З = 6400$ км, радиус Луны $R_Л = 1740$ км. Определите, сколько времени Δt идет радиосигнал от поверхности Луны до поверхности Земли. (1,24 с)

55. По международному соглашению длина радиоволны, на которой суда передают сигнал бедствия SOS, $\lambda = 600$ м. Определите частоту ν этого сигнала. (0,5 МГц)

56. Генератор УВЧ работает на частоте $\nu = 150$ МГц. Определите длину волны λ электромагнитного излучения. (2 м)

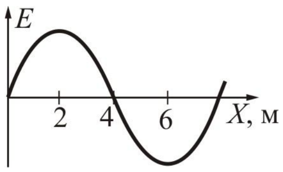
57. Изменение тока в антенне радиопередатчика происходит по закону $I = 0{,}3\sin 1570t$ (А). Определите длину электромагнитной волны λ. (1200 км)

58. Электромагнитные волны с частотой $\nu = 1$ МГц распространяются в некоторой среде, показатель преломления которой $n = 1{,}5$. Определите длину волны λ в этой среде. (200 м)

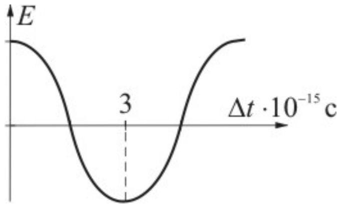
59. Электромагнитная волна частотой $\nu = 3$ МГц переходит из вакуума в немагнитную среду с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4$. Определите изменение $\Delta\lambda$ длины волны. (–50 м)

60. Колебательный контур настроен на прием электромагнитных волн с циклической частотой $\omega = 10^5$ рад/с. Электроемкость конденсатора $C = 0{,}2$ мкФ. Определите индуктивность катушки L. (50 мГн)

61. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 0{,}01$ мкФ и катушки индуктивностью $L = 0{,}9$ мГн. Определите, на какую длину λ настроен данный контур. (5652 м)



62. На рисунке приведен график распределения напряженности E электрического поля электромагнитной волны по заданному лучу в данный момент времени. Определите период колебаний. (26,7 нс)



63. На рисунке приведен график зависимости напряженности E электрического поля электромагнитной волны от времени. Определите длину волны λ. (1,8 мкм)

64. Определите длину волны λ, на которую настроен радиоприемник, если емкость конденсатора в приемном контуре $C = 0{,}1$ пФ, а в катушке индуктивности при изменении силы тока со скоростью $\dfrac{\Delta I}{\Delta t} = 2\dfrac{A}{c}$ возникает ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{si} = 0{,}2$ В. (188 м)

65. Колебательный контур, состоящий из конденсатора емкостью $C = 14{,}1$ нФ и катушки индуктивности, настроен на длину волны $\lambda = 2450$ м. Определите ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{si}$, которая возникает в катушке этого контура при изменении силы тока в ней на $\Delta I = 1$ А за промежуток времени $\Delta t = 0{,}6$ с. (0,2 мВ)

66. Колебательный контур настроен на частоту $\nu_1 = 1{,}5 \cdot 10^7$ Гц. Определите, во сколько раз надо увеличить емкость конденсатора для перестройки контура на длину волны $\lambda_2 = 60$ м. (9)

67. Колебательный контур настроен на частоту ν_1 = 1 МГц. Расстояние между пластинами конденсатора этого контура d_1 = 6,4 мм. Определите, каким должно быть расстояние между пластинами d_2, чтобы настроить контур на длину λ_2 = 240 м. (11 мм)

68. Определите диапазон длин волн, на который рассчитан радиоприемник, если индуктивность катушки приемного контура L = 1,5 мГн, а емкость конденсатора в нем может изменяться от C_1 = 75 пФ до C_2 = 650 пФ. (От 630 м до 1900 м)

69. Колебательный контур радиоприемника имеет катушку индуктивности L = 0,32 мГн и конденсатор переменной емкости. Радиоприемник может принимать волны длиной от λ_1 = 188 м до λ_2 = 545 м. Определите пределы изменения емкости конденсатора в контуре приемника. (От 31 пФ до 260 пФ)

70. Входной контур радиоприемника состоит из катушки индуктивностью L = 2 мГн и плоского конденсатора, площадь каждой пластины которого S = 10 см^2, а расстояние между пластинами d = 2 мм. Пространство между пластинами заполнено слюдой (ε = 7,5). Определите, на какую длину волны λ настроен радиоприемник. (485 м)

71. Колебательный контур, состоящий из катушки индуктивностью L = 2 мГн и плоского конденсатора, настроен на длину волны 2350 м. Площадь каждой пластины конденсатора S = 80 см^2, расстояние между ними d = 1 см. Определите диэлектрическую проницаемость ε вещества, которым заполнено пространство между обкладками конденсатора. (11)

72. Колебательный контур настроен на длину волны λ = 480 м. Максимальная сила тока в контуре I_{max} = 4 мА, максимальное напряжение на обкладках конденсатора U_{max} = 3,14 В. Определите индуктивность L катушки этого контура. (L = 0,2 мГн)

73. Индуктивность катушки колебательного контура L = 0,4 мГн. Максимальная сила тока в контуре I_{max} = 2 мА, максимальное напряжение на конденсаторе U_{max} = 6,28 В. Определите длину волны λ, на которую настроен данный контур. (240 м)

74. Сигнал радиолокатора возвратился от цели через промежуток времени Δt = 0,4 мс. Определите расстояние s до цели. (60 км)

75. Радиосигнал, посланный на Венеру, был принят через промежуток времени Δt = 2,5 мин. Определите расстояние s от Земли до Венеры. ($4,5 \cdot 10^7$ км)

76. Радиостанция передает звуковой сигнал с частотой ν_1 = 400 Гц. Передатчик работает на волне длиной λ = 50 м. Определите число N колебаний высокой частоты, переносящих одно колебание звуковой частоты. (15 000)

77. Несущая частота телевизионного вещания ν_1 = 50 МГц. За промежуток времени Δt = 0,04 с передается $N = 5 \cdot 10^5$ элементов изображения. Определите число длин волн n, приходящихся на один элемент изображения. (4)

78. Частота следования импульсов, посылаемых радиолокатором, ν = 1,5 кГц. Длительность импульса τ = 1 мкс. Определите наибольшее s_1 и наименьшее s_2 расстояния, на которых радиолокатор может обнаружить цель. (100 км, 150 м)

79. Радиолокатор работает на волне длиной λ = 5 см и испускает импульсы длительностью τ = 1,5 мкс. Определите минимальную дальность $s_{\min}$ обнаружения цели и количество колебаний N в каждом импульсе. (225 м, 9000)

80. Радиолокатор работает на волне длиной λ = 15 см и дает n = 2000 импульсов в секунду. Длительность каждого импульса τ = 2 мкс. Определите глубину разведки радиолокатора и количество колебаний N в каждом импульсе. (75 км, 4000)

81. Определите максимальное число импульсов n, испускаемых радиолокатором в одну секунду, при обнаружении цели на расстоянии s = 30 км от него. (5000)

82. Определите, во сколько n раз надо увеличить мощность передатчика при увеличении дальности радиосвязи с космическими кораблями в k = 3 раза. (9)

83. Судовой радиолокатор излучает n = 1000 импульсов в секунду с длиной волны λ = 3 см. Продолжительность импульса τ = 0,4 мкс, мощность P = 75 кВт. Определите среднюю мощность $\langle N \rangle$ станции и глубину разведки локатора. (30 Вт, 150 м)

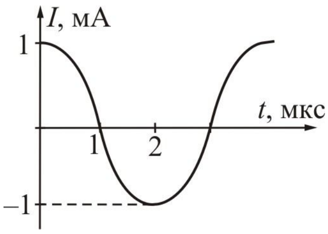
84. Определите, во сколько n раз надо увеличить мощность передатчика при увеличении дальности радиолокации в k = 3 раза. (81)

85. Высота излучающей антенны телецентра над уровнем Земли H = 300 м, а высота приемной антенны h = 10 м. Радиус Земли $R_З$ = 6400 км. Определите максимальное расстояние $s_{\max}$ от передатчика, на котором можно вести прием сигнала. (73 км)

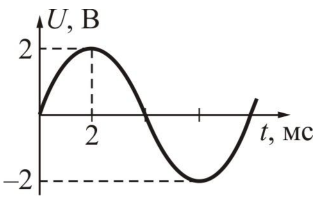
86. Корабельный радиолокатор расположен на высоте H = 8 м над уровнем моря. Радиус Земли $R_З$ = 6400 км. Определите минимальный промежуток времени $t_{\min}$ между соседними импульсами такого локатора. ($6{,}7 \cdot 10^{-5}$ с)

2.4. Тестовые задания

Электромагнитные колебания



1. На рисунке изображен график зависимости силы тока в колебательном контуре от времени. Частота ν колебаний в этом контуре равна:
1) 25 кГц; $\boxed{2)}$ $2{,}5\cdot10^5$ Гц; 3) 2,5 МГц; 4) 25 МГц.



2. На рисунке изображен график зависимости напряжения на конденсаторе колебательного контура от времени. Период колебаний T в контуре равен:
1) 2 мс; 2) 4 мс; 3) 6 мс; $\boxed{4)}$ 8 мс.

3. Если изменение заряда в колебательном контуре происходит по закону $q = 10\cos1000\pi t$ (мкКл), то частота колебаний ν в контуре равна:
1) 6,28 Гц; 2) 50 Гц; $\boxed{3)}$ 500 Гц; 4) 628 Гц.

4. Если изменения электрического тока в колебательном контуре происходят по закону $I = 0{,}05\sin2000\pi t$ (А), то период колебаний T в контуре равен:
$\boxed{1)}$ 1 мс; 2) 2 мс; 3) 3 мс; 4) 4 мс.

5. Если емкость конденсатора колебательного контура C = 4 мкФ, индуктивность катушки L = 1,6 мГн, то резонансная частота $\omega_{рез}$ колебаний в контуре равна:
1) 1250 рад/с; 2) 1563 рад/с; $\boxed{3)}$ 12 500 рад/с; 4) 156 250 рад/с.

6. Резонансная частота колебаний в контуре $\omega_{рез} = 10^6$ рад/с. Если индуктивность катушки контура L = 62,5 мГн, то емкость C конденсатора данного контура равна:
1) 16 мФ; 2) 16 мкФ; 3) 16нФ; $\boxed{4)}$ 16 пФ.

7. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L и конденсатора емкостью C. Если емкость конденсатора увеличить в n = 3 раза, а индуктивность катушки уменьшить в k = 3 раза, то период электромагнитных колебаний:
1) уменьшится в 3 раза; 2) увеличится в 3 раза;
3) увеличится в 9 раз; $\boxed{4)}$ не изменится.

8. Чтобы частота колебаний в контуре, состоящем из конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L, увеличилась в n = 3 раза при уменьшении емкости конденсатора в k = 3 раза, индуктивность катушки необходимо:
1) увеличить в 3 раза; 2) увеличить в 9 раз;
3) уменьшить в 9 раз; $\boxed{4)}$ увеличить в 27 раз.

9. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L и конденсатора переменной емкости C. Если при неизменном расстоянии между пластинами конденсатора площадь каждой пластины изменить от $S_1 = 0{,}5$ см^2 до $S_2 = 4{,}5$ см^2, то частота колебательного контура:
$\boxed{1)}$ уменьшится в 3 раза; 2) уменьшится в 9 раз;
3) увеличится в 3 раза; 4) увеличится в 9 раз.

10. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L и конденсатора емкостью C. Если объем пространства между обкладками конденсатора увеличить в $n = 4$ раза при одновременном уменьшении расстояния между обкладками в $k = 1{,}5$ раза, то период колебаний при этом:
1) уменьшится в 3 раза; 2) уменьшится в 9 раз;
$\boxed{3)}$ увеличится в 3 раза; 4) увеличится в 9 раз.

11. В колебательном контуре, состоящем из плоского воздушного конденсатора емкостью C с расстоянием между пластинами $d_1 = 8$ мм и катушки индуктивностью L, возникают электромагнитные колебания с частотой $\nu_1 = 10^5$ Гц. Если в конденсатор контура внести металлическую пластину толщиной $h = 6$ мм, то частота колебаний ν_2 станет равной:
1) $2 \cdot 10^4$ Гц; 2) $3 \cdot 10^4$ Гц; 3) $4 \cdot 10^4$ Гц; $\boxed{4)}$ $5 \cdot 10^4$ Гц.

12. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L и двух конденсаторов C_1 и C_2. При последовательном соединении конденсаторов период колебаний контура $T_1 = 6$ мс, при их параллельном соединении – $T_2 = 13$ мс. Если емкость одного конденсатора $C_1 = 9$ мкФ, то емкость C_2 второго конденсатора равна:
1) 1 мкФ; 2) 2 мкФ; 3) 3 мкФ; $\boxed{4)}$ 4 мкФ.

13. В колебательном контуре, состоящем из катушки индуктивностью L и конденсатора емкостью C, заряд на котором $q_m = 25$ нКл, возникают электромагнитные колебания. Если их частота $\nu = 4$ МГц, то максимальная сила тока $I_{\max}$ в катушке составит:
1) 157 мА; 2) 314 мА; $\boxed{3)}$ 628 мА; 4) 3,14 А.

14. В колебательном контуре, состоящем из конденсатора с зарядом $q_{\max} = 50$ нКл и катушки, по которой проходит максимальный ток $I_{\max} = 31{,}4$ мА, создаются электромагнитные колебания с периодом T, равным:
1) 1 мкс; 2) 5 мкс; $\boxed{3)}$ 10 мкс; 4) 15 мкс.

15. Период колебаний колебательного контура $T = 6$ мс. Заряд на обкладках конденсатора будет в $n = 2$ раза меньше амплитудного значения заряда $q_{\max}$ через промежуток времени Δt, равный:
$\boxed{1)}$ 1 мс; 2) 1,5 мс; 3) 3 мс; 4) 4,5 мс.

16. Частота колебаний колебательного контура ν = 2,45 кГц. С начала разрядки конденсатора до того момента, когда напряжение U на его обкладках станет в n = 2 раза меньше его максимального напряжения $U_{\max}$, пройдет промежуток времени Δt, равный:

1) 17 мкс; 2) 34 мкс; 3) 51 мкс; $\boxed{4)}$ 68 мкс.

17. Если уравнение изменения заряда на обкладках конденсатора колебательного контура имеет вид $q = 2\cdot10^{-6}\cos 2\cdot10^4 t$ (Кл), то сила тока в катушке изменяется по закону:

1) $I = 0,02\sin 10^4 t$; 2) $I = -0,02\sin 2\cdot10^4 t$;

$\boxed{3)}$ $I = -0,04\sin 2\cdot10^4 t$; 4) $I = 0,04\sin 2\cdot10^4 t$.

18. Конденсатор колебательного контура имеет емкость C = 6 мкФ. Если напряжение на его обкладках изменяется по закону $U = 2\sin 10^4 t$ (В), то закон изменения силы тока в катушке имеет вид:

$\boxed{1)}$ $I = 0,12\cos 10^4 t$; 2) $I = -0,12\cos 10^4 t$;

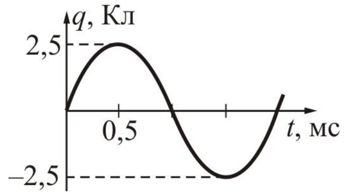
3) $I = 0,12\sin 10^4 t$; 4) $I = -0,12\sin 10^4 t$.

19. В колебательном контуре сила тока изменяется по закону $I = 0,1\sin 1000t$. Если емкость конденсатора C = 4 мкФ, то максимальное напряжение $U_{\max}$ на его обкладках равно:

1) 15 В; 2) 20 В; $\boxed{3)}$ 25 В; 4) 30 В.

20. В колебательном контуре заряд на обкладках конденсатора изменяется по закону $q = 3\sin 2000t$ (мкКл). Если индуктивность катушки L = 2 Гн, то в ней возникает максимальный магнитный поток $\Phi_{\max}$, равный:

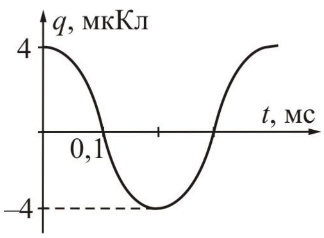
1) 3 мВт; 2) 6 мВт; 3) 9 мВт; $\boxed{4)}$ 12 мВт.



21. На рисунке изображен график зависимости заряда на обкладках конденсатора колебательного контура от времени. Зависимость силы тока в катушке этого контура от времени имеет вид:

$\boxed{1)}$ $I = 0,785\cos 3140t$; 2) $I = 0,785\sin 3140t$;

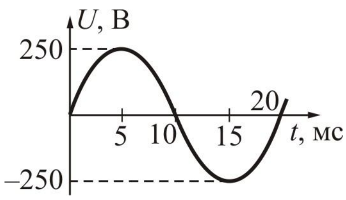
3) $I = 0,785\sin 1570t$; 4) $I = 1,7\sin 3140t$.



22. На рисунке изображен график зависимости заряда на обкладках конденсатора колебательного контура от времени. Если индуктивность катушки L = 1,45 Гн, то зависимость магнитного потока Φ катушки от времени имеет вид:

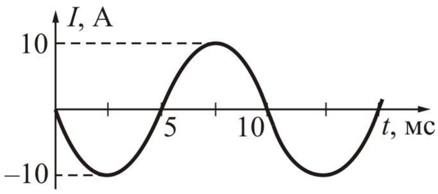
1) $\Phi = 4\cdot10^{-6}\cos 5000\pi t$; 2) $\Phi = 0,091\cos 2500\pi t$;

3) $\Phi = 0,091\sin 5000\pi t$; $\boxed{4)}$ $\Phi = -0,091\sin 5000\pi t$.



23. На рисунке изображен график зависимости напряжения U на обкладках конденсатора колебательного контура от времени. Если индуктивность катушки этого контура L = 1,37 Гн, то зависимость силы тока в катушке от времени имеет вид:

1) $I = 0{,}58\sin 314t$; 2) $I = 0{,}29\cos 628t$;
$\boxed{3)}$ $I = 0{,}58\cos 314t$; 4) $I = 0{,}29\cos 314t$.



24. На рисунке изображен график зависимости силы тока в катушке колебательного контура от времени. Если емкость конденсатора этого контура C = 6,5 мкФ, то зависимость магнитного потока Ф от времени имеет вид:

1) $\Phi = 2{,}6\cos 628t$; 2) $\Phi = 3{,}9\sin 314t$;
3) $\Phi = -2{,}6\cos 314t$; $\boxed{4)}$ $\Phi = -3{,}9\sin 628t$.

25. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности и конденсатора емкостью C = 6 мкФ. Если максимальный заряд на обкладках конденсатора q_{max} = 3 мкКл, то энергия W данного колебательного контура равна:

$\boxed{1)}$ $0{,}375\cdot10^{-6}$ Дж; 2) $0{,}375\cdot10^{-5}$ Дж; 3) $0{,}375\cdot10^{-4}$ Дж; 4) $0{,}375\cdot10^{-3}$ Дж.

26. Колебательный контур состоит из конденсатора и катушки индуктивностью L = 0,4 Гн. Если энергия, запасенная в этом контуре, W = 1,8 мкДж, то максимальный ток I_{max} в катушке равен:

1) 1 мА; 2) 2 мА; $\boxed{3)}$ 3 мА; 4) 4 мА.

27. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности и конденсатора емкостью C = 12 мкФ. Если энергия, запасенная в этом контуре, W = 2,4 мДж, то максимальное напряжение U_{max} на обкладках конденсатора равно:

1) 10 В; $\boxed{2)}$ 20 В; 3) 30 В; 4) 40 В.

28. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C = 8 нФ и катушки индуктивностью L = 0,5 мГн. Если максимальная сила тока в катушке I_{max} = 40 мА, то максимальное напряжение U_{max} на обкладках конденсатора равно:

$\boxed{1)}$ 10 В; 2) 20 В; 3) 30 В; 4) 40 В.

29. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L = 1,6 мГн и конденсатора емкостью C = 0,04 мкФ. Если максимальный заряд на обкладках конденсатора q_{max} = 8 мкКл, то максимальный магнитный поток через катушку Φ_{max} равен:

1) 0,4 мВ; 2) 0,8 мВ; 3) 1 мВ; $\boxed{4)}$ 1,6 мВ.

30. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C = 0,2 мкФ и катушки индуктивностью L = 0,4 Гн. Максимальное значение силы тока в ка-

тушке I_{max} = 1 мА. В момент, когда энергия магнитного поля катушки равна энергии электрического поля конденсатора, заряд q на конденсаторе равен:
1) 0,1 мкКл; $\boxed{2)}$ 0,2 мкКл; 3) 0,3 мкКл; 4) 0,4 мкКл.

31. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C = 24 мкФ и катушки индуктивностью L = 2 Гн. Максимальное значение напряжения на обкладках конденсатора U_{max} = 80 В. В момент, когда энергия электрического поля конденсатора в n = 5 раз больше энергии магнитного поля катушки, сила тока I в катушке равна:
$\boxed{1)}$ 0,1 А; 2) 0,2 А; 3) 0,3 А; 4) 0,4 А.

32. Если заряженный конденсатор замкнуть на катушку индуктивности, то через время $t = \frac{T}{6}$ от начала разрядки конденсатора его энергия уменьшится в … раз(а).
1) $\sqrt{2}$; 2) 2; 3) 3; $\boxed{4)}$ 4.

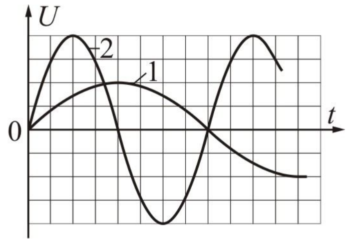
33. Если заряженный конденсатор замкнуть на катушку индуктивности, то через время $t = \frac{T}{8}$ от начала разрядки конденсатора его энергия уменьшится в … раз(а).
1) $\sqrt{2}$; $\boxed{2)}$ 2; 3) 3; 4) 4.

34. Если напряжение U на обкладках конденсатора и сила тока I в катушке идеального колебательного контура изменяются по законам $U = 6{,}28\cos 1000\pi t$ (В) и $I = 2\sin 1000\pi t$ (А), то индуктивность L катушки равна:
1) 0,1 мГн; $\boxed{2)}$ 1 мГн; 3) 10 мГн; 4) 100 мГн.

35. Если напряжение на обкладках конденсатора и сила тока в катушке идеального колебательного контура изменяются по законам $U = 2\sin 2000\pi t$ (В) и $I = 0{,}314\cos 2000\pi t$ (А) соответственно, то емкость C конденсатора данного контура равна:
1) 0,125 мкФ; $\boxed{2)}$ 1,25 мкФ; 3) 12,5 мкФ; 4) 125 мкФ.

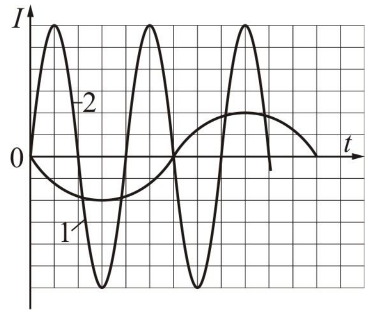
36. В тот момент, когда сила тока в катушке индуктивности идеального колебательного контура в n = 2 раза меньше амплитудного значения, отношение энергии магнитного поля катушки к энергии электрического поля конденсатора равно:
$\boxed{1)}$ 1/3; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

37. Если через некоторый промежуток времени после разрядки конденсатора идеального колебательного контура заряд на его обкладках стал равен половине амплитудного значения, то отношение энергии магнитного поля катушки контура к энергии электрического поля конденсатора равно:
1) 1/3; 2) 1; 3) 3/2; $\boxed{4)}$ 3.



38. Графики зависимостей напряжения от времени на обкладках конденсаторов в двух различных колебательных контурах (1 и 2) изображены на рисунке. Если емкости конденсаторов связаны соотношением $C_2 = 0{,}5C_1$, то отношение полных энергий колебаний $\frac{W_2}{W_1}$ в контурах равно:

1) 1; $\boxed{2)}$ 2; 3) 3; 4) 4.



39. На рисунке изображены графики зависимостей силы тока от времени в катушках индуктивности двух различных колебательных контуров (1, 2). Если емкости конденсаторов в этих контурах одинаковы, то отношение их полных энергий $\frac{W_2}{W_1}$ равно:

$\boxed{1)}$ 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

40. Напряжение между обкладками конденсатора колебательного контура емкостью $C = 5$ мкФ изменяется с течением времени по закону $U = 20\cos 1000t$. В тот момент, когда энергия электрического поля конденсатора окажется в $n = 4$ раза больше энергии магнитного поля катушки, сила тока I в катушке станет равной:

1) 0,2 А; 2) 0,31 А; $\boxed{3)}$ 0,45 А; 4) 0,51 А.

41. Сила тока в катушке индуктивностью $L = 40$ мГн меняется с течением времени по закону $I = 15\cos 10^4 t$ (мА). В тот момент, когда энергия электрического поля конденсатора окажется в $n = 8$ раз меньше энергии магнитного поля катушки, напряжение U на конденсаторе станет равным:

1) 10 В; $\boxed{2)}$ 20 В; 3) 30 В; 4) 40 В.

42. В колебательном контуре заряд на обкладках конденсатора емкостью $C = 4$ мкФ меняется по закону $q = 12\sin 100t$ (мкКл). В тот момент, когда энергия электрического поля конденсатора будет в $n = 15$ раз больше энергии магнитного поля катушки, сила тока I в ней станет равной:

1) 1 мА; 2) 2 мА; $\boxed{3)}$ 3 мА; 4) 4 мА.

43. Напряжение на обкладках конденсатора контура изменяется по закону $U = 17{,}3\sin 1000t$ (В). В тот момент, когда энергия магнитного поля катушки окажется в $n = 2$ раза меньше энергии электрического поля конденсатора, магнитный поток Ф в катушке будет равен

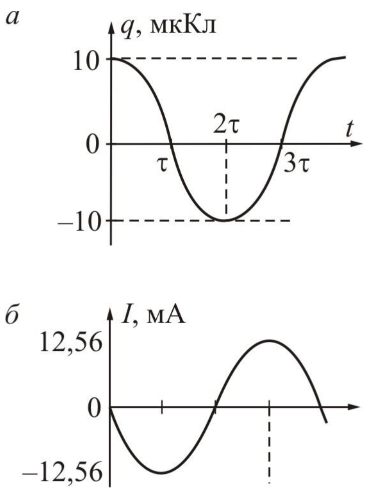
$\boxed{1)}$ 10 мВб; 2) 20 мВб; 3) 30 мВб; 4) 40 мВб.

44. В колебательном контуре происходят электромагнитные колебания. Когда заряд на обкладках конденсатора контура $q_1 = 8$ мкКл, то сила тока в катушке индуктивности $I_1 = 12$ мА, а когда заряд станет $q_2 = 4{,}5$ мкКл, то сила тока будет $I_2 = 16$ мА. Циклическая частота ω колебаний в данном контуре равна:

$\boxed{1)}$ 1128 рад/с; 2) 1272 рад/с; 3) 1458 рад/с; 4) 1567 рад/с.

45. В колебательном контуре происходят электромагнитные колебания. Если заряд на обкладках конденсатора q_1 = 6 мкКл, то сила тока в катушке индуктивности I_1 = 16 мА, если заряд станет q_2 = 8 мкКл, то сила тока будет I_2 = 12 мА. Максимальное значение заряда q_{max} во время колебаний равно:

1) 5 мкКл; $\boxed{2)}$ 10 мкКл; 3) 15 мкКл; 4) 20 мкКл.



46. Если графики зависимостей заряда q на обкладках конденсатора и силы тока I в катушке индуктивности идеального колебательного контура от времени имеют вид, изображенный на рисунках *а* и *б* соответственно, то период колебаний в контуре равен:

1) 2,5 мс; $\boxed{2)}$ 5,0 мс;
3) 6,0 мс; 4) 7,5 мс.

47. В таблице показано изменение заряда q конденсатора в идеальном колебательном контуре с течением времени t.

t, 10^{-6} с	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
q, 10^{-6} Кл	0	4,9	7,0	4,9	0	–4,9	–7,0	–4,9	0	4,9	7,0

Если индуктивность катушки L = 0,5 мГн в контуре, то период колебаний и емкость конденсатора в контуре равны:

1) 8 мкс, 13 нФ; $\boxed{2)}$ 16 мкс, 13 нФ; 3) 16 мкс, 26 нФ; 4) 12 мкс, 13 нФ.

48. В таблице показано изменение силы тока I в катушке индуктивности идеального колебательного контура.

t, 10^{-3} с	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
q, 10^{-3} А	8	5,7	0	–5,7	–8	–5,7	0	5,7	8	5,7	0

Из данных таблицы период и максимальный заряд конденсатора в контуре равны:

1) 16 мкс, 40 мкКл; 2) 8 мкс, 40 мкКл;
3) 12 мкс, 20 мкКл; $\boxed{4)}$ 16 мкс, 20 мкКл.

Электромагнитные волны

49. Диапазону длин волн от λ_1 = 1 мкм до λ_2 = 5 мкм соответствует(ют):

$\boxed{1)}$ инфракрасное излучение; 2) ультрафиолетовое излучение;
3) радиоволны; 4) видимый свет.

50. Источником электромагнитного излучения, соответствующего диапазону частот от $4\cdot10^{14}$ Гц до $7{,}5\cdot10^{14}$ Гц, является:
1) вибратор Герца; 2) рентгеновская трубка;
3) генератор переменного тока; $\boxed{4)}$ электролампа.

51. Электромагнитная волна характеризуется длиной волны λ, частотой ν и скоростью распространения υ. При переходе волны через границу двух различных сред меняются следующие параметры:
1) λ и ν; 2) λ, ν, υ; $\boxed{3)}$ λ и υ; 4) ν и υ.

52. Электромагнитная волна переходит из вакуума в среду, диэлектрическая проницаемость которой $\varepsilon > 1$, при этом:
$\boxed{1)}$ длина волны λ уменьшается, частота ν не изменяется;
2) длина волны λ и частота ν уменьшаются;
3) длина волны λ и частота ν увеличиваются;
4) длина волны λ не изменяется, частота ν уменьшается.

53. Частота колебаний передатчика искусственного спутника Земли $\nu = 20$ МГц. Длина волны λ, на которой работает передатчик, равна:
1) 6 м; 2) 8 м; 3) 10 м; $\boxed{4)}$ 15 м.

54. Длина электромагнитной волны $\lambda = 60$ м. Период колебаний равен:
1) $2\cdot10^{-6}$ с; $\boxed{2)}$ $2\cdot10^{-7}$ с; 3) $2\cdot10^{-8}$ с; 4) $2\cdot10^{-9}$ с.

55. Если диапазон частот генератора электромагнитных колебаний изменяется от $\nu_1 = 100$ кГц до $\nu_2 = 26$ МГц, то максимальная длина излучаемой волны λ_0 равна:
1) 2,5 км; $\boxed{2)}$ 3 км; 3) 4,1 км; 4) 8,7 км.

56. Если диапазон длин волн, излучаемых колебательным контуром, изменяется от $\lambda_1 = 30$ м до $\lambda_2 = 600$ м, то их максимальная частота ν_0 равна:
$\boxed{1)}$ 10 МГц; 2) 15 МГц; 3) 20 МГц; 4) 25 МГц.

57. Если сигнал радиолокатора после отражения от цели возвратился через промежуток времени $\Delta t = 0{,}8$ мс, то расстояние s до цели равно:
1) 60 км; $\boxed{2)}$ 120 км; 3) 240 км; 4) 480 км.

58. Сигнал, посылаемый радиолокатором до объекта, расположенного на расстоянии $s = 90$ км, возвращается обратно через промежуток времени, равный:
1) 0,2 мс; 2) 0,3 мс; $\boxed{3)}$ 0,6 мс; 4) 1,2 мс.

59. Длина волны, которую излучает колебательный контур, состоящий из конденсатора емкостью $C = 0{,}4$ мкФ и катушки индуктивностью 9 мГн, равна:
1) 98 км; 2) 127 км; $\boxed{3)}$ 113 км; 4) 200 км.

60. Колебательный контур излучает волну длиной λ = 50 м. Если емкость конденсатора этого контура C = 400 пФ, то индуктивность катушки L равна:
1) 0,017 мкГн; 2) 0,1 мкГн; 3) 0,17 мкГн; $\boxed{4)}$ 1,7 мкГн.

61. Электромагнитная волна распространяется в среде с абсолютным показателем преломления n = 1,5. Если минимальное расстояние между точками среды, в которых колебания индукции магнитного поля противоположны по фазе, l = 10 м, то частота ν электромагнитной волны равна:
1) 5 МГц; $\boxed{2)}$ 10 МГц; 3) 15 МГц; 4) 20 МГц.

62. Частота электромагнитной волны ν = 5 МГц. Если минимальное расстояние между точками среды, в которых колебания напряженности электрического поля противоположны по фазе, l = 15 м, то показатель преломления n этой среды равен:
1) 1; $\boxed{2)}$ 2; 3) 3; 4) 4.

63. Чтобы длина волны, на которую настроен колебательный контур, увеличилась в n = 2 раза, необходимо емкость конденсатора этого контура:
1) увеличить в 2 раза; 2) уменьшить в 2 раза;
$\boxed{3)}$ увеличить в 4 раза; 4) уменьшить в 4 раза.

64. Чтобы длина волны, на которую настроен колебательный контур, уменьшилась в n = 3 раза, необходимо индуктивность катушки этого контура:
1) увеличить в 3 раза; 2) уменьшить в 3 раза;
3) увеличить в 9 раз; $\boxed{4)}$ уменьшить в 9 раз.

65. Чтобы длина волны, на которую настроен колебательный контур, уменьшилась в n = 1,5 раза, следует расстояние между пластинами конденсатора контура:
1) уменьшить в 1,5 раза; 2) увеличить в 1,5 раза;
3) уменьшить в 2,25 раза; $\boxed{4)}$ увеличить в 2,25 раза.

66. Чтобы длина волны, на которую настроен колебательный контур, увеличилась в n = 3 раза, надо расстояние между пластинами конденсатора заполнить веществом с диэлектрической проницаемостью ε, равной:
1) 2; 2) 3; 3) 6; $\boxed{4)}$ 9.

67. Обкладки плоского конденсатора колебательного контура представляют собой диски. Чтобы длина волны, на которую настроен данный контур, уменьшилась в n = 1,2 раза, диаметр каждого диска необходимо:
1) увеличить в 1,2 раза; $\boxed{2)}$ уменьшить в 1,2 раза;
3) увеличить в 1,44 раза; 4) уменьшить в 1,44 раза.

68. Индуктивность L катушки пропорциональна квадрату числа N ее витков. Чтобы длина волны, на которую настроен колебательный контур, увеличилась в n = 1,3 раза, число витков катушки следует:

$\boxed{1)}$ увеличить в 1,3 раза; 2) уменьшить в 1,3 раза;
3) увеличить в 1,69 раза; 4) уменьшить в 1,69 раза.

69. Если сила тока в колебательном контуре изменяется по закону $I = 2\cos\omega t$ (А), а заряд на конденсаторе – по закону $q = 20\sin\omega t$ (мкКл), то длина волны, на которую настроен этот контур, равна:
1) $1{,}88 \cdot 10^2$ м; 2) $1{,}88 \cdot 10^3$ м; $\boxed{3)}$ $1{,}88 \cdot 10^4$ м; 4) $1{,}88 \cdot 10^5$ м.

70. Амплитудное значение силы тока в колебательном контуре $I_m = 1$ А. Если контур настроен на длину волны $\lambda = 942$ км, то максимальный заряд q_m на обкладках конденсатора контура равен:
$\boxed{1)}$ 0,5 мКл; 2) 1 мКл; 3) 1,5 мКл; 4) 2 мКл.

71. Радиоприемник настроен на длину волны $\lambda = 500$ м. Индуктивность катушки колебательного контура приемника $L = 1{,}5$ мГн. Если максимальная сила тока в контуре $I_m = 0{,}3$ мА, то максимальное напряжение U_m на обкладках конденсатора контура равно:
1) 0,24 В; 2) 0,67 В; 3) 1,4 В; $\boxed{4)}$ 1,7 В.

72. Максимальная сила тока в колебательном контуре радиоприемника $I_m = 3$ мА, максимальная разность потенциалов на конденсаторе контура $U_m = 6$ мВ. Если индуктивность катушки $L = 0{,}32$ мкГн, то контур настроен на волну, длина которой равна:
1) 100 м; 2) 200 м; $\boxed{3)}$ 300 м; 4) 400 м.

73. Плоский конденсатор колебательного контура заполнен парафином ($\varepsilon = 2$). Если площадь каждой пластины конденсатора $S = 100$ см^2, расстояние между ними $d = 1{,}1$ мм, а контур настроен на длину волны $\lambda = 4333$ м, то индуктивность L катушки контура равна:
$\boxed{1)}$ 32 мГн; 2) 40 мГн; 3) 50 мГн; 4) 60 мГн.

74. Колебательный контур состоит из плоского воздушного конденсатора, пластины которого представляют собой диски диаметром $D = 30$ см с расстоянием между ними $d = 1$ см. Если индуктивность катушки $L = 2$ мГн, то этот колебательный контур настроен на длину волны λ, равную:
1) 333 м; 2) 444 м; 3) 555 м; $\boxed{4)}$ 666 м.

75. Колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности и двух последовательно соединенных конденсаторов, настроен на длину волны $\lambda_1 = 423$ м. Если один из конденсаторов удалить, то контур окажется настроенным на длину волны λ_2, равную:
$\boxed{1)}$ 300 м; 2) 423 м; 3) 498 м; 4) 596 м.

76. Колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности и двух параллельно соединенных конденсаторов, настроен на длину волны $\lambda_1 = 423$ м. Ес-

ли один из конденсаторов удалить, то контур окажется настроенным на длину волны λ_2, равную:
1) 300 м; 2) 423 м; 3) 498 м; $\boxed{4)}$ 596 м.

77. Колебательный контур, состоящий из конденсатора и катушки, излучает волны частотой $\nu_1 = 10$ МГц. Если параллельно первому конденсатору контура подключить второй конденсатор емкостью в $n = 8$ раз большей, то данный колебательный контур будет излучать волны длиной λ_2, равной:
1) 10 м; 2) 30 м; 3) 60 м; $\boxed{4)}$ 90 м.

