

# РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ КОНСТРУКЦИОННЫХ ИЗДЕЛИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Василевич Ю.В., Неумержицкая Е.Ю., Язневич А.М., Чигарев В.А.

Белорусский национальный технический университет, Минск

*The systematic aspects of the practical use of statistical methods with the calculation for the strength of the potentially dangerous objects are presented.*

В сопротивлении материалов расчеты на прочность традиционно ведутся в детерминированной постановке по двум методам: метод расчета по допускаемым напряжениям и методу расчета по предельным состояниям (появление пластических деформаций, потеря устойчивости и др.). Расчет по предельным состояниям основан на сравнении максимально действующей нагрузки с предельной нагрузкой, соответствующей предельному состоянию, определяемому потерей работоспособности или разрушением элемента конструкции.

Независимо от метода, расчет конструкции связан с тремя группами величин: механическими свойствами материалов; геометрическими размерами поперечных сечений и наличием концентраторов напряжений; величиной действующих нагрузок. В каждой группе величины имеют рассеяние, являются случайными, что должно учитываться при оценке прочности рассчитываемого элемента конструкции [1-3]. Расчет по допускаемым напряжениям не учитывает фактора случайности величин. Считается, что свойства материалов и внешняя нагрузка постоянны. В действительности как нагрузка, так и свойства материалов, а следовательно и прочность, являются случайными величинами, определяемыми различными случайными факторами. При неблагоприятных условиях напряжения в элементах конструкции могут превышать предел прочности, что приведет к разрушению или появлению трещин.

В качестве примера рассмотрим кривые распределения механических свойств стали 15XCHD (число случаев  $n = 1358$ ) (рис. 1). По оси ординат откладывается относительная частота появления результата в процентах.

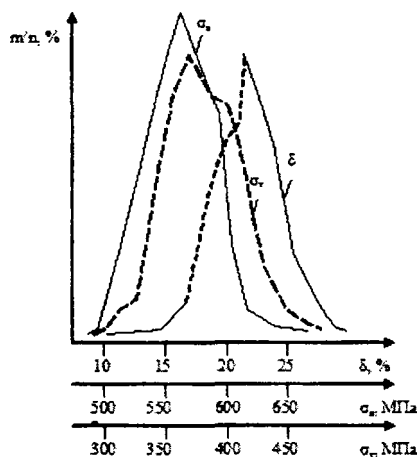


Рис. 1

Из рис. 1 видно, что такие механические характеристики металла, как предел прочности  $\sigma_B$ , предел текучести  $\sigma_T$ , относительное удлинение  $\delta$ , отличаются

значительно даже в пределах одного листа, соответственно будет изменяться и несущая способность конструкции.

При расчете по предельным состояниям максимальная действующая нагрузка не должна превышать предельной нагрузки. Например, при растяжении стержня напряжения у пластичных материалов не должны превышать предела текучести  $\sigma_{np} = \sigma_T$ , у хрупких материалов - предела прочности  $\sigma_{np} = \sigma_B$ . В этом случае предельная нагрузка, определяющая несущую способность стержня будет равна  $F_{np} = \sigma_{np} \cdot A$ , где  $A$  – площадь поперечного сечения стержня.

Испытания металлов показывают: когда у пластичных металлов напряжения достигают предела текучести - появляются пластические деформации, когда у хрупких металлов напряжения достигают предела прочности - происходит разрушение.

Условие прочности при линейном напряженном состоянии имеет вид

$$\sigma \leq \sigma_{np}, \quad (1)$$

где  $\sigma$  – максимальное напряжение в элементе конструкции;  $\sigma_{np}$  – опасное напряжение, при котором в материале наступает предельное состояние.

