К 80-ЛЕТИЮ ИВЛЕВА ДЮИСА ДАНИЛОВИЧА

Климов Д.М., Ковалев В.А., Радаев Ю.Н.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
Московский городской университет управления Правительства Москвы
Самарский государственный университет

6 сентября 2010 г. исполняется 80 лет Дюису Даниловичу Ивлеву – доктору физико-математических наук, профессору, заслуженному деятелю науки Российской Федерации. Д.Д. Ивлеву принадлежит свыше двухсот опубликованных научных работ, в том числе семь монографий. Его вклад в математическую теорию пластичности и механику деформируемого твердого тела с полным правом можно назвать выдающимся.

Д. Ивлев – основатель и руководитель научной школы механики идеально пластических тел и конструкций, базирующейся в университетских и академических центрах Воронежа, Самары, Владивостока, Чебоксар. Огромная часть научной и педагогической деятельности Д.Д. Ивлева связана с подготовкой кадров высшей квалификации в области механики деформируемого твердого тела. В настоящее время в рамках возглавляемой им научной школы работает свыше 20 докторов и более 100 кандидатов наук. Главное в творческой деятельности Д.Д. Ивлева – бескомпромиссное служение научной истине и неустанный поиск на самых передовых рубежах современной науки. 55 лет его научной и общественной деятельности, выдающиеся научные достижения позволяют причислить Д.Д. Ивлева к категории мыслителей, являющихся национальным достоянием России.

Д.Д. Ивлев родился 6 сентября 1930 г. в г. Чебоксары в семье преподавателя Чувашского Педагогического института Ивлева Данила Осиповича. В августе 1941 года Ивлев Д. О. был призван в ряды Красной Армии, среди его правительственных наград медаль «За взятие Берлина».

После окончания средней школы в 1948 г. Д.Д. Ивлев покидает Чебоксары и поступает на механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, который заканчивает в 1953 г. В 1956 г., после окончания аспирантуры при Институте механики МГУ, он успешно защитил диссертацию “Приближенное решение упруго-пластических задач методом малого параметра” в совете при МГУ (оппонентами по этой работе выступили В.В.

Соколовский и Г.С. Шапиро; председательствовал на защите Ю.Н. Работнов) и получил ученую степень кандидата физико-математических наук. С февраля 1957 г. по октябрь 1958 г. он работает в должности младшего научного сотрудника Института механики АН СССР. В 1959 г., после защиты диссертационной работы «Пространственная задача теории идеальной пластичности», которая также представлялась в совет при МГУ, Д.Д. Ивлев получает степень доктора физико-математических наук. Оппонентами по докторской диссертационной работе выступили Л.А. Галин, Л.М. Качанов и Г.С. Шапиро, председательствовал на защите А. Ю. Ишлинский.

В октябре 1959 г. Д.Д. Ивлев, будучи 29-летним доктором физико-математических наук и уже достаточно широко известным ученым в области математической теории пластичности по приглашению ректора Воронежского университета Б.И. Михантьева приезжает в г. Воронеж. В декабре 1959 г. Д.Д. Ивлев возглавил созданную им в ВГУ кафедру теории упругости и пластичности. Талантливый ученый, прекрасный организатор и педагог Дюис Данилович сумел в короткий срок активизировать научную и педагогическую работу. Лекции и научные семинары под руководством профессора Д.Д. Ивлева отличались способностью глубоко проникать в суть обсуждаемых вопросов. В 60-е годы в Воронежском государственном университете на математико-механическом факультете Д.Д. Ивлев работал вместе с профессорами М.А. Красносельским, С.Г. Крейном, В.И. Соболевым. Творческое взаимодействие механиков и математиков Воронежского университета было заложено именно в те годы.

Созданная Д.Д. Ивлевым воронежская школа механики деформируемого твердого тела быстро получила всесоюзное признание. Проводимые в те годы научные исследования были связаны с рядом фундаментальных и прикладных проблемам механики сплошных деформируемых сред. Работы Д.Д. Ивлева и его учеников постоянно были в фокусе внимания ученых как нашей страны, так и за ее пределами; их существенное влияние на формирование математической теории пластичности было и остается общепризнанным и ощущается до сих пор. В 1961 г. Д.Д. Ивлеву было присвоено ученое звание профессора. Под руководством профессора Д.Д. Ивлева ежегодно проводились научные конференции и школы, в работе которых принимали участие ученые из Москвы, Ленинграда, Киева, Новосибирска, Ростова-на-Дону, Казани, Перми, Харькова, Краснодара, Куйбышева, Риги и других городов СССР.

Параллельно с заведованием кафедрой теории упругости и пластичности в ВГУ профессор Д.Д. Ивлев в течение ряда лет заведовал кафедрой сопротивления материалов в Воронежском политехническом институте, куда его пригласил ректор В.С. Постников. В эти же годы Д.Д. Ивлев по предложению ректора Л.Н.Талова читает лекции в Воронежском педагогическом институте. Следует отметить, что уже в годы работы в Воронежском университете началось сотрудничество Д.Д. Ивлева с одним из своих аспирантов_Геннадием Ивановичем Быковцевым, которое вскоре дало превосходные плоды - научные результаты, имеющие фундаментальное значение для механики деформируемого твердого тела. Одним из талантливых учеников Д.Д. Ивлева тех лет также был В.В. Дудукаленко. Г.И. Быковцев стал первым деканом нового факультета прикладной математики и механики, возглавил созданную им кафедру технической кибернетики и теории автоматического регулирования.