78. Колебательный контур, состоящий из конденсатора и катушки, излучает электромагнитные волны длиной $\lambda = 25$ м. Если параллельно первому конденсатору подключить второй конденсатор втрое большей емкости, частота ν_2 излучаемых волн будет равна:
1) 3 МГц; $\boxed{2)}$ 6 МГц; 3) 12 МГц; 4) 24 МГц.

79. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна. Если амплитудное значение напряженности ее электрического поля $E_m = 6$ В/см, то амплитудное значение индукции магнитного поля равно:
1) 2 мТл; 2) 20 мТл; $\boxed{3)}$ 2 мкТл; 4) 20 мкТл.

80. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна. Если амплитудное значение индукции ее электрического поля $B_m = 20$ нТл, то амплитудное значение напряженности E_m ее электрического поля равно:
1) 2 В/м; 2) 4 В/м; $\boxed{3)}$ 6 В/м; 4) 8 В/м.

81. Радиолокационная станция излучает импульс, в котором содержится $n = 937{,}5$ периода электромагнитных волн длиной $\lambda = 1{,}6$ см. Длительность излучаемого импульса τ равна:
1) 10 нс; 2) 23 нс; 3) 35 нс; $\boxed{4)}$ 50 нс.

82. Радиолокатор работает на волне $\lambda = 15$ см. Если длительность каждого импульса $\tau = 2$ мс, то в нем содержится количество колебаний N, равное:
1) 1000; 2) 2000; 3) 3000; $\boxed{4)}$ 4000.

Глава 3. Переменный ток

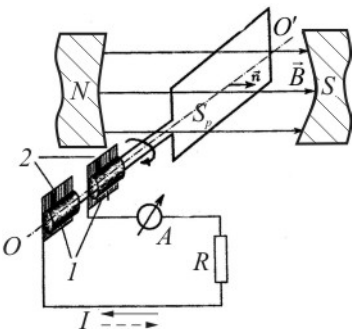
3.1. Теория

Переменный ток

представляет собой вынужденные колебания тока в электрической цепи, происходящие с частотой ω, совпадающей с частотой вынуждающей ЭДС, т. е. ток, изменяющийся по гармоническому закону.

Вынужденные электромагнитные колебания в электрических цепях создаются генераторами переменного тока, работающими на электростанциях.

Генератор переменного тока



устройства (машины), преобразующие механическую энергию в энергию переменного электрического тока с использованием явления электромагнитной индукции.

Принцип промышленного получения переменного тока рассмотрим на примере вращения проволочной рамки площадью S_p, расположенной в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$. Концы рамки приварены к двум кольцам *1*, которые вращаются вместе с рамкой. К кольцам плотно прижаты два неподвижных контакта *2* – щетки. Кольца, щетки и вращающаяся рамка имеют постоянный электрический контакт с внешней цепью, состоящей из амперметра *A* и потребителя энергии *R*.

Магнитный поток, пронизывающий плоскость рамки, меняется согласно формуле $\Phi = BS\cos\alpha$, где α – угол между нормалью $\vec{n}$ к плоскости рамки и направлением вектора магнитной индукции $\vec{B}$. При равномерном вращении рамки с угловой скоростью ω угол $\alpha = \omega t$. Тогда магнитный поток $\Phi = BS\cos\omega t$. Изменение магнитного потока приводит к возникновению в рамке ЭДС индукции, создающей в цепи индукционный ток.

Согласно закону электромагнитной индукции возникающая ЭДС

$$\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\Phi' = -BS\omega(-\sin\omega t) = BS\omega\sin\omega t.$$

Величина ЭДС изменяется по гармоническому закону.

Амплитудное значение ЭДС $\varepsilon_{\max} = BS\omega$.

Закон изменения ЭДС индукции, возникающей в рамке, имеет вид $\varepsilon = \varepsilon_{\max}\sin\omega t$.

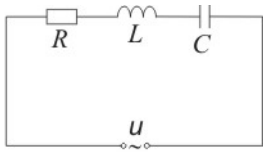
С течением времени изменяется не только величина ЭДС, но и ее знак, что соответствует изменению направления индукционного тока.

Для получения больших значений амплитуд ЭДС и силы тока во внешней цепи используют генераторы переменного тока с большой площадью *S* проволочной рамки и большим числом N витков в ней. Тогда амплитудное значение ЭДС $\mathcal{E}_{max} = NBS\omega$.

В рассмотренном простейшем генераторе электромагнит (или магнит), создающий магнитное поле, называется *индуктором*, рамка (виток, обмотка), в которой индуцируется ЭДС, – *якорем*. В данном случае индуктор неподвижен, поэтому называется *статором*, а якорь вращается и называется *ротором*.

Устройство промышленного генератора сложнее рассмотренного выше: обмотка якоря, в которой индуцируется ЭДС, делается неподвижной, а индуктор (электромагнит) вращается, являясь ротором. Область применения различных генераторов электроэнергии определяется их характеристиками, но преобладающую роль в настоящее время играют именно рассмотренные выше электромеханические индукционные генераторы переменного тока, принцип действия которых основан на явлении электромагнитной индукции.

Цепи переменного тока



Установившиеся вынужденные электромагнитные колебания можно рассматривать как протекание в цепи, содержащей резистор R, катушку индуктивности L и конденсатор C переменного тока.

Переменный ток можно считать квазистационарным, когда мгновенные значения силы тока во всех сечениях цепи практически одинаковы, их изменения происходят очень медленно по сравнению со временем распространения электромагнитных возмущений в цепи (скорость электромагнитных возмущений $c = 3\cdot10^8$ м/с).

$$U = U_{max}\sin\omega t$$

или

$$U = U_{max}\cos\omega t,$$

где U_{max} – амплитуда колебаний напряжения.

Далее будем рассматривать квазистационарные токи в электрических цепях, находящихся под напряжением, гармонически меняющимся с частотой ω по синусоидальному или косинусоидальному закону. Когда колебания происходят длительное время, значение начальной фазы не играет существенной роли. Поэтому ее можно принять равной нулю.

$$I = I_{max}\sin(\omega t + \varphi)$$

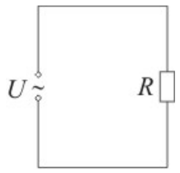
φ – разность (сдвиг) фаз между колебаниями силы тока и напряжения

Если напряжение меняется с частотой ω, то и сила тока в цепи будет меняться с той же частотой, но колебания силы тока не обязательно должны совпадать по фазе с колебаниями напряжения.

Резистор в цепи переменного тока

При протекании тока (постоянного или переменного) по проводнику, обладающему электрическим сопротивлением, последний нагревается. Это обусловлено соударениями электронов, ускоренных электрическим полем внутри проводника, с ионами кристаллической решетки и передачей им части энергии. Внутренняя энергия проводника возрастает, он нагревается, а при большой температуре излучает свет (нить накаливания лампы). Тепловая и световая энергии рассеиваются в пространстве.

Проводник, в котором происходит полное и необратимое превращение электрической энергии в другие виды энергии, называется *активным сопротивлением*.



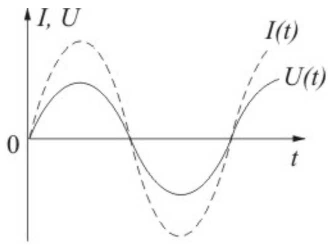
а

Пусть на активное сопротивление R (рис. *а*) подается переменное напряжение, меняющееся по закону

$U = U_{\max}\sin\omega t$ (1).

Как и в случае постоянного тока, мгновенное значение силы тока I прямо пропорционально мгновенному значению напряжения U. Используя закон Ома, можно получить

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_{\max}\sin\omega t}{R} \text{ или } I = I_{\max}\sin\omega t \qquad (2).$$



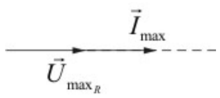
б

Как видно из формул (1) и (2), в проводнике с активным сопротивлением колебания силы тока совпадают по фазе с колебаниями напряжения (рис. *б*).

Амплитуда силы тока

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{R}$$

Векторная диаграмма электрических колебаний в цепи позволяет определить амплитуду силы тока в зависимости от амплитуды напряжения и сдвиг фаз между силой тока и напряжением.

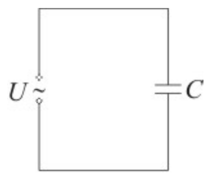


в

Изобразим вектор силы тока $\vec{I}_{\max}$ в виде горизонтальной стрелки (рис. *в*). Напряжение на резисторе совпадает по фазе с силой тока. Поэтому вектор $\vec{U}_{\max_R}$ должен совпадать по направлению с вектором $\vec{I}_{\max}$. Его модуль $U_{\max_R} = I_{\max}R$.

Конденсатор в цепи переменного тока

Конденсатор в цепи постоянного тока представляет собой бесконечно большое сопротивление, так как диэлектрик между обкладками конденсатора разрывает электрическую цепь.



а

Если конденсатор включить в цепь переменного тока (рис. *а*), то носители тока – электроны – совершают колебательное движение от одной обкладки к другой по внешней цепи, что компенсирует наличие разрыва в цепи.

Напряжение на конденсаторе $U = \dfrac{q}{C} = U_{\max} \sin \omega t$ (1) (C – емкость конденсатора, q – заряд на нем).

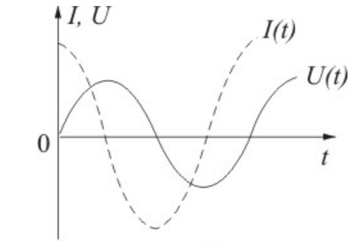
Следовательно, заряд на конденсаторе изменяется по гармоническому закону $q = CU_{\max}\sin\omega t$.

Сила тока представляет собой первую производную заряда по времени:

$$I = q' = CU_{\max}\omega\cos\omega t = CU_{\max}\omega\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) =$$

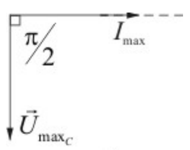
Амплитуда силы тока $I_{\max} = CU_{\max}\omega$ (3)

$$= I_{\max}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (2).}$$



б

Из сравнения формул (1) и (2) видно, что колебания силы переменного тока в цепи с конденсатором опережают по фазе колебания напряжения на $\pi/2$ или, что то же самое, колебания напряжения отстают по фазе от колебаний силы тока на $\pi/2$ (рис. *б*).



в

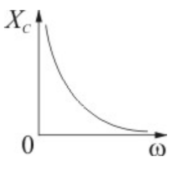
Если вектор амплитуды силы тока $\vec{I}_{\max}$ изобразить в виде горизонтальной стрелки, то вектор амплитуды напряжения $\vec{U}_{\max_C}$, отстающего по фазе на $\pi/2$, повернем вертикально вниз (рис. *в*).

Перепишем формулу (3) для амплитуды силы тока в виде, соответствующем закону Ома:

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{1/\omega C} = \frac{U_{\max}}{X_C}.$$

Из формулы видно, что роль сопротивления играет величина $\dfrac{1}{\omega C} = X_C$, называемая емкостным сопротивлением конденсатора переменному току.

Зависимость емкостного сопротивления конденсатора от частоты переменного тока



Чем больше емкость конденсатора C, тем больший заряд накапливается в нем при зарядке, а следовательно, больший ток проходит в цепи при его разрядке.

Чем больше частота приложенного напряжения, тем быстрее заряд перетекает от обкладки к обкладке. Время перетекания заряда Δt уменьшается – сила тока увеличивается.

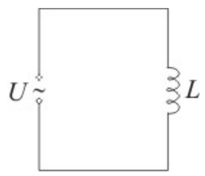
Конденсатор при зарядке потребляет энергию электрического тока, которая превращается в энергию электрического поля конденсатора; при разрядке конденсатора энергия электрического поля превращается в энергию тока, т. е. происходит пе-

риодическая перекачка энергии от источнока тока в конденсатор и от конденсатора к источнику.
В целом за период конденсаторы не потребляют энергию.

Катушка индуктивности в цепи переменного тока

Катушка индуктивности, включенная в цепь постоянного тока, представляет собой активное сопротивление, определяемое материалом проводника, длиной витков и площадью сечения витка: $R = \rho\frac{l}{S}$.

В цепи переменного тока в катушке индуктивностью L возникает ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{si}$, которая препятствует любому изменению тока, создавая дополнительное сопротивление, называемое индуктивным X_L. Если катушка подключена к внешнему источнику переменной ЭДС $\mathcal{E}$, то с учетом ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{si}$ второе правило Кирхгофа можно записать:
$\mathcal{E} + \mathcal{E}_{si} = IR$,
где R – электрическое сопротивление соединительных проводов и провода катушки.



а

Рассмотрим идеальный случай (рис. а), когда $R = 0$ и сопротивление источника мало. В таком случае $\mathcal{E} = U$ (U – внешнее напряжение на источнике, равное напряжению на катушке). Тогда $U + \mathcal{E}_{si} = 0 \Rightarrow$ $U = -\mathcal{E}_{si} = L\frac{\Delta I}{\Delta t}$ или $U = LI'$ (см. часть 3).

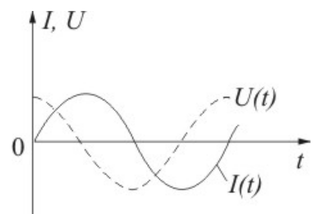
Если сила тока изменяется по гармоническому закону
$I = I_{\max}\sin\omega t$, (1)
то, взяв производную тока по времени, получим

$$U = LI_{\max}\omega\cos\omega t = LI_{\max}\omega\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) =$$

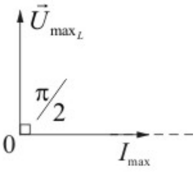
$$= U_{\max}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (2)$$

Амплитуда напряжения
$U_{\max} = LI_{\max}\omega$ (3)

Из сравнения формул (1) и (2) видно, что колебания напряжения на катушке опережают по фазе колебания силы тока на $\pi/2$ или, что то же самое, колебания силы тока отстают по фазе от колебаний напряжения на $\pi/2$ (рис. *б*).



б



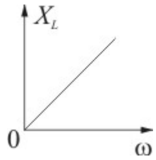
в

Если вектор амплитуды силы тока $\vec{I}_{\max}$ изобразить в виде горизонтальной стрелки, то вектор амплитуды напряжения $\vec{U}_{\max_L}$, опережающего ток по фазе на $\pi/2$, повернем вертикально вверх (рис. *в*).

Формулу (3) можно привести к виду, соответствующему закону Ома:

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{\omega L} = \frac{U_{\max}}{X_L}.$$

Зависимость индуктивного сопротивления катушки от частоты переменного тока



$X_L = \omega L$ – индуктивное сопротивление катушки, которое при постоянном токе не влияет на сопротивление цепи. Чем быстрее меняется напряжение в цепи переменного тока, тем больше ЭДС самоиндукции и тем меньше амплитуда силы тока.

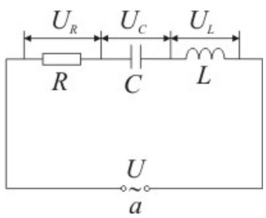
При подаче напряжения на катушку в ней возникает ток самоиндукции, препятствующий возрастанию тока в цепи. В катушке возникает магнитное поле, обладающее энергией. При убывании тока в цепи энергия магнитного поля уменьшается, возникает ток самоиндукции, поддерживающий ток в цепи, препятствующий его убыванию. Энергия магнитного поля превращается в энергию электрического тока. Таким образом, потребляемая катушкой от источника тока энергия за период изменения напряжения равна нулю.

Реактивное сопротивление

сопротивление, на котором не происходит необратимого перехода энергии электрического тока во внутреннюю энергию.

К реактивным сопротивлениям относят емкостное сопротивление конденсатора $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ и индуктивное сопротивление катушки $X_L = \omega L$.

Цепь переменного тока, содержащая последовательно соединенные резистор, катушку индуктивности и конденсатор



a

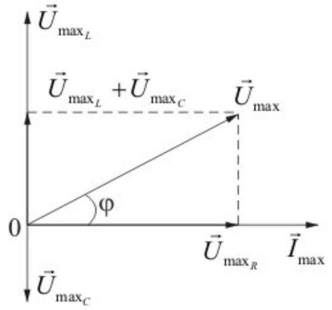
Установим связь между амплитудами колебаний силы тока и напряжения в цепи, изображенной на рисунке *a*.

В любой момент времени сумма мгновенных напряжений на последовательно включенных элементах цепи (R, C, L) равна мгновенному значению приложенного напряжения: $U_R + U_C + U_L = U$.

Изменения силы тока во всех элементах происходят практически одновременно, так как электромагнитные возмущения распространяются со скоростью $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Изменение напряжения на резисторе совпадает по фазе с изменениями силы тока, изменения напряжения на конденсаторе отстают на $\pi/2$ от колебаний силы тока, а на катушке индуктивности опережают на $\pi/2$. Поэтому, если складывать величины напряжений без учета сдвига по фазе, сумма $U_R + U_C + U_L \neq U$.

Аналитически с помощью векторной диаграммы можно определить сдвиг фаз между колебаниями силы тока и напряжения, а также полное сопротивление цепи Z.



$$\vec{U}_{\max}=\vec{U}_{\max_R}+\vec{U}_{\max_C}+\vec{U}_{\max_L}$$

Из векторной диаграммы видно, что

$$U_{\max}=\sqrt{U_{\max_R}+(U_{\max_L}-U_{\max_C})^2}$$

или $U_{\max}=I_{\max}\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}=$

$$=I_{\max}\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Запишем в виде, соответствующем закону Ома:

$I_{\max}=\dfrac{U_{\max}}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\Rightarrow$ полное сопротивление цепи $Z=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$.

Закон Ома для цепи переменного тока

$$I_{\max}=\frac{U_{\max}}{Z}$$

Наличие в цепи переменного тока активного (R) и реактивных сопротивлений (X_L и X_C) приводит к тому, что в цепи возникает сдвиг фазы φ между колебаниями силы тока и напряжения. Из векторной диаграммы можно определить φ как

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{X_L-X_C}{R}=\frac{\omega L-1/\omega C}{R}\Rightarrow\varphi=\mathrm{arctg}\frac{X_L-X_C}{R}.$$

Можно определить как

$$\cos\varphi=\frac{R}{Z}=\frac{R}{\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\varphi=\arccos\frac{R}{\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}}.$$

Величина cosφ играет существенную роль в определении мощности в электрической цепи переменного тока.

Мощность в цепи переменного тока

Пусть в цепи переменного тока мгновенные значения напряжения U и силы тока I меняются согласно законам: $U = U_{\max}\cos\omega t$, $I = I_{\max}(\cos\omega t + \varphi)$, φ – величина сдвига фазы между силой тока и напряжением.

Мгновенные значения мощности

$P = UI = U_{\max}I_{\max}\cos\omega t(\cos\omega t + \varphi)$.

Воспользовавшись формулой тригонометрических преобразований

$$\cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}(\cos(2\omega t + \varphi) + \cos\varphi),$$

запишем выражение для мгновенной мощности в виде

$$P = \frac{U_{\max} I_{\max} \cos(2\omega t + \varphi)}{2} + \frac{U_{\max} I_{\max} \cos\varphi}{2}.$$

Средняя мощность переменного тока

$$P = \frac{1}{2} U_{\max} I_{\max} \cos\varphi = \frac{U_{\max} I_{\max} R}{2Z}.$$

Средняя за период мощность, определяемая слагаемым $\frac{U_{\max} I_{\max} \cos(2\omega t + \varphi)}{2}$, равна 0. Второе слагаемое $\frac{1}{2} U_{\max} I_{\max} \cos\varphi$ не зависит от времени, поэтому средняя мощность переменного тока определяется только этим выражением.

