ЛОКАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Ботогова М.Г.

Белорусский государственный университет, Минск

Рассматривается класс задач о свободных колебаниях вязкоупругих конических оболочек средней длины. Оболочки не обязательно являются оболочками вращения, края оболочки в общем случае являются не обязательно плоскими кривыми. Материал этой статьи опирается на результаты работы [1], в которой был предложен метод построения решения уравнений пологих оболочек, сосредоточенного в окрестности «наиболее слабой» асимптотической линии.

1. Основные асимптотические формулы

Рассмотрим свободные колебания некруговой конической оболочки.На срединной поверхности введем ортогональную систему координат s и φ, причем координату φ на направляющей выберем таким образом, чтобы первая квадратичная форма поверхности имела вид $d\sigma^2 = R^2\left(ds^2 + s^2 d\varphi^2\right)$. Здесь $s = s^0 R^{-1}$, s^0 – расстояние до вершины конуса, R – радиус срединной поверхности, φ – координата на направляющей. Считаем, что оболочка ограничена двумя краями $s_1(\varphi) \le s \le s_2(\varphi)$, $0 \le \varphi \le \varphi_1$. Материал оболочки – линейновязкоупругий с мгновенным модулем Юнга Е и коэффициентом Пуассона ν. Для описания спектра колебаний может быть использована система уравнений пологих оболочек [1,2], записанная в безразмерной форме:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^4\Delta^2\left[W' - \int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)W'(\tau)d\tau\right] + \frac{k(\varphi)}{s}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} + m_\rho \frac{\partial^2 W'}{\partial t^2} = 0; \\ &\varepsilon^4\Delta^2\Phi - \frac{k(\varphi)}{s}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left[W' - \int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)W'(\tau)d\tau\right] = 0; \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}, \quad \varepsilon^8 = \frac{h^2}{12R^2\left(1-\nu^2\right)}, \quad W' = \varepsilon^4 R^{-1} W^*,$$

$$\Phi = \Phi^*\left(\varepsilon^4 Eh\right)^{-1}, \quad m_\rho = \rho R^2\left(\varepsilon^4 E\right)^{-1}.$$

Здесь ε – малый параметр, W^*, Φ^* – нормальный прогиб и функция напряжений соответственно, ρ – плотность материала, $K(t-\tau)$ – функция скорости релаксации. Слагаемые в (1), содержащие функцию $K(t-\tau)$ будем называть «вязкими».

В качестве граничных условий на краях $s_i = s_i(\varphi)$ рассмотрим группу шарнирного закрепления. Напряженное состояние оболочки состоит из основного напряженного состояния и простого краевого эффекта вблизи краев. Для построения основного напряженного состояния необходимо на каждом крае удовлетворить лишь двум условиям. Для группы шарнирной опоры эти условия с точностью до величин порядка ε^2 имеют вид [1]

$$W' = \Phi = 0 \text{ при } s_i = s_i(\varphi),\ i=1, 2. \qquad (2)$$

Представим решение системы (1) в виде

$$W' = W(s,\varphi,\varepsilon)\exp(i\Omega t),\ \Phi = F(s,\varphi,\varepsilon)\exp(i\Omega t),\ \Omega = \omega + i\alpha, \tag{3}$$

где ω – искомая частота, α – число, характеризующее скорость затухания колебаний. Подставляя (3) в (1) и замечая, что $\int\limits_{-\infty}^{t} K(t-\tau)\exp(i\Omega\tau)d\tau = \exp(i\Omega t)C$, где $C = \int\limits_{0}^{+\infty} K(\theta)\exp(-i\Omega\theta)d\theta$ получим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}(1-C)\varepsilon^4\Delta^2 W + \frac{k(\varphi)}{s}\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} - m_\rho\Omega^2 W = 0,\\ \varepsilon^4\Delta^2 F - \frac{k(\varphi)(1-C)}{s}\frac{\partial^2 W}{\partial s^2} = 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Принимая во внимание зависимость радиуса кривизны и краев оболочки $s_i(\varphi)$ от φ, мы предполагаем, что оболочка имеет «наиболее слабую» образующую, вблизи которой локализуются собственные формы колебаний [1]. Решение системы уравнений (4) при удалении от «наиболее слабой» образующей может быть представлено в виде ВКБ-функций [1,2]:

$$W = W_\Sigma(s,\xi)\exp\left\{i\left[\varepsilon^{-1/2}p\xi + \frac{1}{2}b\xi^2\right]\right\}; \tag{5}$$

$$\Omega = \Omega_0 + \varepsilon\Omega_1 + \varepsilon^2\Omega_2 + \ldots,\ k(\varphi) = k(\varphi_0) + \varepsilon k'(\varphi_0) + 0.5\varepsilon^2 k''(\varphi_0) + \ldots \tag{6}$$

$$W_\Sigma(s,\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon^{n/2}w_n(s,\xi),\ \xi = \varepsilon^{-1/2}(\varphi - \varphi_0), \tag{7}$$