В 1966 г. Д.Д. Ивлев возвращается в Москву, где сначала работает профессором МВТУ им. Н.Э. Баумана (1966–1970 гг.) и заведует кафедрой высшей математики, а затем (1971–1982 гг.) –заведующим кафедрой высшей математики во

Всесоюзном заочном политехническом институте (сейчас Московский государственный открытый университет). Вместе со своими учениками профессорами Г.И. Быковцевым и И.А. Бережным параллельно он активно участвует в создании научной школы механики деформируемого твердого тела в г. Куйбышеве.

В 1982 г. Д.Д. Ивлев приезжает на родину в г. Чебоксары, где в период с 1982 г. по 1993 г. работает сначала заведующим кафедрой математического анализа, а затем – заведующим кафедрой механики деформируемого твердого тела в Чувашском государственном университете им. И.Н.Ульянова. В 1985–1993 гг. он является деканом физико-математического факультета. В 1993 г. Д.Д. Ивлев переходит на работу в Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, где в настоящее время заведует кафедрой математического анализа.

Работы Д.Д. Ивлева посвящены механике деформируемого тела, в основном математической теории пластичности. Ряд результатов Д.Д. Ивлева имеет фундаментальный характер для всей механики деформируемого твердого тела. Далее нам представляется уместным дать необходимые сведения о развитии математической теории пластичности и ее современном состоянии.

Первая математическая теория пластичности была создана Сен-Венаном (B. Saint-Venant, 1870 г.) [1], [2] на основе гипотезы о пропорциональности девиатора тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций при условии текучести Треска (H.Tresca). Сен-Венаном на основании опытов Треска по истечению металлов через отверстия было предложено условие пластичности, заключающееся в том, что пластическое состояние наступает, как только максимальное касательное напряжение достигает некоторого определенного предельного значения k. Впрочем, идея такого условия принадлежит Кулону и была высказана им в работе "О применении правил максимума и минимума к некоторым вопросам статики, имеющим отношение к архитектуре" [3], представленной во Французскую Академию наук в 1773 г. В этой работе Кулон указывает на то, что разрушение сжатой призмы происходит в результате скольжения одной ее части относительно другой по некоторой плоскости, составляющей угол в сорок пять градусов с направлением сжатия. Скольжение возникает при достижении составляющей сжимающей силы в указанной плоскости предельной величины, достаточной для преодоления обусловленного сцеплением сопротивления скалыванию по этой плоскости. Сен-Венан рассматривал задачу о пластическом плоском деформированном состоянии и шел по пути обобщения уравнений движения вязкой жидкости Навье-Стокса, опираясь на гидродинамическое представление о течении металлов. Сен-Венан ограничился исследованием плоского деформированного состояния и поэтому его теория нуждалась в дальнейшем обобщении на случай трехмерного состояния. Соответствующее обобщение было сразу же выполнено: уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности впервые были получены Леви (M. Levy, 1871 г.) [4]. Статьи Сен-Венана и Леви появились одна за другой в Journal de Mathrematiques Pureset Appliqurees за 1871 г. Леви принял в качестве условия текучести уравнение грани призмы Кулона-Треска и присоединил в качестве определяющего уравнение, выражающее пропорциональность девиатора тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций. Теория Леви, поскольку она основана на "неассоциированном" законе пластического течения, не нашла применения и представляет ныне лишь исторический интерес, отчетливо указывая на то, что на ранних этапах развития математической теории пластичности условие пластичности и определяющий закон течения рассматривались совершенно независимо друг от друга.

Соотношения Сен-Венана для плоской пластической деформации – статически определимая система уравнений гиперболического типа, что и позволило позднее развить теорию полей скольжения, связываемую обычно с именами Генки (H. Hencky, 1923 г.) и Гейрингер (H. Geiringer, 1930 г.). Математический аппарат, соответствующий соотношениями Сен-Венана для плоской задачи, оказался, таким образом, вполне адекватным экспериментальным и теоретическим представлениям о течении идеально пластического тела. Заметим, что уравнения теории плоского напряженного состояния (в отличии от случая плоской деформации) не могут быть получены как частный случай пространственных уравнений.

Уравнения пространственной задачи математической теории пластичности длительное время оставались неизученными. И в настоящее время теория трехмерной задачи математической теории пластичности далека от завершения. Имеется весьма ограниченный круг методов и результатов, которые проливали бы свет на свойства пространственного пластического напряженно-деформированного состояния. Оценивая состояние пространственной задачи теории идеальной пластичности Л. Прандтль (L. Prandtl) в 1921 г. указывал, что для разработки пространственной задачи до сих пор еще не найдено надлежащего пути и пока, пожалуй, имеется мало перспектив ее решения. "Задачи трехмерного пластического течения трудны и мало изучены". Так сформулировано отношение к вопросам пространственной задачи математической теории пластичности авторов известной обзорной статьи: Вакуленко А.А., Качанов Л.М. Теория пластичности/ В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1972. С. 79-118.