Примечание:

а) если в цепи переменного тока включено только активное опротивление, $\varphi = 0$, мощность $P = \frac{1}{2} U_{\max} I_{\max}$;

б) если в цепи только реактивное сопротивление, $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi = 0$. Средняя мощность, потребляемая цепью с реактивным сопротивлением за период, равна нулю;

в) если в цепь включены активное и реактивное сопротивления, $\varphi \neq 0$ и $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, тогда мощность переменного тока $P = \frac{1}{2} U_{\max} I_{\max} \cos\varphi$. Мощность зависит не только от амплитудных значений напряжения и силы переменного тока, но и от сдвига фазы между напряжением и силой тока.

Действующие (или эффективные) значения напряжения и силы переменного тока

Мгновенные значения напряжения и силы переменного тока непрерывно изменяются, и их среднее значение за любое целое число периодов равно нулю.

Для измерения силы переменного тока используют тепловое действие тока и вводят понятие действующего $I_д$ (или эффективного $I_{эфф}$) тока и действующего $U_д$ (или эффективного $U_{эфф}$) напряжения.

Поочередно через один и тот же однородный проводник сопротивлением R пропускают переменный, а затем постоянный ток так, чтобы за одно и то же время t количество теплоты $Q_{пост}$, выделенное постоянным током, было равно количеству теплоты $Q_{пер}$, выделенному переменным током, т. е. $Q_{пост} = Q_{пер}$. Это значит, что согласно закону Джоуля–Ленца $I^2_{пост} Rt = \left\langle I^2_{пер} \right\rangle Rt$

($I^2_{\text{пост}}$ – квадрат силы постоянного тока; $\left\langle I^2_{\text{пер}} \right\rangle$ – среднее за период значение квадрата переменного тока). Из этого выражения $I^2_{\text{пост}} = \left\langle I^2_{\text{пер}} \right\rangle \Rightarrow I_{\text{пост}} = \sqrt{\left\langle I^2_{\text{пер}} \right\rangle}$.

Если $I^2_{\text{пер}} = I^2_{\max}\cos^2\omega t$, а $\cos^2\omega t = \dfrac{1+\cos 2\omega t}{2}$, то $I^2_{\text{пер}} = \dfrac{I^2_{\max}}{2}(1+\cos 2\omega t)$.

Из этого выражения среднее значение квадрата силы переменного тока $\left\langle I^2_{\text{пер}} \right\rangle \Rightarrow \dfrac{I^2_{\max}}{2}(1+\left\langle \cos 2\omega t \right\rangle)$.

Если функция $\left\langle \cos 2\omega t \right\rangle$ за период равна нулю, то $\left\langle I^2_{\text{пер}} \right\rangle \Rightarrow \dfrac{I^2_{\max}}{2} \Rightarrow I_{\text{пост}} = \dfrac{I_{\max}}{\sqrt{2}} = I_{\text{д}}$ (или $I_{\text{эфф}}$).

Действующее (или эффективное) значение силы переменного тока – сила такого постоянного тока, который в одном и том же проводнике за одно и то же время выделит такое же количество теплоты, как и данный переменный ток.

$U_{\text{д}}$ (или $U_{\text{эфф}}$) $= \dfrac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$ – действующее (или эффективное) значение напряжения.

$\varepsilon_{\text{д}}$ (или $\varepsilon_{\text{эфф}}$) $= \dfrac{\varepsilon_{\max}}{\sqrt{2}}$ – действующее (или эффективное) значение ЭДС переменного тока.

Закон Ома для цепи переменного тока – справедлив как для амплитудных значений напряжения и силы переменного тока (см. выше), так и для их действующих значений:

$$I_{\text{д}} = \frac{U_{\text{д}}}{R};\ I_{\text{д}} = \frac{U_{\text{д}}}{X_L} = \frac{U_{\text{д}}}{\omega L};\ I_{\text{д}} = \frac{U_{\text{д}}}{X_C} = U_{\text{д}}\omega C;$$

$$I_{\text{д}} = \frac{U_{\text{д}}}{Z} = \frac{U_{\text{д}}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}.$$

Действующие значения непосредственно определяют мощность переменного тока в цепи:

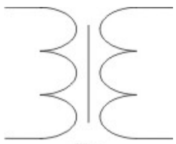
$$P = \frac{1}{2}U_{\max}I_{\max}\cos\varphi = U_{\text{д}}I_{\text{д}}\cos\varphi.$$

Измерительные приборы (амперметры и вольтметры), работающие в цепи переменного тока, проградуированы так, что показывают действующие (эффективные) значения силы тока и напряжения.

Трансформатор (1878 г.; идея создания принадлежит П.Н. Яблочкову, конструкция – И.Ф. Усагину) – устройство, служащее для преобразования (повышения или понижения) напряжения и силы переменного тока при неизменной частоте.

Трансформатор представляет собой замкнутый сердечник (магнитопровод) из мягкого ферромагнетика, на который намотаны две катушки (обмотки): первичная с числом витков N_1, подключаемая к источнику переменного тока, и вторичная с числом витков N_2, подключаемая к потребителю (нагрузке), r_1 и r_2 – сопротивления обмоток.

Условное обозначение трансформатора в электрических схемах



Тр

Принцип действия основан на явлении взаимной индукции. Переменный ток в первичной обмотке порождает переменный магнитный поток в сердечнике трансформатора. При конструировании трансформаторов добиваются, чтобы весь переменный магнитный поток был локализован в сердечнике и, следовательно, почти целиком пронизывал витки вторичной обмотки (в современных трансформаторах потери не превышают 1 %). В первичной обмотке трансформатора возникает ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{si}$. Во вторичной обмотке в соответствии с законом электромагнитной индукции возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$.
Трансформатор может работать в двух режимах.

Режим холостого хода – имеет место при отсутствии нагрузки во вторичной цепи, вторичная обмотка разомкнута.

Напряжение, приложенное к первичной обмотке трансформатора, изменяется по гармоническому закону

$$U_1 = U_{\max_1} \cos \omega t\,, \qquad (1)$$

$U_{\max_1}$ – амплитудное значение напряжения в первичной обмотке; U_1 – мгновенное значение напряжения.
В первичной обмотке возникает переменный ток I_1, изменяющийся также по гармоническому закону:

$$I_1 = I_{\max_1} \sin \omega t\,,$$

$I_{\max_1}$ и I_1 – амплитудное и мгновенное значения тока соответственно.
Колебания силы тока I_1 в цепи первичной обмотки отстают по фазе от колебаний напряжения U_1 на $\pi/2$, так как активное сопротивление первичной обмотки пренебрежимо мало по сравнению с ее индуктивным сопротивлением.

Переменный магнитный поток Ф, возбуждаемый током в первичной обмотке, совпадает по фазе с током и пронизывает витки обеих обмоток трансформатора так, что мгновенное значение	$\Phi = \Phi_{max}\sin\omega t$, Φ_{max} – максимальный магнитный поток, пронизывающий каждый виток обмоток трансформатора.
ЭДС индукции ε, возникающей в каждом витке первичной или вторичной обмотки, одинаково.	Согласно закону Фарадея возникающая ЭДС индукции $\varepsilon = -\Phi'$, где Φ' – производная потока магнитной индукции по времени. $\Phi' = \omega\Phi_{max}\cos\omega t$, $\varepsilon = -\omega\Phi_{max}\cos\omega t = -\varepsilon_{max}\cos\omega t$. (2) $\varepsilon_{max} = \omega\Phi_{max}$ – амплитудное значение ЭДС индукции в одном витке обмотки. Полная ЭДС самоиндукции в первичной обмотке трансформатора, имеющей N_1 витков, $\varepsilon_1 = N_1\varepsilon$, во вторичной обмотке с числом витков N_2 полная ЭДС индукции $\varepsilon_2 = N_2\varepsilon$.
$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{N_1}{N_2}$ (3)	выражение справедливо для мгновенных, амплитудных и действующих значений ЭДС в обмотках трансформатора. При холостом режиме работы трансформатор потребляет из сети мало энергии, поэтому ток холостого хода I_x очень мал и падение напряжения на первичной обмотке $I_x r_1 \approx 0$. Напряжение U_1 и ЭДС самоиндукции ε_1 колеблются в противофазе (сравните выражения 1 и 2) и равны друг другу: $U_1 = -\varepsilon_1$. При разомкнутой цепи вторичной обмотки напряжение на ее концах U_2 в любой момент времени равно ЭДС индукции ε_2, взятой с противоположным знаком: $U_2 = -\varepsilon_2$. Выражение (3) можно записать в виде $\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = k$, где k – коэффициент трансформации.
Трансформатор понижающий $k > 1$ Трансформатор повышающий $k < 1$	Любой трансформатор можно использовать и как понижающий, и как повышающий в зависимости от того, какую из обмоток включают в сеть переменного тока как первичную.

Режим рабочего хода (режим нагрузки)	имеет место при подключении нагрузки к концам вторичной обмотки, т. е. трансформатор нагружен (к нему подключаются потребители энергии). В цепи вторичной обмотки течет переменный ток I_2, создающий свой свободный переменный магнитный поток. Этот магнитный поток уменьшает полный магнитный поток в сердечнике трансформатора, что приводит к уменьшению ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_1$ в первичной обмотке ($U_1 = \mathcal{E}_1 + I_1 r_1$), а это в свою очередь ведет к увеличению тока I_1 в этой обмотке. Этот ток называется нагрузочным. Потребление энергии трансформатором из сети переменного тока возрастает, и эта энергия передается потребителям во вторичную цепь. Магнитные потоки Φ_1 и Φ_2, создаваемые нагрузочными токами I_1 и I_2, соответственно равны: $\Phi_1 = \mu\mu_0 \dfrac{N_1}{l} I_1 S$ и $\Phi_2 = \mu\mu_0 \dfrac{N_2}{l} I_2 S$ (см. часть 3).
Нагрузочные силы токов в обмотках трансформатора обратно пропорциональны числу витков в этих обмотках	При установившемся режиме работы трансформатора (для данной нагрузки) один и тот же поток охватывает обе обмотки, т. е. $\Phi_1 = \Phi_2$. Это означает, что $N_1 I_1 = N_2 I_2$ или $\dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{N_1}{N_2}$.
Мощность в первичной цепи трансформатора P_1 равна мощности в его вторичной цепи P_2, т. е. $U_1 I_1 = U_2 I_2$ в отсутствие потерь энергии	Согласно закону сохранения энергии (без учета потерь энергии) энергия, отдаваемая потребителям, включенным в цепь вторичной обмотки трансформатора, равна энергии, потребляемой первичной обмоткой трансформатора из сети.
$\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{I_1}{I_2}$	увеличивая с помощью трансформатора напряжение переменного тока в несколько раз, во столько же раз уменьшаем силу этого тока.
Коэффициент полезного действия (КПД) трансформатора $\eta = \dfrac{P_П}{P_З}$, где $P_П$ – мощность, отдаваемая потребителям, $P_З$ – мощность, потребляемая трансформатором от сети переменного тока.	Потери энергии в трансформаторах вызваны следующими основными причинами: нагреванием обмоток при протекании по ним нагрузочных токов, нагреванием сердечника вихревыми токами (токами Фуко) и при его перемагничивании переменным магнитным потоком. Эти потери стремятся свести к минимуму, изготавливая сердечник трансформатора из тонких стальных листов, изолируя их друг от друга, тем самым значительно увеличивая сопротивление сердечника. КПД трансформаторов, служащих для преобразования переменных токов больших мощностей, очень высокие (98–99,5 %).

КПД выражается в процентах.

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \cdot 100\ \% \text{ или}$$

$$\eta = \frac{U_2 I_2}{U_1 I_1} \cdot 100\ \%$$

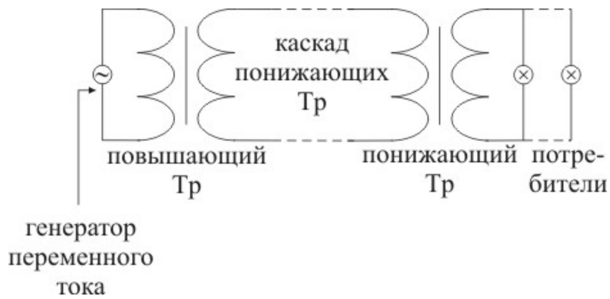
Передача электрической энергии

Электроэнергия вырабатывается на электростанциях (тепловых, гидро- и атомных) и передается потребителям на большие расстояния с помощью линий электропередач (ЛЭП). Естественно, что часть этой энергии необратимо переходит во внутреннюю и выделяется в проводах в виде теплоты.

Согласно закону Джоуля–Ленца количество теплоты, выделяемое током I в проводнике сопротивлением R, $Q = I^2 Rt = I^2 \rho \frac{l}{S} t$ (ρ – удельное сопротивление проводника, l – его длина, S – площадь поперечного сечения). Из формулы видно, что уменьшить тепловые потери в линиях электропередач можно увеличив сечение проводника S, что экономически невыгодно, либо уменьшив силу тока I. Чтобы передаваемая мощность $P = IU$ оставалась неизменной, следует увеличить напряжение U в линии.

Поэтому устанавливают на начальном этапе повышающий трансформатор, а далее, учитывая, что потребители электроэнергии рассчитаны на разные напряжения, используют каскад понижающих трансформаторов.

Схема передачи и распределения электроэнергии



3.2. Примеры решения задач

3.2.1. Проводящая рамка равномерно вращается в однородном магнитном поле так, что магнитный поток, пронизывающий плоскость рамки, изменяется по закону $\Phi = 100\cos(100\pi t)$ (мВб). Определите частоту тока, а также максимальное и действующее значения ЭДС, возникающей в рамке.

Решение:

Магнитный поток, пронизывающий плоскость рамки, изменяется по закону

$$\Phi = \Phi m\cos\omega t = \Phi m\cos 2\pi\nu t. \qquad (1)$$

Из сравнения (1) с законом изменения магнитного потока в условии задачи определим частоту тока. $\omega = 2\pi\nu = 100\pi \Rightarrow \nu = 50$ Гц.

ЭДС индукции, возникающую в рамке, определим как первую производную магнитного потока по времени: $\varepsilon = -\omega\Phi m\sin\omega t$. Максимальное значение ЭДС $\varepsilon_m = 100\pi\cdot 100\cdot 10^{-3} = 31{,}4$ (В).

Действующее значение ЭДС

$$\varepsilon_д = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{2}} \approx 22{,}3 \text{ В}.$$

Ответ: 100 Гц; 31,4 В; 22,3 В.

3.2.2. Квадратная рамка, состоящая из $N = 100$ витков медного провода сечением $S = 0{,}68$ мм^2, вращается в однородном магнитном поле. Сторона рамки $a = 10$ см, удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7\cdot 10^{-8}$ Ом·м. Максимальная ЭДС, возникающая в рамке, $\varepsilon_m = 40{,}0$ В. Определите действующее значение силы переменного тока в проводнике сопротивлением $R = 7{,}0$ Ом, присоединенном к рамке.

Решение:

Действующее (или эффективное) значение силы тока

$$I_д = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \qquad (1)$$

I_m – максимальное значение силы тока определим из закона Ома:

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{R + r}, \qquad (2)$$

где $r = \rho\frac{l}{S} = \rho\frac{N4a}{S}$ (3) – сопротивление медной рамки, $l = 4a$ – длина одного витка.

С учетом (2) и (3) действующее значение силы тока $I_д = \dfrac{\varepsilon_m}{\sqrt{2}\left(R + \dfrac{4\rho Na}{S}\right)}$;

$I_д = 3{,}5$ А.

Ответ: 3,5 А.

3.2.3. Генератор переменного тока создает ЭДС, изменяющуюся по закону: $\varepsilon = 310\sin(200\pi t)$ В. Определите максимальное и действующее значения ЭДС (ε_m и $\varepsilon_д$), период T, частоту ν и начальную фазу φ_0, а также значение ЭДС в момент времени $t_1 = \dfrac{1}{300}$ с.

Решение:

Закон изменения ЭДС согласно условию задачи имеет вид: $\varepsilon = 310\sin(200\pi t)$ В. Сравним с общей формулой изменения ЭДС: $\varepsilon = \varepsilon_m \sin(\omega t + \varphi_0)$.

Из сравнения видно, что максимальное значение ЭДС $\varepsilon_m = 310$ В, циклическая частота $\omega = 200\pi$ рад/с, начальная фаза $\varphi_0 = 0$.

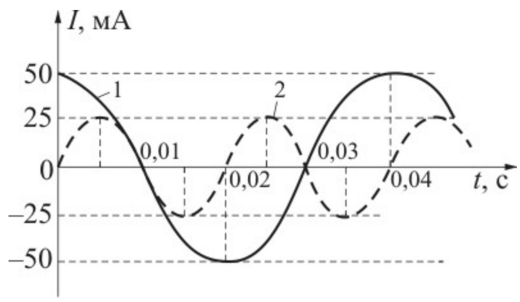
Из соотношения между частотой и периодом изменения ЭДС $\omega = 2\pi\nu = \dfrac{2\pi}{T}$ определим частоту $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi} = 100$ Гц; $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{1}{\nu} = 0{,}01$ с.

Мгновенное значение ЭДС $\varepsilon_1 = 310\sin(200\pi t_1) = 310\sin\dfrac{2}{3}\pi$ (В); $\varepsilon_1 = 268{,}5$ (В).

Действующее значение ЭДС $\varepsilon_д = \dfrac{\varepsilon_m}{\sqrt{2}} \approx 220$ В.

Ответ: $\varepsilon_m = 310$ В; $\varepsilon_д = 220$ В; $\varepsilon_1 = 268{,}5$ В; $\varphi_0 = 0$; $\omega = 200\pi$ рад/с; $\nu = 100$ Гц; $T = 0{,}01$ с.

3.2.4. На рисунке представлены графики зависимостей силы тока от времени для различных цепей переменного тока. С помощью графиков определите значения амплитуд силы тока, периода и частоты. Напишите законы изменения силы тока в зависимости от времени для двух случаев.



Решение:

Амплитуда – максимальное значение силы тока. На графиках видно, что $I_{m_1} = 50$ мА, $I_{m_2} = 25$ мА.

Период колебательного процесса – время одного полного колебания, $T_1 = 0{,}04$ с, $T_2 = 0{,}02$ с.

Из соотношения периода и частоты $\nu = \dfrac{1}{T}$, получим $\nu_1 = 25$ Гц, $\nu_2 = 50$ Гц.

На графиках видно, что сила тока I_1 изменяется по закону косинуса: $I_1 = I_{m_1}\cos\omega_{0_1} t$, а сила тока I_2 – по закону синуса: $I_2 = I_{m_2}\sin\omega_{0_2} t$, где $\omega_{0_1} = \dfrac{2\pi}{T_1} = 50\pi$ рад/с и $\omega_{0_2} = \dfrac{2\pi}{T_2} = 100\pi$ рад/с – циклические частоты колебаний.

Тогда $I_1 = 50 \cdot 10^{-3}\cos(50\pi t)$ А; $I_2 = 25 \cdot 10^{-3}\sin(100\pi t)$ А.