где $w_n(s,\xi)$ полиномы по ξ, $\varphi = \varphi_0$ – «наиболее слабая» образующая, в окрестности которой локализуются колебания, p, b – неизвестные числа ($Im\ p = 0$, $Im\ b>0$). Число p определяет изменяемость в направлении φ, а параметр b характеризует скорость уменьшения глубины вмятины при удалении от нее. Функция F ищется в виде (5). Учитывая (6), $C = \int\limits_{0}^{+\infty} K(\theta)e^{-i(\Omega_0+\varepsilon\Omega_1+\varepsilon^2\Omega_2+\ldots)\theta}d\theta = C_0 + \varepsilon\Omega_1 C_1$,

где
$$\begin{gathered}C_0 = \int\limits_{0}^{+\infty} K(\theta)e^{-i\Omega_0\theta}d\theta,\\ C_1 = -i\int\limits_{0}^{+\infty}\theta K(\theta)e^{-i\Omega_0\theta}d\theta.\end{gathered} \tag{8}$$

Подставляя (5)-(7), предварительно исключив функцию F, учитывая (8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon^{1/2}$, получим последовательность уравнений для определения $w_n(s,\xi)$, которая может быть записана в виде

$$L_0 w_0 = 0,\quad L_0 w_1 + L_1 w_0 = 0,\quad L_0 w_2 + L_1 w_1 + L_2 w_0 = 0. \tag{9}$$

Здесь

$$L_0 z = \frac{(1-C_0)p^4 z}{s^3} + \frac{k^2(\varphi_0)(1-C_0)}{p^4}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(s^3\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right) - m_\rho\Omega_0^2 sz; \tag{10}$$

$$L_1 z = b\frac{\partial L_0}{\partial p}\xi z - i\frac{\partial L_0}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial L_0}{\partial \varphi_0}\xi z;$$

$$L_2 z=\left(\frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 L_0}{\partial p^2}+2b\frac{\partial^2 L_0}{\partial p\partial\varphi_0}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 L_0}{\partial\varphi_0{}^2}\right)\xi^2 z-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 L_0}{\partial p^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}-ib\frac{\partial^2 L_0}{\partial p^2}\xi\frac{\partial z}{\partial\xi}-$$

$$-i\frac{\partial^2 L_0}{\partial p\partial\varphi_0}\xi\frac{\partial z}{\partial\xi}-\frac{i}{2}\frac{\partial^2 L_0}{\partial p\partial\varphi_0}z-\frac{i}{2}ib\frac{\partial^2 L_0}{\partial p^2}z+\Omega_1 Nz;$$

$$Nz=\frac{\partial L_0}{\partial\omega_0}z.$$

Граничные условия для w_n при $s_i=s_i(\varphi)$ получаются из (2) с учетом (5), (7) и имеют следующий вид:

$$w_0(s,\xi)=0,\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2}=0,\ w_1(s,\xi)+\xi s'\frac{\partial w_0}{\partial s}=0,\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial s^2}+\xi s'\frac{\partial^3 w_0}{\partial s^3}=0. \tag{11}$$

2. Краевая задача в нулевом приближении

Рассмотрим краевую задачу (12) в нулевом приближении

$$\frac{(1-C_0)p^4 w_0}{s^3}+\frac{k^2(\varphi_0)(1-C_0)}{p^4}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(s^3\frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2}\right)-m_\rho\Omega_0^2 s w_0=0; \tag{12}$$

$$w_0(s,\xi)=\frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2}=0 \text{ при } s_i=s_i(\varphi).$$

Здесь

$$C_0=B_0-iA_0,\ w_0=w_0^{(1)}+iw_0^{(2)},\ B_0=\int_0^{+\infty}K(\theta)e^{\alpha_0\theta}\cos(\omega_0\theta)d\theta,$$

$$A_0=\int_0^{+\infty}K(\theta)e^{\alpha_0\theta}\sin(\omega_0\theta)d\theta,\ \Omega_0=\omega_0+i\alpha_0.$$