Пространственная задача в общем случае при условии пластичности Мизеса (R. Von Mises) и ассоциированным с ним законом течения Леви-Мизеса является статически неопределимой, и, кроме того, уравнения пространственной задачи не гиперболичны. Так, система уравнений пространственной и осесимметричной задачи теории идеальной пластичности при условии пластичности Мизеса, вообще говоря, не имеет вещественных характеристических направлений (см., например, [5], с. 144-146). Точнее говоря, уравнения пространственной задачи либо полностью эллиптичны (т.е. не существует действительных характеристических направлений), либо (если в рассматриваемой точке медианная главная скорость пластической деформации равна нулю) имеется только два поверхностных характеристических элемента, совпадающих с площадками максимального касательного напряжения. Все это свидетельствует о том, что в подавляющем большинстве пространственных состояний, описываемых согласно условию пластичности Мизеса и ассоциированному с ним закону течения Леви- Мизеса, действительные характеристики отсутствуют. Все это не оставляет шансов обобщить методы интегрирования (см. [6]– [11]), развитые ранее для плоской задачи, соотношения которой формально статически определимы и гиперболичны, что в конце концов и позволяет построить теорию полей скольжения, адекватно представляющую сдвиговой механизм пластического течения.

Принципиально иная ситуация наблюдается в пространственной задаче при использовании критерия текучести Кулона-Треска. Здесь уравнения пластического равновесия в ряде важных случаев становятся гиперболическими. Существование действительных характеристических поверхностей является большим математическим преимуществом. Если еще учесть, что характеристические поверхности суть поверхности скольжения, то с физической точки зрения трудно объяснить отсутствие действительных характеристических поверхностей в случае уравнений пространственной задачи при использовании критерия текучести Мизеса.

Поверхности и линии скольжения не являются только математическим понятием. Они существуют в действительности и их можно выявить травлением отполированной поверхности или разреза деформированного металла. Фигуры скольжения часто появляются в виде узоров с правильной лучистой симметрией на поверхностях или на разрезах твердых тел, испытавших деформации за пределом упругости. Линии скольжения (линии сдвигов) играют чрезвычайно важную роль как в теоретических, так и в прикладных исследованиях напряженного состояния пластически деформированного тела. Геометрия линий скольжения во многих случаях вполне определяет напряженное состояние, и такое напряженное состояние реализуется в условиях предельного равновесия тела. На этот факт, по-видимому, впервые указал Д.К. Чернов. Фигуры скольжения, которые наблюдались Д.К. Черновым при различных схемах нагружения (например, при растяжении плоских образцов, при пробивке круглых отверстий), воспроизводятся в известной монографии: Фридман Я.Б. Механические свойства металлов. М.: Оборонгиз, 1952. 556 с. (см. с. 103). Значительно позже линии скольжения стали исследоваться за рубежом. В начальный период развития теории пластичности при изучении пластического течения широко использовались представления о линиях и поверхностях скольжения, подчиняющихся поразительным законам, установленным математиками и инженерами в начале XX столетия. В предисловии мы уже говорили о соответствии между изменениями в структуре сильно деформированных металлов и при формации горных пород, отмечаемыми и описываемыми в петрографии. Поэтому теория линий скольжения в руках геологов может служить средством расшифровки процессов образования горных цепей и континентальных плато, восстановления истории движения земной коры (в том числе и ее континентальной части). Таким образом, теория скольжения находит свое подтверждения на двух существенно отличающихся масштабных уровнях.

К настоящему времени уже стало ясно, что предельные состояния твердых тел должны так же описываться статически определимыми уравнениями гиперболического типа. Теория предельного состояния первоначально развивалась в рамках механики сыпучих сред. Основоположник теории К. Кулон сформулировал (1773 г.) основные положения теории предельного состояния и ввел представление о поверхности сползания, которые были применены для решения ряда важных прикладных задач. Систематическое изложение теории предельного состояния сыпучих сред на основе представления о сетке скольжения было дано В.В. Соколовским в 1942 г. (см.: Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. М., Л.: Изд-во АН СССР, 1942. 208 с.; третье издание: Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. М.: Физматгиз, 1960. 244 с.). Теории предельного состояния и идеальной пластичности, таким образом, имеют общие основы, однако они далеко не тождественны. Теория идеальной пластичности основана на представлении об условии пластичности, которое, вообще говоря, может приводить либо к статически определимым, либо к статически неопределимым состояниям. Теория предельного состояния в качестве своего предмета исследования берет лишь статически определимые состояния, которые могут быть достигнуты, скажем, при пропорциональном возрастании внешних нагрузок. Для предельного состояния все "предыдущие" свойства материала не играют никакой роли, поскольку предельное состояние определяется из замкнутой системы формально статически определимых соотношений, не имеющих ничего общего с допредельным поведением тела.

Экспериментальные исследования показывают, что условие пластичности Мизеса значительно лучше согласуется с опытными данными, чем условие пластичности Кулона-Треска. Сомневаться в достоверности данных многочисленных экспериментов не приходится, тем более, что они указывают на систематическое отклонение поведения металлов в состоянии текучести от условия Кулона-Треска. Тем не менее, можно предположить, что лучшее соответствие условия Мизеса опытным данным объясняется влиянием различных посторонних факторов, таких как упрочнение, деформационная анизотропия, поврежденность, элиминировать которые при проведении экспериментов до конца не удается. Известно также, что чем ярче у материала на диаграмме одноосного растяжения выражена площадка текучести (т.е. чем ближе его поведение к идеально пластическому), тем лучше данные испытаний согласуются с критерием пластичности Кулона-Треска. Таким образом, критерий текучести Кулона-Треска, по-видимому, действительно лучше, чем все остальные мыслимые критерии, выражает сущность идеальной пластичности. В пользу этого вывода, т.е. большего соответствия условия Кулона-Треска физике пластической деформации, высказывались многие авторы.