Предельное напряжение  $\sigma_{np}$  зависит от свойств материала и определяется в результате испытания материала на растяжение и сжатие. Для пластичных материалов  $\sigma_{np}$  принимается равным пределу текучести  $\sigma_T$ , для хрупких материалов – пределу прочности  $\sigma_B$ . Чтобы условие (1) выполнялось при изменении нагрузки в эксплуатации при изменении свойств материала в  $\sigma_{np}$  вводят коэффициент безопасности  $n$ , определяющий допускаемое напряжение  $\sigma \leq \frac{\sigma_{np}}{n} = [\sigma]$ , где  $n$  – коэффициент безопасности;  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение.

Введение коэффициента безопасности связано с разбросом механических характеристик материала, со случайным характером внешних нагрузок, с неточностью размеров и формы деталей и т.д. Чем больше значение коэффициента безопасности, тем надежнее будет конструкция, но при этом она будет более тяжелой и более дорогой.

При назначении коэффициента безопасности учитывается опыт эксплуатации аналогичных конструкций, качества материала, проектируемая долговечность и значимость, уровень развития технологии изготовления, точность задания внешних нагрузок и т.д. На основе обобщения накопленного опыта, с учетом влияющих факторов разрабатываются нормативные значения коэффициентов безопасности для различных отраслей машиностроения и даже для отдельных машин и деталей, что приводит к значительному разбросу коэффициента безопасности даже при расчете однотипных объектов разными организациями. Дать аргументированное объяснение различию коэффициента безопасности невозможно, поэтому использование коэффициента безопасности в расчетах связано с определенной величиной неопределенности.

Научно обоснованные величины коэффициентов безопасности могут быть установлены только на основе точного знания вероятностных характеристик действующих нагрузок и прочностных характеристик материала элементов конструкций.

Трудность определения несущей способности элемента конструкции состоит в том, что механические характеристики материала, геометрические размеры элемента и действующие нагрузки являются случайными величинами.

Для представленных на рис. 2 распределений рабочих  $\sigma$  и предельных  $\sigma_{\text{пр}}$  напряжений определим коэффициент безопасности как отношение математических ожиданий  $m_\sigma$  и  $m_{\sigma_{\text{пр}}}$

$$n = \frac{m_\sigma}{m_{\sigma_{\text{пр}}}}, \quad (2)$$

где  $m_\sigma$  и  $m_{\sigma_{\text{пр}}}$  – соответственно значения математических ожиданий рабочих и предельных напряжений. Из формулы (2) следует, что при одном и том же значении коэффициента безопасности вероятность разрушения элемента конструкции будет различной в зависимости от параметров распределения.