Используя понятие начальной фазы, можно записать:

$$I_1 = 50 \cdot 10^{-3} \sin\left(50\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ А};$$

$$I_2 = 25 \cdot 10^{-3} \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ А}.$$

Ответ: 50 мА; 25 мА; 0,04 с; 0,02 с; 25 Гц; 50 Гц; $I_1 = 50 \cdot 10^{-3}\cos(50\pi t)$; $I_2 = 25 \cdot 10^{-3}\sin(100\pi t)$.

3.2.5. При включении в цепь постоянного тока катушки индуктивностью L через нее идет ток I = 6 А, а при включении этой катушки в цепь переменного тока при частоте ν = 50 Гц через нее идет ток, максимальное значение которого I_m = 3 А. Определите индуктивность катушки L, если напряжение U в цепи постоянного тока и максимальное значение напряжения U_m в цепи переменного тока равны U = 120 В.

Решение:

Из закона Ома для цепи постоянного тока определим активное сопротивление катушки

$$R = \frac{U}{I}. \tag{1}$$

Полное сопротивление Z катушки в цепи переменного тока

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \tag{2}$$

где $X_L = \omega L = 2\pi\nu L$ – реактивное сопротивление катушки. Из закона Ома для цепи переменного тока

$$Z = \frac{U_m}{I_m}. \tag{3}$$

Объединив (1)–(3), получим

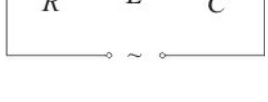
$$\sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 + (2\pi\nu L)^2} = \frac{U_m}{I_m} \Rightarrow 2\pi\nu L = \sqrt{\left(\frac{U_m}{I_m}\right)^2 - \left(\frac{U}{I}\right)^2}.$$

$$L = \frac{1}{2\pi\nu}\sqrt{\left(\frac{U_m}{I_m}\right)^2 - \left(\frac{U}{I}\right)^2}.$$

L = 0,11 Гн = 110 мГн.

Ответ: 110 мГн.

3.2.6. В сеть переменного тока частотой ν = 50 Гц последовательно включены активное сопротивление R = 4 Ом, катушка индуктивностью L = 0,1 Гн и конденсатор емкостью $C = 5 \cdot 10^{-5}$ Ф. Определите полное сопротивление цепи и сдвиг фаз между током и напряжением, а также частоту переменного тока, при которой сопротивление цепи будет минимальным.



Решение:

Полное сопротивление цепи переменного тока, схема которой изображена на рисунке, $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ (1), где $X_L = \omega L = 2\pi \nu L = 31,4$ Ом (2) – реактивное индуктивное сопротивление, $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C} = 63,7$ Ом (3) – реактивное емкостное сопротивление, ω = 2πν – циклическая частота.

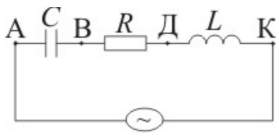
Тогда полное сопротивление $Z = \sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu C}\right)^2}$ = 32,5 Ом.

Сдвиг фаз φ между током и напряжением в такой цепи можно определить из формулы $\cos\varphi = \frac{R}{Z} = 0,123 \Rightarrow \varphi = 82,9°$ или φ = 0,46π.

Из формулы (1) видно, что общее сопротивление такой цепи будет минимальным при равенстве реактивных сопротивлений $X_L = X_C$ (4), $Z_{\min} = R$ = 4 Ом. Частоту тока ν_0, при которой это станет возможным, определим из условия (4) с учетом (2) и (3): $2\pi\nu_0 L = \frac{1}{2\pi\nu_0 C} \Rightarrow \nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}} = 71$ Гц.

Ответ: 32,5 Ом; 0,46π; 71 Гц.

3.2.7. В сеть переменного тока стандартной частоты с действующим напряжением U_g = 220 В последовательно включены три элемента: конденсатор неизвестной емкости C, резистор сопротивлением R = 100 Ом и катушка индуктивностью L = 50 мГн. Определите емкость C конденсатора и действующее значение $I_д$ силы тока в цепи, если напряжение на участке АД цепи, изображенной на рисунке, в два раза больше напряжения на участке ВК.



Решение:

Цепь переменного тока, изображенная на рисунке, содержит активное сопротивление R и два реактивных сопротивления: индуктивное $X_L = \omega L = 2\pi\nu L$ (1) и емкостное $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C}$ (2), где ω = 2πν – циклическая частота, ν = 50 Гц – стандартная частота переменного тока. Участок АД предсталяет собой сопротивление $Z_{АД} = \sqrt{R^2 + X_C^2}$ (3); участок ВК – сопротивление $Z_{ВК} = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ (4). Из закона Ома для цепи переменного тока напряжение на участке АД $U_{АД} = I_д Z_{АД} = I_д\sqrt{R^2 + X_C^2}$ (5), на участке ВК $U_{ВК} = I_д Z_{ВК} = I_д\sqrt{R^2 + X_L^2}$ (6), где $I_д$ – действующее значение тока в цепи. Согласно условию задачи $U_{АД} = 2U_{ВК}$. С учетом (5) и (6) можно записать

$$I_д\sqrt{R^2 + X_C^2} = 2I_д\sqrt{R^2 + X_L^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 + X_C^2 = 4R^2 + 4X_L^2 \Rightarrow X_C = \frac{1}{2\pi\nu C} = \sqrt{3R^2 + 4X_L^2}.$$

Из этого выражения определим емкость конденсатора:

$$C = \frac{1}{2\pi\nu\sqrt{3R^2 + 16\pi^2\nu^2L^2}} = 18 \text{ мкФ}.$$

Действующее значение силы тока в цепи $I_д = \dfrac{U_д}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - \dfrac{1}{2\pi\nu C}\right)^2}} \approx 1{,}16$ А.

Ответ: 18 мкФ; 1,16 А.

3.2.8. Резистор с активным сопротивлением R = 20 Ом и катушка индуктивностью L включены в цепь переменного тока с действующим значением напряжения U = 220 В и стандартной частотой ν = 50 Гц. Определите индуктивность катушки, если амплитудное значение силы тока в цепи I_m = 2,2 А.

Решение:

Полное сопротивление последовательно соединенных активного сопротивления в цепи переменного тока

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2L^2} = \sqrt{R^2 + (2\pi\nu L)^2}. \qquad (1)$$

С другой стороны, из закона Ома для цепи переменного тока, справедливого для действующих или амплитудных значений токов и напряжений,

$$Z = \frac{U_д}{I_д} = \frac{U_m}{I_m},$$

где $U_д$ и $I_д$ – действующие значения напряжения и силы тока в цепи, U_m и I_m – их максимальные значения, связанные соотношением $I_д = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}, U_д = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}}$.

В условии задачи даны $U_д$ и I_m, тогда

$$Z = \frac{U_д}{I_д}\sqrt{2}. \qquad (2)$$

Приравняем правые части выражений (1) и (2), получим

$$\sqrt{R^2 + (2\pi\nu L)^2} = \frac{U_д}{I_m}\sqrt{2} \Rightarrow R^2 + (2\pi\nu L)^2 = 2\left(\frac{U_д}{I_m}\right)^2.$$

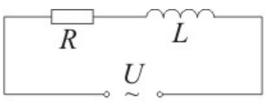
Тогда искомая индуктивность катушки $L = \dfrac{1}{2\pi\nu} = \sqrt{2\left(\dfrac{U_д}{I_m}\right)^2 - R^2} \approx 0{,}45$ Гн.

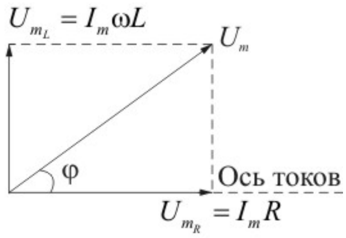
Ответ: 0,45 Гн.

3.2.9. В цепь переменного тока циклической частотой ω = 314 рад/с включены резистор сопротивлением R = 4 Ом и катушка индуктивностью L = 9,6 мГн. Определите полное сопротивление цепи Z для двух случаев соединения резистора и катушки: а) последовательного; б) параллельного.

Решение:

а) На рисунках приведены схема включения резистора и катушки и векторная диаграмма амплитудных значений падений напряжения на резисторе (U_{m_R}) и





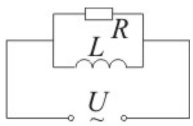
катушке (U_{m_L}). Исходной для построения векторной диаграммы выбирается ось токов. Амплитуда приложенного напряжения равна векторной сумме амплитуд падений напряжений U_{m_R} и U_{m_L}.

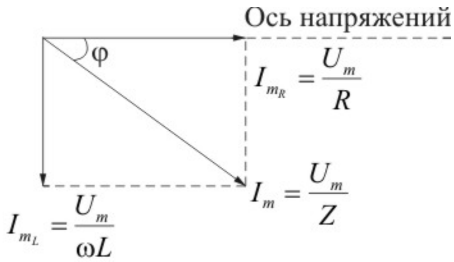
Из прямоугольного треугольника диаграммы $U_m^2 = U_{m_R}^2 + U_{m_L}^2$. Из закона Ома $U_m = I_m Z$, $U_{m_R} = I_m R$, $U_{m_L} = I_m\omega L$, где Z – полное сопротивление катушки. Тогда $Z^2 = R^2 + \omega^2 L^2$ и искомое полное сопротивление цепи при последовательном соединении резистора и катушки

$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ или $Z = 5$ Ом.

На векторной диаграмме видно, что ток отстает по фазе от внешнего напряжения на угол φ (φ > 0).

б) На рисунках приведены схема включения резистора и катушки и векторная диаграмма амплитудных значений токов. Исходной для построения диаграммы выбирается ось напряжений.





Из прямоугольного треугольника диаграммы

$$I_m = \sqrt{I_{m_R}^2 + I_{m_L}^2}. \qquad (1)$$

При параллельном соединении падение напряжения $U_m = U_{m_R} = U_{m_L}$. Из закона Ома амплитудные значения силы токов $I_m = \frac{U_m}{Z}$; $I_{m_R} = \frac{U_m}{R}$; $I_{m_L} = \frac{U_{m_L}}{\omega L}$. Тогда (1) запишем в виде

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}} \Rightarrow Z = \frac{R\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$ или $Z = 2{,}4$ Ом.

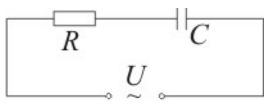
В данном случае ток опережает по фазе напряжение на угол φ (φ < 0).

Ответ: 5 Ом; 2,4 Ом.

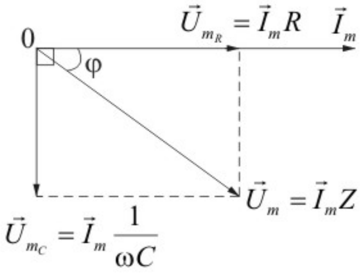
3.2.10. В сеть переменного тока циклической частотой 314 рад/с включены конденсатор емкостью $C = 60$ мкФ и резистор сопротивлением $R = 24$ Ом. Определите полное сопротивление цепи Z для двух случаев соединения конденсатора и резистора: а) последовательного; б) параллельного.

Решение:

а) Построим диаграмму амплитудных значений падений напряжения на резисторе (U_{m_R}) и конденсаторе (U_{m_C}). Сначала выберем ось тока и направим ее горизонтально. Напряжение на резисторе



совпадает по фазе с силой тока. Поэтому вектор $\vec{U}_{m_R}$ должен совпадать по направлению с вектором $\vec{I}_m$. Его модуль $U_{m_R} = I_m R$.



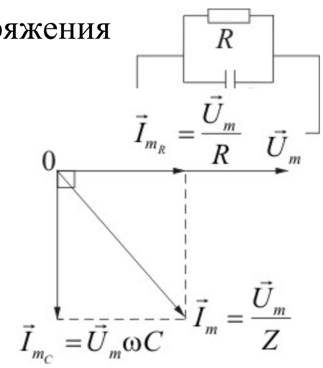
Вектор напряжения на конденсаторе $\vec{U}_{m_C}$ отстает по фазе от вектора $\vec{I}_m$ на π/2 и поэтому он повернут относительно вектора $\vec{I}_m$ и направлен вниз. Его модуль $U_{m_C} = I_m \dfrac{1}{\omega C}$. Вектор суммарного напряжения $\vec{U}_m$ определим сложением двух векторов: $\vec{U}_{m_R} + \vec{U}_{m_C} = \vec{U}_m$.

Модуль этой суммы определим по теореме Пифагора:

$U_m^2 = U_{m_R}^2 + U_{m_C}^2 = I_m^2 \left(R^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2} \right) \Rightarrow$ амплитудное (максимальное) значение напряжения $U_m = I_m \sqrt{R^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}$. Из закона Ома для цепи переменного тока $Z = \dfrac{U_m}{I_m}$, где $Z = \sqrt{R^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}$ – полное сопротивление цепи из последовательно соединенных резистора и конденсатора.

Значение Z = 58 Ом. В данном случае, как видно на векторной диаграмме, ток опережает по фазе внешнее сопротивление на φ.

б) При параллельном соединении R и C напряжения $U_m = U_{m_R} = U_{m_C}$, а амплитудные значения силы тока согласно закону Ома



$$I_m = \frac{U_m}{Z}, \qquad (1)$$

$$I_{m_R} = \frac{U_m}{R}, \qquad (2)$$

$$I_{m_C} = U_m \omega C. \qquad (3)$$

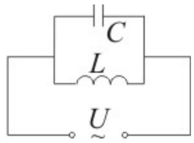
При построении векторной диаграммы исходной выбирается ось напряжений. На диаграмме видно, что

$$I_m = \sqrt{I_{m_R}^2 + I_{m_C}^2}. \qquad (4)$$

С учетом (1)–(3) запишем $\dfrac{U_m}{Z} = \sqrt{\dfrac{U_m^2}{R^2} + U_m^2 \omega^2 C^2} \Rightarrow \dfrac{1}{Z} = \sqrt{\dfrac{1}{R^2} + \omega^2 C^2}$.

Полное сопротивление цепи из параллельно соединенных резистора и конденсатора $Z = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 \omega^2 C^2 + 1}}$. Значение Z = 10 Ом.

Ответ: 58 Ом; 10 Ом.



3.2.11. В цепи переменного тока, изображенной на рисунке, сила тока в неразветвленной цепи равна нулю. Определите индуктивность катушки L, если емкость конденсатора C = 100 мкФ, частота переменного тока ν = 50 Гц.

Решение:

В случае отсутствия тока в неразветвленной цепи, когда конденсатор и катушка соединены параллельно, наблюдается резонанс токов. Амплитудное значение тока в цепи

$$I_m = \left| I_{m_L} - I_{m_C} \right| = 0, \tag{1}$$

I_{m_L} и I_{m_C} – амплитудные значения силы тока в катушке и в конденсаторе соответственно. Знак «–» в выражении (1) показывает, что токи в обеих ветвях противоположны по направлению.

Из (1) следует, что эти токи должны быть равными:

$$I_{m_L} = I_{m_C}. \tag{2}$$

Так как конденсатор и катушка соединены параллельно, то амплитудные значения напряжений на них равны между собой и равны амплитудному значению внешнего напряжения

$$U_{m_L} = U_{m_C} = U_m. \tag{3}$$

С учетом (3) выражение (2) запишем в виде

$$\frac{U_m}{X_C} = \frac{U_m}{X_L}, \tag{4}$$

где $X_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{2\pi\nu C}$ – емкостное реактивное сопротивление, $X_L = \omega L = 2\pi\nu L$ – индуктивное реактивное сопротивление. Как видно из (4), эти сопротивления равны $\dfrac{1}{2\pi\nu C} = 2\pi\nu L$. Тогда искомая индуктивность катушки $L = \dfrac{1}{4\pi^2\nu^2 C} = 0{,}1$ Гн.

Ответ: 0,1 Гн.

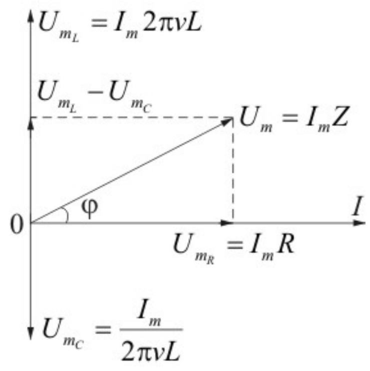
3.2.12. В сеть переменного тока с частотой ν = 50 Гц и действующим значением напряжения $U_д$ = 220 В включены последовательно катушка с активным сопротивлением R = 150 м, индуктивностью L = 100 мГн и конденсатор емкостью C = 120 мкФ. Определите амплитудное и действующее значения тока в цепи и среднюю мощность, выделяемую на активной нагрузке за период.

Решение:

Полное сопротивление данной цепи $Z = \sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - \dfrac{1}{2\pi\nu C}\right)^2} = 15{,}8$ Ом. Из закона Ома для цепи переменного тока, справедливого для действующих и максимальных (амплитудных) значений токов и напряжений соответственно, определим действующее значение силы тока в цепи $I_д = \dfrac{U_д}{Z} = \dfrac{U_д}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - \dfrac{1}{2\pi\nu C}\right)^2}} \approx 14$ А, и максимальное (или амплитудное) значение силы тока в цепи $I_m = \dfrac{U_m}{Z} = \dfrac{U_д\sqrt{2}}{Z} \approx 19,6$ А, или, учитывая соотношение между максимальными и действующими значениями, можно сразу определить $I_m = I_д\sqrt{2}$.

Для определения средней мощности переменного тока воспользуемся формулой $P = I_д U_д \cos\varphi$.

С учетом закона Ома для цепи переменного тока $P = \left(\dfrac{U_д}{Z}\right)^2 R\cos\varphi$.



Коэффициент мощности cosφ определим из векторной диаграммы токов и напряжений, построение которой описано в 3.1:

$$\cos\varphi = \frac{U_{m_R}}{U_m} = \frac{I_m R}{I_m Z} = \frac{R}{Z}.$$

Мощность переменного тока $P = \left(\dfrac{U_д}{Z}\right)^2 \dfrac{R}{Z} \approx 2761$ Вт.

Ответ: 19,6 А; 14 А; 2761 Вт.

3.2.13. В цепи переменного тока напряжение и ток изменяются по законам $U = 20\cos\left(50\pi t + \dfrac{\pi}{6}\right)$ (В) и $I = 60\cos(50\pi t)$ (А). Определите мощность, выделяемую в цепи.

Решение:

Мощность, выделяемая в цепи, определим по формуле

$$P = I_g U_g \cos\varphi. \quad (1)$$

Действующие значения силы тока и напряжения равны соответственно $I_д = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$ (2) и $U_д = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}}$ (3), где I_m и U_m – максимальные (амплитудные) значения силы тока и напряжения. Коэффициент мощности cosφ определим из законов изменения силы тока и напряжения: $I = 60\cos(50\pi t)$ А и $U = 20\cos\left(50\pi t + \dfrac{\pi}{6}\right)$ В. Как видно, угол сдвига фаз между колебаниями тока и напряжения

$$\varphi = \frac{\pi}{6}. \quad (4)$$

Таким образом мощность $P = \dfrac{I_m U_m}{2}\cos\dfrac{\pi}{6}$ или $P = 519$ Вт.

Ответ: 519 Вт.

3.2.14. В цепь переменного тока с амплитудным значением напряжения U_m = 120 В и частотой ν = 50 Гц последовательно включены резистор сопротивлением R = 100 м, катушка индуктивностью L = 50 мГн и конденсатор емкостью C = 3 мФ. Определите среднюю мощность, выделяемую в цепи.