Итак, формально статически определимая задача о плоской пластической деформации вместе с ее гиперболическими соотношениями послужила отправной точкой развития всей математической теории идеальной пластичности. Распространение математического аппарата гиперболических уравнений, описывающего плоское течение идеально пластического материала на общий трехмерный случай, явилось предметом целого ряда исследований.

В 1909 г. Хаар и Карман (A. Haar, Th. von Karman) выдвинули условие «полной пластичности» [13], которое, по существу, устанавливает соответствие напряженного состояния ребру призмы Кулона-Треска, и оказалось, что соотношения пространственной задачи теории идеальной пластичности при условии полной пластичности являются статически определимыми.

В 1923 г. Генки (H. Hencky) [14] предложил использовать условие полной пластичности Хаара-Кармана в случае осесимметричного напряженного состояния, что привело его к статически определимой системе уравнений равновесия, которая, как он установил, оказывается гиперболической. Позднее уравнения осесимметричной задачи с условием текучести Кулона-Треска исследовались Р. Шилдом (R.T. Shield) [15] для ребер и граней призмы Кулона-Треска. Осесимметричные автомодельные решения, соответствующие течению на ребре призмы Кулона-Треска, были построены Р. Шилдом (R.T. Shield) в той же самой работе [15]; в частности, им было произведено вычисление автомодельного поля скольжения вблизи свободной прямолинейной границы.

В 1944 г. А.Ю. Ишлинский [16] исследовал осесимметричную задачу теории пла-стичности, предполагая выполнение условия полной пластичности Хаара-Кармана, доказав статическую определимость и гиперболичность основных уравнений. С помощью численного метода в этой же работе было получено решение задачи о вдавливании твердого шарика в идеально пластическую среду. Решение А.Ю. Ишлинского вызвало критические замечания Р. Хилла, полагавшего, что "такие вычисления имеют небольшое или не имеют никакого значения, так как гипотеза Хаара-Кармана для металлов физически нереальна и она вводит ошибку неизвестной величины" (см.: Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. С. 321). Свои возражения Хилл основывал на невозможности в рамках теории течения Леви–Мизеса определить связанного с распределением напряжений, удовлетворяющим условию полной пластичности, поле скоростей из-за неправильной определенности (переопределенности) системы соотношений кинематики. Выход из сложившейся ситуации, как показало последующее развитие математической теории пластичности, состоял в последовательном использовании гипотезы Хаара-Кармана и замене закона течения Леви-Мизеса на обобщенный ассоциированный с условием пластичности Кулона-Треска закон течения.

Соотношения пространственной задачи теории пластичности, когда, аналогично условию полной пластичности Хаара-Кармана, имеется два соотношения между главными напряжениями, были предложены и проанализированы А. Ю. Ишлинским [17], который использовал определяющие зависимости в форме соотношений перестановочности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций, следующие из обобщенного ассоциированного закона пластического течения в случае течения на ребре призмы Кулона–Треска и не предполагающие столь жестких ограничений на скорости пластических деформаций, устанавливаемые традиционным для того времени требованием пропорциональности тензора скорости пластических деформаций и девиатора тензора напряжений. Впервые, в явной форме он указал на необходимость при построении теории пространственной задачи двух условий пластичности, уравнении несжимаемости и условий соосности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций, которые он принял в форме трех уравнений, следующих из перестановочности этих тензоров [22]. В своей работе А.Ю. Ишлинский пишет: "Согласно предлагаемой теории идеальной пластичности два главных напряжения должны быть непременно равны друг другу, а третье отличаться от них на удвоенное критическое значение 2k. Таким образом для пространственной задачи пластичности имеют место два соотношения между главными напряжениями, подобно гипотезе полной пластичности Хаара и Кармана. Этим предлагаемая теория отличается от теорий Леви и Мизеса, в которых принимается единственное соотношение." Таким образом, А.Ю. Ишлинский отказался от "неассоциированного" определяющего закона Леви [4] и дал корректное обобщение теории течения Сен-Венана [1], [2] на трехмерный случай. Пространственные соотношения Ишлинского полностью сохраняют свое значение в современной математической теории пластичности и их можно использовать при постановке и решении задач теории идеальной пластичности, поскольку они являются следствиями обобщенного ассоциированного закона течения в случае течения на ребре призмы Кулона-Треска.

Результаты А.Ю.Ишлинского предвосхитили более поздние исследования Д.Д. Ивлева [18], [19], в которых было показано фундаментальное значение условия полной пластичности Хаара-Кармана для всей теории пластичности и был развит соответствующий вариант теории пластичности: сингулярное условие текучести (в частности, ребро призмы Кулона–Треска) и обобщенный ассоциированный закон пластического течения.