Отделяя вещественную и мнимую части в уравнении (12), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{k^2(\varphi_0)(1-B_0)}{p^4}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(s^3\frac{\partial^2 w_0^{(1)}}{\partial s^2}\right)-\frac{k^2(\varphi_0)A_0}{p^4}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(s^3\frac{\partial^2 w_0^{(2)}}{\partial s^2}\right)+\\+\frac{(1-B_0)p^4 w_0^{(1)}}{s^3}-\frac{A_0 p^4 w_0^{(2)}}{s^3}-m_\rho\left(\omega_0^2-\alpha_0^2\right)sw_0^{(1)}+2m_\rho\alpha_0\omega_0 sw_0^{(2)}=0,\end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\frac{k^2(\varphi_0)(1-B_0)}{p^4}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(s^3\frac{\partial^2 w_0^{(2)}}{\partial s^2}\right)+\frac{k^2(\varphi_0)A_0}{p^4}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(s^3\frac{\partial^2 w_0^{(1)}}{\partial s^2}\right)+\\+\frac{(1-B_0)p^4 w_0^{(2)}}{s^3}+\frac{A_0 p^4 w_0^{(1)}}{s^3}-m_\rho\left(\omega_0^2-\alpha_0^2\right)sw_0^{(2)}-2m_\rho\alpha_0\omega_0 sw_0^{(1)}=0.\end{gathered}$$

$$w_0^{(1)}=w_0^{(2)}=\frac{\partial^2 w_0^{(1)}}{\partial s^2}=\frac{\partial^2 w_0^{(2)}}{\partial s^2}0. \tag{14}$$

Заметим, что для рассматриваемого варианта граничных условий имеет место равенство

$$\int_{s_1}^{s_2}w_0^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(s^3\frac{\partial^2 w_0^{(2)}}{\partial s^2}\right)ds=\int_{s_1}^{s_2}w_0^{(2)}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(s^3\frac{\partial^2 w_0^{(1)}}{\partial s^2}\right)ds. \tag{15}$$

Умножая первое из уравнений (13) на $w_0^{(1)}$, второе – на $-w_0^{(2)}$, складывая и интегрируя по отрезку $[s_1, s_2]$, получим следующее выражение:

$$\frac{m_\rho\left(\omega_0^2-\alpha_0^2\right)}{1-B_0}=Z. \qquad (16)$$

Если же умножить первое уравнение (13) на $-w_0^{(2)}$, а второе на $w_0^{(1)}$, сложить их и проинтегрировать, то получим, что

$$\frac{2m_\rho\alpha_0\omega_0}{A_0}=Z, \qquad (17)$$

где

$$Z=\frac{k^2(\varphi_0)}{p^4}\left\{\int_{s_1}^{s_2}\left[w_0^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(s^3\frac{\partial^2 w_0^{(2)}}{\partial s^2}\right)+w_0^{(2)}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(s^3\frac{\partial^2 w_0^{(1)}}{\partial s^2}\right)\right]ds+p^4\int_{s_1}^{s_2}\frac{1}{s^3}\left[\left(w_0^{(1)}\right)^2+\left(w_0^{(2)}\right)^2\right]ds\right\}\times$$
$$\times\left(\int_{s_1}^{s_2}s\left[\left(w_0^{(1)}\right)^2+\left(w_0^{(2)}\right)^2\right]ds\right)^{-1}.$$

Из (16) и (17) следует, что

$$\frac{2\alpha_0\omega_0}{A_0}=\frac{\left(\omega_0^2-\alpha_0^2\right)}{1-B_0}. \qquad (18)$$

Учитывая (18), уравнения (13) можно переписать в виде

$$\frac{k^2(\varphi_0)}{p^4}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(s^3\frac{\partial^2 w_0^{(1)}}{\partial s^2}\right)+\frac{p^4 w_0^{(1)}}{s^3}-\frac{2m_\rho\alpha_0\omega_0}{A_0}sw_0^{(1)}=0; \qquad (19)$$

$$\frac{k^2(\varphi_0)}{p^4}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(s^3\frac{\partial^2 w_0^{(2)}}{\partial s^2}\right)+\frac{p^4 w_0^{(2)}}{s^3}-\frac{2m_\rho\alpha_0\omega_0}{A_0}sw_0^{(2)}=0.$$

Отсюда, с учетом граничных условий следует, что, во-первых $w_0^{(1)}=Mw_0^{(2)}$, где M – произвольная константа; во-вторых

$$\frac{2\alpha_0\omega_0}{A_0}=\omega_e^2, \qquad (20)$$

где ω_e – собственная частота колебаний соответствующей упругой конической оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Товстик П.Е. Некоторые задачи устойчивости цилиндрических и конических оболочек. // Прикл. матем. и механика. -1983. –Т.47. – №5. – С.815-822.
2. Михасев Г.И. О свободных низкочастотных колебаниях вязкоупругих цилиндрических оболочек. // Прикл. механика. – 1992. – Т.28. – №9. – С.50-55.