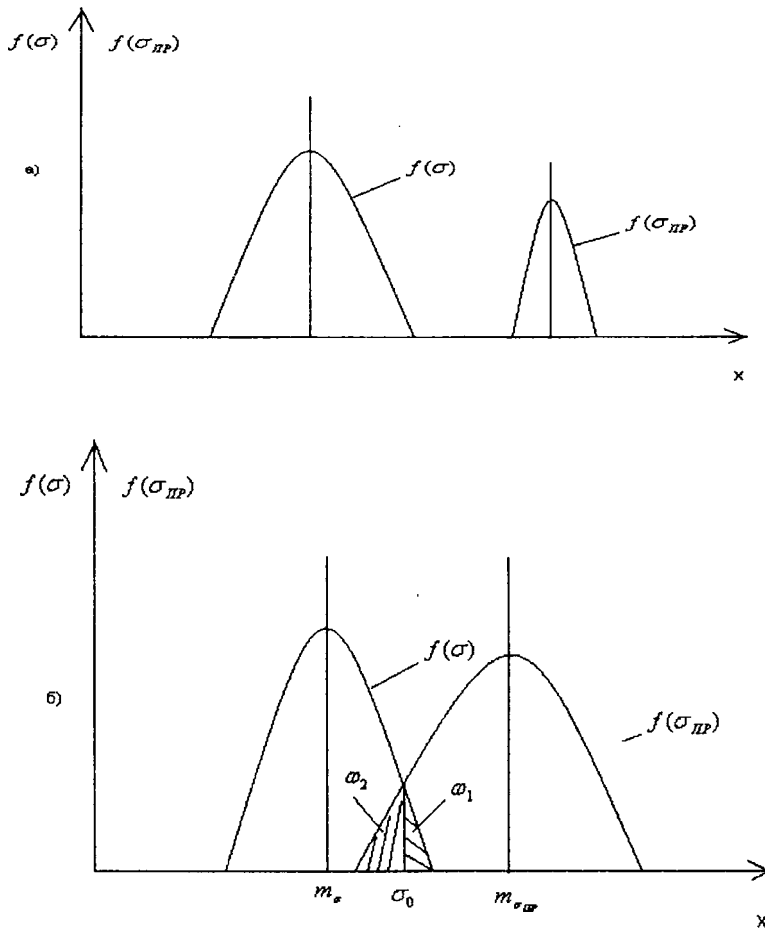


Рис. 2

В случае а, так как кривые плотности вероятности  $f(\sigma)$  и  $f(\sigma_{\text{пр}})$  не пересекаются, то вероятность разрушения элемента конструкции практически исключена.

В случае б) кривые плотности вероятности пересекаются, образуя области, в которых возможны разрушения (на рис. 2, б заштрихованы).

$$\omega_1 = \int_{\sigma_0}^{\infty} f(\sigma) d\sigma, \quad \omega_2 = \int_0^{\sigma_0} f(\sigma_{\text{пр}}) d\sigma_{\text{пр}}.$$

Получить приближенную оценку для вероятности разрушения можно, приняв за исходную координату точку пересечения кривых распределения. Вероятность, что одновременно произойдут события  $\sigma > \sigma_0$  и  $\sigma_{\text{пр}} < \sigma_0$  будет равна

произведению площадей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (рис. 2, б), дающих для искомой вероятности оценку снизу

$$P(\sigma > \sigma_0, \sigma_{PP} < \sigma_0) < \omega_1 \omega_2,$$

где  $\omega_1 \cdot \omega_2$  – вероятность разрушения, при любом значении

$$\sigma_0 = \sigma_{PP0}. \quad (3)$$

Вероятность того, что одновременно событие  $\sigma < \sigma_0, \sigma_{PP} > \sigma_0$  не произойдут, будет равна

$$1 - (1 - \omega_1) \cdot (1 - \omega_2) = \omega_1 + \omega_2 - \omega_1 \cdot \omega_2. \quad (4)$$

Формула (4) дает для искомой вероятности оценку сверху.

Двусторонняя оценка вероятности события  $\sigma > \sigma_{PP}$ , согласно формул (3) и (4), будет находиться в пределах

$$\omega_1 + \omega_2 - \omega_1 \cdot \omega_2 > P(\sigma > \sigma_{PP}) > \omega_1 \cdot \omega_2. \quad (5)$$

Таким образом, чтобы определить вероятность разрушения элемента конструкции требуется знать параметры плотностей распределения вероятностей, действующих  $\sigma$  и предельных  $\sigma_{PP}$  напряжений, а при назначении коэффициента безопасности необходимо учитывать разброс прочностных характеристик материала, действующих нагрузок и размеров элементов конструкции.

Путь распределения  $\sigma$  и  $\sigma_{PP}$  подчиняются нормальному закону

$$f(\sigma) = \frac{1}{S_\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\sigma - m_\sigma)^2}{2 \cdot S_\sigma^2}\right], \quad (6)$$

$$f(\sigma_{PP}) = \frac{1}{S_{\sigma_{PP}} \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\sigma_{PP} - m_{\sigma_{PP}})^2}{2 \cdot S_{\sigma_{PP}}^2}\right], \quad (7)$$

где  $S_\sigma$  и  $S_{\sigma_{PP}}$  – средние квадратические отклонения напряжений. Так как величины  $\sigma$  и  $\sigma_{PP}$  независимы, то вероятность того, что действующие напряжения превысят предельный уровень будет:

$$P(\sigma > \sigma_{PP}) = \int_0^\infty f(\sigma_{PP}) \cdot \left\{ \int_{\sigma_{PP}}^\infty f(\sigma) d\sigma \right\} d\sigma_{PP}. \quad (8)$$