Ассоциированный закон течения однозначно определяет направление вектора, представляющего приращения пластических деформаций в пространстве главных напряжений, только в регулярных точках поверхности текучести. Если напряженное состояние соответствует ребру (угловой точке) или конической особенности на поверхности текучести, то необходимы дальнейшие предположения для вывода корректного определяющего закона. Обобщение ассоциированного закона на случай поверхности текучести с угловой точкой предложено Койтером (W.T.Koiter) в 1953 г.[14]. Это обобщение основано на следующем принципе суперпозиции: особые точки поверхности текучести представляются как пересечение конечного числа гладких поверхностей текучести, каждая из гладких поверхностей текучести дает аддитивный вклад (с соответствующим неопределенным множителем) в величину приращения пластической деформации.

Обобщенный ассоциированный закон течения, сформулированный на основе условия пластичности Треска, устанавливает, что пластические деформации появляются в результате сдвига (скольжения) на тех площадках, где касательные напряжения по абсолютной величине достигают предельно возможного значения, причем скольжение происходит в направлении действия максимального касательного напряжения так, что оно совершает положительную работу.

В работах Д.Д. Ивлева было установлено, что при условии полной пластичности (т.е. когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Кулона-Треска) уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности являются статически определимыми и принадлежат к гиперболическому типу. Нормали к характеристическим поверхностным элементам уравнений статики при этом образуют конус, касающийся площадок максимальных касательных напряжений, построенных в вершине конуса. Характеристическими будут также поверхностные элементы, нормали к которым ортогональны главной оси тензора напряжений, соответствующей наибольшему (наименьшему) главному напряжению. Кинематические уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности в случае, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Кулона-Треска, также гиперболичны и имеют точно такие же директоры характеристических поверхностных элементов, как и статические уравнения.

Было таким образом доказано, что именно условие полной пластичности и только оно позволяет сформулировать общую теорию идеальной пластичности с единым математическим аппаратом статически определимых уравнений гиперболического типа, соответствующим сдвиговой природе идеально пластического деформирования. Эта точка зрения разделяется далеко не всеми. Так, А.А. Вакуленко и Л.М. Качанов полагают, что доводы физического характера в пользу схемы полной пластичности "продиктованы скорее заманчивой простотой математического анализа, нежели существом вопроса" (см.: Вакуленко А.А., Качанов Л.М. Теория пластичности/ В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1972. С.100). Тем не менее они замечают, что решения, полученные по схеме полной пластичности, могут иметь несомненный интерес, полемизируя при этом с Р. Хиллом, критически оценившим условие полной пластичности Хаара-Кармана как "искусственное и нереальное условие текучести" (см.: Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. С. 320, 321). Не вызывает возражений высказываемая ими мысль о том, что ценность того или иного решения пространственной задачи устанавливается возможностью либо построить согласованное кинематически допустимое поле, либо продолжить поле напряжений в жесткие зоны, не нарушая условия текучести. В противном случае вопрос о значимости решения остается открытым. Ясно, что исключительную ценность представляют полные решения, когда удается построить согласованное кинематически допустимое поле и продолжить поле напряжений в жесткие зоны, не нарушая условия текучести. Таким образом, неполные решения обладают лишь относительной ценностью, а полные – абсолютной. На практике, однако, чаще всего удается построить неполное поле напряжений (поле напряжений в пластической зоне) и возникает проблема его продолжения в жесткую зону так, чтобы в жесткой зоне и на границе раздела выполнялись условия равновесия и не превышался предел текучести. Общая процедура такого продолжения (или хотя бы существование такого продолжения) для сколько-нибудь широкого класса задач в настоящее время неизвестны. Учитывая все сказанное, нетрудно заключить, что по большому счету неполные решения с теоретической точки зрения вообще никакой ценности не представляют. Однако их практическая ценность часто может быть очень высокой. Так, или иначе, но большинство прикладных задач решены по идеально пластической схеме не полно.

Подобным же образом дело обстоит и в пространственной задаче: в случае грани произвольного кусочно-линейного условия текучести характеристические поверхности касаются главных направлений тензора напряжений.

В 1971 г. Д.Д. Ивлев и Г.И. Быковцев предприняли исследование общих соотношений теории пластичности как идеального, так и упрочняющегося тела, как с учетом упругих деформаций, так и без их учета, на предмет их классификации, определения характеристических поверхностей и поверхностей разрыва скоростей, скоростей деформаций и напряжений. Полученные ими результаты устанавливают, что (1) дифференциальные уравнения теории устойчивого упрочняющегося упругопластического тела не имеют действительных характеристик, т.е. эллиптичны; (2) если в качестве критерия текучести взят критерий, отличный от критерия текучести Треска, то для большинства пространственных состояний дифференциальные уравнения теории идеально упругопластического тела эллиптичны.

В 1966 г. выходит в свет монография Д.Д. Ивлева "Теория идеальной пластичности". В этом оригинальном сочинении с высоким мастерством были изложены новые результаты и принципы математической теории идеальной пластичности и, прежде всего, теория пространственной и обобщенной плоской задачи. Заметим, что эта монография стоит в одном ряду с замечательными руководствами по теории пластичности, написанными советскими учеными-механиками, которые по мастерству изложения и богатству результатов до сих пор остаются непревзойденными образцами. И в настоящее время "Теория идеальной пластичности" Д.Д. Ивлева служит незаменимым руководством для тех, кто пытается глубже проникнуть в основы математической теории идеальной пластичности, опираясь на блестящее и последовательное изложение, данное грандом этой науки.