Решение:

Средняя мощность, выделяемая в цепи переменного тока

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m U_m \cos\varphi, \qquad (1)$$

где I_m и U_m – амплитудные значения силы тока и напряжения, $\cos\varphi$ – коэффициент мощности, φ – сдвиг фаз между напряжением и силой тока.

Согласно закону Ома для цепи переменного тока амплитудное значение силы тока

$$I_m = \frac{U_m}{Z}, \qquad (2)$$

где $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ (3) – полное сопротивление цепи, $\omega = 2\pi\nu$ (4) – циклическая частота тока.

С учетом (2)–(4) выражение (1) примет вид:

$$\langle P \rangle = \frac{U_m^2}{2Z}\cos\varphi = \frac{U_m^2 \cos\varphi}{2\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \qquad (5)$$

Из векторной диаграммы напряжений (см. задачу 3.2.12)

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \qquad (6)$$

Подставим (6) в (5), получим искомую среднюю мощность, выделяемую в цепи, $\langle P \rangle = \dfrac{U_m^2 R}{2\left(R^2 + \left(2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu C}\right)^2\right)} = 229$ Вт.

Ответ: 229 Вт.

3.2.15. В цепь переменного тока последовательно включены резистор, конденсатор емкостью C = 100 нФ и катушка индуктивностью L = 1 мГн. Определите сопротивление резистора R, амплитудные значения напряжений на всех элементах цепи в условиях резонанса, если амплитудное значение напряжения в цепи U_m = 180 В, а амплитудное значение силы тока при резонансе $(I_m)_{рез}$ = 6 А.

Решение:

В последовательной цепи переменного тока может возникнуть резонанс напряжений. В условиях резонанса полное сопротивление цепи Z_0 минимально и равно активному сопротивлению резистора R, реактивные сопротивления катушки и конденсатора $X_L = X_C$. Тогда согласно закону Ома резонансное значение амплитуды тока $(I_m)_{рез} = \frac{U_m}{R} \Rightarrow R = \frac{U_m}{(I_m)_{рез}} = 30$ Ом.

Амплитудное значение напряжения на резисторе при резонансе равно амплитудному значению напряжения в цепи, т. е. $U_{m_R} = (I_m)_{рез} R = U_m = 180$ В. На реактивных нагрузках в силу равенства $X_L = X_C$ амплитудные значения напряжений равны: $(U_L)_{рез} = (U_C)_{рез}$. Из закона Ома

$$(U_L)_{рез} = \omega_{рез} L (I_m)_{рез}, \tag{1}$$

$$(U_C)_{рез} = \frac{(I_m)_{рез}}{\omega_{рез} C}, \tag{2}$$

где $\omega_{рез}$ – циклическая частота переменного тока, равная собственной частоте ω_0 колебаний тока в цепи: $\omega_{рез} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow X_L = \omega_{рез} L = \sqrt{\frac{L}{C}}$; $X_C = \frac{1}{\omega_{рез} C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Выражение (1) примет вид

$$(U_L)_{рез} = \sqrt{\frac{L}{C}} (I_m)_{рез}, \tag{3}$$

выражение (2) –

$$(U_C)_{рез} = \sqrt{\frac{L}{C}} (I_m)_{рез}. \tag{4}$$

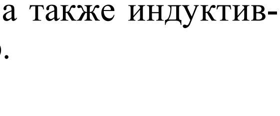
Выражения (3) и (4) показывают, что при последовательном соединении элементов R, L и C в условиях резонанса падения напряжений на катушке и конденсаторе равны $(U_L)_{рез} = (U_C)_{рез} = 600$ В.

Ответ: 30 Ом; 180 В; 600 В.

3.2.16. В сеть переменного тока стандартной частоты с действующим напряжением $U_д = 220$ В включают лампу мощностью $P = 60$ Вт, рассчитанную на напряжение $U_{д_Л} = 120$ В. Определите емкость конденсатора, включаемого последовательно с лампой, чтобы она горела полным накалом, а также индуктивность катушки, которой можно было бы заменить конденсатор.

Решение:

Схема включения лампы и конденсатора приведена на рисунке *а*. Переменный ток, протекающий в цепи, вызовет падение напряжений на всех ее элементах: лампе с активным сопротивлением $R_Л$ и конденсаторе емкостью C с реактивным сопротивлением $X_C = \frac{1}{2\pi\nu C}$.



а

Векторная диаграмма действующих значений падений напряжения приведена на рисунке *б*. Угол φ – разность фаз между током и напряжением в цепи.

На диаграмме видно, что

$$\mathrm{ctg}\varphi = \frac{U_{д_Л}}{U_{д_C}} = R_Л 2\pi\nu C, \tag{1}$$

$$\cos\varphi = \frac{U_{дл}}{U_{д}}, \tag{2}$$

где $U_{дл}$ и $U_{д}$ – действующие значения напряжений на лампе и во всей цепи даны в условии.

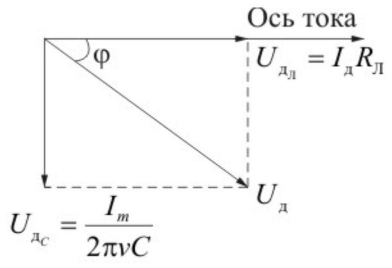
Сопротивление лампы $R_{Л}$ определим из формулы мощности:

$$P = \frac{U_{дл}^2}{R_{Л}} \Rightarrow R_{Л} = \frac{U_{дл}^2}{P}. \tag{3}$$

Выражение (1) перепишем в виде

$$\mathrm{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}} = \frac{U_{дл}}{U_{д}\sqrt{1-\dfrac{U_{дл}^2}{U_{д}^2}}};$$

$$\mathrm{ctg}\varphi = \frac{U_{дл}}{\sqrt{U_{д}^2 - U_{дл}^2}}. \tag{4}$$



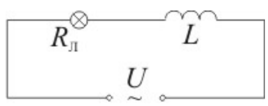
б

Тогда с учетом (1) и (3) выражение (4) можно записать следующим образом:

$$\frac{U_{дл}}{\sqrt{U_{д}^2 - U_{дл}^2}} = \frac{U_{дл}^2 2\pi\nu C}{P} \Rightarrow \text{ емкость конденсатора } C = \frac{P}{2\pi\nu U_{дл}\sqrt{U_{д}^2 - U_{дл}^2}};$$

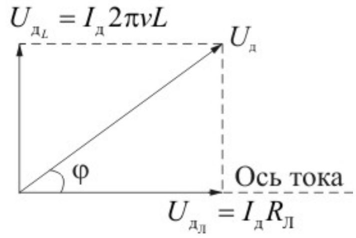
$C = 8{,}6\cdot10^{-6}$ Ф = 6,8 мкФ.

Заменим конденсатор в цепи катушкой индуктивностью L с реактивным сопротивлением $X_L = 2\pi\nu L$ (рис. *в*).



в

Векторная диаграмма действующих значений напряжений на элементах цепи (лампе и катушке) представлена на рисунке *г*.



г

Для того чтобы лампа горела полным накалом, угол φ сдвига фаз между током и действующим напряжением должен оставаться таким же, как и в случае подключения к лампе конденсатора.

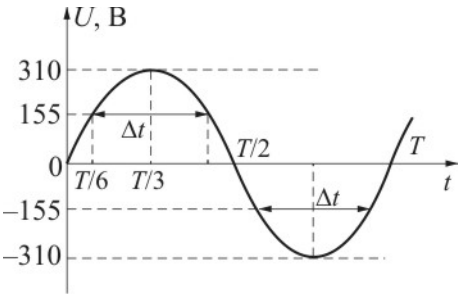
Это значит, что реактивные сопротивления $X_L = X_C$ или $\mathrm{ctg}\varphi = R2\pi\nu C = \dfrac{R}{2\pi\nu L}$. Из этого выражения определим индуктивность катушки $L = \dfrac{1}{(2\pi\nu)^2 C}$ или $L \approx 1{,}2$ Гн.

Ответ: 8,6 мкФ; 1,2 Гн.

3.2.17. В сеть переменного тока стандартной частоты с действующим значением напряжения $U_{д}$ = 220 В включена неоновая лампочка, которая зажигается и гаснет при напряжении $U_{з} = U_{Г}$ = 155 В. Определите время горения лампочки в каждый полупериод и частоту вспышек.

Решение:

При включении лампы в сеть переменного тока стандартной частоты $\nu = 50$ Гц (период $T = 0{,}02$ с) напряжение на ней изменяется по закону $U = U_m \sin\frac{2\pi}{T}t$ ($U_m = \sqrt{2}U_д$ – максимальное (амплитудное) значение напряжения, $\frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = \omega$ – циклическая частота изменения тока). Напряжение зажигания лампы $U_з = \sqrt{2}U_д \sin\frac{2\pi}{T}t_з$, где $t_з$ – момент времени, когда лампа зажигается. Подставим данные из условия задачи: $155 = 310\sin\frac{2\pi}{T}t_з \Rightarrow t_з = \frac{T}{6}$.

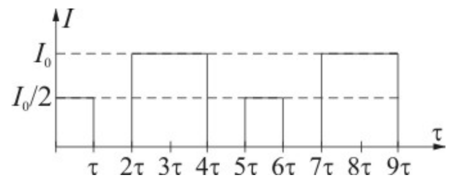


На графике зависимости напряжения на лампочке видно, что зажигается лампочка в момент времени $t_з = \frac{T}{6}$ и горит до тех пор, пока напряжение не станет равным напряжению ее гашения: $U_г = U_з = 155$ В, т. е. это будет в момент времени $t_г = \frac{T}{2} - \frac{T}{6} = \frac{T}{3}$. Время горения лампочки $\Delta t = t_г - t_з = \frac{T}{3} - \frac{T}{6} = \frac{T}{6}$ или $\Delta t \approx$ 3,3 мс.

В течение времени, равного периоду T, лампочка будет загораться дважды. Частота загорания лампочки $\nu_г = \frac{2}{T} = 100$ с$^{-1}$.

Ответ: ≈ 3,3 мс; 100 с$^{-1}$.

3.2.18. На рисунке представлена зависимость силы тока от времени. Определите действующее значение силы тока $I_д$.



Решение:

Как видно на рисунке, периодичность изменения силы тока, т. е. период, составляет $T = 5\tau$.

Действующим (или эффективным) значением переменного тока является сила такого постоянного тока, выделяющего в проводнике сопротивлением R такое же количество теплоты, что и данный переменный ток за то же время.

Согласно определению действующее (или эффективное) значение силы тока $I_д^2 RT = \left(\frac{I_0}{2}\right)^2 R\tau + I_0^2 R 2\tau = \frac{9}{4}I_0^2 R\tau \Rightarrow I_д = \sqrt{\frac{9I_0^2\tau}{4T}} = \frac{3I_0}{\sqrt{20}}$.

Ответ: $\frac{3I_0}{\sqrt{20}}$.

3.2.19. Коэффициент трансформации повышающего трансформатора k = 0,2. Напряжение на вторичной обмотке U_2 = 600 В. Вольтметр, подключенный к одному витку провода, намотанного на сердечник трансформатора, показывает напряжение U_0 = 0,6 В. Определите напряжение на первичной обмотке и число витков в каждой обмотке трансформатора.

Решение:

Коэффициент трансформации $k = \frac{U_1}{U_2}$. Следовательно, напряжение на первичной обмотке $U_1 = kU_2$ или U_1 = 120 В.

Так как в одном витке индуцируется ЭДС, равная U_0, то число витков в первичной обмотке $N_1 = \frac{U_1}{U_0} = 200$, во вторичной – $N_2 = \frac{U_2}{U_0} = 1000$.

Ответ: 120 В; N_1 = 200 витков; N_2 = 1000 витков.

3.2.20. При включении первичной обмотки в сеть переменного тока напряжением U_0 на вторичной обмотке возникает напряжение U_2 = 10 В. Если в эту же сеть включить вторичную обмотку, на первичной возникает напряжение U_1 = 250 В. Определите отношение $\frac{N_1}{N_2}$ числа витков первичной и вторичной обмоток трансформатора.

Решение:

При первом включении трансформатора отношение числа витков на первичной и вторичной обмотках

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{U_0}{U_2}. \tag{1}$$

Включив в сеть вторичную обмотку, аналогично получим

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{U_0}{U_1}. \tag{2}$$

Разделив почленно выражения (1) и (2), получим

$$\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = \frac{U_1}{U_2} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{U_1}{U_2}} = 5.$$

Ответ: 5.

3.2.21. Первичная обмотка понижающего трансформатора включена в сеть напряжением U_1 = 220 В. Напряжение на зажимах вторичной обмотки U_2 = 18 В, ее сопротвление r_2 = 2 Ом, ток во вторичной обмотке I_2 = 2 А. Определите коэффициент трансформации k и КПД трансформатора. Потерями энергии в первичной обмотке пренебречь.

Решение:

Коэффициент трансформации $k = \frac{U_1}{\varepsilon_2}$, где ε_2 – ЭДС, индуцируемая во вторичной обмотке трансформатора, $\varepsilon_2 = U_2 + I_2 r_2$.

Тогда $k = \dfrac{U_1}{U_2 + I_2 r_2}$, $k = 10$.

КПД трансформатора равен отношению полезной мощности, выделяемой на нагрузке, $P_{\text{пол}} = I_2 U_2$, к затраченной мощности, т. е. мощности, потребляемой первичной обмоткой $P_{\text{затр}} = I_1 U_1$:

$$\eta = \frac{P_{\text{пол}}}{P_{\text{затр}}} = \frac{I_2 U_2}{I_1 U_1}. \qquad (1)$$

Силу тока в первичной обмотке определим из условия, что потери в магнитопроводе отсутствуют и

$$I_1 U_1 = I_2 \varepsilon_2. \qquad (2)$$

Отсюда $I_1 = \dfrac{I_2 \varepsilon_2}{U_1}$. Из (1)–(2) КПД $\eta = \dfrac{U_2}{\varepsilon_2} = \dfrac{U_2}{U_2 + I_2 r_2}$; $\eta \approx 0{,}82$ или 82 %.

Ответ: 10; 82 %.

3.2.22. Первичная обмотка понижающего трансформатора включена в сеть с напряжением $U_1 = 220$ В. Коэффициент трансформации $k = 10$, сопротивление вторичной обмотки $r_2 = 2$ Ом, сила тока в ней $I_2 = 1{,}1$ А. Определите напряжение на зажимах вторичной обмотки, сопротивление нагрузки и КПД трансформатора.

Решение:

ЭДС индукции ε_2, возникающая во вторичной обмотке, определим из формулы для коэффициента трансформации: $k = \dfrac{U_1}{\varepsilon_2} \Rightarrow \varepsilon_2 = \dfrac{U_1}{k}$, $\varepsilon_2 = 22$ В. Из закона Ома сила тока во вторичной обмотке $I_2 = \dfrac{\varepsilon_2}{R_{\text{н}} + r_2} \Rightarrow$ сопротивление нагрузки $R_{\text{н}} = \dfrac{\varepsilon_2}{I_2} - r_2$, $R_{\text{н}} = 18$ Ом.

Напряжение на вторичной обмотке $U_2 = I_2 R_{\text{н}}$; $U_2 = 19{,}8$ В.

КПД трансформатора определим по формуле $\eta = \dfrac{U_2}{\varepsilon_2}$, $\eta = 0{,}9$ или 90 %.

Ответ: 19,8 В; 18 Ом; 90 %.

3.2.23. На расстояние $s = 10$ км от электростанции мощностью $P_0 = 100$ кВт с помощью медных проводов передается электроэнергия. Потери в проводах не превышают $k = 10$ %. Напряжение на электростанции $U_0 = 440$ В. Определите массу меди, требуемой для изготовления проводов.

Решение:

Масса меди, требуемой для проводов,

$$m = \rho_{\text{пл}} l S_{\text{пр}}, \qquad (1)$$

где $\rho_{пл}$ = 8900 кг/м^3 – плотность меди, $l = 2s$ – длина линии, $S_{пр}$ – площадь сечения провода.

Сопротивление проводов

$$R = \rho_{уд}\frac{l}{S_{пр}}, \qquad (2)$$

где $\rho_{уд} = 1{,}7\cdot10^{-8}$ Ом·м – удельное сопротивление меди.

Потери мощности на проводах

$$P_{пр} = kP_0, \qquad (3)$$

напряжения

$$U_{пр} = kU_0. \qquad (4)$$

Так как $P_{пр} = \frac{U_{пр}^2}{R}$, то с учетом (3) и (4) сопротивление

$$R = \frac{U_{пр}^2}{P_{пр}} = \frac{kU_0^2}{P_0}. \qquad (5)$$

Перемножим почленно (1) и (2), получим

$$mR = \rho_{пл}\rho_{уд}4s^2. \qquad (6)$$

С учетом (5) $m\frac{kU_0^2}{P_0} = \rho_{пл}\rho_{уд}4s^2 \Rightarrow$ масса медного провода $m = \frac{4\rho_{пл}\rho_{уд}s^2P_0}{kU_0^2}$; $m \approx 3{,}13\cdot10^5$ кг = 313 т.

Ответ: 313 т.

3.3. Задачи для самостоятельного решения

Переменный ток

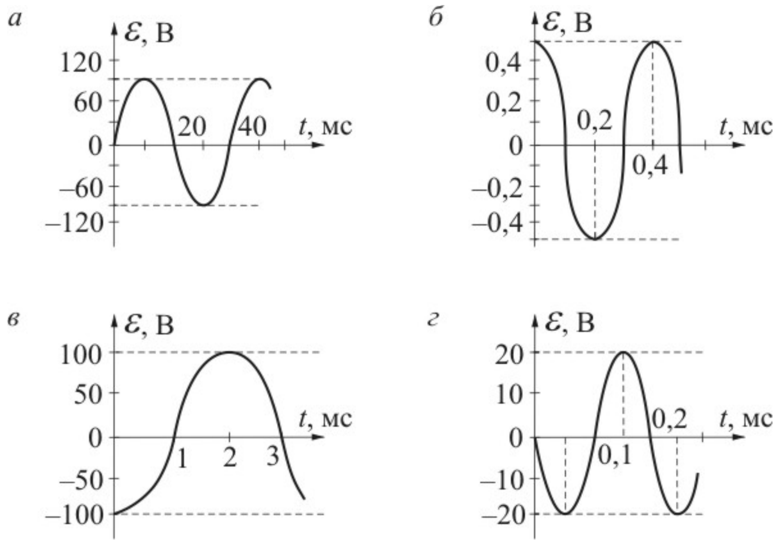
1. Циклическая частота переменного тока $\omega = 314$ рад/с. Определите период T и частоту ν переменного тока. (0,02 с; 50 Гц)

2. ЭДС индукции, возникающая в рамке, вращающейся в магнитном пле, изменяется по закону $\mathcal{E} = 141\sin(200\pi t + 0{,}628)$ (В). Определите максимальное значение ЭДС, частоту, период, начальную фазу и фазу колебаний через промежуток времени $\Delta t = 1$ мс, а также мгновенное значение ЭДС в этот момент времени. (141 В; 100 Гц; 0,01 с; 0,2π; 0,4π)

3. Электродвижущая сила в цепи переменного тока изменяется по закону $\mathcal{E} = 70{,}5\sin(314t)$ (В). Определите действующее значение ЭДС и период ее изменения. Запишите зависимость ЭДС от времени, если частоту вращения рамки в магнитном поле увеличить в два раза. (≈100 В; 0,02 с; $\mathcal{E} = 141\sin(628t)$ В)

4. Частота синусоидального переменного тока, амплитудное значение которого $I_{max} = 50{,}0$ мА, $\nu = 2$ МГц. Определите промежуток времени после прохождения через нулевое значение, через который ток станет $I = 12{,}5$ мА. (0,02 мкс)

5. Из графиков, изображенных на рисунках *а–г*, определите период T, частоту ν и амплитуду переменной ЭДС. Запишите уравнения гармонических колебаний ЭДС по закону синуса или косинуса, учитывая начальную фазу колебаний.