Надежность (вероятность безотказной работы) конструкции, равна

$$H = 1 - P(\sigma > \sigma_{PP}). \quad (9)$$

Подставляя (6), (7) в (8) получим

$$P(\sigma > \sigma_{PP}) = \int_0^\infty \frac{1}{S_{\sigma_{PP}} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \exp\left[-\frac{(\sigma_{PP} - m_{\sigma_{PP}})^2}{2 \cdot S_{\sigma_{PP}}^2}\right] \times \\ \times \left[ \int_{\sigma_{PP}}^\infty \frac{1}{S_\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \exp\left\{-\frac{(\sigma - m_\sigma)^2}{2 S_\sigma^2}\right\} d\sigma \right] d\sigma_{PP}. \quad (10)$$

Опуская довольно сложные преобразования формулы (10), приведем конечное выражение для вероятности безотказной работы элемента конструкции

$$H = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{m_{\sigma_{PP}} - m_\sigma}{S_\sigma} \int_0^{\frac{\beta^2}{2}} e^{-\frac{\beta^2}{2}} d\beta,$$

где  $S_z = \sqrt{S_{\sigma_{PP}}^2 + S_{\sigma}^2}$ ;  $\beta = \frac{(m_{\sigma_{PP}} - m_{\sigma})}{S_z}$ .

Сравним надежность (вероятность безотказной работы) и коэффициент безопасности, являющийся в машиностроении мерой прочностной надежности.

Определим коэффициент безопасности как отношение средних значений предельных и действующих напряжений

$$n = \frac{\overline{\sigma_{PP}}}{\sigma}. \quad (11)$$

Подставляя (6) и (7) в (9), учитывая (11) после преобразований получим

$$H = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \Phi \left( \frac{(n-1)}{\sqrt{2(S_{\sigma}^2 + S_{\sigma_{PP}}^2)}} \right) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \Phi \left( \frac{(n-1)}{\sqrt{2(v_1^2 + n^2 v_2^2)}} \right) \right\}, \quad (12)$$

где  $v_1 = \frac{S_{\sigma}}{\sigma}$ ;  $v_2 = \frac{S_{\sigma_{PP}}}{\sigma}$  – коэффициенты вариации действующих и предельных напряжений для материала элемента конструкции.

Уравнение (12) показывает, что при одном и том же коэффициенте безопасности в зависимости от коэффициентов вариации напряжений, имеют место различные значения вероятности разрушения, т.е. получаем различные оценки надежности конструкции. Следовательно, учет рассеяния, изменчивости характеристик материала и внешних нагрузок позволяет создавать конструкции, имеющие большую надежность и ресурс.

Рассмотрим на примере растянутого стержня влияние среднего квадратического отклонения при постоянном среднем значении, на вероятность разрушения.

Прочность стержня определяется размером поперечного сечения и свойством металла, которые в общем случае имеют рассеяние  $F = \sigma_B \cdot A$ ,

где  $\sigma_B$  – предел прочности;  $A$  – площадь поперечного сечения.

Пусть среднее значение предела прочности равно  $\overline{\sigma_B} = 45000 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2}$ , а среднее значение площади  $\overline{A} = 1,5 \text{ см}^2$ .

Среднее значение силы будет  $\overline{F} = \overline{\sigma_B} \cdot \overline{A} = 45000 \cdot 1,5 = 67500 \text{ Н}$ .

Примем, что при рассеянии  $\sigma_B$  и  $A$  величина силы  $\overline{F}$  остается постоянной.