В механике упрочняющихся пластических тел Д.Д. Ивлев (совместно с Г.И. Быковцевым) последовательно развивал представления, основанные на трансляционном механизме упрочнения, предложенные ранее в исследованиях А.Ю. Ишлинского и В. Прагера (W. Prager). Результаты их совместных исследований легли в основу классической монографии, которая по сути представляет собой каноническое изложение математической теории пластичности упрочняющегося тела в случае малых деформаций. В этой монографии читатель найдет исчерпывающий анализ общих уравнений теории течения и свойств их решений, включая анализ сильных и слабых разрывов с помощью аппарата геометрических и кинематических условий совместности Адамара-Томаса (J. Hadamard, T.Tomas).

Исследования Д.Д. Ивлева в области математической теории пластичности подытожены в фундаментальной двухтомной монографии "Механика пластических сред".

Помимо перечисленных, Д.Д. Ивлеву принадлежат различные результаты в области предельного состояния конструкций, статики и динамики сыпучих сред, устойчивости равновесия упругопластических тел, гидродинамики, теории трещин и механики разрушения. Следует отметить обстоятельный обзор работ по механике разрушения с изложением основных результатов этой части механики деформируемого твердого тела, сделанный им в момент острой дискуссии, посвященной механике трещин (см.: Ивлев Д.Д. О теории трещин квазихрупкого разрушения // Журнал прикл. механики и технич. физики. 1967. № 6. С. 88-128). Дискуссиям в механике посвящена важная и весьма поучительная статья: Ивлев Д.Д. Три дискуссии в механике //Вестник Самарского гос. университета. Естественно-научная серия. 2007. №4(54). С. 115-123. В ней Д.Д. Ивлев с присущей ему корректностью, тактом и бережным отношением к научным фактам затрагивает важную тему о дискуссии по механике квазихрупкого разрушения и дает свою оценку имевшим место событиям, тем более, что Д.Д. Ивлев лично участвовал в этой дискуссии. Мы также ранее высказывались по этому поводу в статье: Радаев Ю.Н. К 75-летию Д.Д. Ивлева // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. №5(39). 2005. С. 5-32. Наши оценки результатов имевшей место более сорока лет назад дискуссии совпадают. В частности, Д.Д. Ивлев в указанной выше статье пишет: "Прав Ю.Н. Радаев, когда написал: "Через сорок лет после этой дискуссии стало очевидным, что она нанесла значительный ущерб российской науке".

В течение трех последних десятилетий рядом ученых проводятся исследования в рамках научного направления, вектор которого был задан Д.Д. Ивлевым в его работах по теории пространственной задачи математической теории пластичности конца 50-х годов. Как уже указывалось, это один из самых сложных и наименее изученных разделов механики деформируемого твердого тела. Тем не менее за последние два десятилетия удалось существенно продвинуться в создании общей теории трехмерных уравнений математической теории пластичности с условием пластичности Треска и ассоциированным законом течения для напряженных состояний, соответствующих ребру поверхности текучести, и предложить общую схему интегрирования пространственных статических уравнений. Основой теории выступает ряд геометрических результатов по исследованию поля главных направлений тензора напряжений, характеризуемых наибольшим (или наименьшим) главным нормальным напряжением, полученных в [23] и [24]. Исследования в области пространственной задачи теории идеальной пластичности были подытожены в монографиях: Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2006. 340 с.; Ивлев Д.Д., Максимова Л.А., Непершин Р.И., Радаев Ю.Н., Сенашов С.И., Шемякин Е.И. Предельное состояние деформируемых твердых тел и горных пород. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 832 с.

В первой из указанных монографий сделана попытка дать полное и систематическое изложение методов и результатов, связанных с исследованием трехмерных уравнений математической теории пластичности в изостатической координатной сетке, делая акцент на новых общих методах, которые обеспечивают решение прикладных задач механики деформируемого твердого тела. Исходной точкой построения общей теории пространственных уравнений выступает одна замечательная инвариантная векторная форма пространственных уравнений, анализ которой позволяет сделать заключение о расслоенности поля направлений, соответствующих наибольшему (наименьшему) главному нормальному напряжению. Затем рассматриваются уравнения обобщенного ассоциированного закона течения, основные кинематические соотношения для приращений перемещений, следующие из него, а также исследуется кинематика течения на поверхностях максимальной скорости сдвига. Показано, что скольжения на указанной поверхности (сильные разрывы приращений перемещений) могут происходить только вдоль асимптотических направлений, если поверхность максимальной скорости сдвига имеет отрицательную Гауссову кривизну. Поэтому сдвиговое пластическое течение вблизи поверхности максимальной скорости сдвига (отрицательной Гауссовой кривизны) реализуется как результат микроскольжений в асимптотических направлениях. Получены интегрируемые соотношения для разрывов касательных составляющих приращений перемещений вдоль асимптотических линий поверхности максимальной скорости сдвига. Рассмотрены кинематические соотношения в областях эллиптичности, т.е. когда гауссова кривизна положительна, на поверхности максимальной скорости сдвига. Интегралы уравнений равновесия для расслоенного поля напряжений вдоль изостатических траекторий выводятся преобразованием векторного уравнения равновесия к изостатической координатной сетке. Устанавливается возможность отделения одной из изостатических координат, поверхности уровня которой как раз и являются слоями поля направлений, соответствующих наибольшему (наименьшему) главному нормальному напряжению.