(*а* – 40 мс; 25 Гц; 90 В; $\mathcal{E} = 90\sin 50\pi t = 90\cos(50\pi t - 0{,}5\pi)$ В;
б – 0,4 мс; 2500 Гц; 0,5 В; $\mathcal{E} = 0{,}5\cos 5\cdot 10^3\pi t = 0{,}5\sin(5\cdot 10^3\pi t + 0{,}5\pi)$ В;
в – 4 мс; 250 Гц; 100 В; $\mathcal{E} = -100\cos(500\pi t)$ В $= 100\sin(500\pi t - 0{,}5\pi)$ В $= 100\cos(500\pi t + \pi)$ В;
г – –0,2 мс; $5\cdot 10^3$ Гц; 20 В; $\mathcal{E} = -20\sin(10^4\pi t)$ В $= 20\sin(10^4\pi t + \pi)$ В $= 20\cos(10^4\pi t + 0{,}5\pi)$ В)

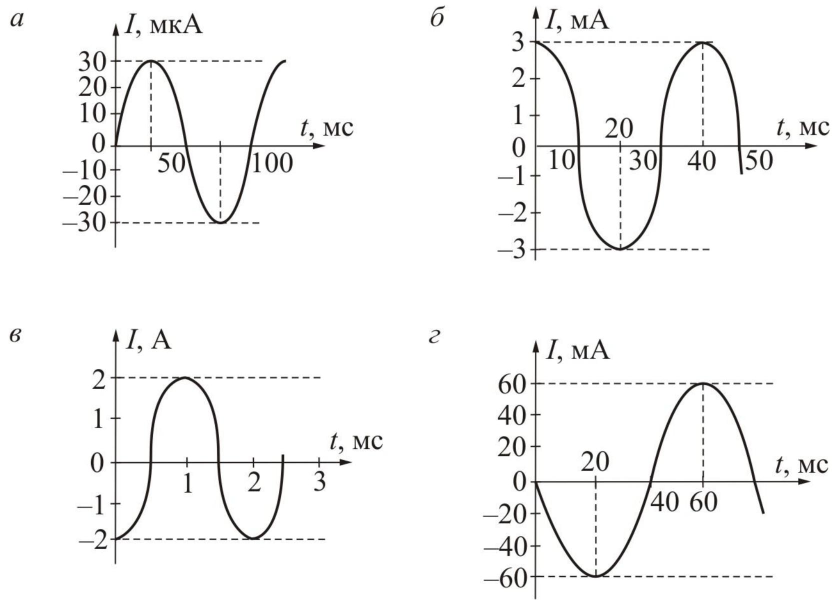
6. Проволочная рамка площадью $S = 300$ см^2, имеющая $N = 100$ витков, вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10$ мТл вокруг оси, перпендикулярной направлению поля. Период вращения рамки $T = 0{,}2$ с. Определите вид зависимости магнитного потока, проходящего через рамку, и ЭДС индукции от времени. ($\Phi = 30\cos(10\pi t)$ мВб; $\mathcal{E}_i = -0{,}94\sin(10\pi t)$ В $= 0{,}94\sin(10\pi t \pm \pi)$ В)

7. Проволочная рамка площадью $S = 400$ см^2, имеющая $N = 200$ витков, вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10$ мТл. Определите период вращения рамки, если действующее значение ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = 10$ В. (3,6 мс)

8. Рамка площадью $S = 300$ см^2 с чилом витков $N = 300$ вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 16$ мТл. Максимальная ЭДС индукции, возникающая в рамке, $\mathcal{E}_{i\max} = 7{,}2$ В. Определите значение ЭДС индукции через промежуток времени $\Delta t = 0{,}01$ с после начала вращения рамки из положения, когда ее плоскость параллельна линиям индукции магнитного поля. (3,45 В)

9. Максимальное значение ЭДС переменного синусоидального тока с частотой $\nu = 50$ Гц $\mathcal{E}_m = 70{,}5$ В. Определите мгновенные значения ЭДС через промежутки времени $t_1 = 2{,}5$ мс и $t_2 = 5$ мс от начала периода. (49,9 В; 70,5 В)

10. Из графиков, изображенных на рисунках *а–г*, определите период, частоту и максимальное значение силы переменного тока. Запишите уравнения гармонических колебаний силы тока по закону синуса или косинуса с учетом значения начальной фазы.



(*а* – 100 мс; 10 Гц; 30 мкА; $I = 30\cdot10^{-6}\sin(20\pi t)$ А $= 30\cdot10^{-6}\cos(20\pi t - 0{,}5\pi)$ А;
б – 40 мс; 25 мГц; 3 мА; $I = 3\cdot10^{-3}\cos(0{,}157t)$ А $= 3\cdot10^{-3}\sin(0{,}157t + 0{,}5\pi)$ А;
в – 2 с; 0,5 Гц; 2 А; $I = -2\cos(\pi t)$ А $= 2\cos(\pi t \pm \pi)$ А $= 2\sin(\pi t - 0{,}5\pi)$ А;
г – 80 с; 12,5 мГц; 60 мА; $I = -60\cdot10^{-3}\sin(78{,}5\cdot10^{-3}t)$ А $= 60\sin(78{,}5\cdot10^{-3}t + \pi)$ А $=$
$= 60\cdot10^{-3}\cos(78{,}5\cdot10^{-3}t + 0{,}5\pi)$ А)

11. Мгновенное значение ЭДС индукции для фазы $\varphi = \frac{\pi}{3}$ $\mathcal{E}_i$ = 173 В. Определите максимальное значение ЭДС, а также мгновенное значение ЭДС через промежуток времени Δt = 0,25 с, считая от начала периода, если частота синусоидального тока ν = 50 Гц. (200 В; 0)

12. Проволочная рамка вращается равномерно в магнитном поле, совершая 30 оборотов в минуту, создавая ЭДС индукции, действующее значение которой $\mathcal{E}_q$ = 5 В. Напишите уравнение зависимости значения ЭДС от времени и постройте график этой зависимости. Как изменится вид графика, если частота вращения рамки увеличится в 3 раза? (7,07sin(31,4t) В)

13. ЭДС индукции изменяется по закону $\mathcal{E} = 60\sin\left(3\pi t - \frac{\pi}{5}\right)$ (В). Определите максимальное и действующее значения ЭДС, частоту, начальную фазу, а также мгновенное значение ЭДС и фазу в момент времени t = 0,1 с. (60 В; 42,4 В; 1,5 Гц; $-\frac{\pi}{5}$; 18,5 В; $\frac{\pi}{10}$)

14. Сила переменного тока изменяется по закону $I = 0{,}14\sin 100\pi t$ (А). Определите максимальное и действующее значения силы тока, частоту, период, начальную фазу, а также мгновенное значение силы тока и фазу в момент времени t = 2,5 мс. (140 мА; 99 мА; 50 Гц; 0,02 с; 0; 99 мА; $\frac{\pi}{4}$)

15. Сила переменного тока изменяется по закону $I = 0{,}28\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ (мА). Определите максимальное и действующее значения силы тока, частоту, период, начальную фазу, а также мгновенное значение силы тока и фазу в момент времени t = 2,5 мс. (280 мкА; ≈198 В; 50 Гц; 0,02 с; $-\frac{\pi}{2}$; 0; $\frac{\pi}{2}$)

16. Напряжение на концах участка цепи, по которому течет переменный ток, изменяется по закону $U = U_m\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$. В момент времени $t = \frac{\pi}{4}$ мгновенное значение напряжения по модулю равно 7 В. Определите максимальное и действующее значения напряжения, а также фазу и мгновенное напряжение в момент времени $t = \frac{3T}{4}$. (14 В; ≈10 В; $\frac{5\pi}{3}$; 7 В)

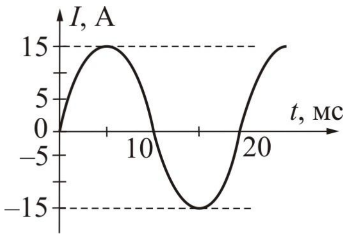
17. Мгновенное значение переменного синусоидального тока для фазы $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ I = 9 А. Определите амплитудное и действующее значения силы тока. (18 А; 12,7 А)

18. Напряжения зажигания и гашения неоновой лампы, включенной в сеть переменного тока с действующим значением напряжения $U_д$ = 127 В, одинаково: $U_з$ = 150 В. Определите промежуток времени Δt, в течение которого длится вспышка лампы, и частоту вспышек, если частота тока ν = 50 Гц. (13,6 мс; $100\frac{1}{\text{с}}$)

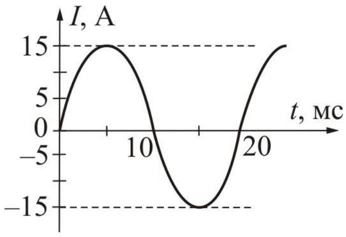
19. В сеть переменного тока с частотой ν = 50 Гц и действующим напряжением $U_д$ = 70,7 В включена неоновая лампа. Определите напряжение зажигания лампы и время ее свечения на протяжении 30 с, если длительность одной вспышки Δt = 6 мс и напряжения зажигания и гашения лампы равны. (58,8 В; 18 с)

20. Неоновая лампа включается в сеть, действующее напряжение в которой равно напряжениям зажигания и гашения лампы. Определите, какую часть периода будет длиться одна вспышка лампы. $\left(\frac{T}{4}\right)$

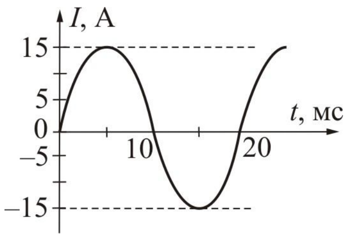
Цепи переменного тока с активным, емкостным и индуктивным сопротивлениями



21. На рисунке изображен график зависимости силы тока от времени при включении в цепь активного сопротивления R = 60 м. Напишите уравнения зависимостей напряжения на этом сопротивлении и силы тока на нем от времени. (U = 90sin(314t) В; I = 15sin(314t) А)



22. На рисунке изображен график зависимости силы тока от времени при включении в цепь конденсатора емкостью C = 6 мкФ. Напишите уравнения зависимостей напряжения на этом конденсаторе и силы тока в нем от времени. (U = 7,96 кВ; I = 15sin(314t) А)



23. На рисунке изображен график зависимости силы тока от времени при включении в цепь катушки индуктивностью L = 6 мГн. Напишите уравнения зависимостей напряжения на этой катушке и силы тока в ней от времени. (U = 28,3 В; I = 15sin(314t) А)

24. Определите емкость конденсатора, сопротивление которого в цепи переменного тока стандартной частоты X_c = 1600 Ом. (2 мкФ)

25. Сопротивление конденсатора емкостью C = 2 мкФ в цепи переменного тока X_c = 3200 Ом. Определите период переменного тока. (0,4 мс)

26. Максимальные значения напряжения и силы тока в цепи равны соответственно U_{max} = 310 В, I_{max} = 1,4 А, циклическая частота переменного тока ω = 314 рад/с. Определите емкость конденсатора. (14,4 мкФ)

27. Конденсатор емкостью C = 2 мкФ включен в сеть переменного тока, изменяющегося по закону $I = 200\sin(300\pi t)$ мА. Определите максимальное значение напряжения и закон изменения напряжения на этом конденсаторе. (106 В; $U = 106\cos(300\pi t)$ В)

28. Напряжение на конденсаторе изменяется по закону $U = 310\sin(100\pi t)$ В. Емкость конденсатора C = 10 мкФ. Запишите законы изменения силы тока в этой цепи и заряда конденсатора. ($I = 973\cos(100\pi t)$ мА; $q = 3{,}1\sin(100\pi t)$ мКл)

29. В сеть переменного тока стандартной частоты с действующим значением напряжения $U_д$ = 220 В последовательно включены резистор сопротивлением R = 150 Ом и конденсатор емкостью C = 5 мкФ. Напишите законы изменения напряжения и силы тока в этой цепи. Определите амплитудные и действующие значения силы тока, сдвиг фаз между током и напряжением, а также выделяющуюся мощность. ($U = 310\sin(314t - 0{,}43\pi)$; $I = 0{,}47\sin 314t$; $I_д$ =0,34 А; I_m =0,47 А; 17,3 Вт)

30. В цепь переменного тока стандартной частоты последовательно включены конденсатор и активное сопротивление. Напряжение и сила тока в цепи изменяются по закону $U = 160\sin(100\pi t)$ В и $I = 0{,}4\sin\left(100\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ А. Определите разность фаз между напряжением и током; полное сопротивление цепи; активное сопротивление; емкостное сопротивление; емкость конденсатора; выделяющуюся мощность. ($\dfrac{\pi}{3}$; 400 Ом; 200 Ом; 3460 м; 9,2 мкФ; 1,6 Вт)

31. Индуктивное сопротивление катушки в цепи переменного тока стандартной частоты X_L = 6,28 Ом. Определите индуктивность катушки. (20 мГн)

32. Определите частоту переменного тока, если катушка индуктивностью L = 300 мГн обладает сопротивлением X_L = 94,2 Ом. (50 Гц)

33. Амплитудные значения напряжения и силы переменного тока стандартной частоты в цепи катушки соответственно U_m = 120 В и I_m = 5 А. Определите индуктивность L катушки. (76 мГн)

34. Напряжение и сила тока в катушке индуктивности изменяются по закону $U = 45\sin\left(314\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$ В и $I = 5\sin(314t)$ А. Определите разность фаз между током и напряжением; полное сопротивление катушки; активное сопротив-

ление катушки; индуктивное сопротивление катушки; индуктивность катушки. ($\frac{\pi}{2}$; 90 м; 0; 90 м; 28,7 мГн)

35. В цепь постоянного тока включена катушка. При подаче на катушку постоянного напряжения U_1 = 15 В амперметр в цепи показывает силу тока I_1 = 3 А. При включении этой катушки в цепь переменного тока частотой ν = 50 Гц и напряжением U_2 =15 В амперметр показал силу тока I_2 = 1,5 А. Определите индуктивность катушки и мощность переменного тока в цепи. (27,6 мГн; 11,25 Вт)

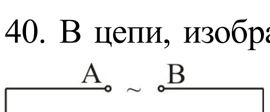
36. Определите частоту переменного тока, при которой сопротивление конденсатора емкостью C = 3 мкФ равно сопротивению катушки индуктивностью L = 300 мГн. (167,8 Гц)

37. Конденсатор емкостью C = 100 мкФ, катушка индуктивностью L = 50 мГн и активное сопротивление R = 50 м включены последовательно в сеть переменного тока с циклической частотой $\omega = 100\pi$ рад/с. Определите реактивное и полное сопротивление цепи. (≈16 Ом; 16,9 Ом)

38. В сеть переменного тока стандартной частоты включены последовательно активное сопротивление R = 0,5 кОм, катушка индуктивностью L = 50 мГн и конденсатор емкостью C = 100 мкФ. Действующее значение напряжения в сети $U_д$ = 220 В. Напишите уравнения колебаний напряжения и силы переменного тока в цепи и определите мощность, выделяющуюся в ней. ($U = 310\sin(314t + 0{,}089)$ В; $I = 0{,}62\sin(314t)$ А; 96 Вт)

39. В сеть переменного тока с напряжением U = 220 В включены последовательно катушка с активным сопротивлением R = 100 м, индуктивностью L = 80 мГн и конденсатор емкостью C = 320 мкФ. Определите действующее значение силы тока в цепи, если его циклическая частота $\omega = 100\pi$ рад/с, и циклическую частоту ω_0, при которой наступит резонанс. (≈12 А; ≈198 рад/с)

40. В цепи, изображенной на рисунке, протекает синусоидальный ток. На участке АД действующее напряжение $U_{АД}$ = 20 В, на участке ДК – $U_{ДК}$ = 10 В, а на участке КВ – $U_{КВ}$ = 25 В. Определите действующее значение напряжения $U_{АВ}$ и сдвиг фаз между током и напряжением в цепи. ($U_{АВ}$ = 25 В; $\Delta\varphi \approx 0{,}65$ рад)



Трансформатор. Передача электроэнергии на расстояние

41. Понижающий трансформатор с коэффициентом трансформации k = 20 включен в сеть напряжением U_1 = 220 В. Определите напряжение на клеммах вторичной обмотки, если ее сопротивление r_2 = 2,5 Ом, сила тока в ее цепи I_2 = 2 А. Потерями энергии в первичной обмотке пренебречь. (U_2 = 6 В)

42. Повышающий трансформатор с коэффициентом трансформации $k = 0{,}125$ включен в сеть напряжением $U_1 = 220$ В. Определите напряжение на клеммах вторичной обмотки, если ее сопротивление $r_2 = 2{,}5$ Ом, а сила тока в ее цепи $I_2 = 2$ А. Потерями энергии в первичной обмотке пренебречь. ($U_2 = 1755$ В)

43. Повышающий трансформатор включен в сеть напряжением $U_1 = 220$ В. Определите коэффициент трансформации и число витков во вторичной обмотке, если число витков в первичной обмотке $N_1 = 110$, а напряжение на зажимах вторичной обмотки при холостом режиме работы трансформатора $U_2 = 4400$ В. (0,05; 2200)

44. Первичная обработка трансформатора, включенного в сеть переменного тока с напряжением $U_1 = 220$ В, имеет $N_1 = 1760$ витков. Определите число витков во вторичной обмотке, если она должна питать цепь с напряжением $U_2 = 9{,}6$ В при токе $I_2 = 1{,}0$ А. Сопротивление вторичной обмотки $r_2 = 0{,}4$ Ом, сопротивлением первичной обмотки пренебречь. (80)

45. Трансформатор с числом витков $N_1 = 1520$ включен в сеть с напряжением $U_1 = 380$ В. Во вторичную цепь включена активная нагрузка, сопротивление которой $R = 3{,}2$ Ом. Потребляемая нагрузкой мощность $P = 320$ Вт. Определите ЭДС индукции, возникающую во вторичной обмотке, сопротивление которой $r_2 = 0{,}2$ Ом, число витков N_2 в ней и КПД трансформатора. (34 В; 136; 94 %)

46. Трансформатор с коэффициентом трансформации $k = 20$ включен в сеть переменного тока. Напряжение на первичной обмотке $U_1 = 360$ В. Определите напряжение на вторичной обмотке и число витков в каждой обмотке, если напряжение на одном витке обмотки 0,4 В. (18 В; 900; 45)

47. Первичная обмотка трансформатора включена в цепь с напряжением $U_1 = 220$ В. Напряжение на зажимах вторичной обмотки $U_2 = 44$ В, сила тока в ней $I_2 = 50$ А. Определите силу тока в первичной обмотке трансформатора, входную и выходную мощности, если КПД трансформатора 92 %. (11 А; ≈2,4 кВт; 2,2 кВт)

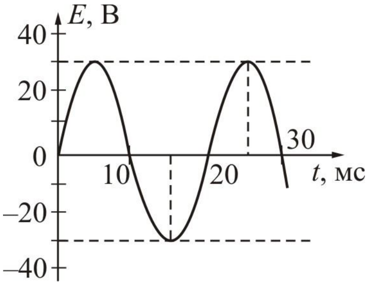
48. Магнитный поток, проходящий через поперечное сечение сердечника трансформатора, изменяется по закону $\Phi = 4{,}0\cos(314t)$ мВб. Число витков в первичной обмотке $N_1 = 75$, во вторичной – $N_2 = 7500$. Определите, по каким законам изменяется ЭДС в первичной и вторичной обмотках трансформатора. ($\mathcal{E}_1 = 94{,}2\sin(314t)$ В; $\mathcal{E}_2 = 9420\sin(314t)$ В)

49. Электрическую энергию передают на расстояние $s = 10$ км от электростанции, вырабатываемая мощность которой $P_0 = 100$ кВт, напряжение $U_0 = 400$ В. Определите массу меди, требующейся для изготовления проводов, чтобы потери энергии в них не превышали $k = 10$ %. (378 т)

50. На первичную обмотку трансформатора подается напряжение U_1 = 4,6 кВ. Вторичная обмотка соединена проводами с нагрузкой, напряжение на которой U_2 = 220 В, потребляемая нагрузкой мощность P = 33 кВт. Коэффициент трансформации k = 20. Определите силу тока в первичной обмотке и сопротивление проводящих проводов. Сопротивлением обмоток пренебречь. (7,5 А; 0,07 Ом)

3.4. Тестовые задания

Переменный ток



1. Если график изменения переменной ЭДС имеет вид, изображенный на рисунке, то:
а) период колебаний ЭДС равен:
1) 10 мс; $\boxed{2)}$ 20 мс; 3) 30 мс; 4) 40 мс;
б) частота колебаний ЭДС равна:
1) 25 Гц; $\boxed{2)}$ 50 Гц; 3) 100 Гц; 4) 125 Гц;
в) уравнение колебаний ЭДС имеет вид:
1) $0{,}25\sin 100\pi t$; 2) $0{,}3\sin 50\pi t$; $\boxed{3)}$ $0{,}3\sin 100\pi t$; 4) $0{,}6\sin 50\pi t$.

