Согласно расчетам один комплекс «Уран-6»заменяет около 20 саперов, что весьма важно в боевой обстановке.

Применение комплексов «Скарабей» и «Сфера» позволяет проводить не только разведывательные мероприятия, но и осуществлять поиск пострадавших под завалами, куда не может добраться человек.

Подводя итог, можно отметить, что за период работы Международного противоминного центра Вооруженных Сил РФ было очищено от мин, фугасов и боеприпасов около 1,5 тыс. гектаров местности, разминировано 400 километров автомобильных дорог и около 2 200 зданий, обезврежено более 16 тысяч взрывоопасных предметов, и самое главное не было ни одного инцидента, связанного с подрывом личного состава.

**Литература**

1. [Электронный ресурс] : Режим доступа: http://www.interfax.ru/world/539714. – Дата доступа 21.03.2020.

2. [Электронный ресурс] : Режим доступа: http:// interpolitex.ru /media/news/novosti-vystavki/skarabey-i-sfera. – Дата доступа 21.03.2020.

УДК 628.18

## Задача о свободных колебаниях конечной струны

Лаппо И. А., Миронов Д. Н.
Белорусский национальный технический университет

*Аннотация. В статье рассмотрено свободные колебания струны, которая моделирует модуль некоторой мехатронной системы, которые находят все большее применение в нашей повседневной деятельности. Сформулированы начальные и граничные условия, а также найдена функция, описывающая свободные колебания струны, которая в дальнейшем может быть использована для оценки технического состояния модуля и мехатронной системы в целом.*

Найдём функцию, описывающую свободные колебания струны, моделирующей некоторый мехатронный модуль длиной $l$ , ($l$ = 1 м), закреплённый на концах и имеющий в начальный момент форму u(x,0)=$x^2$. Начальные скорости ё

-колебания точек равны $u_t$(x,0)=$x^3$+5. (Задача о свободных колебаниях конечной струны в случае, когда концы закреплены).

Решение:

Составим уравнение, описывающее колебание этой струны [1, 2]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

Удовлетворяющее начальным условиям:

$$u|_{t=0} = \varphi(x) = x^2 \qquad (2.а)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) = x^3 + 5 \qquad (2.б)$$

и граничным условиям:

$$u|_{x=0} = 0 \qquad (3.а)$$

$$u|_{x=1} = 0 \qquad (3.б)$$

Будем решать задачу методом Фурье (метод разделения переменных).

Будем искать частные решения в виде:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \qquad (4)$$

Подставим (4) в уравнение (1), и получим:

$$X(x) \cdot T''(t) = a^2 \cdot X''(x) \cdot T(t) \qquad (5)$$

Равенство (5) приведём к виду уравнения (1) и получим равенство (6):

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 \cdot T(t)} \qquad (6)$$

Получено равенство, левая часть которого зависит только от $x$, а правая часть – только от $t$. Функции разных переменных могут быть равны между собой только в том случае, если они равны какому-то числу, константе, обозначим эту константу, как $-\lambda$:

$$\frac{T''(t)}{a^2 \cdot T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

Получим два уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \\ \dfrac{T''(t)}{a^2 \cdot T(t)} = -\lambda \end{cases} \qquad (7)$$

Преобразуем:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda \cdot X(x) = 0 \\ T''(t) + \lambda \cdot a^2 \cdot T(t) = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

Рассмотрим первое из них. Необходимо найти нетривиальные (не равные тождественно нулю) решения этого уравнения, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda \cdot X(x) = 0 \\ X(0) = 0; X(1) = 0 \end{cases} \qquad (9)$$

Это простейшая задача Штурма-Лиувилля.

Найдём все значения $\lambda$ при которых (9) имеет не тривиальное решение, $\lambda$ - собственные значения задачи (9), а соответствующие им решения называются собственными значениями функций.

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \lambda = const, \; X(0) = 0, \; X(1) = 0 \quad (10)$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$k^2 + \lambda = 0$$
$$k^2 = -\lambda$$
$$k = \pm i\sqrt{-\lambda}$$

Общее решение уравнения (10):

$$X(x) = C_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + C_2 \cdot \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

Определим значение коэффициентов $C_1$ и $C_2$ при условиях $X(0) = 0, \; X(1) = 0$:

$$X(0) = 0$$
$$0 = C_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda}0\right) + C_2 \cdot \sin(\sqrt{\lambda}0)$$
$$C_1 = 0$$

Подставляем в общее решение и получаем:

$$X(x) = C_2 \cdot \sin(\sqrt{\lambda}x)$$
$$X(1) = 0$$
$$0 = C_2 \cdot \sin(\sqrt{\lambda} * 1)$$

$C_1 \neq 0$, иначе решением будет только $X(x) = 0$.

$$\sin\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0$$
$$\sqrt{\lambda} = \pi k$$
$$\lambda = (\pi k)^2$$

Т.к. выполнение условий не зависит от коэффициента $C_2$, то примем его значение равным 1.