Значительное внимание уделяется исследованию трехмерных уравнений математической теории пластичности в триортогональных изостатических координатах [25]. Основной интерес здесь представляют уравнения совместности приращений деформаций и пространственные соотношения Коши. Уравнения совместности для приращений малых деформаций в триортогональной изостатической системе координат исследуются вместе дополнительными соотношениями, связывающими физические компоненты тензора несовместности. Существенных уравнений совместности шесть. Для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона-Треска, имеется лишь три независимых уравнения совместности. Явно указываются и рассматриваются системы независимых уравнений совместности, сформулированные в изостатической координатной сетке. Определены условия, достаточные для того, чтобы при выполнении трех независимых уравнений совместности удовлетворялись три оставшихся уравнения совместности. Показано, что нарушения сплошности на поверхности идеально пластического тела распространяются вглубь тела вдоль асимптотических линий на слоях векторного поля, указывающего направления наибольшего главного нормального напряжения. Поскольку асимптотические линии наименее искривлены по сравнению с любыми другими линиями на поверхности (в том смысле, что нормальная кривизна асимптотических линий равна нулю), то нарушения сплошности проникают вглубь идеально пластического тела по наименее искривленным траекториям. Именно в этом смысле можно вести речь о минимальном искривлении траекторий распространения трещин в твердых телах.

Анализ плоской и осесимметричной задач выполнен с использованием аппарата производящих функций, определяющих канонические преобразования пространственных координат. Альтернативный вариант вывода всех основных геометрических соотношений теории плоской деформации идеально пластического тела, исходя из условия интегрируемости трехмерных пространственных уравнений, сформулированных для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона-Треска, простым понижением на одну единицу их размерности был выполнен в статье [26].

В рамках построения математической теории пластичности с уравнениями гиперболического аналитического типа был выполнен групповой анализ уравнений пространственной, плоской и осесимметричной задачи. В отношении пространственных уравнений эта работа еще далека от завершения и продолжается поиск новых симметрий пространственных уравнений Д.Д. Ивлева. Методы группового анализа все шире проникают в механику деформируемого твердого тела, позволяя в некоторых случаях получать точные решения важнейших прикладных задач. Получены новые результаты применения классических методов Ли к нелинейным уравнениям теории пластичности. Определены группы симметрий уравнений в частных производных теории пластичности, алгебры симметрий (алгебры Ли) и оптимальные системы одномерных подалгебр для пространственной, плоской и осесимметричной задач. Оптимальные системы позволяют найти ряд новых решений трехмерных уравнений теории пластичности инвариантногрупповой природы. Применение групповых методов (особенно это касается пространственной задачи) требует выполнения огромного объема рутинных преобразований и вычислений, которые были проведены с помощью систем символьных вычислений. Чтобы оценить примерный объем вычислительной работы заметим, что лишь для одной естественной конечномерной (размерности 12) подалгебры алгебры симметрий, соответствующей группе симметрий трехмерных уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности, оптимальная система одномерных подалгебр насчитывает один трехпараметрический элемент, 12 двухпараметрических, 66 однопараметрических элементов и 108 индивидуальных элементов. Алгебра симметрий уравнений осесимметричной задачи имеет размерность 5; оптимальная система одномерных подалгебр состоит из одного однопараметрического элемента и двадцати двух индивидуальных элементов. Алгебра симметрий уравнений плоской задачи (плоское деформированное состояние) имеет размерность 7; оптимальная система одномерных подалгебр состоит из одного двухпараметрического элемента, 11 однопараметрических и 20 индивидуальных элементов.

Преподавание математической теории пластичности в российских университетах имеет свою историю и традиции. В настоящее время они прочно связанны с именами Д.Д. Ивлева и Г.И. Быковцева. Отличительной чертой их преподавательской деятельности является сочетание прикладного содержания теории пластичности с глубоким и изящным математическим исследованием гиперболических задач для дифференциальных уравнений в частных производных, к которым приводит изучение полей напряжений и скоростей деформаций в зонах пластического течения. Такой синтез требовал также прочтения особого курса по теории дифференциальных уравнений частных производных математической физики, в котором излагались такие редко освещаемые в современной учебной литературе темы, как общая теория характеристик для нелинейных уравнений первого и второго порядков, метод каскадного интегрирования Лапласа, метод тангенциального преобразования, метод фазового преобразования.

Д.Д. Ивлев – член Национального комитета РАН по теоретической и прикладной механике, член редколлегии журнала “Известия РАН: Механика твердого тела”, член экспертного совета по математике и механике ВАК Минобразования и науки РФ, председатель диссертационного совета по присуждению ученой степени доктора физико-математических наук, действительный член Национальной академии наук и искусств Чувашской Республики, заслуженный деятель науки и техники РФ (1992 г.), лауреат Государственной премии Чувашской Республики в области науки и техники (2006 г.) Среди учеников Д.Д. Ивлева – доктора и кандидаты наук, которые работают в различных городах России: Москве, Воронеже, Самаре, Чебоксарах, Владивостоке.