Положим, что в первом варианте средние квадратические отклонения были

$$S_{\sigma} = 2500 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2}; \quad S_A = 0,015 \text{ см}^2.$$

Соответственно дисперсии равны

$$D_{\sigma} = 6,25 \cdot 10^6 \left( \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} \right)^2; \quad D_A = 2,25 \cdot 10^{-4} \text{ см}^4.$$

Так как случайные величины  $\sigma_B$  и  $A$  независимы, то дисперсия  $D_F$  определяется выражением

$$D_F = D_{\sigma} \cdot D_A + \overline{\sigma}^2 D_A + \overline{A}^2 D_{\sigma}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$D_F = 6,25 \cdot 10^6 \cdot 2,25 \cdot 10^{-4} + 45000^2 \cdot 2,25 \cdot 2,25 \cdot 10^{-4} + 1,5^2 \cdot 6,25 \cdot 10^6 = 145195 \cdot 10^2 \text{ Н}.$$

Среднее квадратическое отклонение силы  $S_F = \sqrt{D_F} = \sqrt{145195 \cdot 10^2} = 3810 \text{ Н}$ .

$$\text{Коэффициент вариации } v_F = \frac{S_F}{\bar{F}} = \frac{3810}{67500} = 0.056.$$

Кривая распределения плотности вероятности  $f_1(F)$  представлена на рис. 3.

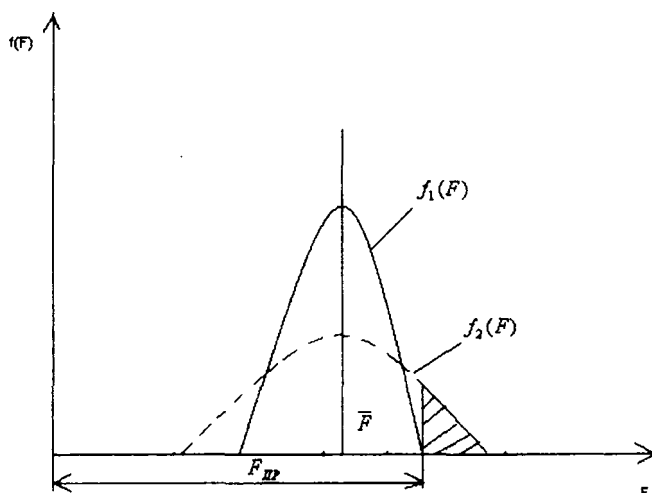


Рис. 3

Во втором варианте средние квадратические отклонения

$$S_\sigma = 4000 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2}; S_A = 0,04 \text{ см}^2.$$

Соответственно дисперсии будут  $D_\sigma = 16 \cdot 10^6 \left( \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} \right)^2$ ;  $D_A = 16 \cdot 10^{-4} \text{ см}^4$ .

Дисперсия силы равна  $D_F = 392656 \cdot 10^2 \text{ Н}^2$ .

Среднее квадратическое отклонение силы  $S_F = 6266 \text{ Н}$ .

$$\text{Коэффициент вариации } v_F = \frac{6266}{67500} = 0.093.$$

Коэффициент вариации во втором варианте увеличился на 66 %.

Кривая распределения плотности вероятности  $f_2(F)$  представлена также на рис. 3 (пунктиром).

Из рисунка следует, что если  $F_{\text{пр}}$ -предельная нагрузка, соответствующая предельному состоянию, то кривая плотности распределения вероятности  $f_1(F)$  с ней не пересекается и разрушение невозможны. С увеличением рассеяния увеличивается правая ветвь кривой плотности распределения  $f_2(F)$ , которая пересекает  $F_{\text{пр}}$ , создавая вероятность разрушения, пропорциональную заштрихованной площади.

Следовательно, увеличение рассеяние при постоянном среднем значении силы  $\bar{F}$ , приводит к увеличению вероятности разрушения стержня. Аналогично можно показать влияние концентрации напряжений на вероятность разрушения элемента конструкции.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Миттаг Х.-Й., Ринне Х. Статистические методы обеспечения качества. – М.: Машиностроение, 1995. – 616с.
2. Румшиский Л.З. Элементы теории вероятностей. – М: Физматгиз, 1960.
3. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965. – 524 с.