2. Прямоугольная рамка вращается в однородном магнитном поле с частотой $\nu = 10$ об/с, если амплитуда индуцируемой в рамке ЭДС $\mathcal{E}_{max} = 314$ В, то максимальный магнитный поток через рамку равен:
1) 2 Вб; 2) 4 Вб; $\boxed{3)}$ 5 Вб; 4) 6 Вб.

3. Рамка площадью $S = 300$ см^2 с числом витков $N = 200$ вращается в магнитном поле с индукцией $B = 15$ мТл. Если максимальное значение возникающей ЭДС индукции $\mathcal{E}_{max} = 14{,}4$ В, то период вращения рамки равен:
1) 13 мс; 2) 29 мс; $\boxed{3)}$ 39 мс; 4) 47 мс.

4. Если ЭДС переменного тока изменяется по закону $\mathcal{E} = 308\sin(100\pi t)$ В, то:
а) действующее значение напряжения равно:
1) 127 В; $\boxed{2)}$ 220 В; 3) 308 В; 4) 430 В;
б) частота и период изменения силы тока в цепи равны:
$\boxed{1)}$ 50 Гц, 0,02 с; 2) 100 Гц, 0,02 с; 3) 100π Гц, $\dfrac{0{,}02}{\pi}$ с; 4) 50π Гц, $\dfrac{0{,}02}{\pi}$ с;
в) значение ЭДС для фазы $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$:
1) 308 В; 2) 220 В; $\boxed{3)}$ 154 В; 4) 0;
г) значение ЭДС в момент времени $t = 2{,}5$ мс:
$\boxed{1)}$ 0; 2) 154 В; 3) 220 В; 4) 308 В.

5. Если мгновенное значение переменного напряжения для фазы $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ $U = 120$ В, то амплитудное значение напряжения равно:
1) 97 В; 2) 120 В; $\boxed{3)}$ 139 В; 4) 240 В.

6. Частота переменного тока $\nu = 50$ Гц. Если мгновенное значение переменного напряжения для фазы $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ $U = 120$ В, то мгновенное значение напряжения через промежуток времени $t = 5$ мс, считая от начала периода, равно:
1) 60В; 2) 90 В; 3) 120 В; $\boxed{4)}$ 240 В.

7. Если сила переменного тока изменяется согласно закону $I = 0{,}14\sin(50\pi t)$ А, то амплитуда и период колебаний равны:
1) 0,1 А, 50 Гц; 2) 0,14 А, 50π Гц; $\boxed{3)}$ 0,14 А, 25 Гц; 4) 0,1 А, 25 Гц.

8. Если изменение силы тока в цепи происходит согласно уравнению $I = 70\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ мА, то действующее значение силы тока и период равны:
$\boxed{1)}$ 70 мА, 1 с; 2) 50 мА, 1 с; 3) 70 мА, 2 с; 4) 50 мА, 2 с.

9. Если мгновенное значение силы тока для фазы $\varphi = \frac{\pi}{6}$ равно 7 А, то амплитудное и действующее значения силы тока равны:
1) 7 А, 5 А; 2) 14 А, 7 А; $\boxed{3)}$ 14 А, 10 А; 4) 10 А, 7 А.

10. Действующее значение напряжения в сети переменного тока $U_д$ = 220 В. Если неоновая лампа, включенная в эту сеть, зажигается и гаснет при напряжении $U_з$ = 249 В, то за одно колебание лампа горит в течение времени τ, равного:
1) $\frac{T}{4}$; 2) $\frac{T}{2}$; 3) $\frac{3}{4}T$; 4) $\frac{3}{2}T$.

Цепи переменного тока с активным, емкостным и индуктивным сопротивлениями

11. Конденсатор емкостью C = 250 мкФ включается в сеть переменного тока. Сопротивление конденсатора при изменении частоты тока от ν_1 = 50 Гц до ν_2 = 200 Гц:
1) увеличивается в 4 раза; $\boxed{2)}$ уменьшается в 4 раза;
3) не изменяется; 4) увеличивается в 16 раз.

12. Конденсатор емкостью C = 318 мкФ включен в сеть переменного тока. Если частота тока ν = 50 Гц, то емкостное сопротивление X_C конденсатора равно:
1) 1 Ом; $\boxed{2)}$ 10 Ом; 3) 20 Ом; 4) 30 Ом.

13. Если сопротивление конденсатора в цепи переменного тока частотой ν = 50 Гц X_C = 800 Ом, то его емкость C равна:
$\boxed{1)}$ 4 мкФ; 2) 25 мкФ; 3) 63 мФ; 4) 16 Ф.

14. Конденсатор в сети переменного тока стандартной частоты имеет сопротивление X_C = 100 Ом. Если этот конденсатор включен в сеть переменного тока частотой ν = 5 кГц, то его сопротивление равно:
$\boxed{1)}$ 1,0 Ом; 2) 10,0 Ом; 3) 1,0 кОм; 4) 10,0 кОм.

15. Если конденсатор емкостью C = 1 мкФ имеет в сети переменного тока сопротивление X_C = 16 Ом, то период колебаний тока равен:
1) 1 мкс; 2) 10 мкс; $\boxed{3)}$ 100 мкс; 4) 1 мс.

16. Если амплитудные значения напряжения и силы тока соответственно U_m = 200 В и I_m = 0,5 А, а циклическая частота переменного тока ω = 500 рад/с, то емкость конденсатора равна:
1) 2,5 мкФ; 2) 4,0 мкФ; $\boxed{3)}$ 5,0 мкФ; 4) 7,5 мкФ.

17. Ток в цепи изменяется по закону $I = 0,4\sin(100\pi t)$ А. Если емкость конденсатора, включенного в эту цепь, C = 4 мкФ, то максимальное напряжение на конденсаторе равно:
1) 127 В; 2) 220 В; 3) 308 В; $\boxed{4)}$ 318 В.

18. В сеть переменного тока частотой ν = 50 Гц включены последовательно соединенные резистор сопротивлением R = 100 Ом и конденсатор емкостью C = 40 мкФ. Если действующее напряжение в сети $U_д$ = 127 В, то при этом амплитудное значение силы тока равно:
$\boxed{1)}$ 1,0 А; $\boxed{2)}$ 1,4 А; 3) 1,7 А; 4) 1,9 А.

19. Напряжение и сила тока в цепи последовательно соединенных активного сопротивления и конденсатора изменяются по законом $U = 250\sin(314t)$ В, $I = 0,5\sin\left(314t + \frac{\pi}{3}\right)$ А. Полное сопротивление цепи равно:
1) 1250 Ом; $\boxed{2)}$ 500 Ом; 3) 250 Ом; 4) 125 Ом.

20. Чтобы лампа мощностью W = 60 Вт, рассчитанная на напряжение $U_л$ = 120 В, горела в нормальном режиме в сети переменного тока с напряжением U = 220 В, к ней необходимо подключить последовательно конденсатор, емкостное сопротивление X_C которого равно:
1) 127 Ом; 2) 248 Ом; 3) 324 Ом; $\boxed{4)}$ 369 Ом.

21. Если индуктивное сопротивление катушки в цепи переменного тока стандартной частоты X_L = 22 Ом, то индуктивность катушки равна:
1) 35 мГн; $\boxed{2)}$ 70 мГн; 3) 105 мГн; 4) 140 мГн.

22. Если катушка индуктивностью L = 250 мГн представляет для переменного тока сопротивление X_L = 31,4 Ом, то период изменений переменного тока равен:
1) 5 мс; 2) 25 мс; $\boxed{3)}$ 50 мс; 4) 250 мс.

23. Катушка индуктивностью L = 32 мГн включена в сеть переменного тока частотой ν = 50 Гц. Индуктивное сопротивление катушки равно:
1) 1 Ом; $\boxed{2)}$ 10 Ом; 3) 100 Ом; 4) 1 кОм.

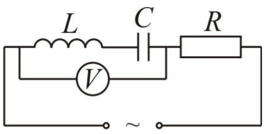
24. Катушка индуктивностью L = 100 мГн и активным сопротивлением R = 25 Ом включена в сеть переменного тока частотой ν = 50 Гц. Если действующее значение напряжения на катушке $U_д$ = 120 В, то действующее значение силы тока в ней равно:
1) 1 А; 2) 2 А; $\boxed{3)}$ 3 А; 4) 4 А.

25. В сеть переменного тока с действующим значением напряжения $U_д$ = 120 В последовательно включены резистор с активным сопротивлением R = 10 Ом и катушка индуктивностью L = 40 мГн. Если амплитудное значение силы тока в цепи I_m = 5 А, то частота тока равна:
1) 16,8 Гц; 2) 36,8 Гц; 3) 42,6 Гц; $\boxed{4)}$ 51,6 Гц.

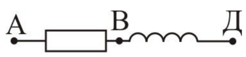
26. К источнику переменного тока, изменяющегося по закону $I = 2\sin(200\pi t)$ А, подключили последовательно катушку индуктивным сопротивлением X_L = 54 Ом, активным R = 100 Ом и конденсатор с емкостным сопротивлением X_C = 10 Ом.
а) Частота переменного тока и полное сопротивление такой цепи равно:
1) 100 Гц, 218 Ом; 2) 200 Гц, 109 Ом; $\boxed{3)}$ 100 Гц, 109 Ом; 4) 200 Гц, 218 Ом;
б) амплитудное и действующее значения напряжения в цепи равны соответственно:
$\boxed{1)}$ 218 В, 155 В; 2) 109 В, 77 В; 3) 155 В, 109 В; 4) 200 В, 140 В.

27. В цепь переменного тока частотой ν = 50 Гц последовательно включены резистор сопротивлением R = 100 Ом, катушка индуктивностью L = 500 мГн и конденсатор емкостью C = 10 мкФ. Если напряжение в цепи U = 220 В, амплитудные значения:
а) силы тока в цепи:
1) 0,96 А; $\boxed{2)}$ 1,16 А; 3) 1,56 А; 4) 1,96 А;
б) напряжения на резисторе:
1) 96 В; $\boxed{2)}$ 116 В; 3) 156 В; 4) 196 В;
в) напряжения на конденсаторе:
1) 192 В; 2) 226 В; 3) 312 В; $\boxed{4)}$ 369 В;
г) напряжения на катушке:
1) 96 В; 2) 156 В; $\boxed{3)}$ 182 В; 4) 226 В.

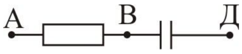
28. Конденсатор, катушка и резистор соединены между собой последовательно. Если действующие значения напряжений на них соответственно U_C = 8 В, U_L = 5 В и U_R = 4 В, то действующее значение напряжения на всем участке равно:
$\boxed{1)}$ 5 В; 2) $\sqrt{17}$ В; 3) 7 В; 4) 17 В.



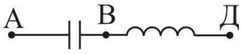
29. Если в цепи переменного тока стандартной частоты, изображенной на рисунке, показание вольтметра, подключенного к катушке индуктивностью L = 0,5 Гн и конденсатору, равно 0, то емкость конденсатора равна:
1) 5 мкФ; 2) 10 мкФ; 3) 15 мкФ; $\boxed{4)}$ 20 мкФ.



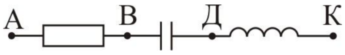
30. По участку АВД, изображенному на рисунке, протекает синусоидальный ток. Если на участке АВ действующее значение напряжения $U_{АВ}$ = 30 В, а на участке ВД – $U_{ВД}$ = 40 В, то действующее значение напряжения на участке АД равно:
1) 30 В; 2) 40 В; $\boxed{3)}$ 50 В; 4) 70 В.



31. По участку АВД, изображенному на рисунке, протекает синусоидальный ток. Если на участке АВ действующее значение напряжения $U_{АВ}$ = 20 В, а на участке ВД – $U_{ВД}$ = 15 В, то действующее значение напряжения на участке АД равно:
1) 15 В; 2) 20 В; $\boxed{3)}$ 25 В; 4) 40 В.



32. По участку АВД, изображенному на рисунке, протекает синусоидальный ток. Если на участке АВ действующее значение напряжения $U_{АВ}$ = 35 В, а на участке ВД – $U_{ВД}$ = 25 В, то действующее значение напряжения на участке АД равно:
1) 60 В; 2) 35 В; 3) 25 В; $\boxed{4)}$ 10 В.



33. По участку АВД, изображенному на рисунке, протекает синусоидальный ток. Если на участке АВ действующее значение напряжения $U_{АВ}$ = 30 В, на участке ВД – $U_{ВД}$ = 60 В, на участке ДК – $U_{ДК}$ = 20 В, то действующее значение напряжения на участке АД равно:
1) 20 В; 2) 30 В; $\boxed{3)}$ 50 В; 4) 60 В.

Трансформатор

34. Если трансформатор повышает напряжение от U_1 = 220 В до U_2 = 660 В и содержит в первичной обмотке N_1 = 900 витков, то коэффициент трансформации и число витков во вторичной обмотке равны соответственно:
1) 3, 2700; $\boxed{2)}$ $\frac{1}{3}$, 2700; 3) 3, 300; 4) $\frac{1}{3}$, 300.

35. Первичная обмотка трансформатора с коэффициентом трансформации k = 10 включена в сеть напряжением U_1 = 120 В. Потерями энергии в первичной обмотке можно пренебречь. Если во вторичной обмотке течет ток I_2 = 5 А, а напряжение на ней U_2 = 8 В, то сопротивление вторичной обмотки равно:
$\boxed{1)}$ 0,9 Ом; 2) 1,2 Ом; 3) 1,8 Ом; 4) 2,4 Ом.

36. Напряжение в первичной обмотке трансформатора U_1 = 220 В, сила тока I_1 = 1 А. Если напряжение на концах вторичной обмотки U_2 = 20 В, а сила тока в ней I_2 = 10 А, то КПД траснформатора равен:
1) 82 %; $\boxed{2)}$ 91 %; 3) 95 %; 4) 98 %.

37. Первичная обмотка трансформатора подключена к источнику переменного напряжения U_1 = 200 В. Сопротивление первичной обмотки r_2 = 1 Ом, ток в ней I_2 = 4 А. Если напряжение на концах вторичной обмотки U_2 = 16 В, то КПД трансформатора и коэффициент трансформации соответственно равны:
1) 32 %, 10; 2) 32 %, 12,5; 3) 80 %, 12,5; $\boxed{4)}$ 80 %, 10.

38. При подключении первичной обмотки трансформатора к источнику переменного напряжения во вторичной обмотке возникает ЭДС ε_2 = 25 В. Если подключить к этому источнику вторичную обмотку, то в другой обмотке возникает ЭДС ε_2' = 9 В. Если не учитывать потери энергии в трансформаторе, напряжение на источнике тока равно:
1) 9 В; $\boxed{2)}$ 15 В; 3) 20 В; 4) 25 В.

39. Первичная обмотка трансформатора включена в сеть напряжением U_1 = 120 В. Потери энергии в трансформаторе отсутствуют. Если напряжение на зажимах вторичной обмотки U_2 = 2400 В, а сила тока в ней I_2 = 2 А, то сила тока в первичной обмотке равна:
1) 10 А; 2) 20 А; 3) 30 А; 4) 40 А.

40. Электроэнергия передается от генератора к потребителю по проводам, сопротивление которых $R_{пр}$ = 400 Ом. Если КПД линии электропередачи η = 0,95, а внутреннее сопротивление генератора r = 100 Ом, то сопротивление нагрузки равно:
1) 3,0 кОм; 2) 5,5 кОм; $\boxed{3)}$ 9,5 кОм; 4) 10,5 кОм.

41. Электрическая печь, сопротивление которой R = 20 Ом, включена в сеть переменного тока. Если амплитуда силы тока I_m = 10 А, то за время работы печи τ = 2 ч выделится количество теплоты, равное:
1) 1,8 МДж; 2) 3,6 МДж; $\boxed{3)}$ 7,2 МДж; 4) 14,4 МДж.

42. Напряжение в цепи изменяется по закону $U = 180 \sin \omega t$ (В). Если амперметр, включенный в эту цепь, показывает силу тока I = 1,4 А, то мощность, потребляемая цепью, равна:
1) 127 Вт; $\boxed{2)}$ 179 Вт; 3) 238 Вт; 4) 254 Вт.

ЛИТЕРАТУРА

1. Физика: 3800 задач для школьников и поступающих в вузы / Н. В. Турчина [и др.]. — М. : Дрофа, 2000. — 672 с.

2. Сборник задач по физике : учеб. пособие / Л. П. Баканина [и др.] ; под ред. С. М. Козелла. — М. : Наука, 1990. — 352 с.

3. Черноуцан, А. И. Физика: задачи с ответами и решениями / А. И. Черноуцан. — М. : КДУ, 2006. — 352 с.

4. Физика: Колебания и волны. 11 кл. : учеб. для углубленного изучения физики / Г. Я. Мякишев, А. З. Синяков. — М. : Дрофа, 2002. — 288 с. : ил.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

РАЗВИНА Татьяна Ивановна
ДРАПЕЗО Леонид Иосифович
ЛАСТОЧКИНА Валентина Алексеевна и др.

ФИЗИКА

Пособие

В 4 частях

Часть 4

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Технический редактор *О. В. Песенько*

Подписано в печать 29.03.2013. Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 12,09. Уч.-изд. л. 9,45. Тираж 500. Заказ 206.
Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет. ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.