Мы поздравляем Дюиса Даниловича с 80-летием – замечательной датой, которая является важнейшей вехой на пути его научного поиска. Мы желаем ему здоровья и творческих успехов в научной и педагогической деятельности.

ЛИТЕРАТУРА

1. De Saint-Venant, B. Sur l'retablissement des requations des mouvements intrerieurs oprerres dans les corps solides ductiles au delra des limites oru l'relasticitre pourrait les ramenerra leur premier retat / B. De Saint-Venant // Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences. –1870. – T. 70. – P. 473–480.
2. De Saint-Venant, B. Memroire sur l'retablissement des requations differrentielles des mouvements intrerieurs oprerres dans les corps solides ductiles au delra des limites oru l'relasticitre pourrait les ramener ra leur premier retat / B. De Saint-Venant // Liouville J. d. Math. Pures et Appl. Ser. II. – 1871. – T. 16. – P. 308–316, 373–382.21
3. Coulomb, C. A. Essay sur l'application des rregles de maximes et minimis raquelques problemes de statique, relatifs a l'architecture / C. A. Coulomb // Mremoirs de mathematique et de physique, prresentres a l'acadremie Royale des Sciences. Annree 1773. –Paris : L'imprimerie Royale, 1776.
4. Леви, М. К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости : сб. ст. / М. Леви // Теория пластичности. – М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – С. 20–23.22
5. Томас,Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах / Т. Томас. – М.: Мир, 1964. – 308 с.
6. Хилл, Р. Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : Гостехтеоретиздат, 1956. – 407 с.
7. Фрейденталь, А. Математические теории неупругой сплошной среды / А. Фрейденталь, Х. Гейрингер. – М. : Физматгиз, 1962. – 432 с.
8. Качанов, Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1969. – 420 с.
9. Соколовский, В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высш. шк., 1969. – 608 с.
10. Ивлев, Д. Д. Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. –232 с.
11. Быковцев, Г. И. Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.
12. Ильюшин, А. А. Пластичность. Ч.1 : Упруго-пластические деформации / А. А. Ильюшин. – М. ; Л. [СПб.] : Гостехтеоретиздат, 1948. – 376 с.
13. Хаар, А. К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах : сб. ст. / А. Хаар, Т. Карман // Теория пластичности. – М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – С. 41–56.23
14. Генки, Г. О некоторых статически определимых случаях равновесия в пластических телах : сб. ст. / Г. Генки // Теория пластичности. – М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – С. 80–101.
15. Шилд, Р.Т. О пластическом течении металлов в условиях осевой симметрии : сб. переводов / Р. Т. Шилд // Механика. – 1957. – № 1. – С. 102–122.24
16. Ишлинский, А.Ю. Осесимметрическая задача пластичности и проба Бринелля / А. Ю. Ишлинский // Прикладная математика и механика. – 1944. – Т. 8, вып. 3. – С. 201–224. (Статья воспроизводится также в книге: Ишлинский А.Ю. Прикладные задачи механики. Т. 1 : Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. М. : Наука, 1986. С. 17–42.)
17. Ишлинский, А.Ю. Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости / А. Ю. Ишлинский // Ученые записки МГУ. Механика. – 1946. – Вып. 117. – С. 90–108. (См. там же: С. 62–83. В заключительном подстрочном замечании

А. Ю. Ишлинский указывает на то, что статья была написана и представлена в редакцию в начале 1941 г.)
18. Ивлев, Д. Д. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучих сред / Д. Д. Ивлев // Прикладная математика и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 1. – С. 90–96.25
19. Ивлев, Д. Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска, и его обобщениях / Д. Д. Ивлев // Доклады АН СССР. – 1959. –Т. 124, №3. – С. 546–549.26
20. Ивлев, Д. Д. О выводе соотношений, определяющих пластическое течение при условии полной пластичности / Д. Д. Ивлев // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1959. – №3. – С. 137. (Статья воспроизводится также в книге: Ивлев Д. Д. Механика пластических сред. Т. 1 : Теория идеальной пластичности. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. С. 20–21.)
21. Ивлев, Д. Д. К теории осесимметричного напряженного состояния при условии пластичности Треска / Д. Д. Ивлев // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1959. – №6. – С. 112–114. (См. там же: С. 263–267.)
22. Радаев, Ю.Н. О соотношениях перестановочности Ишлинского в математической теории пластичности / Ю. Н. Радаев // Вестник Самарского гос. университета. Естественно-научная серия. – №6(56). – 2007. – С. 102–114.
23. Радаев, Ю.Н. О канонических преобразованиях Пуанкаре и инвариантах уравнений пластического равновесия// Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1990. – №1. – С. 86–94.
24. Радаев,Ю.Н. К теории трехмерных уравнений математической теории пластичности / Ю. Н. Радаев // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 2003. – №5. – С. 102–120.
25. Радаев,Ю.Н. О гиперболичности пространственных уравнений теории пластичности в изостатической координатной сетке / Ю. Н. Радаев // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 2008. – № 5. – С. 79–89.
26. Радаев,Ю.Н. К теории плоской деформации идеально пластического тела / Ю. Н. Радаев // Вестник Самарского гос. университета. Естественно-научная серия. – № 3(62). – 2008. – С. 272–289.