Итак, нетривиальными решениями уравнения (4) являются функция:

$$X_k(x) = C_2 \cdot \sin(k\pi x) \quad (11)$$

Решим уравнение $T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0$, причем уже известно, что $\lambda = (\pi k)^2$ :

$$k^2 + a^2\lambda = 0$$
$$k^2 = -a^2\lambda$$
$$k^2 = \pm ia\sqrt{\lambda}$$

Общее решение уравнения (10):

$$T_k(t) = a_k \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}at}{l}\right) + b_k \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}at}{l}\right)$$
$$T_k(t) = a_k \cdot \cos\left(\frac{k\pi at}{1}\right) + b_k \cdot \sin\left(\frac{k\pi at}{1}\right) \quad (12)$$

Пусть $C_2 = 1$, тогда получим:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cdot \cos(k \cdot \pi \cdot a \cdot t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot a \cdot t)) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot x) \quad (13)$$

где коэффициенты $a_k$ и $b_k$ находятся следующим образом:

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^1 \varphi^*(x) \cdot \sin(\sqrt{\lambda}x)dx$$

$$b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^1 \psi^*(x) \cdot \cos(\sqrt{\lambda}x)dx$$

$$a_k = \frac{2}{1}\int_0^1 x^2 \cdot \sin(k\pi x)dx$$

$$b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^1 (x^3 + 5) \cdot \cos(k\pi x)dx$$

Рассчитываем с помощью программного пакета Wolfram Mathematica:

$$a_k = 2 \cdot \frac{(2 - k^2 \cdot \pi^2) \cdot \cos(k \cdot \pi) + 2 \cdot k \cdot \pi \cdot \sin(k \cdot \pi) - 2}{k^3 \cdot \pi^3}$$

$$b_k = 0$$

где, $\cos(k\pi) = (-1)^k$, $\sin(k\pi) = 0$:

$$a_k = 2 \cdot \left(\frac{(2 - k^2 \cdot \pi^2) \cdot (-1)^k - 2}{k^3 \cdot \pi^3}\right)$$

$$b_k = 0$$

$$a_k = \frac{2 \cdot (2 - k^2 \cdot \pi^2) \cdot (-1)^k - 4}{k^3 \cdot \pi^3} \quad (14)$$

$$b_k = \frac{2}{k\pi a}\left(\frac{6 + 3(-2 + k^2\pi^2)\cos(k\pi) + 6k\pi(-1 + k^2\pi^2)\sin(k\pi)}{k^4 \cdot \pi^4}\right)$$

$$b_k = \frac{12 + 6 \cdot (-2 + k^2 \cdot \pi^2) \cdot (-1)^k}{k^5 \cdot \pi^5 \cdot a} \quad (15)$$

Подставим коэффициенты (14) и (15), в уравнение (13):

$$\vartheta(x,t) = (\left(\frac{2(2 - k^2 \cdot \pi^2)(-1)^k - 4}{k^3\pi^3}\right) \cdot \cos(k\pi a t) + \left(\frac{12 + 6(-2 + k^2\pi^2) \cdot (-1)^k}{k^5\pi^5 a}\right) \cdot \sin(k\pi a t)) \cdot \sin(k\pi x)$$

**Вывод**

Была найдена функция описывающая свободные колебания струны, моделирующей некоторый мехатронный модуль длиной $l$, ($l$ = 1 м), закреплённый на концах и имеющий в начальный момент форму u(x,0)=$x^2$. Начальные скорости колебания точек равны $u_t$(x,0)=$x^3+5$.

Проверка.

Подставим граничные условия в полученную функцию:

Так как $\sin(k\pi\cdot 0)=0$, то и $u(x,t)=0$.

Так как $\sin(k\pi\cdot 1)=0$, то и $u(x,t)=0$.

При подстановки граничных условий:

$$u|_{x=0}=0$$
$$u|_{x=1}=0$$

В уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Убедились в том, что полученная функция:

$$u(x,t)=(\left(\frac{2(2-k^2\cdot\pi^2)(-1)^k-4}{k^3\pi^3}\right)\cdot\cos(k\pi a t)$$
$$+\left(\frac{12+6(-2+k^2\pi^2)\cdot(-1)^k}{k^5\pi^5 a}\right)\cdot\sin(k\pi a t))\cdot\sin(k\pi x)$$

удовлетворяет граничным условиям.

**Литература**

1. Араманович, И. Г. Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В. И. Левин. – М. : Наука, 1969. – 288 с.

2. Самарский А. А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – 2-е изд., испр. – М. : Физматлит, 2001. – 320 с.